UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - MESTRADO

O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO NO IFMT CAMPUS CUIABÁ

Carlos Carlão Pereira do Nascimento

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade do Vale do Taquari Univates, como exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciência e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências Exatas
Orientadora: Profa. Dra. Maria Madalena Dullius.
Coorientador: Prof. Dr. André Krindges

Lajeado
2019

O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO NO IFMT CAMPUS CUIABÁ

Carlos Carlão Pereira do Nascimento

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade do Vale do Taquari Univates, como exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciência e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências Exatas
Orientadora: Profa. Dra. Maria Madalena Dullius.
Coorientador: Prof. Dr. André Krindges.

Lajeado
2019

Dedico esse trabalho a todos professores e professoras que lutam, sob condições adversas, por uma educação justa, igualitária e de qualidade para nossos estudantes.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e pelas oportunidades de aprendizado.

Ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade do Vale do Taquari Univates, pelas oportunidades de aprendizado, nas figuras de seus professores, funcionários e estudantes.

À professora Maria Madalena Dullius pelo acolhimento, apoio e contribuições no Programa da Pós e na pesquisa.

Ao professor André Krindges pelo incentivo e contribuições, sempre de forma simples e competente.

À banca de qualificação, pelas contribuições.

Aos meus amigos e amigas que sempre estiveram ao meu lado na pesquisa, na pessoa de Lia Corrêa.

Aos meus companheiros e companheiras do mestrado.

À minha família.

RESUMO

Considerando que as tecnologias estão mais presentes no cotidiano das pessoas, torna-se imperativo que o professor disponha de práticas pedagógicas dinâmicas em que faça uso das mesmas. Portanto, este trabalho investiga como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração de tópicos da trigonometria. Para tanto, buscou-se trabalhar com os seguintes objetivos específicos: a) desenvolver uma sequência didática por meio do uso do *software* GeoGebra para o estudo das funções trigonométricas; b) promover a participação dos estudantes no estudo da trigonometria por meio da manipulação do *software*; c) verificar potencialidades do *software* GeoGebra nos processos de ensino da trigonometria com os alunos do 2ª ano do Ensino Médio. Para atender aos objetivos propostos para esta investigação, a opção metodológica foi pela pesquisa qualitativa, realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT Campus Cuiabá com estudantes do segundo ano do Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico de Informática. Para o desenvolvimento da pesquisa foi proposta uma intervenção pedagógica realizada por meio do *software* GeoGebra a partir de uma sequência didática sistematizada em vinte e quatro aulas, cada uma com duração de cinquenta minutos, desenvolvidas em um laboratório de informática com disponibilidade de computadores em número suficiente para todos os estudantes da turma. Para a análise dos dados, utilizou-se a metodologia descritiva com o objetivo de analisar as respostas dos estudantes nas atividades. Utilizou-se como referencial teórico as obras de Amado e Carreira (2015) Borba (2010, 2016), Dullius (2015), Gravina (2001, 2012), Paiva (2016), Penteado (2010), Quartieri (2015, 2016), Valente (1997), entre outros. As etapas da investigação compreenderam: revisão de literatura e levantamento bibliográfico, coleta de dados por meio de desenvolvimento das atividades que compuseram a sequência didática e sistematização e análise dos dados. A pesquisa apontou a possibilidades de o estudante criar hipóteses, explorar e propor alternativas, além de promover a discussão por meio do trabalho coletivo e a interação professor-estudante. A forma como os recursos foram utilizados na pesquisa garantiu a efetividade do computador e do *software* GeoGebra como ferramentas pedagógicas por potencializarem o ensino de trigonometria. Além disso, pode ser uma contribuição para a diminuição ou o fim da resistência ao uso de ferramentas tecnológicas por outros docentes, uma vez que demonstra que é possível ressignificar a forma de ensinar matemática, auxiliando na compreensão e no desenvolvimento da disciplina.

Palavras-chave: Software GeoGebra, Ensino das Funções Trigonométricas, Ensino Médio Integrado ao Técnico.

ABSTRACT

Based on the idea that technologies are more present in people's daily lives, it is imperative that the educator may count on some dynamic pedagogical practices in which he/she makes use of them. Therefore, the research investigated in what way the use of the GeoGebra software may improve the study of the trigonometry topics. For that reason, this study counted on the specific objectives: a) to develop a didactic sequence using the GeoGebra software for studying trigonometric functions; b) to promote the student involvement in studying trigonometry by using the software; c) to verify the viability of the GeoGebra software in the processes of teaching trigonometry to the students of the 2nd school year of High School. In order to achieve the planned objectives, this research was guided by the methodological option for qualitative approach. It was carried out at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Mato Grosso - IFMT Campus Cuiabá with students of the second year of High School Integrated to the Technical Course of Computing. The development of the research counted on a pedagogical intervention using the GeoGebra software which was based on a didactic sequence systematized in twenty-four classes, each class lasted fifty minutes. The classes were developed in a computer laboratory with appropriate computers available for all students present in the classroom. The analysis of the data was done according to the descriptive methodology aimed at analyzing the students' answers in doing the offered activities. The research was guided on the theoretical framework proposed by Amado and Carreira (2015), Borba (2010, 2016), Dullius (2015), Gravina (2001, 2012), Paiva (2016) Penteado (2010), Quartieri (2015, 2016), Valente (1997), among others researchers. The phases of the investigation included: literature review and bibliographic survey, data gathering through the development of activities that included the didactic sequence organization and data analysis. The research revealed the possibilities for the students to construct hypotheses, explore and suggest alternatives, in addition to, it was found the promotion of discussion through collective work and teacher-student interaction. The methodology used in the research guaranteed the effectiveness of the computer and the GeoGebra software as pedagogical tools for enhancing the teaching of Trigonometry. Furthermore, this study may be a contribution to the decrease or the end of resistance for using technological tools by other educators, since it demonstrates that it is possible to reevaluate the way of teaching mathematics, helping in the understanding and development of the school subject.

Keywords: Software GeoGebra, Trigonometric functions teaching, High School Integrated to the Technical Course.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Tela inicial do *software* GeoGebra 23
Figura 2 - Foto aérea do IFMT Campus Cuiabá 41
Figura 3 - Possível solução para as aulas 1 e 2, estudante E2 47
Figura 4 - Possível solução para as aulas 3 e 4, estudante E3 50
Figura 5 - Resolução da atividade 1, estudante E6 51
Figura 6 - Possível solução para as aulas 5,6 e 7, primeira parte, estudante E8 . 54
Figura 7 - Resolução da atividade 2, segunda parte, estudante E31 54
Figura 8 - Possível solução para as aulas 8 e 9, estudante E28 57
Figura 9 - Resolução da atividade 3, estudante E31 58
Figura 10 - Resolução da atividade 3, estudante E31 59
Figura 11 - Possível solução para as aulas 10 e 11, estudante E6 61
Figura 12 - Resolução da atividade 4, estudante E32 62
Figura 13 - Resolução da Atividade 5, estudante E35 65
Figura 14 - Gráfico da função f(x)=sen(x) e seu período 66
Figura 15 - Resolução da atividade 6, letra a, estudante E20 67
Figura 16 - Resolução da atividade 6, letra b, estudante E22 68
Figura 17 - Resolução da atividade 6, letra c, estudante E14 69
Figura 18 – Possível solução para a função seno, estudante E9 71
Figura 19 – Possível solução para a função cosseno, estudante E8 72
Figura 20 – Resolução solução para a função tangente, estudante E33 73
Figura 21 – Resolução da atividade 7, letra a, estudante E13 74
Figura 22 – Resolução da atividade 7, letra d, estudante E26 75

Figura 23 – Possível solução para a função cosseno, estudante E33 77
Figura 24 – Resolução da atividade 7, letra l, estudante E21 78
Figura 25 – Resolução do gráfico de P (t), estudante E1 81
Figura 26- UFPR//fac-simileID/BR 82
Figura 27- Thinkstoch/Getty Images 83
Figura 28 - Porto de Ilhéus – Malhado (Estado da Bahia) 86
Figura 29 - Praia de Serra Grande - Ilhéus BA, 2014... 87
Figura 30 - Resolução do gráfico da função h (t) = 1,1 + 0,9 cos (pi/t), estudante E 1... 89

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Alguns trabalhos desenvolvidos sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de Trigonometria 25

Quadro 2 - Quadro esquemático da intervenção pedagógica com os estudantes do Ensino Médio 43

SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

ENEM – Encontro Nacional de Educadores de Matemática

FIC - Formação Inicial e Continuada

IFMT – Instituto Federal de Mato Grosso

IFRN - Instituto Federal do Rio Grande do Norte

PIBID - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PNE – Plano Nacional de Educação

PREMEM - Programa de Expansão e Melhoria do Ensino Médio

TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TIC's - Tecnologias de Informação e Comunicação

UEPB- Universidade Estadual da Paraíba

UFMT – Universidade Federal de Mato Grosso

UNIVATES – Universidade do Vale do Taquari

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
2 REFERENCIAL TEÓRICO 17
2.1 Tecnologias digitais no ensino de Matemática 17
2.2 O *Software* GeoGebra 22
2.3 Alguns trabalhos desenvolvidos sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de Trigonometria 25
O Ensino da Trigonometria Subsidiado Por Novos Recursos 28
O GeoGebra e a Música como recursos auxiliares no ensino das Funções Trigonométricas 31
Fábio Gomes Linck 31
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 39
3.1 Caracterização da pesquisa 39
3.2 Lócus da pesquisa 40
3.3 Sujeitos 42
3.4 Intervenção Pedagógica 42
3.5 Instrumentos e metodologia de coleta de dados 44
4 ANÁLISE DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA 46
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS 91
REFERÊNCIAS 94
APÊNDICES 99
APÊNDICE A- TERMO DE ANUÊNCIA DO CAMPUS DO IFMT 99
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 100
APÊNDICE C - SEQUÊNCIA DIDÁTICA 101

1 INTRODUÇÃO

Ensinar não se configura como uma tarefa simples ou fácil, em se tratando do ensino de Matemática, mais especificamente, do ensino da Trigonometria, em que o desafio é ainda maior. Na perspectiva de dinamizar e potencializar a forma de ensinar Trigonometria, foi proposto o ensino desse conteúdo por meio do uso do *software* GeoGebra. O referido *software* consiste em um programa que permite estudar Álgebra e Geometria ao mesmo tempo. Assim, na pesquisa, utilizou-se o *software* em atividades e construções geométricas junto aos estudantes para a construção de figuras geométricas com as quais, a partir de suas características, se elaboram hipóteses.

A motivação para realizar esta pesquisa decorreu de uma série de fatores, tais como a trajetória de vida e profissional deste pesquisador. Por exemplo, no início das atividades como professor em 1970, não tinha muitos conhecimentos teóricos acerca de metodologias e técnicas para ensinar. Assim, no ano de 1976, aprovado no vestibular para Engenharia Civil, deu-se início ao referido curso e, também na Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT, foi feito, de forma concomitante, o Curso de Licenciatura Curta em Ciências. Essa dupla graduação decorreu da compreensão da importância de ambos para o exercício da profissão docente. No ano de 1978, ocorreu o ingresso, como professor, na Escola Técnica Federal de Mato Grosso, resultando, atualmente, em 41 anos de experiência docente como professor de Matemática nos diferentes cursos técnicos oferecidos pela instituição.

Na condição de docente, a partir da experiência em sala de aula ministrando a disciplina de Matemática, observou-se que os exercícios e provas desenvolvidas pelos discentes demonstram que eles não compreendem o significado do conteúdo relativo à disciplina. Da mesma forma, não compreendem a linguagem simbólica utilizada neste conteúdo, como consequência não conseguem compreender a Trigonometria como um instrumento matemático com capacidade para resolver problemas em um dado contexto.

Devido a essas observações, foram pesquisadas alternativas para o ensino que estivessem relacionadas ao uso de tecnologias. Outro motivo que levou à busca por alternativas tecnológicas foi a percepção da dinâmica da sociedade e da importância de o professor e a escola utilizarem cada vez mais recursos atuais para transformar o processo de construção do conhecimento em um exercício prazeroso e interessante.

Esta fase constituiu um momento de desafio, isto porque na trajetória de formação e atuação profissional, nos mais de 40 anos de carreira docente, sempre estiveram demarcadas práticas pedagógicas tradicionais, como o tipo de aula: expositiva e o uso de recursos como quadro e giz. Além disso, foram inúmeras as vezes que se fez presente a dificuldade de adotar atitudes inovadoras nas práticas pedagógicas cotidianas, enquanto que, ao mesmo tempo, percebia a Matemática como uma disciplina complexa, distante e desconectada da compreensão dos estudantes.

Nesse contexto de estudos e desafios, chamou a atenção a pesquisa de Dullius e Haetinger (2004) intitulada "Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Informatizados: Concepção, Desenvolvimento, Uso e Integração Destes no Sistema Educacional", em que os autores destacavam que, apesar de existirem inúmeras pesquisas que abordam como o uso da tecnologia pode contribuir no processo de ensino, observaram que havia pouco utilização de recursos tecnológicos na maioria das áreas de ensino, mais especificamente na área da Matemática.

Outro destaque foi o livro intitulado "Aproximando a Matemática e a Física por meio de recursos tecnológicos" de Neide e Quartieri (2016), em que os autores apresentaram o *software* GeoGebra como uma possibilidade de ensino da Trigonometria de forma dinâmica, com a possibilidade de construir funções e gráficos representados no plano cartesiano, com a liberdade de variar seus parâmetros e consequentemente observar a mudança do comportamento das funções construídas. Os autores divulgaram, ainda, a existência de um portal com diversas propostas de ensino de Ciências Exatas, que foi o de Produtos Educacionais do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas a nível de Mestrado Profissional da Universidade do Vale do Taquari - UNIVATES.

Foi no âmbito dessas pesquisas e desafios, aliado às facilidades de acesso aos diferentes recursos tecnológicos que encontramos hoje e ao interesse em desenvolver um ensino da Trigonometria – por meio de conteúdo mais diversificado e dinâmico, rico de imagens, sons e animações, que permita ao estudante a visualização das formas geométricas e a interação com o computador – que se propôs a presente pesquisa intitulada "O Uso do GeoGebra no Ensino das Funções Trigonométricas no 2º ano do Ensino Médio no IFMT Campus Cuiabá".

A pesquisa foi desenvolvida no decorrer do Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, vinculado à linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino das Ciências. Tendo em vista as dificuldades do ensino da Trigonometria para discentes do 2º ano do Ensino Médio Integrado no Curso de Informática no IFMT. A questão norteadora deste estudo foi: Como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração do conteúdo de Trigonometria?

O objetivo principal desta pesquisa consiste em investigar como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração das Funções Trigonométricas seno, cosseno e tangente. Para tanto, buscou-se trabalhar com os seguintes objetivos específicos: a) desenvolver uma sequência didática por meio do uso do *software* GeoGebra para o estudo das funções trigonométricas; b) promover a participação dos estudantes no estudo da trigonometria por meio da manipulação do *software*.

Para atender aos objetivos propostos para esta investigação, a opção metodológica foi pela pesquisa qualitativa, realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT Campus Cuiabá com estudantes do 2º ano do Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico em Informática. Para o desenvolvimento da pesquisa foi proposta uma intervenção pedagógica realizada por meio do *software* GeoGebra a partir de uma sequência didática sistematizada em vinte e quatro aulas – cada uma com duração de cinquenta minutos – desenvolvidas em um laboratório de informática com disponibilidade suficiente de computadores para que todos os estudantes da turma, realizassem de forma individual as atividades propostas. Para a análise dos dados utilizou-se metodologia descritiva, com objetivo de analisar as respostas dos estudantes nas atividades.

Tomou-se como base o referencial teórico de Amado e Carreira (2015) Borba (2010, 2016), Dullius (2015), Gravina (2001, 2012), Paiva (2016), Penteado (2010), Quartieri (2015, 2016), Valente (1997), entre outros. Já o desenvolvimento da investigação perpassou as seguintes etapas: revisão de literatura e levantamento bibliográfico, coleta de dados por meio de desenvolvimento das atividades que compuseram uma sequência didática, sistematização e análise dos dados.

Por sua vez, este trabalho é composto por cinco capítulos. O primeiro capítulo é composto pela introdução, na qual se apresenta a estruturação do estudo, abordando, entre outros aspectos, os objetivos, a justificativa e a metodologia da pesquisa.

O segundo capítulo consiste na fundamentação teórica desenvolvida sob três aspectos: 1) Tecnologias digitais no ensino da Matemática; 2) O *software* GeoGebra; 3) Trabalhos desenvolvidos sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de Trigonometria.

O terceiro capítulo compreende os procedimentos metodológicos e aborda as seguintes questões: 1) Caracterização da pesquisa; 2) *Lócus* da pesquisa; 3) Sujeitos; 4) Intervenção Pedagógica; 5) Instrumentos de coleta de dados; 6) Metodologia de análise dos dados.

No quarto capítulo, elabora-se a análise da intervenção pedagógica desenvolvida a partir do *software* GeoGebra, seguida, logo após, pelas Considerações Finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico que fundamenta a pesquisa tem seu início com a apresentação das possibilidades de uso das tecnologias no ensino de Matemática e, em seguida, evidencia os aspectos do uso do *software* GeoGebra no ensino da Matemática, mais precisamente no ensino de funções trigonométricas, o que é seguido pela apresentação de alguns trabalhos desenvolvidos sobre a temática.

2.1 Tecnologias digitais no ensino de Matemática

Em função da dinâmica da realidade, o homem, para atender as demandas em torno de suas necessidades – uma vez que vive em uma sociedade cada vez mais exigente no que se refere à otimização do tempo –, lança mão das tecnologias digitais como instrumento potencializador não só do tempo, mas também como forma de dinamizar e de interagir com o mundo.

Neide e Quartieri (2016) apontam vários fatores que podem ser apresentados como justificativas para a utilização de tecnologias nas salas de aula, como computadores, *tablets* e celulares. Segundo os autores, a preocupação não é mais o porquê utilizar, uma vez que há a necessidade de utilização dessas tecnologias, mas sim, como utilizar esses recursos tecnológicos nos processos de ensino.

Nessa conjuntura, torna-se indispensável a familiarização do professor com a utilização dos recursos tecnológicos para a interação com o estudante para além da metodologia tradicional, pois esta traz importantes contribuições, tais como:

> Apresentar, de diferentes formas, um mesmo elemento do conteúdo programático pode ajudar o aluno a compreender o tema que estás sendo estudado. Além de revisitar, explorar o assunto via imagens ou animações, privilegiam o fazer pedagógico em sala de aula. A visualização é uma ação importante para a construção da aprendizagem, principalmente na área das Ciências Exatas (NEIDE, QUARTIERI, 2016, p. 10).

Com previsão no art. 35-A da Constituição Federal, o documento nomeado Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) define direitos e objetivos de aprendizagem no Ensino Médio, em consonância com as diretrizes do Conselho Nacional de Educação em diferentes áreas do conhecimento. Dentre essas áreas, destaca-se a Matemática e suas tecnologias cujos princípios evidenciam a importância de assegurar a aprendizagem e o desenvolvimento do estudante em utilizar conceitos, procedimentos e estratégias de forma que possa ir além de resolver problemas:

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos **e desenvolver o pensamento computacional**, por meio da utilização de diferentes recursos da área (BRASIL, 2017, p. 470, grifo nosso).

Assim, o desenvolvimento do pensamento computacional torna-se um imperativo na prática docente. Nesse entendimento, em se tratando do uso das tecnologias digitais, Paiva (2016) ressalta:

> É fundamental reconhecer que as tecnologias adentraram na vida humana num ritmo e sem volta. Sendo assim, faz-se necessário assimilá-las como parte de um processo natural de evolução da cultura da sociedade. Esta ideia ganha força ao lembrar a origem e o desenvolvimento da espécie humana e perceber a importância das mudanças para nossa evolução, e que foram, e até hoje são, essenciais para nossa existência e adaptabilidade ao meio. [...] No campo educacional, um desses atores são os professores, e são deles, ou melhor, de parte deles, uma das frentes de resistência em aceitar o uso das tecnologias como ambiente facilitador para o processo de ensino e de aprendizagem (p. 22-23).

O contexto educativo não está isento dos benefícios da tecnologia. Na atualidade, seja para ensinar ou aprender, os recursos tecnológicos constituem meios importantes para potencializar as práticas educativas. Nessa perspectiva:

> O professor, enquanto cidadão e profissional, está hoje igualmente dependente do computador ou do celular. Ele necessita recorrer ao computador para realizar muitas tarefas relacionadas com a sua prática profissional. O registro da avaliação dos alunos, entre outros, é feito sistematicamente utilizando recursos tecnológicos, assim como acontece com inúmeras tarefas do dia a dia do profissional docente. Os alunos também utilizam diariamente os recursos tecnológicos, mas geralmente como entretenimento e raramente para realização de tarefas escolares (AMADO, CARREIRA, 2015, p. 9).

Fica perceptível que, mesmo diante da importância e do espaço que as tecnologias digitais ocupam no campo educativo, sobre o professor recai a responsabilidade quanto ao uso profícuo desta tecnologia. Assim, no que tange ao ensino de matemática, os *softwares* se constituem em possibilidades viáveis de articulação entre tecnologia digital, ensino, aprendizagem e desenvolvimento cognitivo (AMADO, CARREIRA, 2015).

Diante do exposto, o desafio docente maior consiste em ensinar na era da tecnologia. Conforme mencionam Borba e Penteado (2010, p.56) “[...] As inovações educacionais, em sua grande maioria, pressupõem mudança na prática docente, não sendo uma exigência exclusiva daquelas que envolvem o uso da tecnologia em informática.” Os autores afirmam ainda que “À medida que a tecnologia informática se desenvolve, nos deparamos com a necessidade de atualização de nossos conhecimentos sobre o conteúdo ao qual ela está sendo integrada” (BORBA; PENTEADO, 2010, p.64). É nesse sentido que se compreende a importância do *software* GeoGebra no ensino de trigonometria e, de forma concomitante, da dinamização da forma de ensinar.

A percepção de Borba e Penteado (2010) vai ao encontro do que prescreve a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017), a qual destaca que o computador surge como um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos estudantes, uma vez que pode ser usado para várias finalidades nas aulas e funciona como fonte de informação para alimentar os processos de ensino, auxiliando no processo de construção de conhecimento. Além disso, pode ser usado como meio para desenvolver a autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar, refletir e criar soluções e ferramentas para realizar determinadas atividades, tais como o uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc. (BRASIL, 2017).

O uso das tecnologias não só contribui com a transformação da prática docente, como também com os processos de ensino da Matemática, pois possibilita ao discente movimentar as imagens com dinamismo e interatividade por meio do som e movimento, desenvolvendo a acuidade visual, relativizando a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos computacionais diversos, esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido (BORBA, PENTEADO, 2010).

Da mesma forma, o uso das tecnologias da comunicação e informação não só possibilita ao aluno perceber a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação – o que permite o uso de novas estratégias de abordagem de variados problemas – mas também possibilita o desenvolvimento de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem. Outro fator possibilitado pelo uso das Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC’s, consiste na permissão para que os alunos construam uma visão mais completa da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo (VALENTE, 1997).

Nessa perspectiva, a relação professor-aluno dinamiza o conceito da formação acadêmica do docente, que assume um novo papel no que se refere às experiências escolares com o computador, uma vez que o uso efetivo de diferentes ferramentas propicia maior proximidade, melhor interação e colaboração mais efetiva entre professor/aluno e entre os estudantes (VALENTE, 1997).

O professor não pode ser considerado como um profissional pronto, tem de continuar em formação permanente ao longo de sua vida profissional. Assim, a ideia de que o computador assumiria o lugar do professor não é verdadeira. Ao docente cabe, a cada dia, consolidar sua competência a partir da preparação, condução e avaliação dos processos de ensino e de aprendizagem, por meio do uso de diferentes recursos, dentre eles, o computador. A contextualização propiciada pelo uso desse instrumento vem contribuir de forma significativa nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, pois suas atividades se tornam mais ricas (VALENTE, 1997).

Valente (1997), apresenta uma reflexão sobre o que seria a utilização do computador na educação de maneira mais dinâmica:

> Seria fazer aquilo que o professor faz tradicionalmente, ou seja, passar a informação para o aluno, administrar e avaliar as atividades que o aluno realiza, enfim, ser o "braço direito" do professor; ou seria possibilitar mudanças no sistema atual de ensino, ser usado pelo aluno para construir o conhecimento e, portanto, ser um recurso com o qual o aluno possa criar, pensar, manipular a informação? (VALENTE, 1997, p. 1).

Por meio dessa reflexão, é possível entender que o uso inteligente do computador está vinculado à maneira como a tarefa será realizada por ele, ou seja, relacionada a uma prática dinâmica, não sendo somente um atributo inerente ao mesmo, como se fosse garantia de uma aula diferente do que seria uma aula tradicional, de quadro de giz (VALENTE, 1997).

Nesse mesmo entendimento, as autoras Dullius e Quartieri (2015) ressaltam que nem sempre o uso do computador está relacionado a uma prática dinâmica, uma vez que a utilização de tecnologias está sujeita a uma variedade de condicionantes. Assim, mesmo que os professores utilizem o computador em sala de aula, em alguns casos, esse uso ocorre de forma tradicional:

> Havendo casos em que a tecnologia não passa de um acessório numa prática pedagógica tradicional. As mudanças proporcionadas por esses recursos representam um desafio a ser incorporado no cotidiano da escola, levando em

> conta que a prática docente pouco mudou ao longo do tempo, diferentemente dos alunos (DULLIUS, QUARTIERI, 2015, p. 5).

Esse uso tradicionalista torna restritos os resultados positivos decorrentes da utilização de computadores, pois este uso é direcionado apenas para o campo teórico e acadêmico, como apontam os autores:

> Este potencial (uso do computador) ainda não tem sido devidamente explorado e integrado ao cotidiano da prática escolar, ficando restrito a discussões teóricas e acadêmicas. Para as escolas e para muitos professores, as tecnologias continuam a ser um corpo estranho, que provoca sobretudo incomodidade. O receio de ficar pra trás tem levado a escola a investir na compra de equipamentos, muitas vezes deixando para segundo plano o ensino das novas tecnologias (DULLIUS, HAETINGER, 2004, p.3).

Uma estratégia de superação dessas limitações, seria a posse, pelo professor, de um bom aplicativo computacional, o qual seria utilizado conforme a disposição da turma:

> A facilidade com que esses podem explorar e verificar o que acontece com várias situações análogas é útil para formar ou testar suas convicções, levando-os a formular conjecturas, aguçando sua curiosidade para buscar uma demonstração. Bom aplicativos computacionais, devidamente utilizados, permitem testar a capacidade de transferência de conhecimentos dos estudantes, a potencialidade de sua mobilidade em vários contextos e a adaptabilidade dos instrumentos (DULLIUS, HAETINGER, 2004, p.4).

Sobre o lugar do computador em práticas educativas, Borba (2016) enfatiza a produção de significados por parte dos alunos, professores e pesquisadores envolvidos em tais práticas: “Entendemos que uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudança dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento” (BORBA, 2016, p. 45). Ou seja, para o autor, aliar a prática pedagógica com uma mídia pode ser considerado uma tentativa de superar os problemas das práticas de ensino tradicionais, pois, a partir do enfoque experimental, essa combinação possibilita inúmeras experimentações:

> O enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido feedback das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas. Por outro lado, essa prática pedagógica estimula a utilização de problemas abertos, de formulação de conjecturas em que a sistematização só se dá como coroamento de um processo de investigação por parte de estudantes (e, muitas vezes, do próprio professor) (BORBA, 2016, p. 45-46).

Outros desafios ainda necessitam ser transpostos, como a precarização do trabalho docente e as péssimas condições físicas e materiais das escolas públicas, pois, apesar do Plano Nacional de Educação – PNL (2014-2024) definir um aumento do financiamento da educação, prevista na meta 20, as deficiências recorrentes na história da educação brasileira – em relação à precarização do trabalho docente e as péssimas condições físicas e materiais das escolas públicas – constituem uma adversidade gigantesca. Assim, para que se obtenha uma referência mínima de qualidade a nível de ensino e infraestrutura é preciso que ocorra, de fato, o incentivo de políticas de valorização docente, como uma formação sólida e salários dignos, por exemplo.

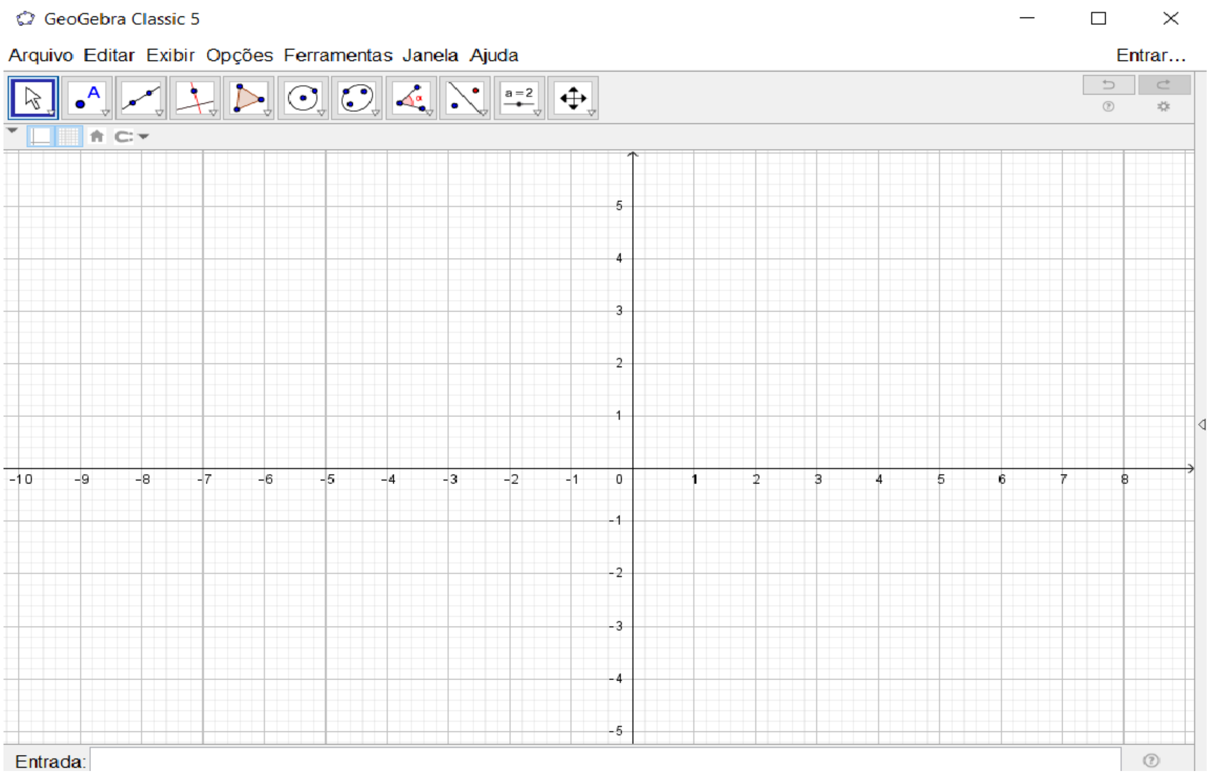
2.2 O *Software* GeoGebra

Da junção das palavras **Geo**metria e Ál**gebra**, o GeoGebra "é um *software* de Matemática dinâmico, gratuito e multiplataforma, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única interface gráfica do utilizador" (SCALDELAI, 2014, p. 13). O *software* GeoGebra pode ser instalado no computador a partir do site http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/.

Desenvolvido por Markus Hohenwarter, o GeoGebra foi pensado para ser utilizado em sala de aula em todos os níveis de ensino. "Iniciado na Universidade de Salzburg, tem sido desenvolvido na Universidade Atlântica da Flórida." (SCALDELAI, 2014, p. 13). Recebendo vários prêmios na Europa e nos EUA, o *software* é utilizado em mais de cento e noventa países. Algumas características do referido *software* se destacam: 1) Gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas; 2) Interface amigável, com vários recursos sofisticados; 3) Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB; 4) Disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo; 5) Software gratuito e de código aberto (PUC-SP, s/d).

O *software* oferece três diferentes janelas: gráfica, algébrica ou numérica e a folha de cálculo. Tais janelas possibilitam que os objetos matemáticos sejam visualizados em três distintas representações: gráfica, que se refere aos pontos e aos gráficos de funções; algébrica, relativa às coordenadas de pontos e às equações; e, também, as células da folha de cálculo. Quando se abre o GeoGebra, tem-se a seguinte tela inicial, conforme destacado na Figura 1:

Figura 1. Tela inicial do software GeoGebra



Fonte: *Software* GeoGebra (2019).

Ressalta-se que a percepção obtida no que concerne ao ensino e à aprendizagem da Álgebra e da Geometria, é a de que a utilização da geometria dinâmica possibilita o entendimento dos conceitos e de relações geométricas, em razão do fato de que podem ser usadas como forma de observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e realizar operações com elas. Sendo que essa percepção decorreu de investigações recentes relativas ao tema: resoluções de Matemática dinâmica. Além disso, os autores apontam que, na prática, o uso e a manipulação gráfica do GeoGebra articulados com a relativa representação algébrica consistem em uma mais valia, em comparação com outras aplicações (LIMA, CARVALHO, MORGADO, 2005).

Ao desenvolver uma atividade de ensino com discentes do Ensino Médio – mais especificamente sobre o conteúdo de trigonometria – utilizando as possibilidades do *software* GeoGebra, os autores Lima, Carvalho e Morgado (2005) destacam que entre os potenciais oferecidos pelo *software* estão a construção, o dinamismo, a investigação, a visualização e a argumentação. Nesse mesmo entendimento, Scaldelai (2014) ressalta que:

> Em se tratando de um *software* dinâmico, gráficos, álgebra e tabelas são conectados dinamicamente, ou seja, cada elemento que é alterado na janela de álgebra, também sofre alteração na janela gráfica e na de cálculo e vice-versa. Este fato o torna um *software* com grande potencial para favorecer o processo de ensino e aprendizagem. Por possibilitar o trabalho com diferentes representações e aspectos matemáticos (algébricos, geométricos e aritméticos) simultaneamente e de forma dinâmica (SCALDELAI, 2014, p. 16-17).

No que se refere ao uso da tecnologia como recurso de ensino, Gravina et al (2012) evidenciam que:

> Os programas de geometria dinâmica, dentre eles o GeoGebra, são ferramentas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de figuras geométricas a partir das propriedades que as definem. São ambientes que concretizam a geometria euclidiana plana, pois, diferente daquilo que obtemos com lápis e papel e régua e compasso, com o mouse podemos manipular as figuras que estão na tela do computador, ao aplicar movimento em pontos que estão na construção (Gravina et al, 2012, p. 38).

Assim, a construção das figuras pode ser um recurso didático na construção das argumentações dedutivas feitas pelos estudantes, uma habilidade, que segundo Gravina et al (2012, p. 42), "não deveria ser negligenciada na formação matemática escolar". Os autores apontam ainda que as figuras da geometria dinâmica auxiliam em muitas das dificuldades dos estudantes na ideia do conceito figural:

> O componente conceitual, com maior ou menor grau de formalismo, é expresso em linguagem natural. Já o componente figural é de natureza visual (forma, posição, tamanho) e se expressa através de um desenho. Na aprendizagem da geometria, é importante o estabelecimento de adequada simbiose entre os componentes conceitual e figural (GRAVINA ET AL, 2012, p. 42).

Nessa perspectiva, Gravina (2001) evidencia em sua tese que os ambientes de geometria dinâmica ajudam os discentes a ultrapassarem as barreiras do raciocínio empírico para os raciocínios hipotético-dedutivos, que são aqueles que têm por base as demonstrações de teoremas e não somente a observação e a experimentação. Nessa perspectiva, evidencia a autora:

> O potencial da base de conhecimento, quanto à construção de novas demonstrações, depende muito da multiplicidade de imagens mentais associadas ao componente figural das propriedades e conceitos. Nas situações de aprendizagem deve-se atentar para o quanto as imagens prototípicas dominam os construtos mentais individuais e tornam-se fonte de dificuldades no fluir das argumentações dedutivas (GRAVINA, 2001, p. 80).

O *software* possui inúmeras ferramentas e comandos possíveis para serem utilizados em atividades pedagógicas. Uma parte dessa gama de possibilidades foi desenvolvida por meio da sequência didática elaborada pelo pesquisador e proposta a uma turma de discentes do Ensino Médio.

2.3 Alguns trabalhos desenvolvidos sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de Trigonometria

No intuito de conhecer algumas produções já desenvolvidas acerca do uso de tecnologias digitais no ensino de Trigonometria, buscou-se junto ao portal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e aos anais do Encontro Nacional de Educadores de Matemática (ENEM) encontrar as produções cuja temática atendesse aos objetivos propostos para o estudo em tela. A busca foi realizada mediante as seguintes palavras chave: GeoGebra, Ensino de Funções Trigonométricas e Tecnologias Digitais. Como resultado, e em consonância com este estudo, destaca-se as produções abaixo relacionadas.

Quadro 1. Alguns trabalhos desenvolvidos sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de Trigonometria

1.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
O Software GeoGebra: Uma Estratégia de Aprendizagem Aplicada no Estudo de Funções Trigonométricas.	Joaildo Maia; Marcelo Gomes Pereira.	Suprir as deficiências enfrentadas pelos alunos no estudo de Funções Trigonométricas seno e cosseno, por meio da utilização do software GeoGebra na realização de uma sequência de atividades.
CONTEXTO	As atividades foram desenvolvidas em uma turma de 2° ano do Curso Técnico de Nível Médio em Eletrotécnica integrado ao Ensino Médio do IFRN – *Campus* Caicó, composta por 43 alunos na faixa etária entre 15 e 19 anos. O que motivou a escolha desta turma foi o fato de que o autor do artigo é o professor da referida turma. Ele já tinha o conhecimento das dificuldades encontradas pelos discentes, tais como: indisciplina e limitação de aprendizagem por parte de alguns estudantes.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Observação participante, tomando como referência as ações dos alunos nas resoluções das atividades propostas e a observação no momento em que estas eram aplicadas.	
RESULTADOS **IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA**	Os resultados obtidos foram satisfatórios, pois indicam que a utilização do software contribuiu para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos estudados.	

2.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**

Ensino de Trigonometria numa Abordagem Histórica: um produto educacional.	Gerson Pastre de Oliveira; Ricardo Uchoa Fernandes.	Investigar a eficiência de estratégias pedagógicas com tecnologias na construção significativa do conhecimento sobre conceitos iniciais de trigonometria e, de forma mais específica, sobre seno e cosseno.
CONTEXTO	Pesquisa realizada em uma escola pública de São Paulo, com alunos do Ensino Médio.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTO	Estudo comparativo entre o uso de tecnologias "tradicionais" e o uso de tecnologias digitais.	
RESULTADOS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA	O uso de uma estratégia pedagógica, amparada por tecnologias diversas, pode resultar em avanços cognitivos sobre trigonometria.	
3.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
Registro de Representação Semiótica e o GeoGebra: Um ensaio para o ensino de funções trigonométricas.	José Roque Damasco Neto	Realizar o levantamento das dificuldades do ensino das funções trigonométricas.
CONTEXTO	Criação de uma proposta de sequência didática baseada na teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval para o estudo das Funções Trigonométricas utilizando o Software GeoGebra.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Observação participante.	
RESULTADOS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA	O GeoGebra é um software de geometria dinâmica, que permite que as operações semióticas possam ser evidenciadas principalmente entre os sistemas simbólicos e gráficos.	
4.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
Contribuições do *software* GeoGebra no ensino e aprendizagem de Trigonometria	Maria Maroni Lopes	Analisar as potencialidades e limitações do *software* GeoGebra no ensino e aprendizagem de Trigonometria.
CONTEXTO	Foi tomado como base o referencial teórico da Didática da Matemática e adotadas as concepções de Borba e Penteado (2007), Valente (1999) no que se refere ao uso da Tecnologia Informática (TI) na sala de aula. Para elaborar as atividades investigativas, foram adotadas as concepções de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) e Ernest (1996). Estudo de caso. A intervenção metodológica foi realizada com alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola pública.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Estudo de caso. A intervenção metodológica foi realizada com alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola pública.	
RESULTADOS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA	Conclui-se que o uso do *software* GeoGebra pode auxiliar na resolução de problemas de trigonometria, especialmente em atividades investigativas, de forma que os estudantes possam interagir com as figuras construídas. No que se refere ao uso dos recursos da Tecnologia Informática nas aulas de Matemática, especificamente no ensino e aprendizagem de	

	trigonometria, observa-se que o GeoGebra pode contribuir para que algumas das dificuldades com o ensino de trigonometria sejam minimizadas. Os *softwares* de Geometria Dinâmica são ferramentas que motivam o aluno a realizar investigações, o que pode facilitar o interesse pela construção de seus conhecimentos.	
5.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o *Software* GeoGebra	Maria Maroni Lopes	Analisar algumas das potencialidades e limitações do *software* GeoGebra no ensino e na aprendizagem de trigonometria.
CONTEXTO	Sala de aula com 42 alunos da segunda série do Ensino Médio do turno matutino de uma escola pública do Estado do Rio Grande do Norte, na cidade de Natal e com frequência média de 34 alunos.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Metodologia Qualitativa. Instrumento de coleta de dados: Questionário e entrevista. Análise dos resultados: Análise descritiva das atividades.	
RESULTADOS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA	A partir da leitura de questionamentos, discussões, levantamento de hipóteses, análises e argumentação os estudantes percebem a possibilidade de criar triângulos semelhantes traçando uma reta paralela a uma das bases do triângulo por meio do software GeoGebra.	
6.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
Potencialidades do *Software* GeoGebra na Sala de Aula de Matemática: Um Exemplo Com Ensino e Aprendizagem de Trigonometria	Maria Maroni Lopes; Jéssica Agna Cavalcante de Andrade.	Analisar as potencialidades do software GeoGebra na construção dos conceitos básicos de Trigonometria.
CONTEXTO	Realização de minicurso com os professores em formação (alunos da Licenciatura em Matemática) a partir da realidade encontrada pelos professores nas escolas públicas referente a aplicação das TICs.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Pesquisa qualitativa participante.	
RESULTADOS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA	Todo acesso às novas tecnologias da informação e comunicação influenciam significativamente na vida do homem, fazendo o indivíduo mudar de comportamento. No que tange a prática docente, é notório que há muitos desafios, mas que, em uma visão ampla dentro da prática pedagógica, as TIC's vêm sendo inseridas, pois faz-se necessário que os professores tenham preparo além de pedagógico, social. Os professores consideram a utilização de recursos tecnológicos em sala de aula como uma forma de aproximar os alunos. A partir da familiarização com o software no ensino de trigonometria se sentiram mais interessados em buscar informações sobre construções de figuras planas com régua e compasso, isto também pode acontecer com os alunos em sala de aula. Comentaram, ainda, que através do processo de arrastar ou movimentar a figura na tela, o aluno tem a possibilidade de desenvolver a noção intuitiva dos entes matemáticos, por exemplo: saber definir o que é a reta tangente, que relação ela tem com o ângulo central, analisar a variação do seno e do cosseno em todos os quadrantes, entre outras possibilidades. Porém, pontuaram algumas ações que os professores precisariam desenvolver ao decidirem utilizar os recursos da informática nas aulas de Matemática: As atividades precisam ser planejadas de acordo com o	

	tempo disponível, e com o nível das turmas; Pode-se levar figuras prontas (applets), construídas previamente pelo professor, ou optar por construí-las em sala com os alunos; O professor precisa de tempo para planejar as atividades e determinar o conteúdo em que vai usar os recursos do software.	
7.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
O Ensino da Trigonometria Subsidiado Por Novos Recursos	Adriana da Silva Velozo Bezerra; Aylla Gabriela Paiva de Araújo; Andriely Iris Silva de Araújo.	Mostrar a aplicabilidade dos conceitos trigonométricos, em especial algumas funções trigonométricas, utilizando material concreto (Bingo Trigonométrico) e usando as novas tecnologias (softwares) proporcionando aos alunos uma dinamicidade da Matemática, contribuindo para uma aprendizagem significativa.
CONTEXTO	A pesquisa foi realizada por alunas bolsistas do PIBID/UEPB e desenvolvida em duas turmas de 2º ano médio na Escola Estadual de Ensino Médio Inovador e Profissionalizante Dr. Hortêncio de Sousa Ribeiro – PREMEM, na cidade de Campina Grande – PB.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Realização de minicursos e utilização de alguns recursos didáticos como: jogos (Bingo Trigonométrico, além do uso de tecnologias via software GeoGebra e uso da sinuca.	
RESULTADOS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA	De acordo com os resultados do pré-teste e pós-teste, houve uma melhora significativa na aprendizagem dos conteúdos trigonométricos.	
8.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
Atividades de Trigonometria para o Ensino Fundamental com o uso do *software* GeoGebra.	Ezequiel Bobsin Strasburg; Fabíola Aiub Sperotto; Cinthya Maria Schneider Meneghetti.	Apresentar novas atividades para o ensino de trigonometria no Ensino Fundamental para ensinar as principais relações trigonométricas através de exercícios que levam os alunos, de forma gradual, à obtenção dessas relações.
CONTEXTO	O estudo apresenta não somente as relações seno, cosseno e tangente para ângulos agudos, como normalmente é proposto por livros didáticos do 9° ano do Ensino Fundamental, mas também relações como secante, cossecante e cotangente.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Uso de recursos tecnológicos em sala de aula, oferecendo aos professores uma forma alternativa de ensino da trigonometria.	
RESULTADOS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA	A utilização do *software* GeoGebra e de outras tecnologias no estudo da trigonometria no Ensino Fundamental consiste em um excelente recurso para auxiliar os professores nas suas aulas, tornando-as mais atrativas e significativas aos olhos dos alunos. Possibilita a investigação matemática por meio da observação dos objetos e auxilia a construção do conhecimento de todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Com o uso de recursos tecnológicos, aumenta a probabilidade de os alunos se sentirem motivados na aprendizagem da Matemática e, consequentemente, o interesse dos alunos pode aumentar consideravelmente.	
9.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
O uso do GeoGebra no ensino de trigonometria: uma experiência com alunos do Ensino Médio.	Aleksandre Saraiva Dantas	Analisar se o trabalho com o GeoGebra facilita a aprendizagem de conceitos da trigonometria e conhecer as percepções dos

		alunos acerca do uso do GeoGebra no ensino de trigonometria.
CONTEXTO	Realidade encontrada junto aos alunos do segundo ano do Ensino Médio integrado ao ensino técnico do campus de Mossoró do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN).	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Pesquisa qualitativa com aspectos quantitativos. Instrumento de coleta de dados: atividades avaliativas antes e após a utilização do GeoGebra no ensino de trigonometria; aplicação de entrevistas semiestruturadas com os estudantes.	
RESULTADOS **IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA**	Os resultados obtidos a partir das atividades desenvolvidas junto aos alunos do segundo ano do Ensino Médio integrado ao ensino técnico do campus de Mossoró do IFRN mostraram que o uso do GeoGebra trouxe uma contribuição significativa para a aprendizagem de diversos aspectos inerentes ao comportamento das funções seno e cosseno. Além disso, os alunos apresentaram percepções bastante positivas acerca da importância de se utilizar softwares como o GeoGebra no ensino de Matemática, ressaltando aspectos como: a possibilidade de desenvolver atividades práticas que ajudam a fixar a aprendizagem; a maior dinamicidade da aula; a melhoria no trabalho do professor; o maior envolvimento dos alunos; a possibilidade de observar os objetos em movimento e a facilidade na visualização desses objetos.	
10.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
A Transição das Razões para as Funções Trigonométricas	Maria Elisa Esteves Lopes Galvão; Vera Helena Giusti de Souza; Paulo Masanobo Miashiro.	Investigar a contribuição de um ensino apoiado em construções com uma geometria dinâmica e em materiais concretos.
CONTEXTO	Atividades realizadas com nove alunos de um curso noturno de uma universidade particular da cidade de São Paulo que cursavam o terceiro semestre de Licenciatura em Matemática.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Aplicação do Design Based Research para verificar as contribuições de uma estratégia de ensino formada pela combinação do contexto experimental com o contexto computacional para a aprendizagem significativa dos principais conceitos presentes na transição das razões para as funções trigonométricas.	
RESULTADOS **IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA**	Constatou-se que a aplicação da “estratégia de ensino”, formada pela combinação do contexto experimental com o contexto computacional, com os alunos construindo as figuras dinâmicas do Cabri Géomètre II, trouxe contribuições para a aprendizagem significativa dos conceitos subsunçores da trigonometria, na aprendizagem das medidas dos ângulos em radianos, na construção de tabelas trigonométricas e do gráfico de uma função periódica. Esta combinação, juntamente com a avaliação constante das estratégias adotadas ao longo das atividades, possibilitou explorar os vários aspectos dos conteúdos considerados como subsunções para a construção de uma função trigonométrica.	
11.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
A Atenção Voluntária na Construção de Conceitos Trigonométricos em Ambientes de Geometria Dinâmica	Margarete Farias Medeiros; Débora Valletta; Evandro Bitencourt Magagnin; Elizete Maria Possamai Ribeiro; Katelyn Luzia dos S. Daboit.	Investigar o tempo de atenção voluntária dos estudantes quando submetidos aos ambientes de GDE na exploração de conceitos trigonométricos.

CONTEXTO	Experiência realizada no projeto de pesquisa desenvolvido no ano de 2014, no Instituto Federal Catarinense (IFC) – Campus Avançado Sombrio onde foram estudadas as consequências da utilização dos Ambientes de Geometria Dinâmica (DGE) no ensino e aprendizagem da Matemática escolar.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Pesquisa qualitativa exploratória. Quanto à abordagem do problema, definiu-se como qualitativa, quanto aos objetivos de forma exploratória e quanto à técnica de pesquisa, estudo de caso.	
RESULTADOS **IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA**	A partir da observação direta e dos questionários aplicados foi possível concluir que a utilização do software GeoGebra contribuiu para a aprendizagem dos conceitos matemáticos. Segundo os estudantes, a utilização do software, proporcionou um modo diferente de aprendizado; não houve a utilização da lousa e todas as atividades foram realizadas a partir do software; com o uso do software torna-se mais fácil verificar os conceitos matemáticos e realizar relações entre eles.	
12.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
O Uso do Computador como Estratégia Educacional: **Relações com a Motivação e Aprendizado de Alunos** **do Ensino Fundamental**	Ibelmar Lluesma Parellada; Sueli Édi Rufini.	Analisar as relações entre uso do computador, motivação e desempenho em prova de conteúdos de matemática com estudantes do Ensino Fundamental.
CONTEXTO	O trabalho foi realizado em uma escola da rede pública estadual de ensino do Estado do Paraná. Participaram da pesquisa 100 alunos das quintas séries, atual sexto ano, com a faixa de idade variando de 10 a 13 anos.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Pesquisa com um grupo experimental e dois de controle. Para avaliar a qualidade da motivação dos alunos foi utilizada a Escala de Avaliação da Motivação de Estudantes do Ensino Fundamental (Rufini, Bzuneck, & Oliveira, 2011).	
RESULTADOS **IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA**	O delineamento foi quase experimental, com um grupo experimental e dois de controle. No pré-teste foram avaliados o conhecimento de conteúdos matemáticos e a motivação para ir à escola, por meio da Escala de avaliação da motivação de alunos do Ensino Fundamental. Na intervenção, o grupo experimental projetou e construiu jogos empregando o computador; o grupo controle 1 fez somente exercícios com lápis e papel (ambos com acesso aos tutoriais); e o grupo de controle 2 assistiu às aulas habituais. Ao final todos os participantes foram avaliados pela segunda vez acerca do conteúdo e da motivação, com os mesmos instrumentos utilizados no pré-teste. Passados 30 dias, os participantes do grupo controle 1 e do grupo experimental fizeram nova prova dos conteúdos de Matemática trabalhados durante a intervenção. Os resultados mostraram que os alunos do grupo experimental tiveram ganhos na qualidade motivacional quando comparados ao grupo de controle 2, indicando que o uso do computador tem importantes implicações para o engajamento e persistência dos alunos em tarefas acadêmicas.	
13.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
Tecnologias Digitais e a relação entre teoria e prática: uma análise **da produção em trinta anos de BOLEMA**	Marcelo de Carvalho Borba; Helber Rangel Formiga Leite; Aparecida Santana de Souza Chiari.	Analisar as pesquisas envolvendo as Tecnologias Digitais e seu uso na sala de aula de Matemática no Brasil.
CONTEXTO	Publicações que abordaram essa temática nos trinta anos de existência da	

	revista BOLEMA.	
METODOLOGIA/INSTRUMENTOS	Análise dos textos encontrados na busca por convergências entre eles, combinando elementos da pesquisa bibliográfica, estado da arte e da meta-análise.	
RESULTADOS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA	A pesquisa em Educação Matemática vale ainda mais, em virtude de possibilitar que seus resultados, bem como outros aspectos, possam influenciar a atuação do professor em sala de aula, na preparação e desenvolvimento de atividades, na formação continuada, entre outros fatores. Os artigos analisados e a própria chamada do número especial indicam que a Educação Matemática está em constante tensão entre o refletir da pesquisa e o refletir da prática por um lado, e a prática da pesquisa e a prática da Educação Matemática por outro.	
14.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista	Armando Traldi Júnior; Luciane Santos Rosembaum.	Construir, analisar e avaliar situações de ensino-aprendizagem em relação a diferentes expectativas de aprendizagem do Ensino Médio, a partir da construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA).
CONTEXTO	O artigo é parte de uma pesquisa de Mestrado Profissional, realizada com a participação de dois professores de Matemática e setenta alunos do segundo ano do Ensino Médio. A investigação integra o projeto "Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio: uma pesquisa colaborativa entre pesquisadores e professores", desenvolvido com a participação de mestrandos, doutorandos, pesquisadores e professores de Matemática de Ensino Médio da rede pública estadual de São Paulo.	
METODLOGIA/INSTRUMENTOS	Pesquisa participante.	
RESULTADOS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA	Os resultados indicaram que o uso de pesquisas contribui para a organização do ensino; que a THA elaborada não foi suficiente para que a aprendizagem ocorresse; e, ainda, que a atuação do professor teve papel decisivo na mediação da construção do conhecimento dos seus alunos.	
15.		
TÍTULO	**AUTORES**	**OBJETIVO**
O GeoGebra e a Música como recursos auxiliares no ensino das Funções Trigonométricas	Fábio Gomes Linck	Apresentar as razões que justificam desenvolver atividades com o uso da música e de recursos provindos do computador, como o *software GeoGebra*, para auxiliar no ensino e na aprendizagem de funções trigonométricas.
CONTEXTO	Pesquisa realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual na cidade de Santana do Livramento/RS no ano de 2010.	
METODOGIA/INSTRUMENTOS	Intervenção pedagógica.	
RESULTADOS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA	Com o uso da tecnologia foi possível tratar de situações que envolvem os sons musicais com diversos tipos de gráficos da senóide, tendo como principal objetivo dar significado ao ensino das funções seno e cosseno por meio de suas relações com os sons musicais.	

Fonte: Elaboração do autor.

Oliveira e Fernandes (2010) investigaram a eficiência de estratégias pedagógicas com tecnologias na construção significativa do conhecimento sobre conceitos iniciais de trigonometria e, de forma mais específica, sobre seno e cosseno. Para tanto pesquisaram o ensino de Trigonometria em uma abordagem histórica por meio de um estudo comparativo com dois instrumentos distintos: o uso de tecnologias "tradicionais" e o uso de tecnologias digitais. A pesquisa foi realizada em uma escola pública de São Paulo, com alunos do Ensino Médio. Como resultados os pesquisadores observaram que o uso de uma estratégia pedagógica, amparada por tecnologias diversas, pode representar importante recurso para mobilizar conhecimentos matemáticos prévios e resultar em avanços cognitivos sobre Trigonometria.

Os autores apontam ainda a utilização do *software* GeoGebra como um instrumental importante para a aprendizagem significativa, pois facilitou a construção da circunferência e complementou a estratégia iniciada nos instrumentos estáticos (lápis, papel e transferidor). Bem como a precisão das medidas feitas no GeoGebra, ocasião em que os estudantes puderam fazer a ligação do conhecimento anterior em relação à construção do círculo trigonométrico elaborado de forma estática.

Na dissertação de Damasco Neto (2010), o autor desenvolveu uma sequência didática para o estudo das funções trigonométricas com o uso do *software* GeoGebra baseada na teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, uma teoria que, segundo o autor, prioriza na aprendizagem matemática as operações entre as representações semióticas de um mesmo objeto matemático, com prioridade para a operação de conversão distinta dos sistemas discursivos, simbólicos e gráficos.

A proposta foi desenvolvida com um grupo de alunos do Ensino Médio e, como resultado da pesquisa, o autor evidenciou que o uso do *software* GeoGebra possibilitou aos estudantes participarem de uma situação de ensino semelhante ao "fazer Matemática", ou seja, experimentaram, interpretaram, visualizaram, induziram, conjecturaram, abstraíram e generalizaram, o que resultou em uma maneira diferente da tradicional apresentação do conhecimento, baseada na transmissão de "fatos" ordenados, por meio de definições e propriedades, indo além da memorização e da repetição, tornando esses estudantes autores do sentido dado ao conhecimento.

O artigo de Lopes (2011) propôs analisar as potencialidades e as limitações do *software* GeoGebra no ensino e aprendizagem de Trigonometria. Por meio de um estudo de caso, a autora propôs uma intervenção pedagógica com estudantes da segunda série do Ensino Médio de uma escola pública e concluiu que o uso do *software* GeoGebra auxiliou na superação de algumas das dificuldades com o ensino de Trigonometria, minimizando-os na resolução de problemas de Trigonometria, especialmente em atividades investigativas, uma vez que os estudantes puderam interagir com as figuras construídas motivando os estudantes a realizar investigações, facilitando, assim, o interesse pela construção de seus conhecimentos.

Lopes (2013) também desenvolveu um estudo em que buscou analisar algumas das potencialidades e limitações do *software* GeoGebra no ensino e na aprendizagem de trigonometria. A pesquisa foi realizada em uma sala de aula com 42 alunos da segunda série do Ensino Médio do turno matutino de uma escola pública do estado do Rio Grande do Norte, na cidade de Natal com frequência média de 34 alunos.

Desenvolvida na perspectiva de uma metodologia qualitativa, por meio da coleta de dados a partir de questionários e entrevistas, bem como da análise dos resultados realizada por meio da descrição das atividades, a pesquisa apontou que os estudantes puderam perceber a possibilidade de criar triângulos semelhantes traçando uma reta paralela a uma das bases do triângulo por meio do *software* GeoGebra.

Lopes e Andrade (2010) desenvolveram uma pesquisa em que buscaram analisar as potencialidades do *software* GeoGebra na construção dos conceitos básicos de Trigonometria. As pesquisadoras realizaram um minicurso com os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. Por meio da pesquisa participante, os estudantes desenvolveram atividades relacionadas ao estudo de Trigonometria, utilizando o *software* GeoGebra. Os dados apontaram que os futuros professores em formação demonstraram facilidade em utilizar o referido software e foram criativos em montar atividades para seus alunos com o recurso do GeoGebra.

Os autores concluem que todo acesso às novas tecnologias da informação e comunicação influenciam significativamente na vida do homem, fazendo o indivíduo mudar de comportamento. No que tange à prática docente, é notório que há muitos desafios, mas que em uma visão ampla as TIC’s vêm sendo inseridas dentro da prática pedagógica, porém faz-se necessário que os professores tenham além do preparo pedagógico, o social. Os estudantes, futuros professores consideraram a utilização de recursos tecnológicos em sala de aula como uma forma de aproximar os estudantes.

A partir dos apontamentos das pesquisas, pode-se observar que, com a utilização do *software* GeoGebra no ensino de Trigonometria, os estudantes se sentiram mais interessados em buscar informações sobre construções de figuras planas com régua e compasso. As pesquisas apontaram ainda, a viabilidade dos professores de movimentar a figura na tela, possibilitando ainda ao estudante a possibilidade de desenvolver a noção intuitiva dos entes matemáticos, como por exemplo: saber definir o que é a reta tangente, que relação ela tem com o ângulo central, analisar a variação do seno e do cosseno em todos os quadrantes, entre outras possibilidades.

Entretanto, essas pesquisas apontaram alguns desafios, por exemplo, levar os professores a adotarem os recursos da informática nas aulas de Matemática, o que pode ser viabilizado por meio do planejamento de atividades, de acordo com o tempo disponível, e com o nível das turmas; pode-se levar figuras prontas (*applets*), construídas previamente pelo professor, ou optar por construí-las em sala com os estudantes, como ocorrerá na pesquisa que nos propomos a desenvolver no Campus Cuiabá do IFMT, uma vez que o professor precisa de tempo para planejar as atividades e determinar o conteúdo em que vai usar os recursos do *software,* bem como ajustá-lo ao contexto e integrá-lo às outras atividades envolvidas no ensino.

A pesquisa de Bezerra, Araújo e Araújo (2012) mostrou a aplicabilidade dos conceitos trigonométricos, em especial de algumas funções trigonométricas, utilizando material concreto (Bingo Trigonométrico) e usando as novas tecnologias (*softwares*) o que proporcionou aos alunos uma dinamicidade da Matemática, contribuindo para uma aprendizagem significativa. A pesquisa foi realizada por alunas bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID da Universidade Estadual de Paraíba - UEPB e desenvolvida em duas turmas de 2º ano do Ensino Médio na Escola Estadual de Ensino Médio Inovador e Profissionalizante Dr. Hortêncio de Sousa Ribeiro no Programa de Expansão e Melhoria do Ensino Médio - PREMEM, na cidade de Campina Grande – PB.

O estudo foi desenvolvido por meio da realização de minicursos e utilização de alguns recursos didáticos como: jogos, bingo trigonométrico, além do uso de tecnologias via *software* GeoGebra e *software* Sinuca. De acordo com os resultados do pré-teste e pós-teste, houve uma melhora significativa na compreensão do círculo trigonométrico e sua relação com as funções, assimilando, ao mesmo tempo, os conceitos de graus e radianos e suas relações.

As autoras evidenciaram na pesquisa que os estudantes nunca tinham percebido como os assuntos referentes à Trigonometria podem ser assimilados de maneira prática e eficaz, uma vez que eles já estavam familiarizados com o computador, o que facilitou a compreensão dos *softwares* educativos e possibilitou o fácil entendimento desses conteúdos trigonométricos. Outra evidência foi a percepção de que a referida ferramenta se torna vantajosa tanto para quem está aprendendo quanto para quem está ensinando.

Já o estudo realizado por Strasburg, Sperotto e Meneghetti (2015) teve como propósito apresentar aos estudantes a importância do estudo da trigonometria e apresentar noções fundamentadas, no entendimento das fórmulas e dos valores da tabela trigonométrica com o objetivo de capacitá-los para utilizar os conhecimentos trigonométricos no dia a dia. Assim, foram propostas atividades para o ensino de Trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental cujo conteúdo consistia nas principais relações trigonométricas ministrado a partir de exercícios que pudessem levar os estudantes, de forma gradual, à obtenção dessas relações.

Os autores concluíram que a utilização do *software* GeoGebra e de outras tecnologias no estudo da Trigonometria no Ensino Fundamental representou um excelente recurso no auxílio dos professores em sala de aula, uma vez que as aulas se tornaram mais atrativas e significativas para os estudantes e que houve um aumento da probabilidade da motivação e interesse na aprendizagem da Matemática por parte destes.

A pesquisa desenvolvida por Dantas (2015) buscou não só analisar se o trabalho com o GeoGebra facilita a aprendizagem de conceitos da Trigonometria, mas também conhecer as percepções dos estudantes acerca do uso do GeoGebra no ensino de Trigonometria. Aconteceu junto aos estudantes do segundo ano do Ensino Médio integrado ao ensino técnico do Campus de Mossoró do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN).

Por meio da realização de atividades avaliativas antes e após a utilização do GeoGebra no ensino de Trigonometria e aplicação de entrevistas semiestruturadas com os estudantes, os resultados mostraram que o uso do GeoGebra trouxe uma contribuição significativa para a aprendizagem de diversos aspectos inerentes ao comportamento das funções seno e cosseno.

Além disso, os alunos apresentaram percepções bastante positivas acerca da importância da utilização de *softwares* como o GeoGebra no ensino de Matemática, ressaltando aspectos como: a possibilidade de desenvolver atividades práticas que ajudam a fixar a aprendizagem; a maior dinamicidade da aula; a melhoria no trabalho do professor; o maior envolvimento dos alunos; a possibilidade de observar os objetos em movimento e a facilidade na visualização desses objetos.

Parellada e Rufini (2013) buscaram analisar as relações entre uso do computador, motivação e desempenho em prova de conteúdos de Matemática com estudantes do Ensino Fundamental. O trabalho foi realizado em uma escola da rede pública estadual de ensino do Estado do Paraná. Participaram da pesquisa 100 alunos das quintas séries, atual sexto ano, com a faixa de idade variando de 10 a 13 anos. Segundo os autores, o delineamento da pesquisa foi quase experimental, com um grupo experimental e dois de controle. No pré-teste foram avaliados o conhecimento de conteúdos matemáticos e a motivação para ir à escola, por meio da Escala de Avaliação da Motivação de alunos do Ensino Fundamental.

Na intervenção, o grupo experimental projetou e construiu jogos empregando o computador; o grupo controle 1 fez somente exercícios com lápis e papel (ambos com acesso aos tutoriais); e o grupo de controle 2 assistiu às aulas habituais. Ao final, todos os participantes foram avaliados pela segunda vez acerca do conteúdo e da motivação, com os mesmos instrumentos utilizados no pré-teste. Passados 30 dias, os participantes do grupo controle 1 e do grupo experimental fizeram nova prova dos conteúdos de Matemática trabalhados durante a intervenção. Os resultados mostraram que os alunos do grupo experimental tiveram ganhos na qualidade motivacional quando comparados ao grupo de controle 2, indicando que o uso do computador tem importantes implicações para o engajamento e a persistência dos alunos em tarefas acadêmicas.

Borba, Almeida e Chiari (2015) analisaram as pesquisas envolvendo as Tecnologias Digitais e seu uso na sala de aula de Matemática no Brasil. Para tanto, foram analisadas as publicações que abordaram essa temática nos trinta anos de existência da revista Bolema. A análise dos textos encontrados buscou por convergências entre eles, combinando elementos da pesquisa bibliográfica, do estado da arte e da meta-análise.

A pesquisa em Educação Matemática contribuiu no sentido de observar aspectos como a influência do professor em sala de aula, a preparação e o desenvolvimento de atividades, a formação continuada, entre outros fatores. Os artigos analisados e a própria chamada do número especial indicaram que a Educação Matemática está em constante tensão entre o refletir da pesquisa e o refletir da prática por um lado, e a prática da pesquisa e a prática da Educação Matemática por outro.

Linck (2010) desenvolveu um estudo que teve por objetivo apresentar as razões que justificam desenvolver atividades com o uso da música e de recursos provindos do computador, como o *software* GeoGebra, para auxiliar no ensino e na aprendizagem de funções trigonométricas. Pesquisa realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual na cidade de Santana do Livramento/RS no ano de 2010. O estudo foi realizado por meio de uma intervenção pedagógica. Como resultado foi constatado que com o uso da tecnologia foi possível tratar de situações que envolvem os sons musicais com diversos tipos de gráficos da senóide. O trabalho tinha como principal objetivo dar significado ao ensino das funções seno e cosseno por meio de suas relações com os sons musicais.

Diante dos estudos apresentados ficou evidente que o uso de *softwares* computacionais configurou-se uma possibilidade viável para as formas de ensinar e aprender Matemática e como consequência a Trigonometria, ou seja, a Matemática pode ser desenvolvida por meio de recursos que possibilitem a compreensão de sua dinâmica, para além do quadro e do giz, uma vez que possibilita ao estudante a investigação e a exploração matemática: "O conhecimento é construído a partir de muita investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos. (GRAVINA, SANTAROSA, 1998, p. 2).

Os artigos e produções encontrados e selecionados evidenciam que os recursos tecnológicos na perspectiva do ensino de Matemática auxiliam a prática pedagógica dos professores, possibilitando a criação de aulas mais interessantes, dinâmicas e, sobretudo, permitindo que os alunos se vejam na condição de sujeitos corresponsáveis pelos conteúdos que estão aprendendo e, consequentemente, pela construção do conhecimento matemático em desenvolvimento.

Considerando as dificuldades de os estudantes compreenderem as Funções Trigonométricas, o que pode, às vezes, parecer como exercícios lógicos e dedutivos para os professores nem sempre o é para os discentes, sendo inclusive mais complexo do que se pode imaginar. Uma dessas dificuldades é a necessidade de manipulação e de utilização de abstrações para compreender o comportamento das funções trigonométricas, como a associação dos pontos do círculo trigonométrico com os pontos do plano cartesiano. Nesse sentido, Gravina e Santarosa (1998) destacam que, no ensino de Matemática, é fundamental a transição da natureza dos objetos pelos estudantes, o que pode ser feito com a aplicação das ações.

As produções visitadas corroboram com a percepção de Dullius e Quartieri (2015) que afirmam que o uso das tecnologias contribui de forma positiva para a aprendizagem dos estudantes, tendo em vista que elas estão cada vez mais presentes e valorizadas no cotidiano. Tais ideias têm a ver com a defesa de Moran, Masetto e Behrns (2013) que declaram que a aprendizagem é influenciada pelo prazer e/ou gosto das pessoas envolvidas nos processos de ensino e de aprendizagem.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho é um estudo qualitativo, que postula um esforço de aproximação entre a forma de ensinar Matemática e o uso de um recurso computacional. Este estudo está pautado na crença de que a aproximação entre as áreas do conhecimento é possível por meio de uma metodologia dinâmica, isso porque reúne geometria, cálculo e álgebra no ambiente de sala de aula e vem ao encontro das atuais tendências no campo educacional. Na perspectiva de compreender os fenômenos específicos e delimitáveis, Minayo (2009) esclarece:

> A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se ocupa, nas Ciências Sociais, com um nível de realidade que não pode ou não deveria ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com um universo dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes. Esse conjunto de fenômenos humanos é entendido aqui como parte da realidade social, pois o ser humano se distingue não só por agir, mas por pensar sobre o que faz e por interpretar suas ações dentro e a partir da realidade vivida e partilhada com seus semelhantes (p. 21).

Assim, para a compreensão do objeto, a pesquisa foi desenvolvida contendo princípios científicos e educativos para construção de novos conhecimentos a partir de questionamentos da realidade, de cunho cotidiano, atentando para o meio circundante, protagonizando experiências e encantando os que dela participam (DEMO, 2002).

Neste sentido, compreendeu-se que os procedimentos metodológicos apresentados nesta pesquisa contribuíram para dar maior visibilidade e transparência ao trabalho desenvolvido, permitindo que professores e pesquisadores de diversas áreas do conhecimento pudessem se beneficiar e se inspirar para promoção do ensino por meio do uso de recursos tecnológicos atuais e acessíveis, como é o caso do *software* GeoGebra. Nesses termos, detalhamos os caminhos metodológicos a serem percorridos nesta investigação, esperando conseguir respostas para o problema proposto e alcançar os objetivos traçados.

3.1 Caracterização da pesquisa

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, envolvendo um grupo de estudantes do Ensino Médio Integrado que desenvolveram uma sequência didática mediante uso de um recurso computacional, o *software* GeoGebra, tendo a Trigonometria como elemento fundante desta experiência. A propriedade da pesquisa qualitativa foi ao encontro dos objetivos da pesquisa desenvolvida, uma vez que esta permite maior acuidade na averiguação das atividades desenvolvidas pelos estudantes participantes.

Na percepção de Fazenda, Godoy, Tavares (2015) a abordagem qualitativa amplia o entendimento e a interpretação de fenômenos humanos.

> Estar voltada para o entendimento e a interpretação de fenômenos humanos, cujo objetivo é alcançar uma visão detalhada, complexa e holística destes. É definida mediante a forma como a relação entre o pesquisador e pesquisado se configura. É dada ênfase à linguagem e à percepção dos informantes e de quem pesquisa. É induzida, em geral, em ambientes naturais. Essa abordagem depende, muito mais que a pesquisa tradicional, de uma boa forma de comunicação, de percepção e de intuição significativa, pois as questões são subjetivas e podem ser mal interpretadas (FAZENDA, GODOY, TAVARES, 2015, p. 62).

Os autores advertem que a pesquisa qualitativa, tendo em vista a proximidade entre o pesquisador e o pesquisado, possibilita o desenvolvimento da competência em construir um conhecimento útil, ético, voltado ao crescimento, à autonomia e à criatividade e visualiza o indivíduo não como um objeto, mas como sujeito do conhecimento e da história.

3.2 Lócus da pesquisa

O cenário da pesquisa foi o Instituto Federal de Mato Grosso - IFMT Campus Cuiabá, localizado no centro do município de Cuiabá, destacado na Figura 2:

Figura 2. Foto aérea do IFMT Campus Cuiabá

Fonte: Chico Ferreira (2018).

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT é uma instituição de educação superior, básica e profissional, pluricurricular e multicampi, especializada na oferta de educação profissional e tecnológica nas diferentes modalidades de ensino. Está vinculada ao Ministério da Educação, possui natureza jurídica de autarquia, com autonomia administrativa, patrimonial, financeira, didático-pedagógica e disciplinar (IFMT, 2017).

Atualmente, possui aproximadamente vinte e cinco mil estudantes, em mais de cem cursos distribuídos nos níveis: superior, bacharelado, licenciatura e tecnologias; pós-graduação, especialização e mestrado; e técnico, com Ensino Médio integrado, subsequente e concomitante. Desde a sua criação, o IFMT, por meio do processo de expansão e interiorização, alcançou diversas outras localidades (IFMT, 2017).

O IFMT é composto por 19 unidades, distribuídas em 30 municípios do estado de Mato Grosso, sendo o Campus de Cuiabá o mais antigo. Em termos tecnológicos, o referido Campus conta com uma infraestrutura básica, com diferentes laboratórios para atender aos diversos níveis e modalidades de ensino. Contudo, em se tratando do Ensino Médio, os laboratórios atendem à demanda da área técnica. Para a realização da presente pesquisa, foi solicitada a permissão para o diretor geral do Campus conforme Apêndice A.

3.3 Sujeitos

Os sujeitos que fizeram parte dessa pesquisa são de uma turma de trinta e seis estudantes, com idade média de quinze anos, do 2º ano do Ensino Médio Integrado do Curso de Informática, trata-se de um curso anual com duração de três anos. A escolha dos sujeitos deu-se em razão de ser uma turma na qual o pesquisador do presente trabalho ministrava aulas de Matemática, sendo o conteúdo de Trigonometria ofertado no 2º ano do referido curso.

Por serem estudantes do Curso de Informática e terem, durante o curso, aulas práticas de Informática no laboratório, já estavam familiarizados com o uso de tecnologias. Para a participação dessa pesquisa, os responsáveis pelos estudantes assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), conforme Apêndice B. Para garantir o anonimato dos participantes, os discentes foram nomeados por “estudantes E1, E2, E3...E36” e assim, sucessivamente, em substituição a seus nomes.

3.4 Intervenção Pedagógica

A intervenção pedagógica proposta para o desenvolvimento desta pesquisa foi realizada por meio de uma sequência didática sistematizada em vinte e quatro aulas, sendo cada uma com duração de cinquenta minutos, desenvolvidas em um laboratório de informática que dispunha de computadores suficientes para que todos os estudantes da turma desenvolvessem, de forma individual, a sequência didática por meio do uso do *software* GeoGebra, previamente instalado nos computadores.

Em cada aula, os estudantes receberam um planejamento das atividades que deveriam ser desenvolvidas, as quais encontram-se no Apêndice C desta pesquisa. As referidas atividades deveriam ser desenvolvidas de forma individual, conforme se pode observar no Quadro 2.

Quadro 2. Quadro esquemático da intervenção pedagógica com os estudantes do Ensino Médio

	ATIVIDADES	OBJETIVOS	METODOLOGIA E COLETA DE DADOS
01 e 02	Noções básicas do *software*	- Apresentar o *software* GeoGebra aos estudantes.	Para a execução desta proposta os estudantes receberam o material

	GeoGebra.	- Executar atividades para gerar familiaridade com a plataforma. - Ensinar o manuseio das ferramentas como: inserir ponto, reta, segmento de reta, reta perpendicular, reta paralela, circunferência, controle deslizante, polígono, medida de ângulo, caixa de texto e distância. - Conhecer e trabalhar com o controle deslizante do *software*.	contendo o planejamento das aulas. O material construído foi encaminhado pelos estudantes ao e-mail do pesquisador.
03 e 04	Círculo trigonométrico: Radiano.	- Construir e visualizar o círculo trigonométrico e, posteriormente, o radiano. -Usar as ferramentas do GeoGebra e construir, analisar e movimentar a construção tendo por finalidade assegurar a nova medida de ângulo: o radiano.	Para a proposta, os estudantes receberam o material contendo o planejamento das aulas e atividade 1. Após gerar o gráfico, os estudantes responderam a atividade 1, que consistiu na conversão de grau para radiano e radiano para grau. O círculo construído pelos estudantes foi encaminhado ao e-mail do pesquisador e a atividade 1 recolhida.
05, 06, 07, 08 e 09	Trigonometria no círculo trigonométrico: Seno, Cosseno e Tangente.	-Definir as principais razões trigonométricas no círculo trigonométrico: seno, cosseno e tangente. -Visualizar a trigonometria no triângulo retângulo no círculo trigonométrico.	Para a proposta, os estudantes receberam o material contendo o planejamento das aulas e atividades 2 e 3. No primeiro momento, ocorreram as aulas 5, 6 e 7, relacionadas à construção do seno e cosseno. A segunda parte, aulas 8 e 9, resultou na construção da tangente. Após gerar o gráfico, os estudantes responderam a atividade 2 que continha seis questões. Na segunda parte das aulas 8 e 9, relacionadas ao desenvolvimento da Tangente, após a geração do gráfico, os estudantes responderam a atividade 3 que continha seis questões. O material construído pelos estudantes foi encaminhado ao e-mail do pesquisador e recolhidas as atividades 2 e 3.
10 e 11	Explorando simetrias no círculo trigonométrico.	- Usar as simetrias do círculo trigonométrico para relacionar seno, cosseno e tangente de ângulos em outros quadrantes (2°, 3° e 4°) em comparação com ângulos do 1° quadrante. -Reconhecer, via congruência de triângulos, as simetrias e, posteriormente, comparar seno, cosseno e tangente destes ângulos simétricos.	Para a proposta, os estudantes receberam o material contendo o planejamento das aulas e a atividade 4. Em seguida, os estudantes foram orientados a movimentar o ponto C na figura, a fim de observar e comparar a variação do ângulo do primeiro com os demais quadrantes, bem como de sua simetria. O material construído pelos estudantes foi encaminhado ao e-mail do pesquisador e recolhida a atividade 4.

12, 13 e 14	Definição das funções sen(x), cos(x) e tan(x).	- Compreender a construção das funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico. - Relacionar o comprimento do arco (radiano) com a projeção em cada eixo coordenado (eixo X, no caso de cosseno e eixo Y no caso de seno e reta auxiliar no caso de tangente). - Visualizar este relacionamento graficamente.	Para a proposta, os estudantes receberam o material contendo o planejamento das aulas e atividade 5. Após a geração do gráfico de cada função, os estudantes relacionaram o comprimento do arco, com o seno, cosseno e a tangente do ângulo O gráfico construído pelos estudantes foi encaminhado ao e-mail do pesquisador e recolhida a atividade 5.
15 e 16	Alguns gráficos das funções sen(x), cos(x) e tan(x) e suas características.	- Construir e visualizar, por meio do *software*, o comportamento das funções seno, cosseno, tangente. - Determinar o domínio, a imagem e o período de cada função.	Para a proposta, os estudantes receberam o material contendo o planejamento das aulas e atividade 6. O gráfico construído pelos estudantes foi encaminhado ao e-mail do pesquisador e recolhida a atividade 6.
17, 18, 19, 20, 21 e 22	Alterações da função seno, cosseno e tangente.	- Estudar os efeitos da inserção de coeficientes nas funções seno, cosseno e tangente. - Manipular essas funções no GeoGebra, com a ajuda de controles deslizantes para melhor visualizar os efeitos dos parâmetros.	Para a proposta, os estudantes receberam o material contendo o planejamento das aulas e atividades 7. Após desenvolvimento das aulas, os estudantes foram orientados a realizar a Atividade 7. Essa atividade consistiu na construção e na análise dos gráficos nas diversas funções. O gráfico construído pelos estudantes foi encaminhado ao e-mail do pesquisador e recolhida a atividade 7.
23 e 24	Aplicações das funções seno e cosseno.	-Estabelecer relações entre os conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno com os problemas do dia a dia.	Para a execução desta proposta, os estudantes receberam o material contendo o planejamento das aulas e a atividade 8. O gráfico construído pelos estudantes foi encaminhado ao e-mail do pesquisador e recolhida a atividade 8.

Fonte: Elaboração do autor (2019).

3.5 Instrumentos e metodologia de coleta de dados

Para a realização da coleta de dados, à medida em que os estudantes foram desenvolvendo as atividades, realizou-se anotações em um caderno de campo com as percepções quanto à experiência, às dificuldades e às facilidades observadas durante o desenvolvimento das atividades pelos estudantes. Ao final de cada encontro, os estudantes encaminharam os gráficos construídos para o *e-mail* do professor e também foram recolhidas as atividades, com o objetivo de identificar as dúvidas mais frequentes, bem como de sanar as dificuldades encontradas.

A análise dos dados foi realizada por meio da descrição que consistiu em analisar se os elementos da teoria se articulam aos elementos da prática e em que medida, destacando os condicionantes desta relação. As atividades foram descritas em ordem cronológica, em razão de terem ocorrido em dias diferentes. Nesta perspectiva, Gil (2008) aponta:

> As pesquisas deste tipo têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis. São inúmeros os estudos que podem ser classificados sob este título e uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados (p. 28).

Há que se considerar que os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações objetivando compreender o objeto em questão, como não são dados padrão, o pesquisador há de compreender que:

> Estes dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisa-los. Não existindo regras precisas e passos a serem seguidos, o bom resultado da pesquisa depende da sensibilidade, intuição e experiência do pesquisador (GOLDENBERG, 2004, p. 53).

Assim, essa pesquisa teve como objetivo investigar como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração de tópicos da Trigonometria em uma turma do 2º ano do Ensino Médio Integrado ao Técnico de Informática.

A seguir, se apresenta a intervenção pedagógica aplicada junto aos estudantes, sistematizada em vinte e quatro aulas, divididas em dois momentos, a partir do material proposto, cujo elaboração foi especificamente para esta pesquisa.

4 ANÁLISE DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

A pesquisa desenvolveu-se por meio de uma sequência didática, junto a uma turma de estudantes do 2º ano do Ensino Médio integrado ao Curso Técnico em Informática do IFMT Campus Cuiabá. Foi sistematizada em vinte e quatro aulas, sendo que cada aula consistia em dois momentos para serem desenvolvidas de acordo com o material proposto. No primeiro momento, os estudantes receberam o planejamento relativo ao desenvolvimento das aulas com o objetivo de construir conceitos de Trigonometria. Já no segundo momento, cada estudante recebeu as atividades propostas para que usassem o conhecimento construído no primeiro momento, possibilitando, assim, a correlação entre a teoria proposta e a atividade prática.

Procedeu-se à análise das atividades desenvolvidas individualmente por cada estudante, observando se conseguiram correlacionar as atividades propostas com o conteúdo trabalhado no primeiro momento, de acordo com o objetivo de cada aula. Por meio dos registros das atividades realizadas foi possível detectar os erros e acertos de cada estudante, bem como se fez uso dos registros do caderno de campo do pesquisador para complementar a análises de dados.

Aulas 1 e 2 – Noções Básicas do *Software* GeoGebra

Os objetivos das aulas 1 e 2 referem-se à apresentação do *software* GeoGebra aos estudantes e à execução das atividades possibilitando a interação com a plataforma. Assim, no decorrer das aulas, foi possível viabilizar junto aos estudantes o manuseio das ferramentas para inserir ponto, reta, segmento de reta, reta perpendicular, reta paralela, circunferência, polígono, medida de ângulo, caixa de texto e distância. Eles puderam, ainda, conhecer e trabalhar com o controle deslizante do *software*. Destarte, para as referidas aulas, o estudante recebeu o material contendo o desenvolvimento das aulas. A seguir é apresentado o planejamento das aulas 1 e 2:

Aulas 1 e 2 - Desenvolvimento:
O aluno passará pelas seguintes etapas (todos em um mesmo arquivo):

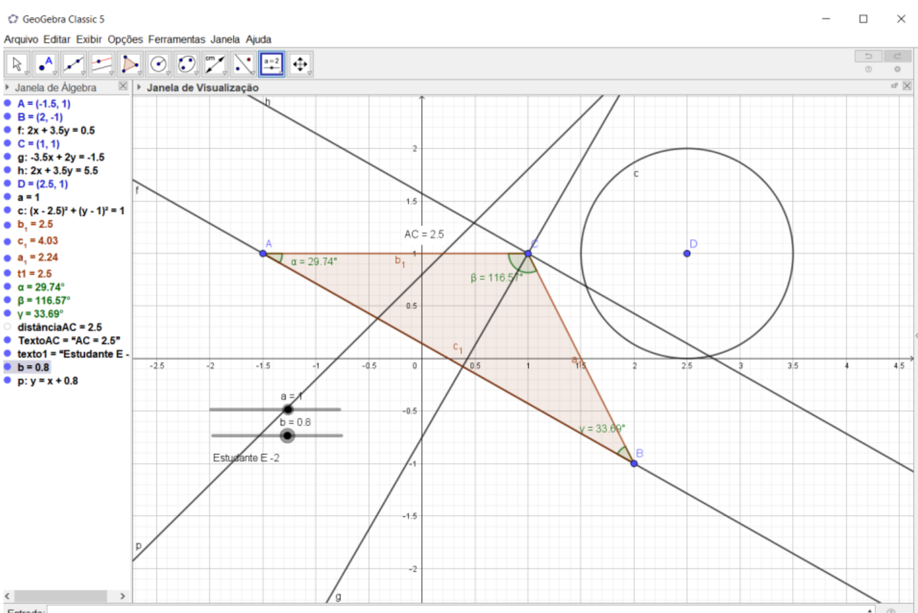
1. Abra o *software* GeoGebra;
2. Insira dois pontos A e B;
3. Insira uma reta que passe por A e B;
4. Insira um ponto C;
5. Insira uma reta perpendicular à reta do item 3, passando por C;
6. Insira uma reta paralela à reta do item 3, passando por C;
7. Insira um ponto D;

8. Insira um controle deslizante;
9. Insira uma circunferência centrada em D e raio igual ao controle deslizante do item 8 (mexa com o controle deslizante);
10. Crie um polígono com os pontos A, B e C;
11. Meça um ângulo qualquer do polígono do item 10;
12. Meça um lado (aresta) qualquer do polígono do item 10;
13. Crie uma caixa de texto e insira seu nome;
14. Insira um controle deslizante (da mesma forma que no item 8), nomeando-o como *b*;
15. Vá até a caixa de entrada (barra inferior da janela do *software*) e digite: $y=ax+b$. Observe que *a* e *b* são os controles deslizantes criados nos itens 8 e 14. Qual o gráfico gerado?
16. Mexa nos dois controles deslizantes e observe o que eles provocam na reta criada no item 15;

As retas criadas nos itens 3, 5 e 6, podem ser vistas/entendidas como gráficos de funções do 1ºgrau, portanto identifique na barra lateral esquerda as suas equações.

A seguir, tem-se um possível resultado das aulas 1 e 2, material produzido pelo estudante E2, como destacado na Figura 3:

Figura 3. Possível solução para as aulas 1 e 2, estudante E2



Fonte: Elaboração E2 (2019).

Dos trinta e quatro estudantes que participaram das aulas 1 e 2, todos conseguiram realizar a atividade proposta. No decorrer desta realização, foi possível perceber que os estudantes ficaram motivados com a ideia de sair da rotina da sala de aula e trabalhar no Laboratório de Informática e também pela forma diferente de ensinar a Matemática com uso da tecnologia.

Apresentar ao estudante o conhecimento de novas informações e instrumentos para o aprendizado de Matemática por meio da tecnologia vai em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2000) que afirmam que, devido ao fato de o surgimento e a renovação de saberes acontecerem de forma tão veloz, torna-se impossível o processo de aprendizado ocorrer de forma solitária, com o manuseio do uso de calculadoras pelos estudantes, por exemplo. É um trabalho muito mais amplo:

> O trabalho ganha então uma nova exigência, que é a de aprender continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos (BRASIL, 2000, p. 41).

Os ambientes informatizados possuem potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem, o computador, bem como os *softwares* educativos, permite:

> Uma boa interface e explorar os recursos de hipermídia (som, imagem, animação, texto não linear) nada mais que oferecem aos estudantes a leitura de definições e propriedades e aplicação destes em exercícios práticos (tipo tutorial) ou testar e fixar ‘conhecimentos’ através da realização de exercícios protótipos e repetitivos, que no máximo avançam em grau de dificuldade (tipo prática de exercícios) (GRAVINA, SANTAROSA, 1998, p. 2).

Ao realizar esta atividade, foi possível perceber que alguns estudantes a desenvolveram de forma mais célere, outros nem tanto. Contudo, possibilitou-se que cada um trabalhasse em seu próprio ritmo.

Aulas 3 e 4 – Círculo trigonométrico: Radiano.

As aulas 3 e 4 tiveram como objetivo a construção e a visualização do círculo trigonométrico e, posteriormente, do radiano. Visaram, ainda, a análise e a movimentação da construção tendo por finalidade assegurar a nova medida de ângulo: o radiano. Sendo assim, esta atividade possibilitou que estudantes, por meio do uso de *software,* construíssem, analisassem e movimentassem a construção por eles realizada, relacionando a medida do arco com a medida do ângulo, utilizando as unidades de medidas graus e radianos. A seguir, tem-se o desenvolvimento das aulas:

Aulas 3 e 4 - Desenvolvimento:

O aluno passará pelas seguintes etapas (todos em um mesmo arquivo):

1. Construa, no GeoGebra, uma circunferência de raio igual a 1 e centro no ponto A (0,0);
2. Insira um ponto B com coordenadas (1,0).

Comentário: Os eixos coordenados (x e y) dividem a circunferência em 4 partes, as quais são chamadas de “quadrantes”.

3. Insira um ponto C sobre a circunferência, pouco acima de B (no sentido anti-horário);

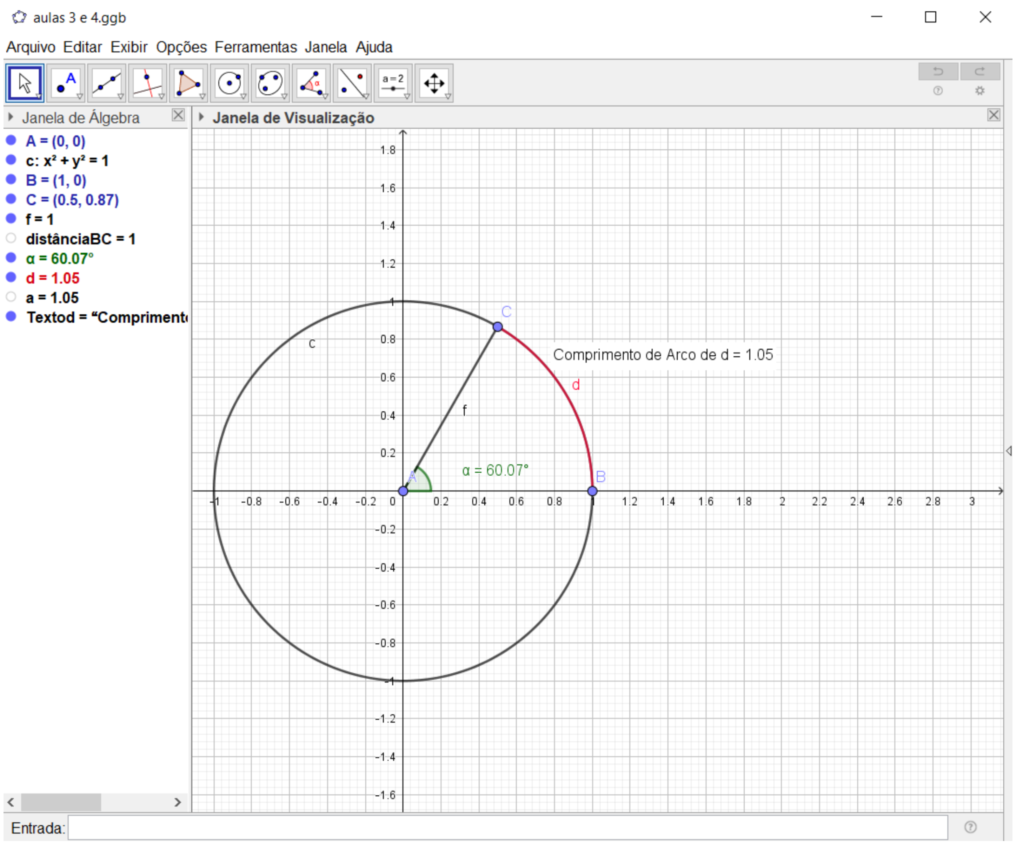
Comentário: o sentido anti-horário, a partir do ponto B é convencionado como sendo o sentido positivo do círculo trigonométrico e os quadrantes são enumerados nesse sentido.

De outra forma, tem-se que x e y assumem os sinais, conforme tabela:

- ✓ Crie o segmento que vai de A até C;
- ✓ Crie um arco de circunferência que vai de B até C;
- ✓ Comentário: o arco de circunferência BC (orientado de B para C, no sentido positivo) determina um ângulo (central) BÂC, ou seja, existe uma relação entre o comprimento do arco e o ângulo determinado por ele.
- ✓ Entre em *propriedades* desse arco e em *estilo*, altere a grossura da linha e em cor, coloque vermelho.
- ✓ Com a ferramenta distância ou comprimento, meça o comprimento do arco BC
- ✓ Meça o ângulo BÂC;
- ✓ Movimente o ponto C e observe o comprimento do arco BC e também o ângulo formado em BÂC.
- ✓ Quando BÂC=180°, qual é o comprimento do arco BC?
- o Comentário: Lembre-se que o comprimento da circunferência é $C=2\pi r$ (r=raio) e que a circunferência trigonométrica possui raio igual a 1, ou seja, $C=2\pi 1=2\pi$. Sendo assim, quando se tem BÂC=360°, tem-se que o arco BC medirá 2π. Portanto, é estabelecida uma relação entre o comprimento do arco e o respectivo ângulo central, da seguinte forma: $360° \leftrightarrow 2\pi$ radianos, ou mais simplificadamente: $180° \leftrightarrow \pi$ radianos (a unidade radiano vem do fato do comprimento da circunferência ser 2π vezes o comprimento do raio).

Esta atividade ensejou a construção do ângulo central, assim, na medida em que o aluno movimentasse o ponto C, aparecia automaticamente a medida do arco e também do ângulo. Para visualização, destaca-se a Figura 4, material produzido pelo estudante E3:

Figura 4. Possível solução para as aulas 3 e 4, estudante E3



Fonte: Elaboração E3 (2019).

Após gerar o círculo trigonométrico, os estudantes responderam a Atividade 1, que consistiu na conversão de grau para radiano e radiano para grau. Para visualização, destaca-se na Figura 5, o material produzido pelo estudante E6:

Figura 5. Resolução da atividade 1, estudante E6

Atividade 1

1) Faça as conversões de grau para radiano dos ângulos a seguir:

Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano
0°	0 rad	90°	π/2	180°	π	270°	3π/2 rad
30°	π/6 rad	120°	2π/3 rad	210°	7π/6 rad	300°	5π/3 rad
45°	π/4 rad	135°	4π/3 rad	225°	5π/4 rad	315°	7π/4 rad
60°	π/3 rad	150°	5π/6 rad	240°	4π/3 rad	330°	11π/6 rad

2) Faça as conversões de radiano para grau dos ângulos a seguir:

Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau
0	0°	$\frac{\pi}{2}$	90°	π	180°	$\frac{11\pi}{6}$	330°
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{7\pi}{6}$	210°	$\frac{7\pi}{4}$	315°
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{5\pi}{4}$	225°	$\frac{5\pi}{3}$	300°
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{5\pi}{6}$	150°	$\frac{4\pi}{3}$	240°	2π	360°

Fonte: Elaboração E6 (2019).

A Atividade 1 foi composta dos itens 1 e 2. Dos trinta e dois estudantes participantes, vinte e cinco acertaram todas as questões e sete erraram algumas delas. A título de exemplo, destaca-se a resposta de um dos estudantes que acertou. Com isso, foi possível visualizar que conseguiram estabelecer, por meio do *software* e do cálculo manual, a relação entre as unidades de medidas de um ângulo, grau e radiano, bem como relacionar o comprimento de um arco ao respectivo ângulo central. A Atividade 1 possibilitou que os estudantes compreendessem melhor as relações entre arco e ângulo, reduzindo, dessa forma, a quantidade de cálculos que seriam feitos somente de forma manual. Corroborando com Oliveira (2009) quando destaca:

> Compreender as chamadas tecnologias “tradicionais” (uso de sólidos, giz e lousa, lápis e papel, régua e compasso, etc.) como outras abordagens, igualmente validades, e que podem, em dados momentos, apresentar maior pernitenência, de acordo com o cenário, os sujeitos, as disponibilidades de infraestrutura tecnológica, entre outros elementos (p. 06).

Com relação aos estudantes que erraram alguns dos itens, percebeu-se que tiveram dificuldade em relacionar o comprimento do arco com o ângulo tanto no GeoGebra quanto no cálculo manual. Para minimizar as dificuldades apresentadas, foi realizada novamente a atividade para que os estudantes pudessem vislumbrar a atividade correta, para além disso, a retomada da atividade possibilitou entender as raízes das representações trazidas pelos estudantes, a coerência de sua forma de pensar, permitindo realizar discussões e explicações de seus raciocínios espontâneos.

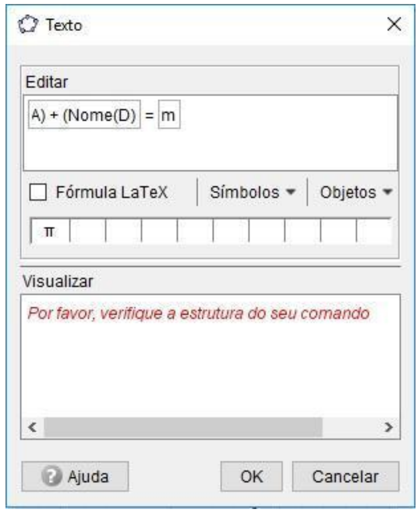
Oliveira e Fernandes (2010) ressaltam que existe uma dificuldade, por parte dos professores, de se colocarem no lugar do estudante que não compreende determinado assunto. Além disso, alguns professores tendem a banalizar a fato de os alunos não dominarem conhecimentos básicos:

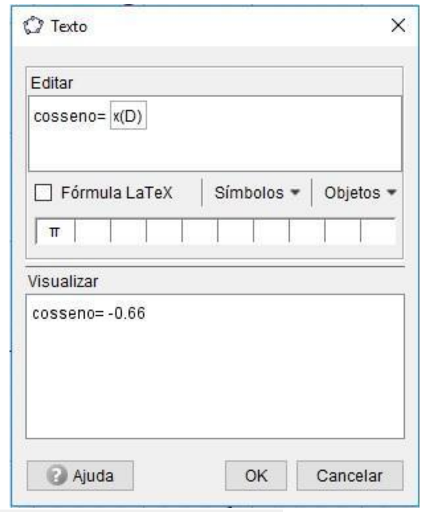
> De nada adianta explicar uma técnica de resolução para um problema matemático se o aluno não tem conhecimentos básicos para compreender esse processo, ou seja, não basta que os professores tenham a memória de suas próprias aprendizagens para imaginar o conhecimento já construído na mente do aluno (OLIVEIRA, FERNANDES, 2010, p. 4).

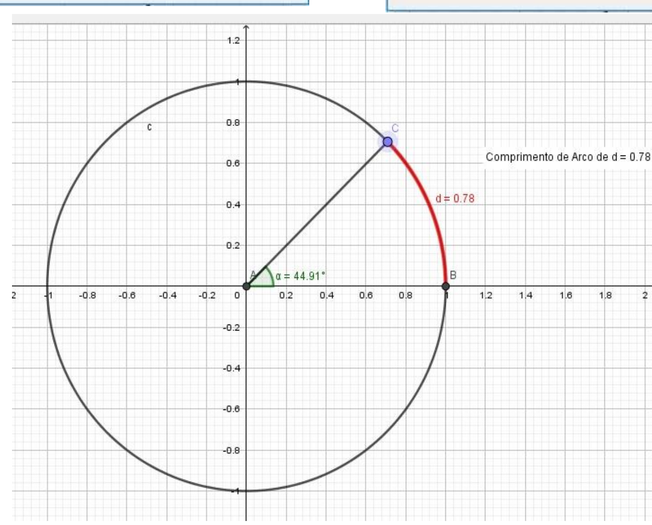
Aulas 5, 6, 7, 8 e 9 – Trigonometria no círculo trigonométrico: Seno, Cosseno e Tangente.

Nas aulas 5, 6, 7, 8 e 9, teve-se como objetivo definir as principais razões trigonométricas no círculo trigonométrico: Seno, Cosseno e Tangente, bem como visualizar a trigonometria no triângulo retângulo. As aulas foram divididas em dois momentos. No primeiro momento – que englobou as aulas 5, 6 e 7 –, foi trabalhada a construção do seno e do cosseno. A segunda parte, aulas 8 e 9, resultou na construção da tangente. Assim, para auxiliar a condução sobre o tema, foi sugerido o seguinte desenvolvimento para Seno e Cosseno (1ª parte):

> **Aulas 5, 6, 7 - Desenvolvimento elaborado pelo pesquisador:** Para ajudar a conduzir as discussões sobre o tema, sugerimos a construção:
>
> 1. Resgate o círculo trigonométrico visto na aula 3 e 4 (ou construa novamente).







2. Insira uma reta perpendicular ao eixo x, passando por C;
3. Insira uma reta perpendicular ao eixo y, passando por C;
4. Nas interseções das retas dos itens 2 e 3 com os eixos x e y, crie os pontos D e E;
5. Crie os segmentos AD e AE, EC e DC e, em seguida, oculte as retas perpendiculares criadas nos itens 2 e 3;
6. Em *propriedades* do segmento AD, engrosse o segmento e coloque na cor azul;
7. Em *propriedades* do segmento AE, engrosse o segmento e coloque na cor verde;
8. Com a ferramenta *distância*, meça a distância entre ponto A e D e distância entre pontos A e E;
9. No item 8, foram criadas duas caixas de texto: AD=…. e AE=…. . Entre em *editar* (botão direito e editar) e deixe como na figura (exemplo para AD):

Obs.: observe que na segunda caixa, definimos o valor de cosseno como sendo a abscissa do ponto D, ou seja, no GeoGebra usamos o comando x(D).

Faça o mesmo para a caixa de texto AE, colocando 'seno' e a ordenada do ponto E, ou seja, y(E).

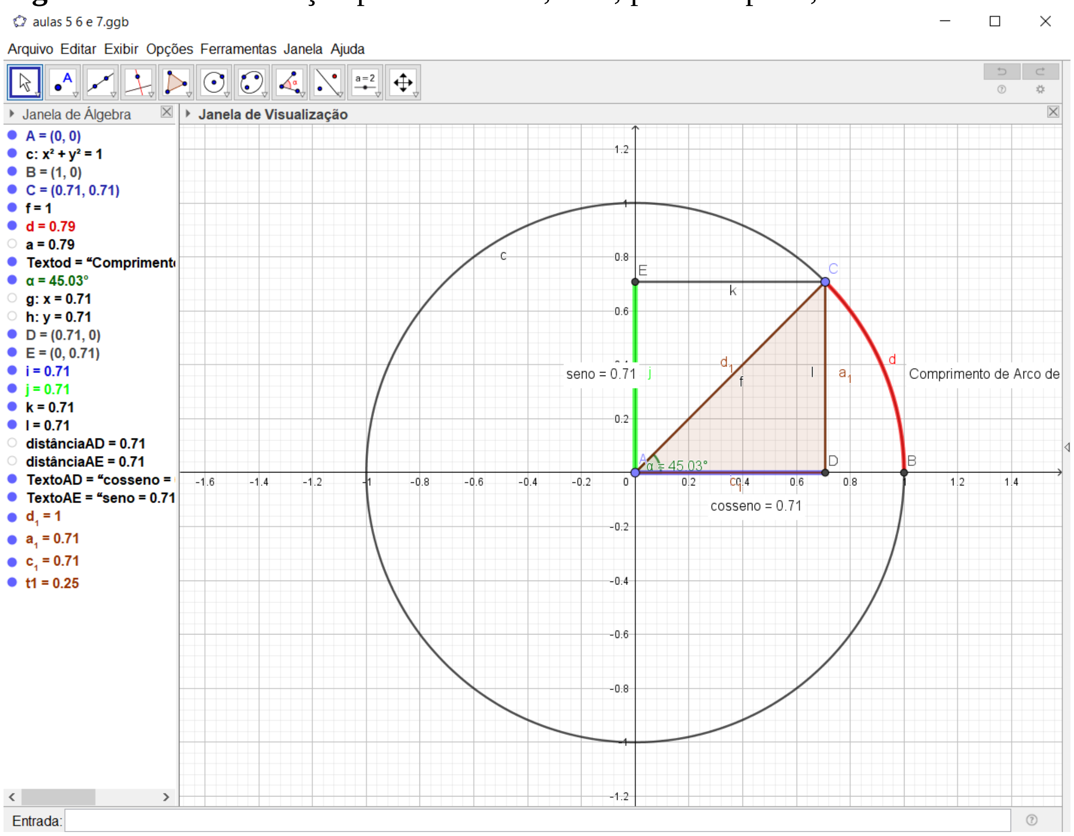
10. Com a ferramenta polígono, crie o triângulo ADC;
11. Analise o triângulo ADC, relembrando as razões trigonométricas no triângulo

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

12. Retângulo (e), conclua que seus catetos (devido a hipotenusa ser de tamanho 1) são os valores de Seno (projetado no eixo y, em verde) e Cosseno (projetado no eixo x, em azul) do ângulo DÂC.
13. Relembre o teorema de Pitágoras: $\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}_1{}^2 + \text{cateto}_2{}^2$. Com base nesse teorema, aplicando-o no triângulo retângulo ADC, conclua que $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Dessa forma, para a possível solução das aulas 5, 6, 7, destaca-se na Figura 6, a construção elaborada pelo estudante E8:

Figura 6. Possível solução para as aulas 5,6 e 7, primeira parte, estudante E8



Fonte: Elaboração E8 (2019).

Após gerar o círculo trigonométrico, os estudantes responderam a Atividade 2 que continha seis questões. Dos vinte e nove participantes, vinte acertaram todas as questões e nove erraram alguns dos itens propostos. Esta atividade possibilitou aos estudantes visualizarem, no triângulo retângulo, o lado que representava os valores do seno e do cosseno, assim como visualizar, no círculo trigonométrico, os sinais em cada quadrante do seno e do cosseno. Além disso, possibilitou determinar os valores de seno e cosseno a partir dos ângulos dados em graus e radianos e, ainda, comparar o seno e o cosseno dos diversos ângulos nos respectivos quadrantes. Na Figura 7, destacou-se o exercício resolvido pelo estudante E31:

Figura 7. Resolução da atividade 2, segunda parte, estudante E31

Atividade 2

1) Observando a construção feita no GeoGebra, responda os itens:
a) Qual segmento representa o seno do arco BC (ou ângulo BÂC)? $\overline{AE}$
b) Qual segmento representa o cosseno do arco BC (ou ângulo BÂC)? $\overline{AD}$

2) Movimente o ponto C observando o sinal de seno e cosseno. Com base nisso, preencha a tabela com "positivo" ou "negativo":

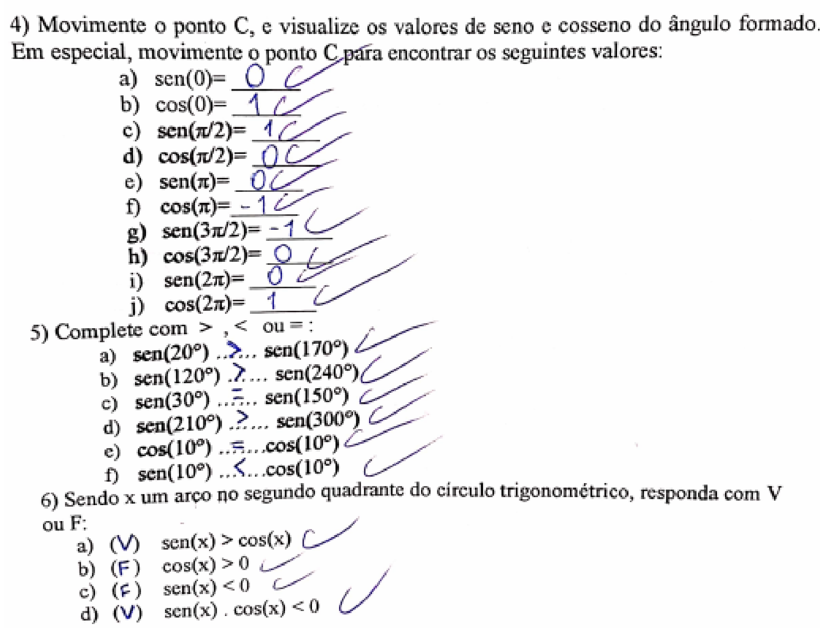
	seno	cosseno
1º quadrante	positivo	positivo
2º quadrante	positivo	negativo
3º quadrante	negativo	negativo
4º quadrante	negativo	positivo

3) Movimente o ponto C de forma a obter o seno e cosseno dos seguintes ângulos:

	seno	cosseno
30°	0.5	0.87
45°	0.71	0.71
60°	0.87	0.5
120°	0.87	-0.5
135°	0.71	-0.71
150°	0.5	-0.87
210°	-0.5	-0.87
225°	-0.71	-0.71
240°	-0.87	-0.5
300°	-0.87	0.5
315°	-0.71	0.71
330°	-0.5	0.87

Continua...

...continuação.


4) Movimente o ponto C, e visualize os valores de seno e cosseno do ângulo formado. Em especial, movimente o ponto C para encontrar os seguintes valores:

a) sen(0)= 0
b) cos(0)= 1
c) sen(π/2)= 1
d) cos(π/2)= 0
e) sen(π)= 0
f) cos(π)= -1
g) sen(3π/2)= -1
h) cos(3π/2)= 0
i) sen(2π)= 0
j) cos(2π)= 1

5) Complete com > , < ou = :

a) sen(20°) ..>... sen(170°)
b) sen(120°) .>.... sen(240°)
c) sen(30°) ..=.. sen(150°)
d) sen(210°) .>.... sen(300°)
e) cos(10°) ..=...cos(10°)
f) sen(10°) ..<...cos(10°)

6) Sendo x um arco no segundo quadrante do círculo trigonométrico, responda com V ou F:

a) (V) sen(x) > cos(x)
b) (F) cos(x) > 0
c) (F) sen(x) < 0
d) (V) sen(x) . cos(x) < 0

Fonte: Elaboração E31 (2019).

Com relação aos estudantes que erraram alguns itens da Atividade 2, observou-se que os mesmos construíram os devidos gráficos, entretanto, não souberam extrair os valores dos senos e cossenos de cada ângulo. De acordo com os erros observados dos nove alunos, alguns não conseguiram visualizar na figura o lado do triângulo que representava o seno e o cosseno, nem mesmo identificar ou comparar os valores de seno e cosseno de determinados ângulos.

A seguir, apresentou-se a segunda parte das aulas 8 e 9, relacionadas ao desenvolvimento da tangente:

2º parte - Aulas 8 e 9 - Desenvolvimento elaborado pelo pesquisador: Tangente

1) Construa novamente o círculo trigonométrico (Centro A=(0,0), B=(1,0), arco BC).
2) Insira uma reta perpendicular ao eixo x, passando por B;
3) Crie uma reta passando por A e C;
4) Na interseção das retas dos itens 2 e 3, insira o ponto D;
5) Crie o segmento AD;
6) Oculte a reta do item 3;
7) Crie o segmento BD e edite sua espessura e cor (laranja);
8) Crie o polígono com os pontos ABD e insira a medida do ângulo BÂD;

Relembre a razão trigonométrica:

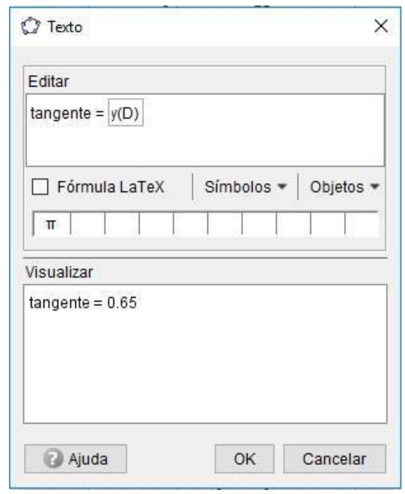
$$tg\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$$

E conclua, a partir do triângulo ABD, que devido a AB=1, temos que tan(α)=BD.

9) Movimente o ponto C e visualize os valores de tangente do ângulo formado;

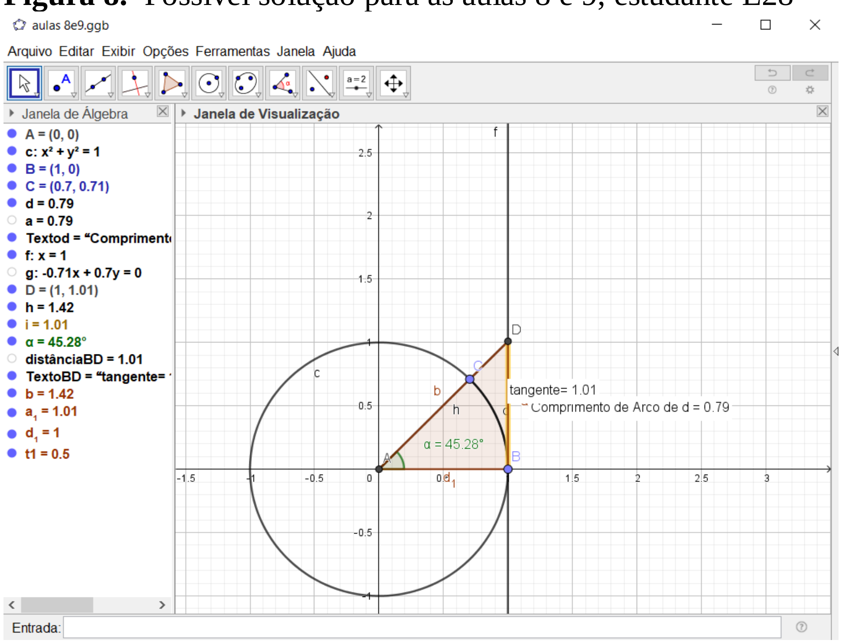
10) Com a ferramenta *distância*, meça a distância entre ponto B e D;

11) No item 11, foi criada a caixa de texto: BD=…. . Entre em editar (botão direito e editar) e deixe como na figura:



Dessa forma, para a possível solução da segunda parte, destaca-se a Figura 8, material produzido pelo estudante E28:

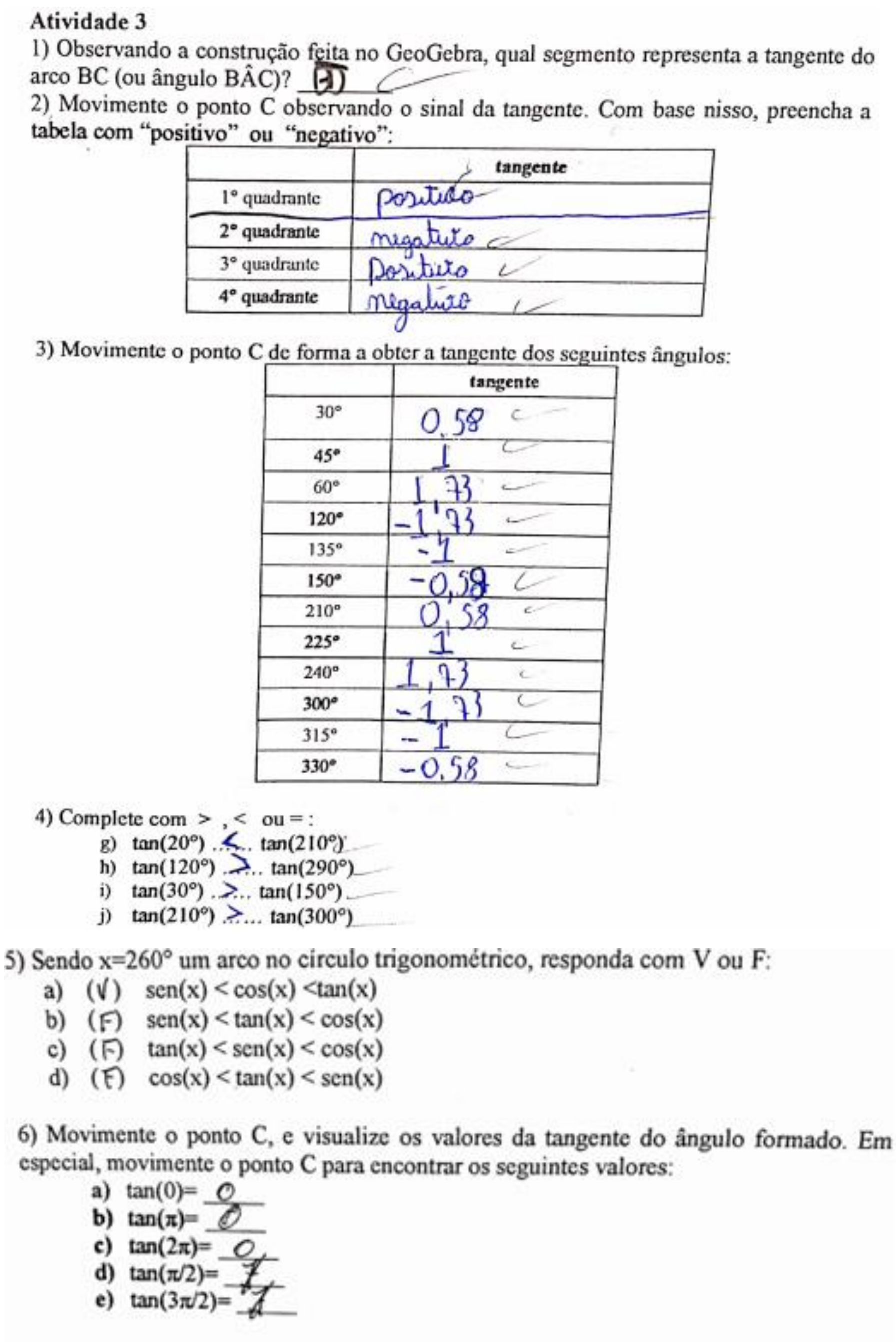
Figura 8. Possível solução para as aulas 8 e 9, estudante E28



Fonte: Elaboração E28 (2019).

Após gerar o círculo trigonométrico estudantes responderam a Atividade 3 que continha seis questões. Dos trinta e um estudantes, vinte e três acertaram todos os itens e oito erraram alguns dos itens propostos. A título de exemplo, destaca-se na Figura 9, material produzido pelo estudante E31:

Figura 9. Resolução da atividade 3, estudante E31



Atividade 3

1) Observando a construção feita no GeoGebra, qual segmento representa a tangente do arco BC (ou ângulo BÂC)? (J)

2) Movimente o ponto C observando o sinal da tangente. Com base nisso, preencha a tabela com "positivo" ou "negativo":

	tangente
1° quadrante	positivo
2° quadrante	negativo
3° quadrante	positivo
4° quadrante	negativo

3) Movimente o ponto C de forma a obter a tangente dos seguintes ângulos:

	tangente
30°	0,58
45°	1
60°	1,73
120°	-1,73
135°	-1
150°	-0,58
210°	0,58
225°	1
240°	1,73
300°	-1,73
315°	-1
330°	-0,58

4) Complete com > , < ou = :

g) tan(20°) < tan(210°)
h) tan(120°) > tan(290°)
i) tan(30°) > tan(150°)
j) tan(210°) > tan(300°)

5) Sendo x=260° um arco no círculo trigonométrico, responda com V ou F:

a) (V) sen(x) < cos(x) <tan(x)
b) (F) sen(x) < tan(x) < cos(x)
c) (F) tan(x) < sen(x) < cos(x)
d) (F) cos(x) < tan(x) < sen(x)

6) Movimente o ponto C, e visualize os valores da tangente do ângulo formado. Em especial, movimente o ponto C para encontrar os seguintes valores:

a) tan(0)= 0
b) tan(π)= 0
c) tan(2π)= 0
d) tan(π/2)= ∄
e) tan(3π/2)= ∄

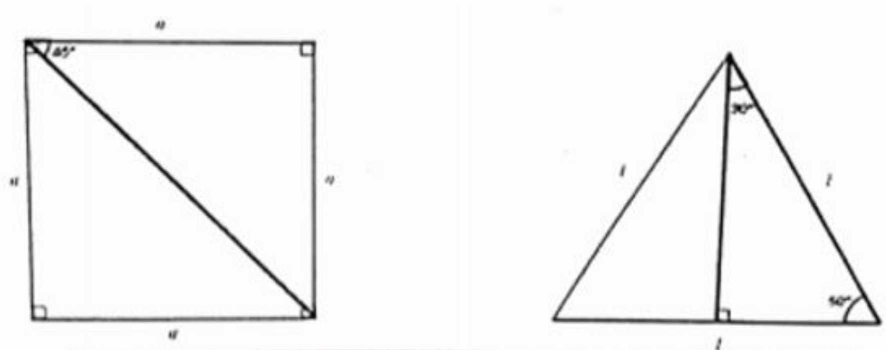
Fonte: Elaboração E31 (2019).

Na Atividade 3, foi possível observar que os estudantes conseguiram visualizar o lado do triângulo que representava a tangente, identificaram os sinais da tangente nos quatro quadrantes, conseguiram visualizar os valores da tangente de vários ângulos, bem como relacionaram a tangente de um ângulo com o seno e o cosseno e compararam o valor da tangente de um ângulo com outros ângulos.

Presumiu-se que o grupo de estudantes que acertou todas as questões conseguiu visualizar no círculo os valores da tangente de vários ângulos, bem como relacionar os valores de seno, cosseno e tangente, tanto no *software* como no cálculo manual. Esse processo investigativo desencadeia habilidades a serviço de várias competências como utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, articular conhecimentos, compreender registros, investigar e estabelecer conjecturas que são competências específicas de Matemática e suas tecnologias, de acordo com a BNCC.

A experiência dos estudantes com a manipulação do círculo trigonométrico no *software* permitiu, ainda, a obtenção de valores de seno, cosseno e tangente, porém, sob a forma de números decimais aproximados. Assim, para que os estudantes também pudessem encontrar valores de seno, cosseno e tangente por meio do cálculo manual, foi apresentada uma tabela, conforme destacado na Figura 10, nos quais chamaremos de arcos notáveis 30º, 45 º e 60 º. O exercício resolvido pelo estudante E31 foi:

Figura 10. Resolução da atividade 3, estudante E31



Arcos	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaboração E31 (2019).

Para trabalhar os conceitos de seno, cosseno e tangente, por meio do cálculo manual, construiu-se um quadrado e deste retirou-se dois triângulos retângulos isósceles e, a partir do triângulo equilátero, retirou-se dois triângulos retângulos e aplicaram as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Dessa forma, foi possível determinar os valores de seno, cosseno e tangente de 30º, 45º e 60º.

Considerando os estudantes que cometeram algum erro, tanto por meio do uso do *software* como por meio do cálculo manual, observou-se que visualizaram de forma incorreta, no círculo, os valores da tangente de vários ângulos, não conseguindo relacionar os valores de seno, cosseno e tangente no *software* nem com o cálculo manual.

Os erros detectados foram considerados, pelo pesquisador, como ferramentas futuras para o aprendizado. Segundo Perrenoud (1999), o erro revela os mecanismos do pensamento do aprendiz, o que fornece um elemento importante para o trabalho didático.

Aulas 10 e 11: Explorando simetrias no círculo trigonométrico (2 aulas de 50 min cada).

Nas aulas 10 e 11, teve-se como objetivo usar as simetrias do círculo trigonométrico para relacionar seno, cosseno e tangente entre ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes, comparando-os com os ângulos do primeiro quadrante, assim como, reconhecer, via congruência de triângulos, as simetrias e, posteriormente, comparar seno, cosseno e tangente destes ângulos "simétricos". Para a execução desta proposta, os estudantes receberam o material contendo o planejamento das aulas:

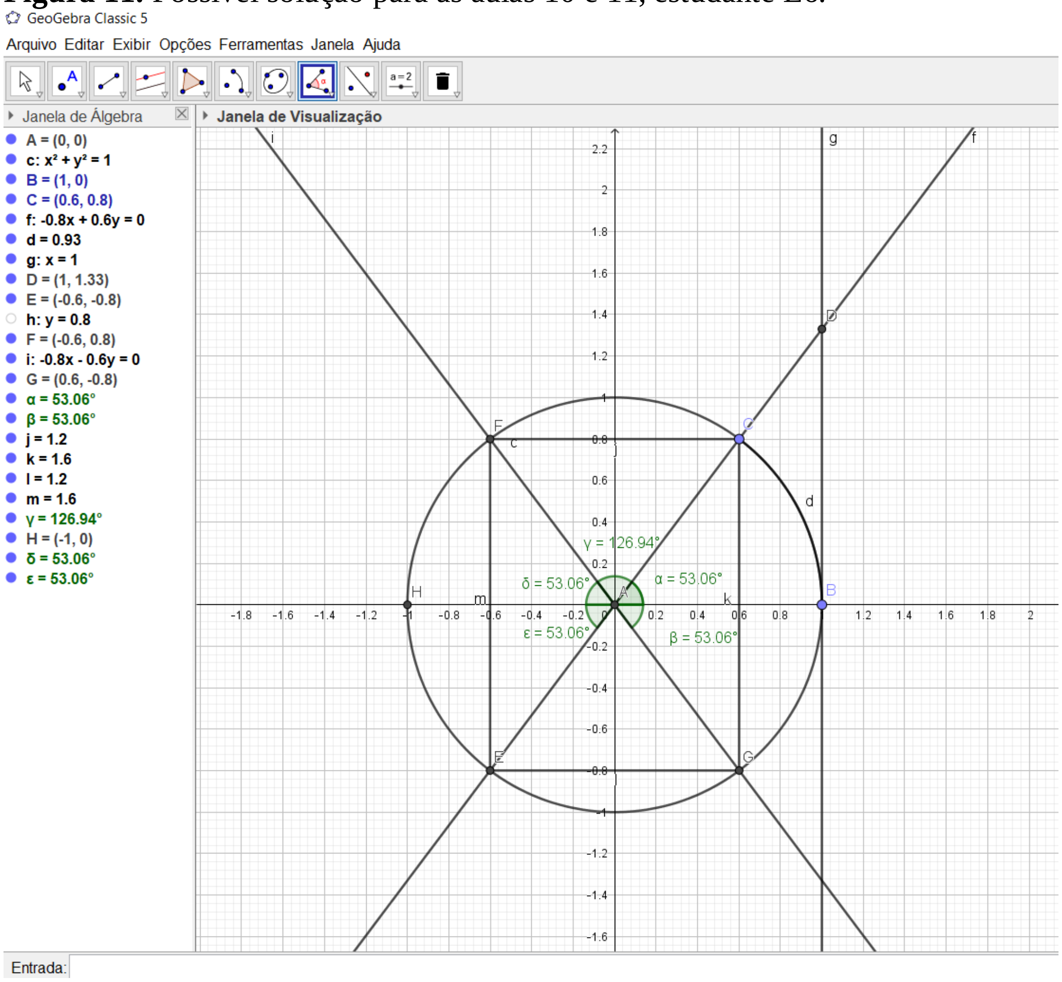
Desenvolvimento elaborado pelo pesquisador: Para se chegar à discussão sobre as simetrias, observou-se os seguintes passos, proporcionando a reflexão:

1) Construa novamente o círculo trigonométrico (Centro A=(0,0), B=(1,0), arco BC);
2) Insira a reta que passa por A e C;
3) Insira o ponto D, como interseção da reta do item 2 com a reta auxiliar, onde se visualiza a tangente;
4) Insira o ponto E como interseção da reta do item 2 com a circunferência (já temos uma dessas interseções que é o ponto C);
5) Insira uma reta paralela ao eixo x que passe por C e nomeie como F, a interseção dessa reta com a circunferência;
6) Insira a reta que passa por F e A e nomeie como G a interseção dessa reta com a circunferência;
7) Meça o ângulo BÂC e BÂG e observe a congruência;
8) Crie os segmentos: CF, FE, EG e CG (oculte a reta que passa por F e C);
9) Movimente o ponto C para visualizar vários ângulos congruentes;
10) Meça o ângulo BÂF;

11) Crie o ponto H (-1,0) e meça os ângulos FÂH, HÂE e GÂB.

Dessa forma, para a possível solução das aulas 10 e 11, destaca-se a Figura 11, elaborada pelo estudante E6:

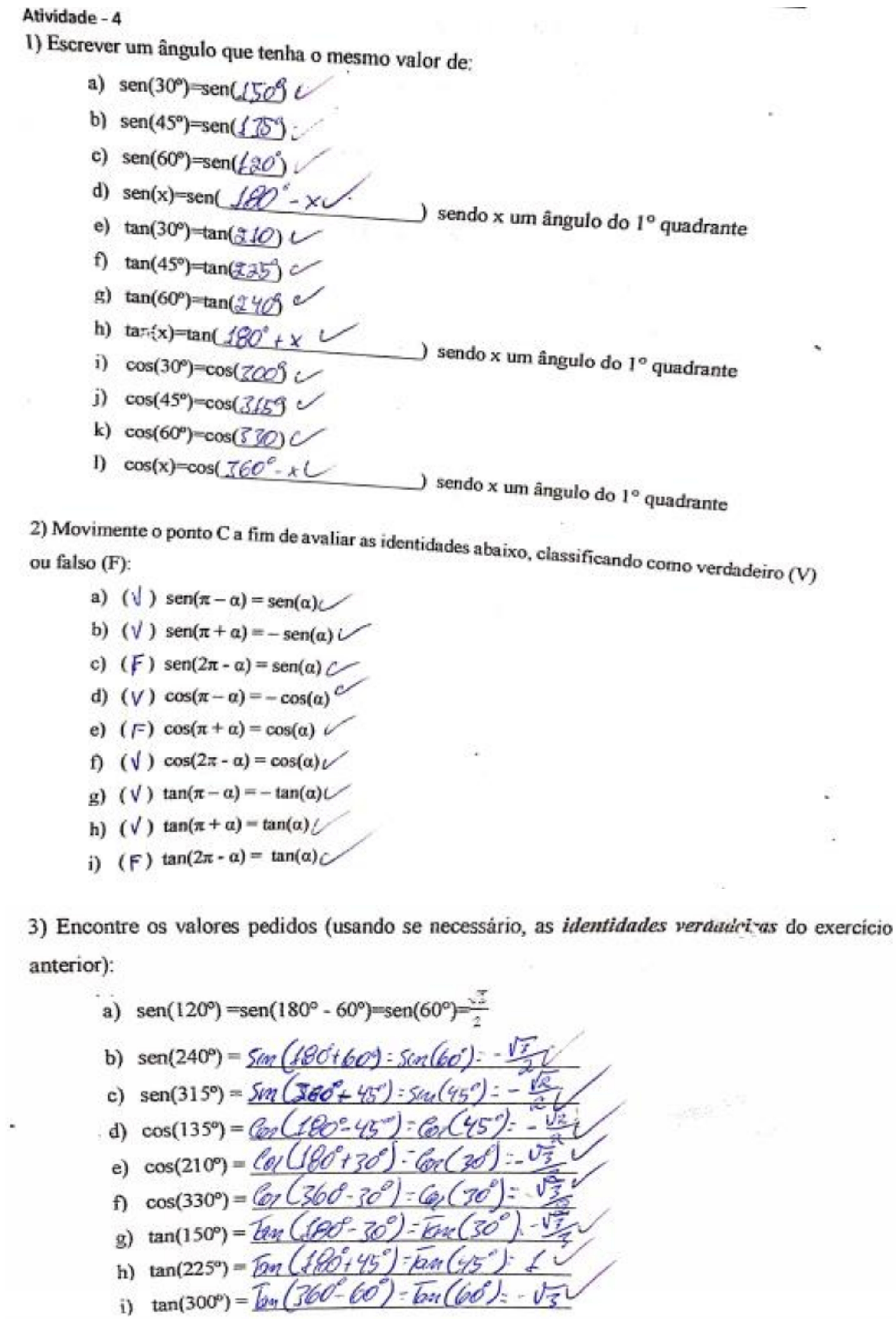
Figura 11. Possível solução para as aulas 10 e 11, estudante E6.



Fonte: Elaboração E6 (2019).

Essa atividade possibilitou estabelecer a simetria entre o primeiro e os demais quadrantes (segundo, terceiro e quarto) para o seno, cosseno e tangente em relação ao eixo vertical, horizontal e ao centro do círculo trigonométrico. Em seguida, os estudantes foram orientados a movimentar o ponto C na Figura 11, a fim de observar e comparar a variação do ângulo do primeiro com os demais quadrantes, bem como a sua simetria. Destaca-se, na Figura 12, a resolução do estudante E32.

Figura 12. Resolução da atividade 4, estudante E32



Atividade - 4

1) Escrever um ângulo que tenha o mesmo valor de:

a) sen(30°)=sen(150°)
b) sen(45°)=sen(135°)
c) sen(60°)=sen(120°)
d) sen(x)=sen(180° - x) sendo x um ângulo do 1° quadrante
e) tan(30°)=tan(210)
f) tan(45°)=tan(225°)
g) tan(60°)=tan(240°)
h) tan(x)=tan(180° + x) sendo x um ângulo do 1° quadrante
i) cos(30°)=cos(300°)
j) cos(45°)=cos(315°)
k) cos(60°)=cos(330)
l) cos(x)=cos(360° - x) sendo x um ângulo do 1° quadrante

2) Movimente o ponto C a fim de avaliar as identidades abaixo, classificando como verdadeiro (V) ou falso (F):

a) (V) $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$
b) (V) $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}(\alpha)$
c) (F) $\text{sen}(2\pi - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$
d) (V) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
e) (F) $\cos(\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$
f) (V) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$
g) (V) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
h) (V) $\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
i) (F) $\tan(2\pi - \alpha) = \tan(\alpha)$

3) Encontre os valores pedidos (usando se necessário, as ***identidades verdadeiras*** do exercício anterior):

a) sen(120°) =sen(180° - 60°)=sen(60°)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) sen(240°) = Sen (180°+60°) = Sen(60°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) sen(315°) = Sen (360° + 45°) = Sen(45°) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) cos(135°) = Cos (180° - 45°) = Cos(45°) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) cos(210°) = Cos (180° + 30°) = Cos(30°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
f) cos(330°) = Cos (360° - 30°) = Cos(30°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
g) tan(150°) = Tan (180° - 30°) = Tan(30°) = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
h) tan(225°) = Tan (180° + 45°) = Tan(45°) = 1
i) tan(300°) = Tan (360° - 60°) = Tan(60°) = $-\sqrt{3}$

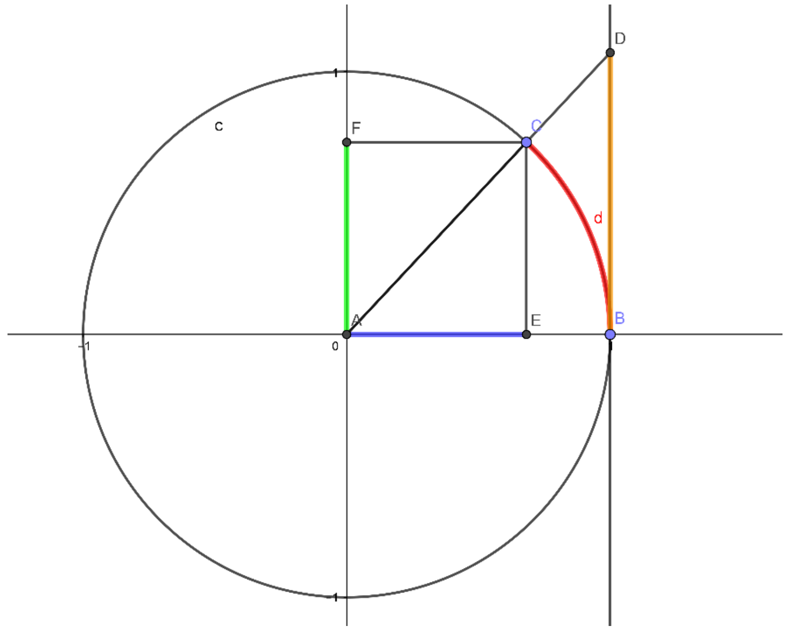
Fonte: Elaboração E32 (2019).

Dos trinta e dois alunos presentes nessas aulas, vinte e cinco acertaram todos os itens propostos e sete erraram alguns dos itens. Gerar o círculo trigonométrico possibilitou que os discentes compreendessem a relação entre os ângulos e seus correspondentes nos diversos quadrantes do círculo trigonométrico, bem como lhes permitiu constatar os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos simétricos.

Aulas 12, 13 e 14: Definição das funções sen(x), cos(x) e tan(x) (3 aulas de 50 min cada).

As aulas 12, 13 e 14 tiveram como objetivo não só a compreensão da construção das funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico, mas também da relação do comprimento do arco (radiano) com a projeção em cada eixo coordenado – eixo x, no caso do cosseno, eixo y no caso do seno e reta auxiliar, no caso da tangente – e, ainda, o aprendizado de como visualizar essa relação graficamente. Vale-se ressaltar que o passo 11 do desenvolvimento desse material serviu de aporte para a Atividade 5.

> **Desenvolvimento elaborado pelo pesquisador:** Para realizar essa atividade os alunos deverão seguir os seguintes passos:
>
> 1. Construa novamente o círculo trigonométrico (Centro A=(0,0), B=(1,0), arco BC);
> 2. Insira a reta que passa por A e C;
> 3. Insira uma reta perpendicular ao eixo x, passando por B;
> 4. Insira o ponto D, como interseção da reta do item 2 com a reta auxiliar (do item 3) onde visualizamos a tangente;
> 5. Insira uma reta paralela ao eixo y que passe por C e nomeie como E, a interseção dessa reta com o eixo x;
> 6. Insira uma reta paralela ao eixo x que passe por C e nomeie como F, a interseção dessa reta com eixo y;
> 7. Crie os segmentos AD e AE, AF, EC, CF e BD e em seguida oculte as retas perpendiculares criadas nos itens 2 e 3;
> 8. Em *propriedades* do segmento AE, engrosse o segmento e coloque na cor azul;
> 9. Em *propriedades* do segmento AF, engrosse o segmento e coloque na cor verde;
> 10. Em *propriedades* do segmento BD e edite sua espessura e cor (laranja);



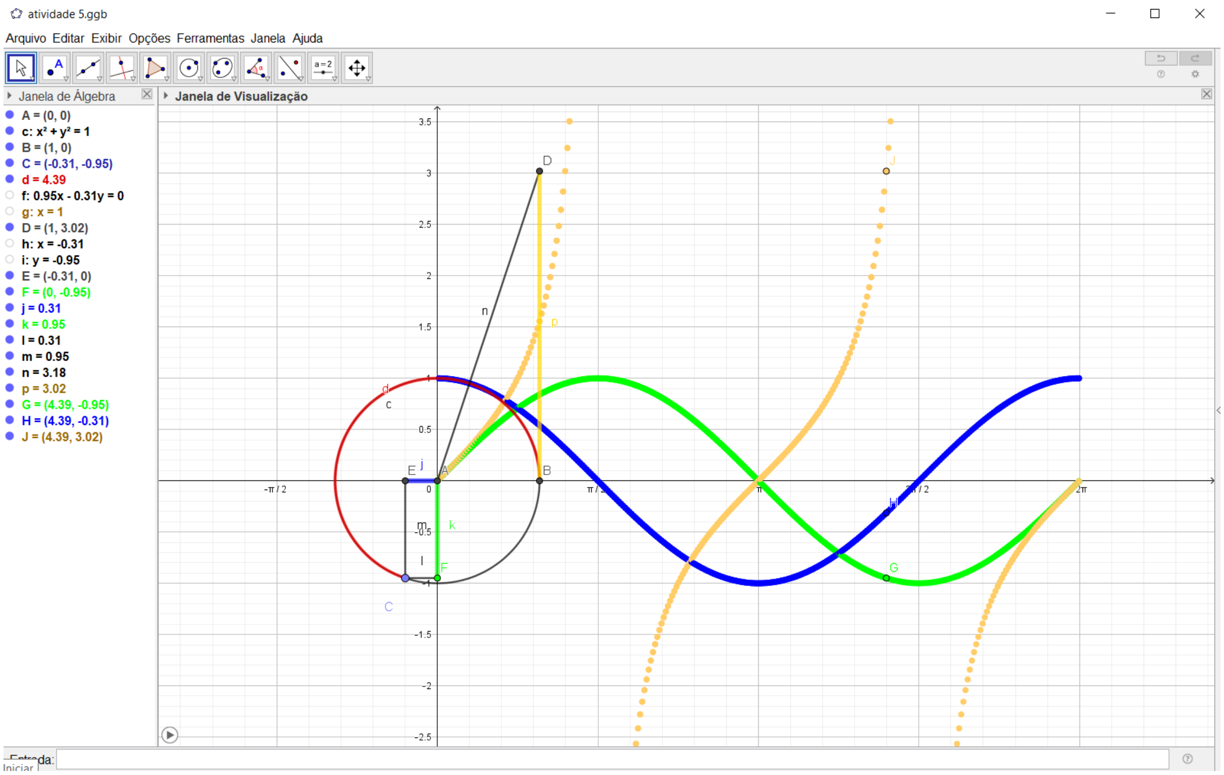
11. Na caixa de entrada, vamos criar um ponto que chamaremos de G. A sintaxe de criação de ponto na ***caixa de entrada*** é sempre da forma: G=(coordenada x do ponto , coordenada y do ponto). Crie um ponto com o seguinte comando: G=(d , y(F)). O Ponto G foi criado usando o comprimento do arco d como sendo sua abscissa e a coordenada y do ponto F, como sendo sua ordenada (que é o respectivo valor do seno desse arco);
12. Entre nas *propriedades* do ponto G e habilite a função "Rastro". Isso fará com que o ponto G ao ser movido, deixe um rastro, que será o gráfico da função seno;
13. Por fim, volte ao ponto C e em suas *propriedades*, habilite "animar"
14. Trace duas retas paralelas ao eixo x e passando pelos pontos 1 e -1 do eixo y. Observe que o gráfico da função seno fica entre essas retas construídas no passo 5. Isso significa que a imagem da função seno está limitada ao intervalo [1, 1].

Nos estudos de Gravina (2001), no que se refere ao uso da tecnologia como recurso de ensino, a autora relata que os ambientes de Geometria Dinâmica são ferramentas informáticas que permitem a construção de objetos geométricos a partir das definições das propriedades. Em consonância às pesquisas da autora, apresentou-se o material que possibilitou a geração do gráfico de cada função, relacionando o comprimento do arco com o seno, o cosseno e a tangente do ângulo. A partir da construção dos estudantes para a resolução da Atividade 5, destaca-se o gráfico do estudante E35.

Atividade 5

Repita o procedimento análogo (a partir do item 11) para criar a função cosseno e tangente, fazendo as análises a partir da criação dos pontos, no caso do cosseno H= (d, x(E)) e da tangente, J=(d , y(D)). Tem-se como resultado a Figura 13, construída pelo estudante E35:

Figura 13. Resolução da Atividade 5, estudante E35



Fonte: Elaboração E35 (2019).

Pela dinâmica da atividade e, provavelmente, em decorrência da construção e da animação do gráfico, observou-se o envolvimento e participação dos estudantes. Dos trinta e um estudantes participantes, todos conseguiram realizar a atividade proposta. Os estudantes puderam perceber que ambos os gráficos poderiam ser construídos ao mesmo tempo, em diversas tonalidades de cores e com movimento, o que o tornou atrativo e diferente o trabalho nas aulas de Matemática por meio do *software*.

Elaborar a sequência didática, acompanhar os alunos individualmente, foi imprescindível para a obtenção de um resultado satisfatório. Conforme apontam os estudos de Maia (2013), a utilização do *software* contribui para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos estudados.

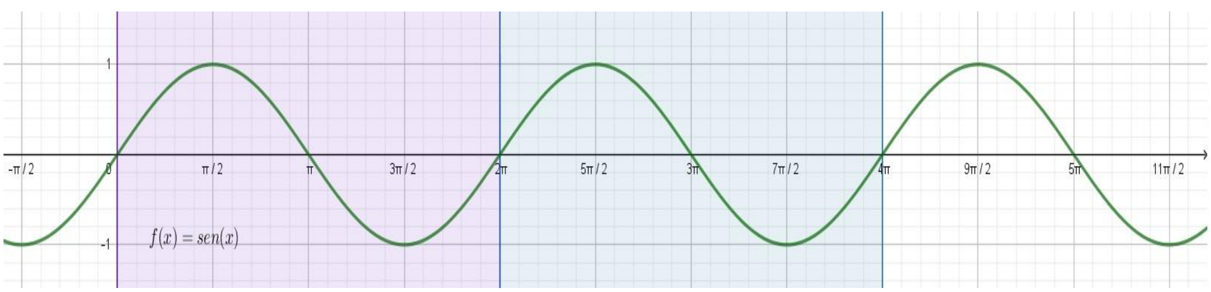
Aula 15 e 16: Alguns gráficos das funções sen(x), cos(x) e tan(x) e suas características (1 aula de 50 min).

Nas aulas 15 e 16, teve-se como objetivo construir e visualizar por meio do *software* o comportamento das funções seno, cosseno e tangente. Além disso, visava-se determinar o domínio, a imagem e o período de cada função. Assim, houve necessidade de abordar os conceitos de domínio, imagem e período das respectivas funções. Como o estudo de período era algo novo a ser trabalhado, foi imprescindível explorar seu conceito e sua representação gráfica. Segundo Iezzi (2016, p. 49): "Uma função f: A→ B é periódica se existir um número real positivo **p** tal que f(x) = f(x+p), ∀x ϵ A. O menor valor positivo de **p** é chamado de **período** de **f**".

Em relação ao conceito de período, destacou-se seu entendimento por meio da seguinte estratégia:

Observe a Figura 14, a função *f(x)=sen(x)* possui período igual a 2π.

Figura 14. Gráfico da função f(x)=sen(x) e seu período



Fonte: Elaboração do autor (2019).

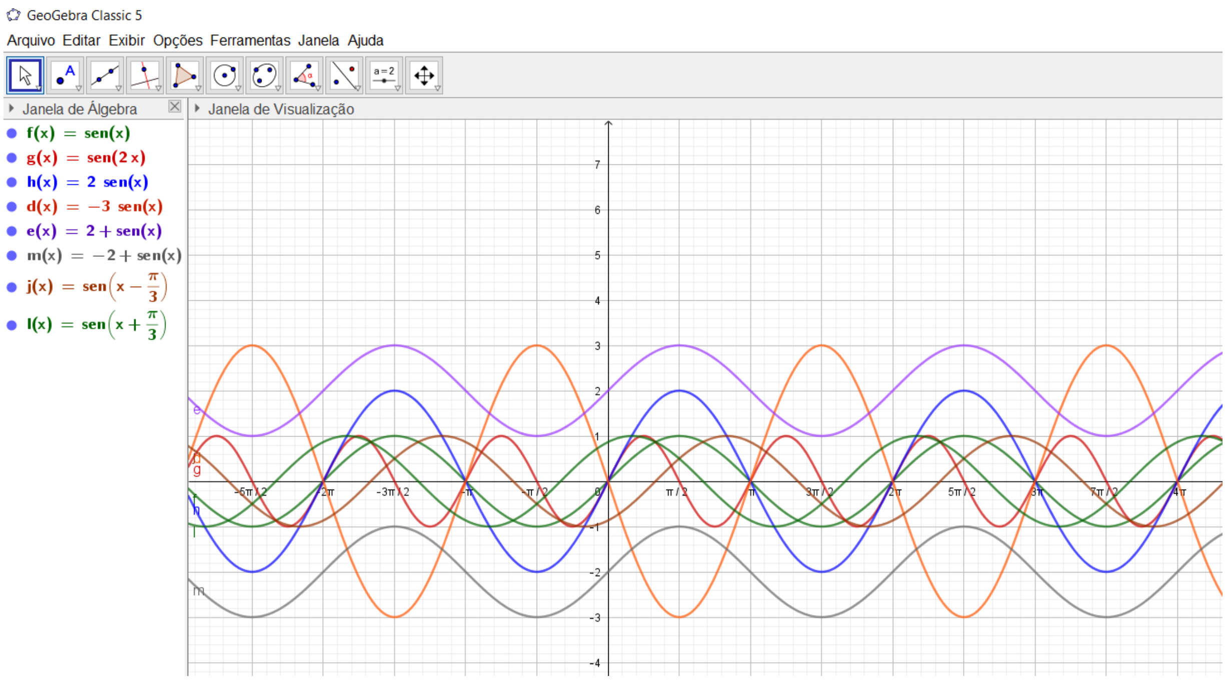
A construção do gráfico por meio do *software* possibilitou visualizar qual é o espaço que representou o período por meio das cores lilás e verde. Para possibilitar essa compreensão, segue a atividade proposta que deve ser desenvolvida por cada estudante. Destaca-se a Atividade 6, do E 13:

Atividade 6

Com o auxílio do GeoGebra, construa os gráficos das funções e, a partir desses, encontre o que se pede:

Para possível solução da atividade 6, letra a, destaca-se a Figura 15, do estudante E20:

Figura 15. Possível solução para atividade 6, letra a, estudante E20



Com o auxílio do GeoGebra, construa o gráfico das funções e partir desses, encontre o que se pede:

a) função seno:

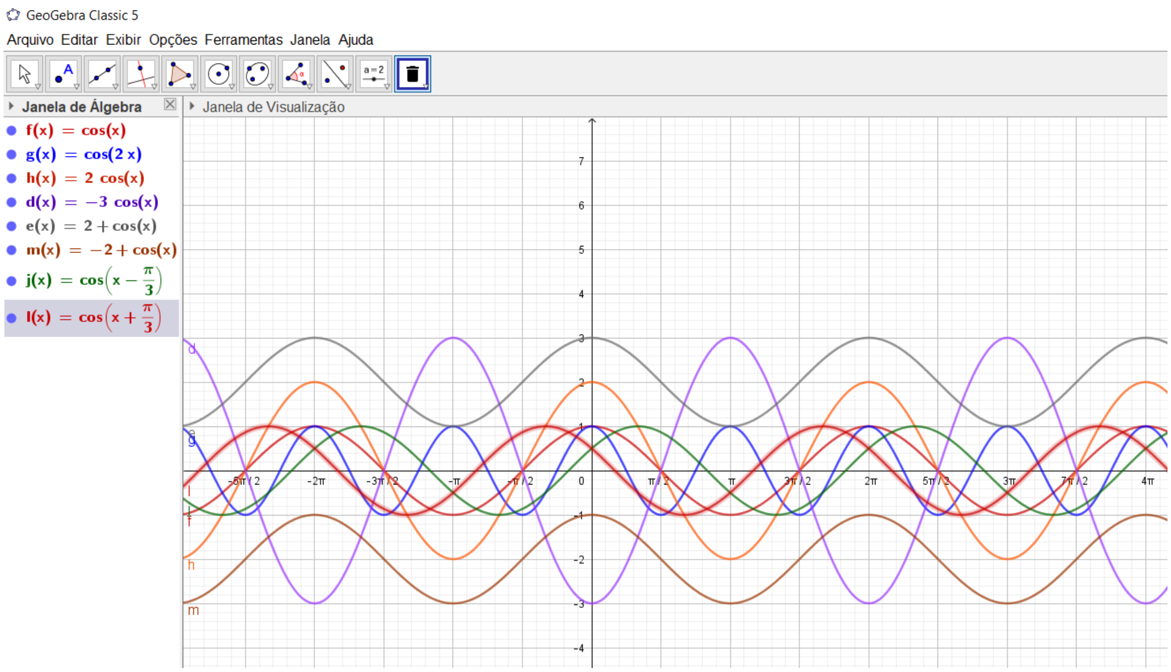
	Domínio	Imagem	Período
f(x)=sen(x)	Df = R	Imf [-1, 1]	2π
f(x)=sen(2x)	Df = R	Imf [-1, 1]	π
f(x)=2sen(x)	Df = R	Imf [-2, 2]	2π
f(x)=-3sen(x)	Df = R	Imf [-3, 3]	2π
f(x)=2+sen(x)	Df = R	Imf [1, 3]	2π
f(x)=-2+sen(x)	Df = R	Imf [-3, -1]	2π
f(x)=sen(x - π/3)	Df = R	Imf [-1, 1]	2π
f(x)=sen(x + π/3)	Df = R	Imf [-1, 1]	2π

Fonte: Elaboração E20 (2019).

Atividade 6, letra b.

Para possível solução da atividade 6, letra b, destaca-se a Figura 16, do estudante E22:

Figura 16. Resolução da atividade 6, letra b, estudante E22



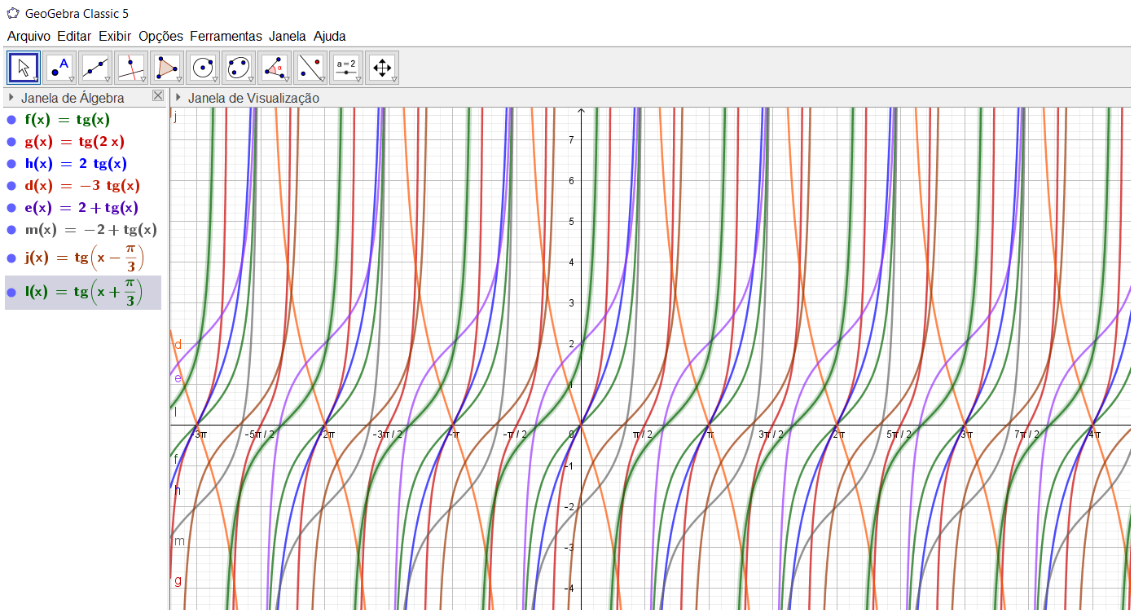
b) Função cosseno:

	Dominio	Imagem	Período
$f(x)=\cos(x)$	Df = R	Imf [-1, 1]	2π
$f(x)=\cos(2x)$	Df = R	Imf [-1, 1]	π
$f(x)=2\cos(x)$	Df = R	Imf [-2, 2]	2π
$f(x)=-3\cos(x)$	Df = R	Imf [-3, 3]	2π
$f(x)=2+\cos(x)$	Df = R	Imf [+3, +1]	2π
$f(x)=-2+\cos(x)$	Df = R	Imf [-3, -1]	2π
$f(x)=\cos(x-\pi/3)$	Df = R	Imf [-1, 1]	2π
$f(x)=\cos(x+\pi/3)$	Df = R	Imf [-1, 1]	2π

Fonte: Elaboração E22 (2019).

Atividade 6, letra c.

Figura 17. Resolução da atividade 6, letra c, estudante E14



c) Função tangente:

	Domínio	Imagem	Período
$f(x)=tan(x)$	$Df = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$Im f = \mathbb{R}$	π
$g(x)=tan(2x)$	$Df = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}$	$Im f = \mathbb{R}$	$\pi/2$
$h(x)=2tan(x)$	$Df = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$Im f = \mathbb{R}$	π
$d(x)=-3tan(x)$	$Df = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$Im f = \mathbb{R}$	π
$e(x)=2+tan(x)$	$Df = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$Im f = \mathbb{R}$	π
$m(x)=-2+tan(x)$	$Df = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$Im f = \mathbb{R}$	π
$J(x)=tan(x - \pi/3)$	$Df = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$Im f = \mathbb{R}$	π
$l(x)=tan(x + \pi/3)$	$Df = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$Im f = \mathbb{R}$	π

Fonte: Elaboração E14 (2019).

Observa-se que os alunos não tiveram dificuldades para construir os gráficos das funções por meio do *software*, entretanto, tiveram problemas com relação à análise do gráfico. Dos trinta e dois participantes, 20 conseguiram analisar corretamente os respectivos valores do domínio, da imagem e do período.

Com relação aos alunos que cometeram algum erro na atividade proposta, percebeu-se que os doze alunos, embora tenham construído corretamente os gráficos, tiveram dificuldade na interpretação dos mesmos, sendo uma das hipóteses para essa dificuldade o fato de não conseguirem realizar a análise em razão de não se terem apropriado dos conceitos.

Destaca-se a importância de o docente não apenas detectar a presença do erro, de não fazer uma mera certificação desse erro enquanto um elemento de incompetência do estudante, pois é fundamental seu uso reconstrutivo:

> Aprender não é primeiramente memorizar, estocar informações, mas reestruturar seu sistema de compreensão de mundo. Tal reestruturação não acontece sem um importante trabalho cognitivo. Engajando-se nela, restabelece-se um equilíbrio rompido, dominando melhor a realidade de maneira simbólica e prática (PERRENOUD, 2000, p. 30).

Assim, não basta apenas corrigir o erro, pois é importante fazer com que o estudante possa perceber sua ocorrência, identificar sua origem e superar o obstáculo que lhe deu causa.

Aulas 17, 18, 19, 20, 21 e 22: Alterações da função seno, cosseno e tangente (6 aulas de 50 min cada).

Nas aulas 17, 18, 19, 20, 21 e 22 teve-se como objetivo, estudar os efeitos da inserção de coeficientes nas funções seno, cosseno e tangente e manipular essas funções no GeoGebra, com a ajuda de controles deslizantes para melhor visualizar os efeitos dos parâmetros. Para tanto, seguiu-se o seguinte desenvolvimento para cada função.

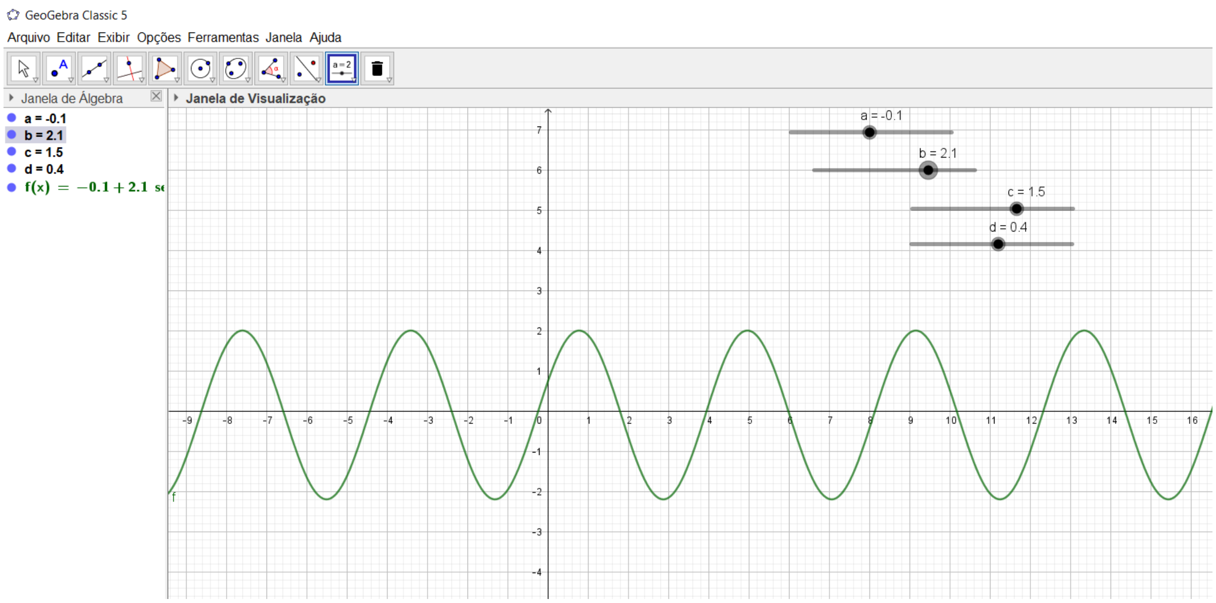
> **Desenvolvimento elaborado pelo pesquisador: função seno**
>
> (1) No ícone *controle deslizante*, insira 4 controles deslizantes; a, b, c e d;
>
> (2) No campo de entrada do GeoGebra, digite: f(x)=a+b*sen(c*x+d);
>
> (3) Mexa em cada controle deslizante em separado para visualizar muito claramente a sua influência;
>
> (4) No campo de entrada, digite: *período=(2*pi)/abs(c)*. Isso cria uma variável que calcula o período da função seno. Observe que esse comando na verdade é igual a $\frac{2\pi}{|c|}$, que é o período;
>
> (5) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0** e observe o gráfico da função (com esses parâmetros, temos f(x)=sen(x));
>
> (6) Mexa o controle deslizante **a** e observe o que acontece com o gráfico da função; (translação vertical);
>
> (7) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **b** e observe o que acontece com o gráfico da função; (Ampliação/compressão vertical);
>
> (8) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **c** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão horizontal). Ao mexer no controle **c,** observe também a variável *período* criada no item 4;

(9) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **d** e observe o que acontece com o gráfico da função (translação horizontal);

(10) Os coeficientes **a, b, c** e **d** provocam alterações na função seno. Relacione cada coeficiente com a respectiva alteração no gráfico;

A partir da sequência apresentada, destaca-se a Figura 18, elaborada pelo estudante E9:

Figura 18. Possível solução para a função seno, estudante E9



Alteração no gráfico	Coeficiente
Ampliação/compressão vertical	b
Translação vertical	a
Ampliação/compressão horizontal	c
Translação horizontal	d

Fonte: Elaboração E9 (2019).

Desenvolvimento elaborado pelo pesquisador: função cosseno

(1) No ícone *controle deslizante*, insira 4 controles deslizantes; a, b, c e d;

(2) No campo de entrada do GeoGebra, digite: f(x)=a+b*cos(c*x+d);

(3) Mexa em cada controle deslizante em separado para visualizar muito claramente a sua influência;

(4) No campo de entrada, digite: *período=(2*pi)/abs(c)*. Isso cria uma variável que calcula o período da função cosseno. Observe que esse comando na verdade é igual a $\frac{2\pi}{|c|}$, que é o período;

(5) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0** e observe o gráfico da função (com esses parâmetros, temos f(x)=cos(x));

(6) Mexa o controle deslizante **a** e observe o que acontece com o gráfico da função; (translação vertical);

(7) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **b** e observe o que acontece com o gráfico da função; (Ampliação/compressão vertical);

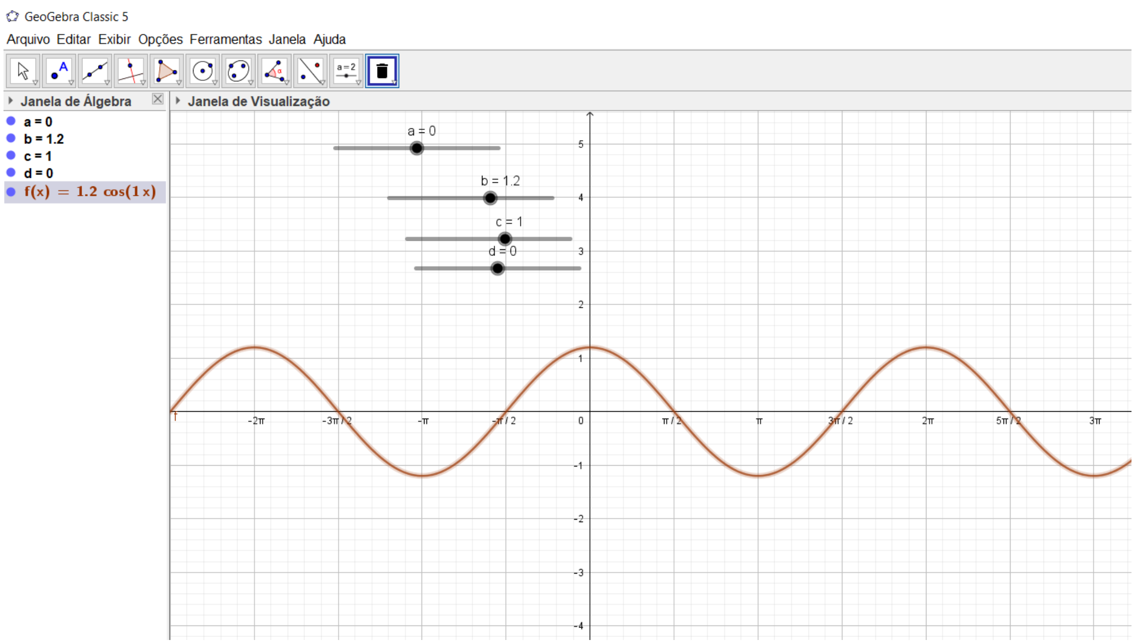
(8) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **c** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão horizontal). Ao mexer no controle **c,** observe também a variável *período* criada no item 4;

(9) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **d** e observe o que acontece com o gráfico da função (translação horizontal);

(10)Os coeficientes **a, b, c** e **d** provocam alterações na função seno. Relacione cada coeficiente com a respectiva alteração:

A partir da sequência apresentada, destaca-se a Figura 19, elaborada pelo estudante E8:

Figura 19. Possível solução para a função cosseno, estudante E8



Alteração no gráfico	Coeficiente
Ampliação/compressão vertical	b
Translação vertical	a
Ampliação/compressão horizontal	c
Translação horizontal	d

Fonte: Elaboração E8 (2019).

Desenvolvimento elaborado pelo pesquisador: função tangente

(1) No ícone *controle deslizante*, insira 4 controles deslizantes; a, b, c e d;

(2) No campo de entrada do GeoGebra, digite: f(x)=a+b*tan(c*x+d);

(3) Mexa em cada controle deslizante em separado para visualizar muito claramente a sua influência;

(4) No campo de entrada, digite: *período=(pi)/abs(c)*. Isso cria uma variável que calcula o período da função tangente. Observe que esse comando na verdade é igual a $\frac{\pi}{|c|}$, que é o período;

(5) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0** e observe o gráfico da função (com esses parâmetros, temos f(x)=tan(x));

(6) Mexa o controle deslizante **a** e observe o que acontece com o gráfico da função; (translação vertical);

(7) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **b** e observe o que acontece com o gráfico da função; (Ampliação/compressão vertical)

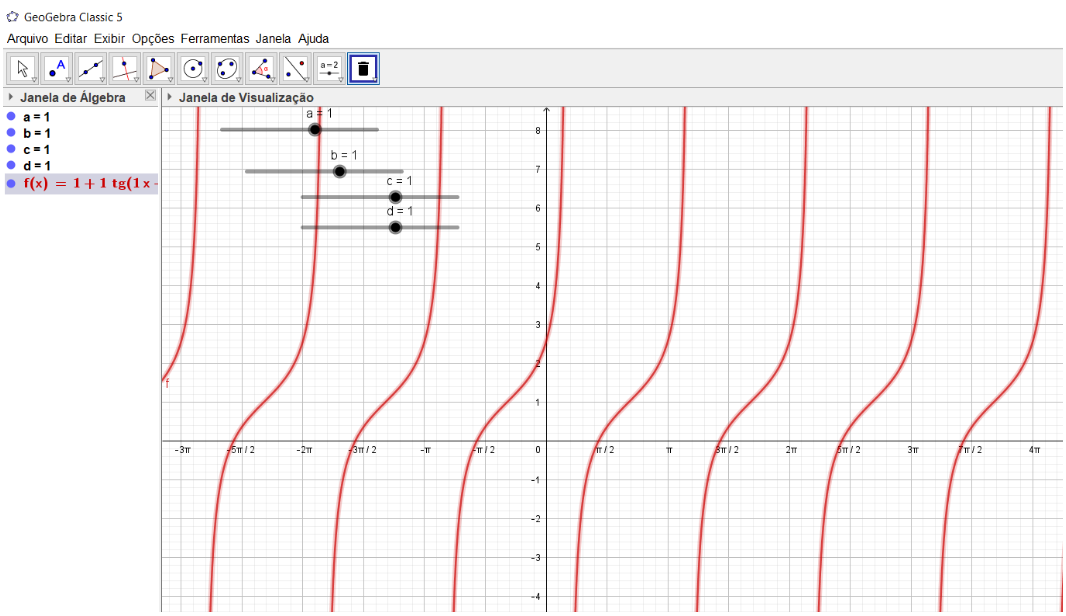
(8) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **c** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão horizontal). Ao mexer no controle **c,** observe também a variável *período* criada no item 4;

(9) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **d** e observe o que acontece com o gráfico da função (translação horizontal);

(10) Os coeficientes **a, b, c** e **d** provocam alterações na função seno. Relacione cada coeficiente com a respectiva alteração:

A partir da sequência apresentada, destaca-se a Figura 20, elaborada pelo estudante E33:

Figura 20. Possível solução para a função tangente, estudante E33



Alteração no gráfico	Coeficiente
Ampliação/compressão vertical	b
Translação vertical	a
Ampliação/compressão horizontal	c
Translação horizontal	d

Fonte: Elaboração E33 (2019).

OBS. Repare que, para o caso da função tangente, temos o período igual a $\frac{\pi}{|c|}$, diferentemente do caso de seno e cosseno que é: $\frac{2\pi}{|c|}$.

Após o desenvolvimento das aulas, os estudantes foram orientados a realizar a Atividade 7. Essa atividade consistiu na construção e análise dos gráficos nas diversas funções.

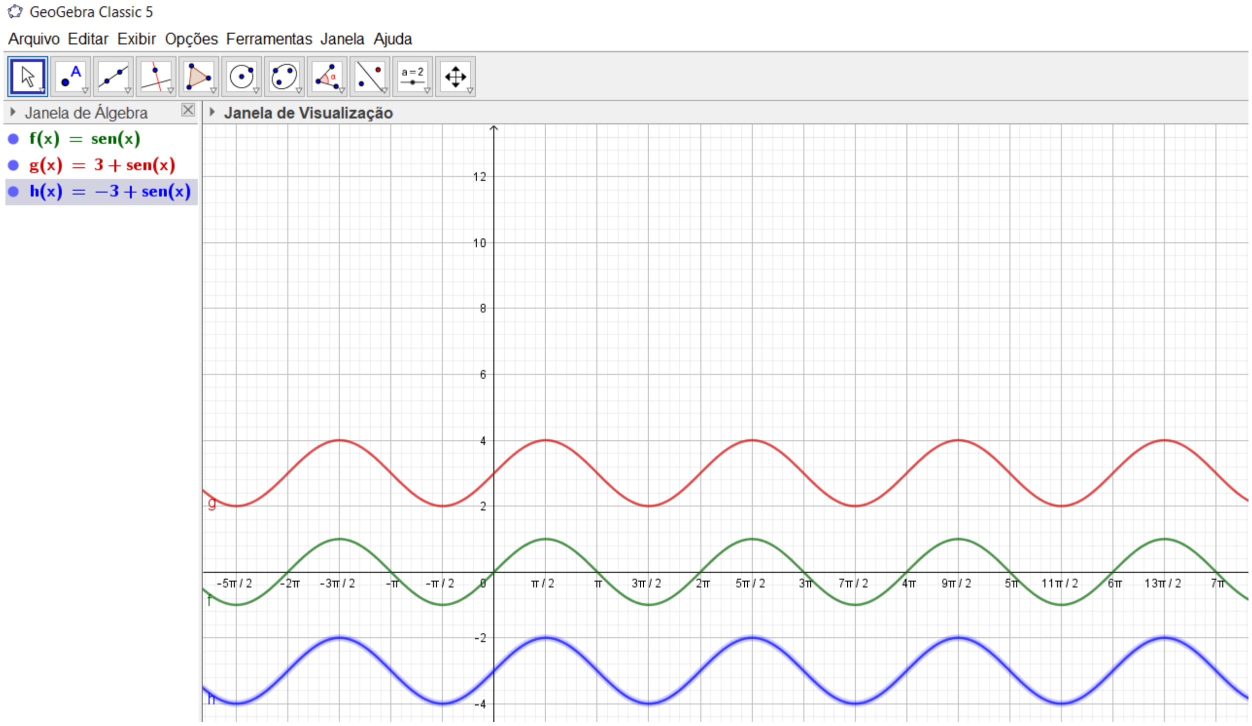
Atividade 7

1) Com auxílio do GeoGebra, faça o gráfico de f, g, h e t no mesmo plano cartesiano e responda as questões:

a) f(x)=sen(x), g(x)=3+sen(x), h(x)=-3+sen(x)

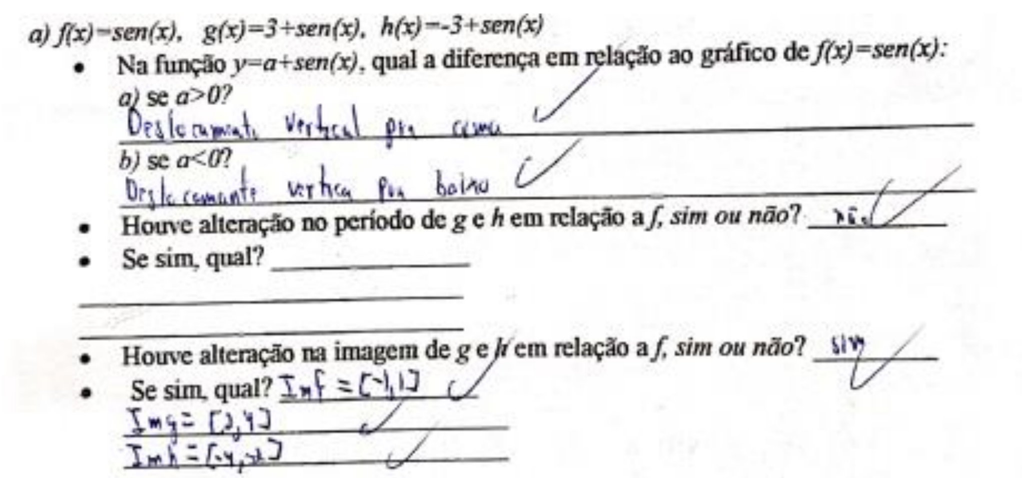
Para a solução desse item, destaca-se a Figura 21, desenvolvida pelo estudante E13:

Figura 21. Resolução da atividade 7, letra a, estudante E13



Continua...

...continuação.



a) $f(x)=sen(x)$, $g(x)=3+sen(x)$, $h(x)=-3+sen(x)$

- Na função $y=a+sen(x)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=sen(x)$:
  a) se $a>0$? Deslocamento vertical pra cima
  b) se $a<0$? Deslocamento vertical pra baixo
- Houve alteração no período de g e h em relação a f, *sim ou não*? não
- Se sim, qual? ______
- Houve alteração na imagem de g e h em relação a f, *sim ou não*? sim
- Se sim, qual? Im f = [-1,1]
  Im g = [2,4]
  Im h = [-4,-2]

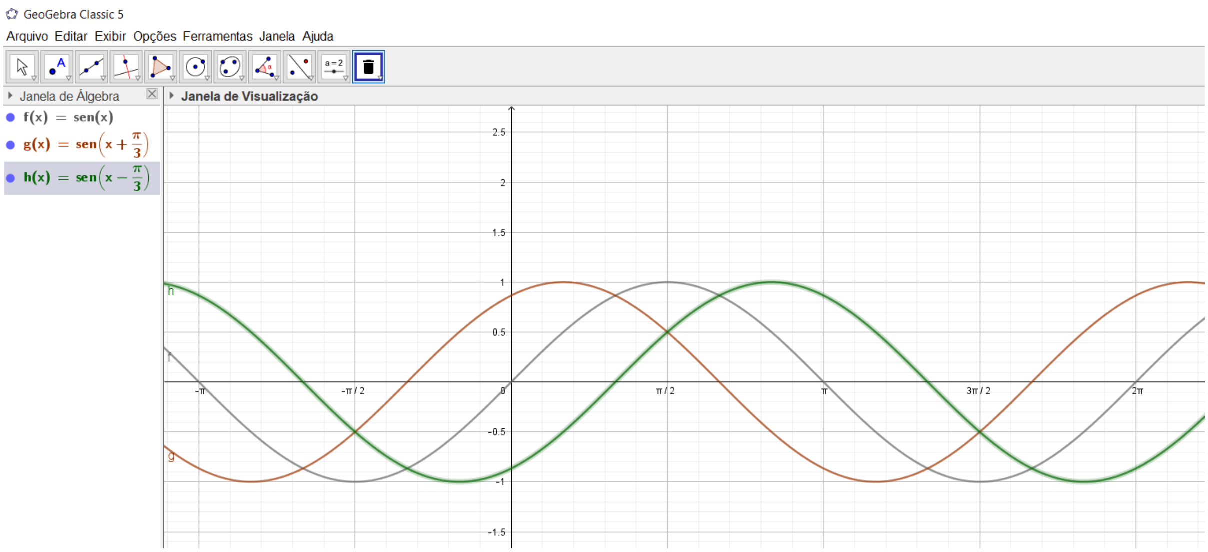
Fonte: Elaboração E13 (2019).

Nesta atividade, os estudantes observaram que, quando o parâmetro **a** das funções seno, cosseno e tangente, era positivo (a>0), havia uma translação vertical para cima, e quando negativo (a<0), havia translação vertical para baixo. Com isso, eles perceberam também que o período da função não se alterava e que havia uma alteração na imagem da função. A variação do gráfico de cada função construída refere-se à inserção do parâmetro **a**.

d) $f(x)=sen(x), g(x)=sen(x+\pi/3), h(x)=sen(x - \pi/3)$

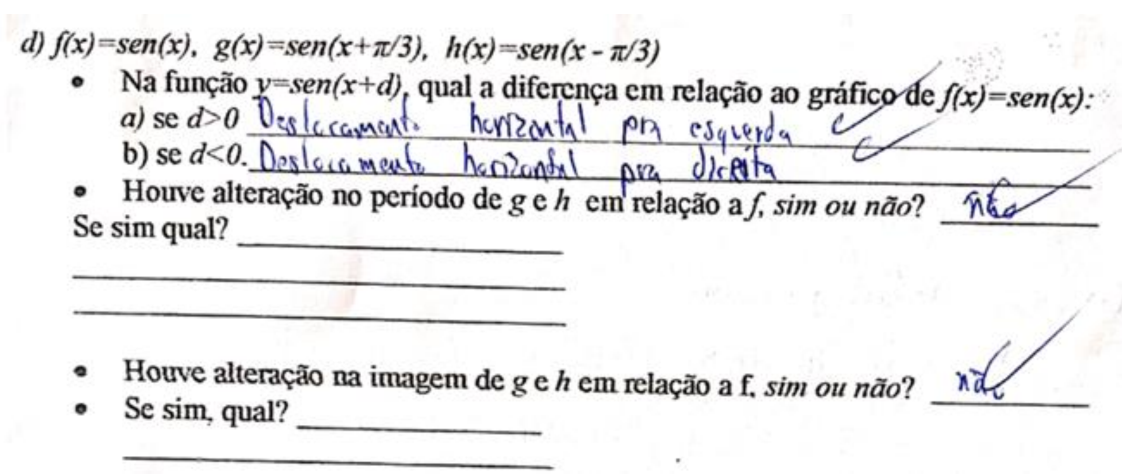
Para a solução do item d, destaca-se a Figura 22, desenvolvida pelo estudante E26:

Figura 22. Resolução da atividade 7, letra d, estudante E26.



Continua...

...continuação.



d) $f(x)=sen(x)$, $g(x)=sen(x+\pi/3)$, $h(x)=sen(x - \pi/3)$

- Na função $y=sen(x+d)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=sen(x)$:
  a) se $d>0$ Deslocamento horizontal pra esquerda
  b) se $d<0$. Deslocamento horizontal pra direita
- Houve alteração no período de g e *h* em relação a *f*, *sim ou não?* não
  Se sim qual?
- Houve alteração na imagem de g e *h* em relação a f, *sim ou não?* não
- Se sim, qual?

Fonte: Elaboração E26 (2019).

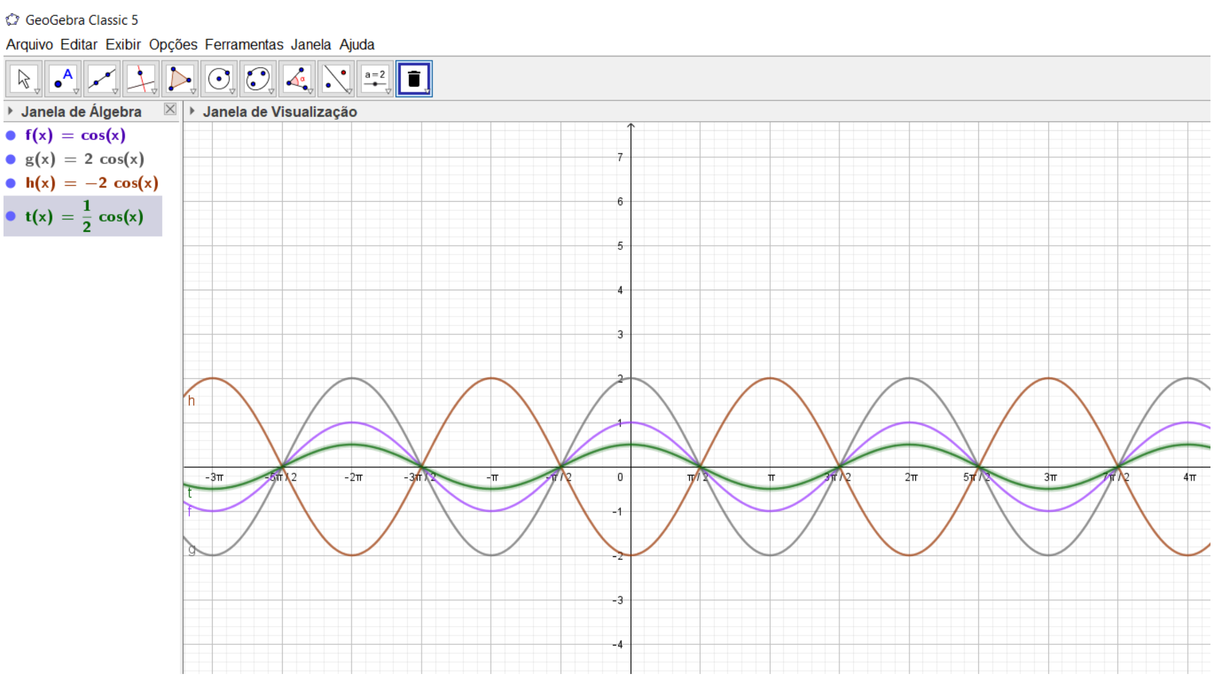
Por meio desta atividade, os estudantes notaram que, para as funções seno, cosseno e tangente, quando o parâmetro **c** era maior que um (c>1), havia uma compressão horizontal, já quando o parâmetro era maior que zero e menor que um (0<c<1), havia uma ampliação horizontal, e, quando o parâmetro era menor que zero (c<0), havia uma compressão horizontal. Dessa forma, notaram que o período das funções se alterava, mas que isso não ocorria com a imagem das funções.

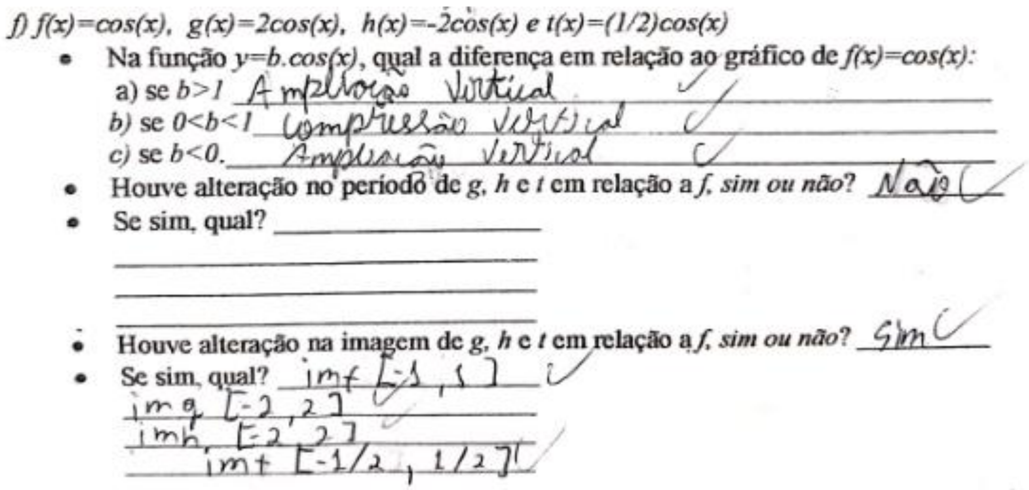
A partir dessa atividade, os estudantes concluíram que nas funções seno, cosseno e tangente, quando o parâmetro **d** era maior que zero (d>0), havia uma translação horizontal do gráfico para a esquerda, e parâmetro era menor que zero (d<0), havia uma translação horizontal para a direita. Perceberam, dessa forma, que o período e a imagem da função permaneciam inalterados.

f) f(x)=cos(x), g(x)=2cos(x), h(x)=-2cos(x) e t(x)=(1/2)cos(x)

Para a solução desse item, destaca-se a Figura 23, desenvolvida pelo estudante E33:

Figura 23. Possível solução para a função cosseno, estudante E33




f) f(x)=cos(x), g(x)=2cos(x), h(x)=-2cos(x) e t(x)=(1/2)cos(x)

- Na função *y=b.cos(x)*, qual a diferença em relação ao gráfico de *f(x)=cos(x)*:
  a) se *b>1* Ampliação Vertical
  b) se *0<b<1* Compressão Vertical
  c) se *b<0.* Ampliação Vertical
- Houve alteração no período de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não?* Não
- Se sim, qual?
- Houve alteração na imagem de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não?* Sim
- Se sim, qual? imf [-1, 1]
  img [-2, 2]
  imh [-2, 2]
  imt [-1/2, 1/2]

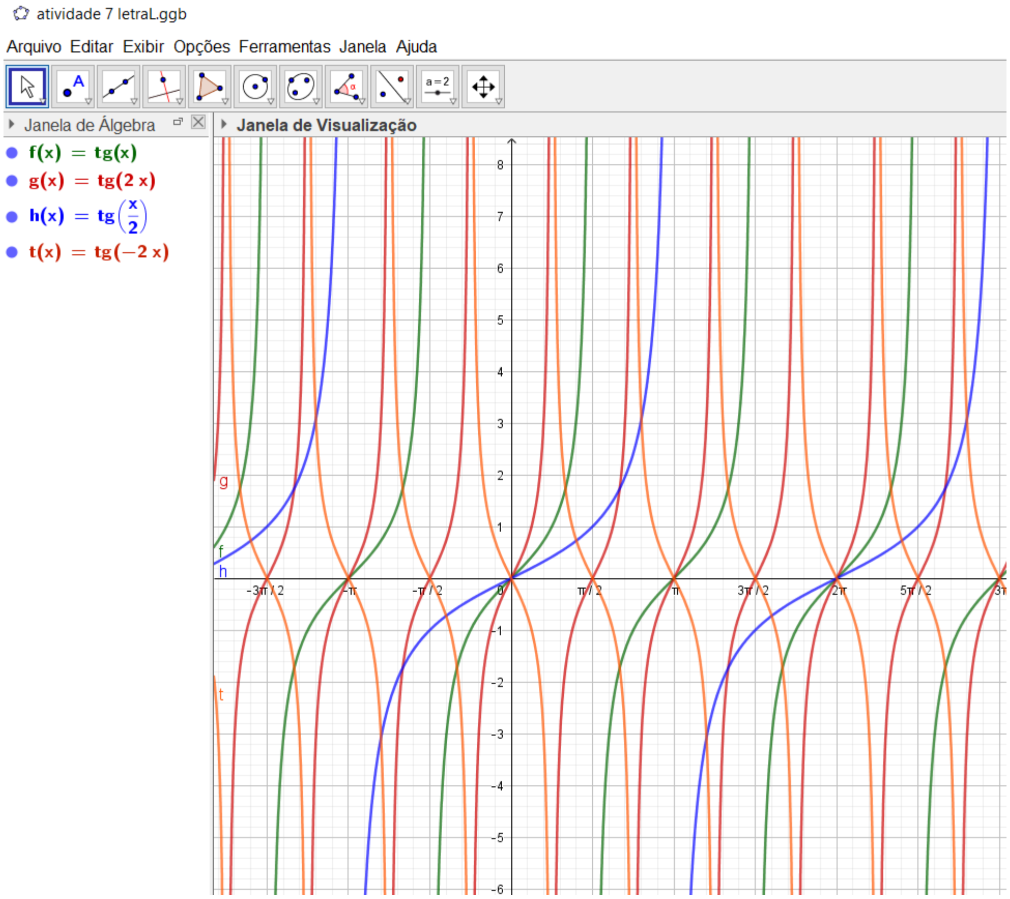
Fonte: Elaboração E33 (2019).

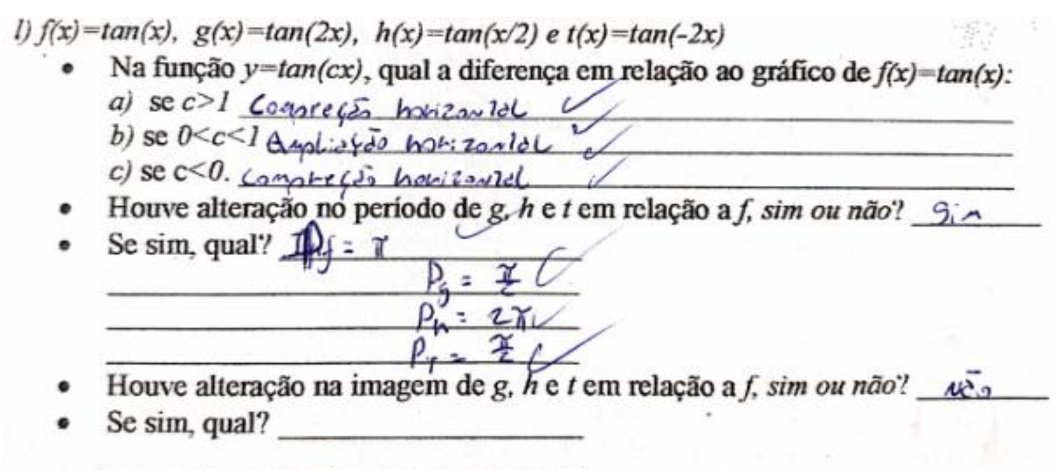
Nesta atividade, os estudantes observaram que quando o parâmetro **b** das funções seno, cosseno e tangente era maior que um (b>1), havia uma ampliação vertical, já quando o parâmetro era maior que zero e menor que um (0<b<1), havia uma compressão vertical, e, quando o parâmetro era menor que zero (b<0), havia uma ampliação vertical. Com isso, eles perceberam que havia uma variação da imagem, mas que isso não ocorria com o período das funções.

l) f(x)=tan(x), g(x)=tan(2x), h(x)=tan(x/2) e t(x)=tan(-2x)

Para a solução do item l, destaca-se a Figura 24, desenvolvida pelo estudante E21:

Figura 24. Resolução da atividade 7, letra l, estudante E21





l) f(x)=tan(x), g(x)=tan(2x), h(x)=tan(x/2) e t(x)=tan(-2x)

- Na função *y=tan(cx)*, qual a diferença em relação ao gráfico de *f(x)=tan(x)*:
  a) se *c>1* Compreção horizontal
  b) se *0<c<1* Ampliação horizontal
  c) se c<*0*. Compreção horizontal
- Houve alteração no período de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não*? Sim
- Se sim, qual? $P_f = \pi$
  $P_g = \frac{\pi}{2}$
  $P_h = 2\pi$
  $P_t = \frac{\pi}{2}$
- Houve alteração na imagem de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não*? Não
- Se sim, qual?

Fonte: Elaboração E21 (2019).

Por meio desta atividade, os estudantes notaram que para as funções seno, cosseno e tangente, quando o parâmetro **c** era maior que um (c>1), havia uma compressão horizontal, e quando o parâmetro era maior que zero e menor que um havia uma ampliação horizontal, e, quando o parâmetro era menor que zero (c<0), havia uma compressão horizontal. Dessa forma, notaram que o período das funções se alterava, mas que isso não ocorria com a imagem das funções.

Em relação às vantagens da utilização do recurso tecnológico, esclarecem os autores:

> O recurso tecnológico para ser utilizado deverá permitir explorar esses conceitos, dando oportunidades à sua compreensão por todos os alunos, desde os mais rápidos aos que apresentam maiores dificuldades. Por isso, deve possibilitar a experimentação, várias formas de resolução das questões (por ex. contar, operar, manipular, visualizar...) (AMADO, CARREIRA, 2015, p. 15).

Assim, nessa perspectiva, se o desenvolvimento dessa atividade ocorresse de forma tradicional, ou seja, utilizando lousa e giz, demandaria muito tempo na construção de cada gráfico de cada função, o que impossibilitaria que os estudantes visualizassem, interpretassem e analisassem os respectivos gráficos. Portanto, devem ser levadas em conta as vantagens da agilidade e do dinamismo que o uso do *software* proporciona.

Dos trinta alunos participantes dessa atividade, dezenove estudantes conseguiram não só construir corretamente os gráficos das funções seno, cosseno e tangente, bem como, analisaram o seu comportamento, de acordo com a variação dos parâmetros **a**, **b**, **c** e **d**, de cada uma das funções.

Com relação aos 11 alunos – 1/3 da turma – que erraram alguns dos itens, embora tenham construído corretamente os gráficos, tiveram dificuldades para analisá-lo e não conseguiram interpretar a variação dos parâmetros estabelecidos em cada função.

A partir dos erros, o pesquisador retomou o exercício com os estudantes, não apenas para correção, mas de forma que possibilitasse a percepção da ocorrência do erro, viabilizando a construção de hipóteses. Dessa forma, houve o favorecimento do trabalho coletivo e da discussão, havendo o encontro das representações, o que permitiu a cada um rever seu pensamento e considerar o dos outros colegas. (OLIVEIRA, 2009).

Aulas 23 e 24: Aplicações da função seno e cosseno (2 aulas de 50 min cada).

Nessas aulas, teve-se como objetivo estabelecer relações entre os conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno e problemas do dia a dia.

Atividade 8

1) (CHAVANTE, 2016) Na medicina, a trigonometria é apresentada no monitoramento da frequência cardíaca, ou seja, no número de batimentos cardíacos em um período de tempo, usualmente designado por B.P.M (batimentos cardíacos por minuto). A partir do monitoramento, é possível medir a pressão sanguínea ou arterial de uma pessoa.

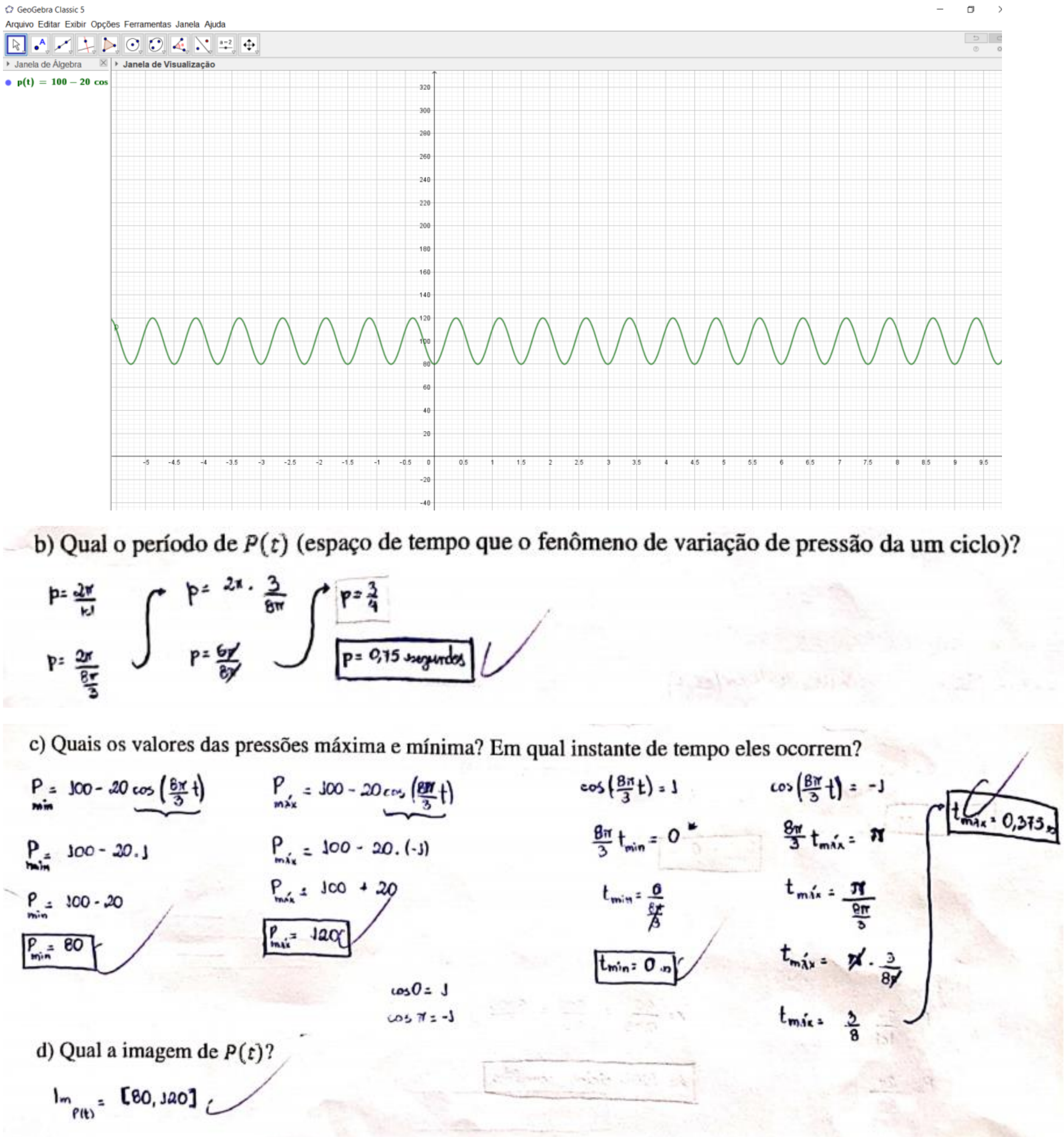
Essa medida da pressão sanguínea é dada por dois valores: a pressão sistólica, que é o valor máximo atingido quando o coração se contrai e bombeia o sangue, e a pressão diastólica, que é o valor mínimo atingido quando o coração está em repouso, ambas em um intervalo de tempo de um batimento cardíaco. Normalmente, a pressão é representada da seguinte maneira: 120/80 mm Hg (milímetros de mercúrio), na qual o primeiro valor é a pressão sistólica e o segundo valor é a pressão diastólica.

A variação da pressão sanguínea (em mm Hg) de uma pessoa, em função do tempo (em s), é uma função trigonométrica (cíclica ou periódica) cuja lei é dada por: $P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$.

a) Usando o GeoGebra, construa o gráfico de $P(t)$;

Para a solução do item a, destaca-se a Figura 25, desenvolvida pelo estudante E1:

Figura 25. Resolução do gráfico de P (t), estudante E1

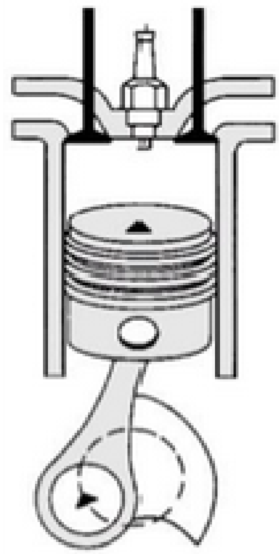


Fonte: Elaboração por E1 (2019).

Essa atividade possibilitou ao estudante a construção do gráfico da função e a compreensão do período em que a função se repete, além de possibilitar-lhe analisar a pressão máxima e mínima dessa função trigonométrica (cíclica e periódica) e o tempo necessário da ocorrência.

2) (UFPR-2013) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura. Suponha que um instante, em segundos, a altura do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão: $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right)$

Figura 26. UFPR//fac-simileID/BR



a) Determine a altura máxima e a mínima que o pistão atinge.

$h(t) = 4 + 4\underbrace{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}05}t\right)}$

$h_{máx} = 4 + 4 \cdot 1$ ↳ VALOR MÁXIMO DO SENO

$\boxed{h_{máx} = 8 \text{ cm}}$

$h(t) = 4 + 4\underbrace{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}05}t\right)}$

$h_{min} = 4 + 4 \cdot (-1)$ ↳ VALOR MÍNIMO DO SENO

$h_{min} = 4 - 4$

$\boxed{h_{min} = 0 \text{ cm}}$

b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?

$P = \frac{2\pi}{|c|}$

$P = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{0{,}05}}$

$P = \cancel{2\pi} \cdot \frac{0{,}05}{\cancel{2\pi}}$

$P = 0{,}05$ s

↳ TEMPO PARA CADA CICLO

$x = \frac{60}{0{,}05} = \frac{600}{0{,}5} = \frac{6000}{5}$

$\boxed{x = 1200 \text{ ciclos completos}}$

Fonte: CHAVANTE, 2016.

Observa-se que nessa atividade não foi solicitado apresentar o gráfico da função, entretanto, os estudantes conseguiram relacionar os conceitos trabalhados da função seno, no que diz respeito à imagem e ao período. Souberam ainda relacionar a altura máxima do pistão com o maior valor do seno de um determinado ângulo e também relacionaram a menor altura do pistão com o menor valor do seno do ângulo.

3) (IEZZI, 2016) Em uma pequena roda-gigante, a altura (em metros) em que um passageiro se encontra no instante t (em segundos) é dada pela lei: $h(t) = 6 + 4\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)$**, para** $t \in [0{,}270]$**.**

Figura 27. Thinkstoch/Getty Images

a) No início do passeio, a que altura se encontra o passageiro?

$t = 0$

$h(t) = 6 + 4\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)$

$h(t) = 6 + 4\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\cdot 0\right)$

$h(t) = 6 + 4\text{sen}(0)$

$h(t) = 6 + 4 \cdot 0$

$\boxed{h(t) = 6\ m}$

b) A que altura se encontra o passageiro após 9s do início? Use $\sqrt{2} = 1{,}4$.

$t = 9$

$h(t) = 6 + 4\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\cdot 9\right)$

$h(t) = 6 + 4\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$h(t) = 6 + \cancel{4}^{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$

$h(t) = 6 + 2 \cdot 1{,}4$

$h(t) = 6 + 2{,}8$

$\boxed{h(t) = 8{,}8\ m}$

Continua...

...continuação.

c) Qual é a altura mínima que esse passageiro atinge no passeio?

$h(t) = 6 + 4\underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)}$

$h(t) = 6 + 4(-1)$

o valor mínimo do seno é -1

$h(t) = 6 - 4$

$\boxed{h(t) = 2\text{ m}}$

d) Qual é a altura máxima que esse passageiro atinge no passeio?

$h(t) = 6 + 4\underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)}$

$h(t) = 6 + 4 . 1$

$\boxed{h(t) = 10\text{ m}}$

o valor máximo do seno é 1

e) Qual é o tempo necessário para essa roda-gigante dar uma volta completa?

$P = \frac{2\pi}{|c|}$

$P = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}}$

$P = 2\cancel{\pi} . \frac{12}{\cancel{\pi}}$

$\boxed{P = 24\text{ segundos}}$

f) Quantas voltas completas ocorrem no passeio?

$x = \frac{270}{24} \overset{:3}{=} \frac{90}{8} \overset{:2}{=} \frac{45}{4} = 11{,}25$

$\boxed{y: 11\text{ voltas completas}}$

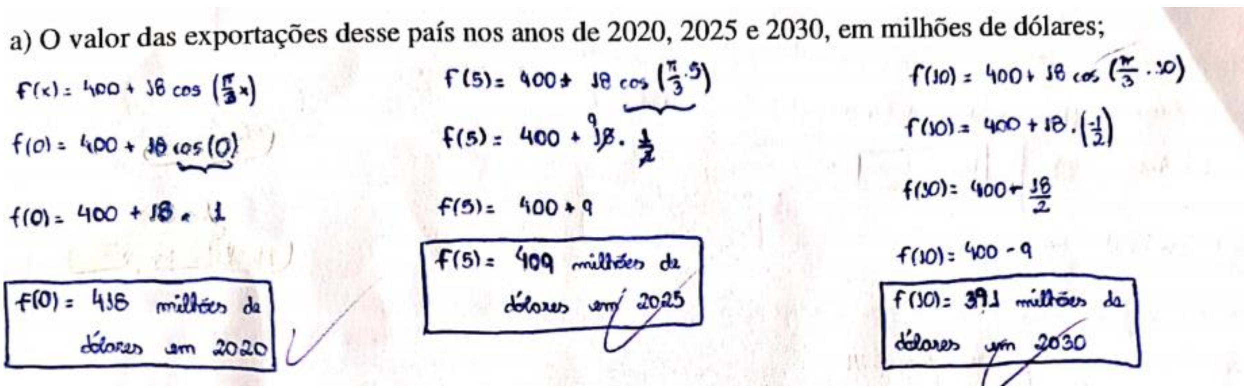
Fonte: IEZZI, 2016.

Nessa atividade o estudante conseguiu calcular as alturas da roda gigantes em diferentes tempos, assim como calcular as alturas máximas e mínimas em que o passageiro se encontra nessa mesma roda, relacionando-as com a variação máxima e mínima da função seno. Ele também calculou o tempo necessário para a roda gigante completar uma volta inteira, relacionando essa informação com o cálculo do período.

4) (IEZZI, 2016) Um artigo publicado em um caderno de economia prevê que as exportações de um certo país (em milhões de dólares), no ano de $2020+x$, em que $x \in \{0,1,2,3,\ldots,19,20\}$, serão dadas pela lei: $f(x) = 400 + 18\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

Supondo que isso realmente ocorra, determine:

a) O valor das exportações desse país nos anos de 2020, 2025 e 2030, em milhões de dólares;
b) Quantas vezes, entre 2020 e 2040, f atingirá seu valor mínimo? Qual é esse valor?



a) O valor das exportações desse país nos anos de 2020, 2025 e 2030, em milhões de dólares;

$f(x) = 400 + 18\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

$f(0) = 400 + 18\underbrace{\cos(0)}$

$f(0) = 400 + 18 \cdot 1$

$\boxed{f(0) = 418 \text{ milhões de dólares em } 2020}$

$f(5) = 400 + 18\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 5\right)}$

$f(5) = 400 + \cancel{18}^{9} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

$f(5) = 400 + 9$

$\boxed{f(5) = 409 \text{ milhões de dólares em } 2025}$

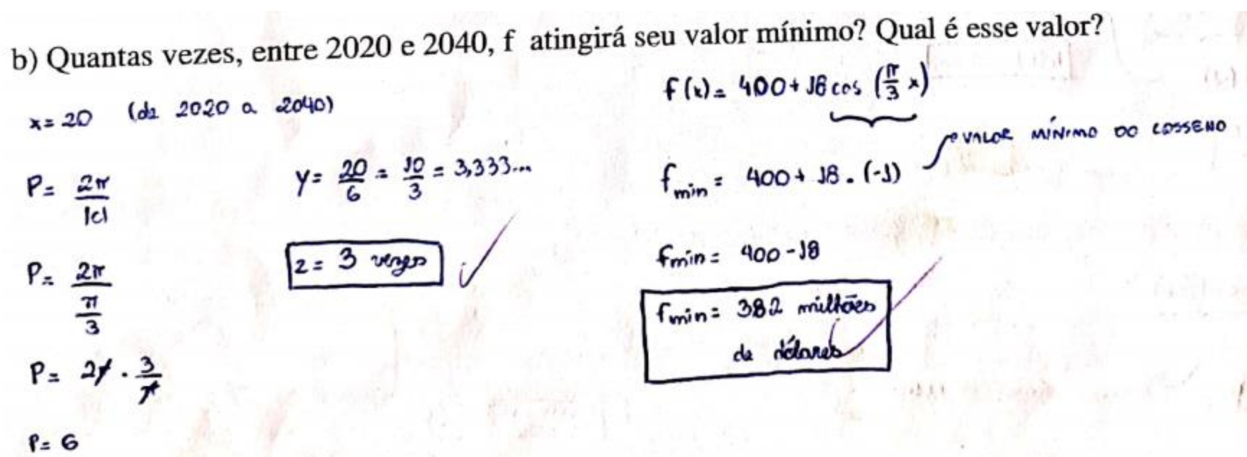
$f(10) = 400 + 18\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 10\right)$

$f(10) = 400 + 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$f(10) = 400 - \frac{18}{2}$

$f(10) = 400 - 9$

$\boxed{f(10) = 391 \text{ milhões de dólares em } 2030}$



b) Quantas vezes, entre 2020 e 2040, f atingirá seu valor mínimo? Qual é esse valor?

$x = 20$ (de 2020 a 2040)

$P = \frac{2\pi}{|c|}$

$P = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}$

$P = 2\cancel{\pi} \cdot \frac{3}{\cancel{\pi}}$

$P = 6$

$y = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3{,}333\ldots$

$\boxed{z = 3 \text{ vezes}}$

$f(x) = 400 + 18\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}$

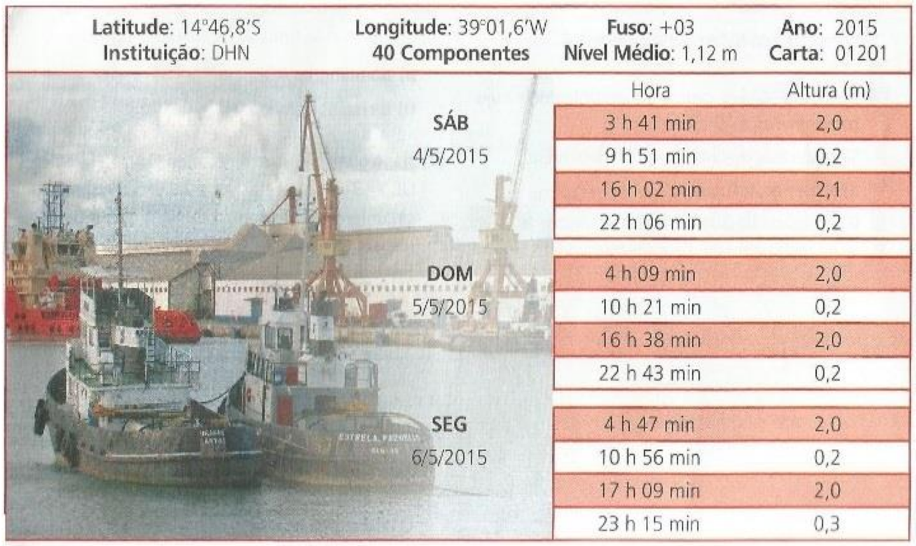
$f_{min} = 400 + 18 \cdot (-1)$ valor mínimo do cosseno

$f_{min} = 400 - 18$

$\boxed{f_{min} = 382 \text{ milhões de dólares}}$

5) (IEZZI, 2016) Na tabela abaixo, constam as previsões para a maré alta e para a maré baixa durante três dias consecutivos (4, 5 e 6) de maio de 2015, para o porto de Ilhéus, no sul do Estado da Bahia.

Figura 28. Porto de Ilhéus – Malhado (Estado da Bahia)



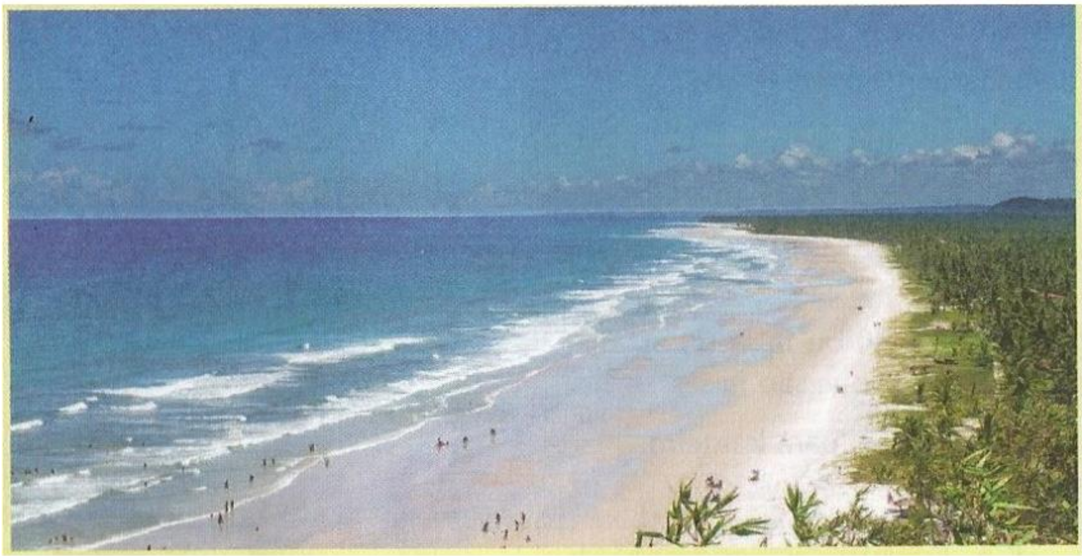
Latitude: 14°46,8'S Instituição: DHN	Longitude: 39°01,6'W 40 Componentes	Fuso: +03 Nível Médio: 1,12 m	Ano: 2015 Carta: 01201
		Hora	Altura (m)
SÁB 4/5/2015		3 h 41 min	2,0
		9 h 51 min	0,2
		16 h 02 min	2,1
		22 h 06 min	0,2
DOM 5/5/2015		4 h 09 min	2,0
		10 h 21 min	0,2
		16 h 38 min	2,0
		22 h 43 min	0,2
SEG 6/5/2015		4 h 47 min	2,0
		10 h 56 min	0,2
		17 h 09 min	2,0
		23 h 15 min	0,3

Fonte: Marinha do Brasil. Disponível em: < www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas/40145jan2016.htm>. Acesso em 10 mar. 2016.

Observe que:

- As marés altas ocorrem de 12 em 12 horas, aproximadamente, como mostram os destaques na cor vermelha da tabela.
- As marés baixas ocorrem, também, de 12 em 12 horas, aproximadamente, como mostra a tabela.
- As alturas da maré alta praticamente se repetem de 12 em 12 horas. T: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré alta medem 2,0 m.
- As alturas da maré baixa praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré baixa medem 0,2 m = 20 cm.
- As marés altas ocorrem de 12 em 12 horas e, para facilitar a modelagem, vamos admitir 2,0 m como sendo o valor comum previsto nos três dias;
- As marés baixas ocorrem de 12 em 12 horas; vamos adotar o valor 0,2 m como mostra a referência da altura da maré baixa prevista para os três dias.

Figura 29. Praia de Serra Grande - Ilhéus BA, 2014.



Fonte: Iezzi, 2016.

1ª parte: Considerando as observações anteriores e lembrando que as previsões se referem a três dias seguidos, preencha (com algumas aproximações nos horários) a tabela que relaciona a altura da maré (em metros) e o tempo (em horas), contando a partir do primeiro horário de previsão (3 h 41 min), que será considerado o instante inicial (t = 0).

Tempo (h)	0	6	12	18	24	30	36	42	48
Altura da maré (m)	2	0,2	2	0,2	2	0,2	2	0,2	2

2ª Parte: Vamos supor que a relação entre altura (h) da maré (em metros) e o tempo (t) (em horas), se estabeleça por meio de uma função do tipo $h(t) = A + B.\cos(wt)$, em que **A, B** e **w** são constantes reais positivas. Nesta atividade, você vai determinar a lei da função que relaciona a altura (**h**) da maré e o tempo (**t**), construir seu gráfico e resolver um problema. Para isso, é preciso primeiro, encontrar os valores das constantes **A**, **B** e **w.**

a) Determine o valor de **w**, lembrando que o período dessa função é dado por $p = \frac{2\pi}{|w|}$.

$p = \frac{2\pi}{|w|}$

os valores se repetem a cada 12 horas

$12 = \frac{2\pi}{|w|}$

$12w = 2\pi$

$w = \frac{2\pi}{12}$

$\boxed{w = \frac{\pi}{6}}$

Continua...

...continuação.

b) Determine os valores de **A** e **B.** (sugestão: utilize a informação sobre o conjunto imagem dessa função)

$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 1$ → maré alta

$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = -1$ → maré baixa

$h(t)_{\text{alta}} = A + B \cdot 1$

$2 = A + B$

$A = 2 - B$

$A = 2 - 0{,}9$

$\boxed{A = 1{,}1}$

$h(t)_{\text{baixa}} = A + B \cdot (-1)$

$0{,}2 = A - B$

$0{,}2 = 2 - B - B$

$0{,}2 - 2 = -2B$

$-1{,}8 = -2B$

$B = \frac{-1{,}8}{-2}$

$\boxed{B = 0{,}9}$

c) Escreva a lei da função que relaciona **h** com **t.**

$\boxed{h(t) = 1{,}1 + 0{,}9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)}$

d) Por meio da lei obtida, é possível prever a altura da maré em outros momentos, além dos de baixa e alta. Determine a altura da maré para t = 10 (aproximadamente 14 horas do 1º dia) e para t = 28 (aproximadamente 8 horas do 2º dia).

$h(10) = 1{,}1 + 0{,}9\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 10\right)$

$h(10) = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot \frac{1}{2}$

$h(10) = 1{,}1 + 0{,}45$

$\boxed{h(10) = 1{,}55\ m}$

$h(28) = 1{,}1 + 0{,}9\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 28\right)$

$h(28) = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)$

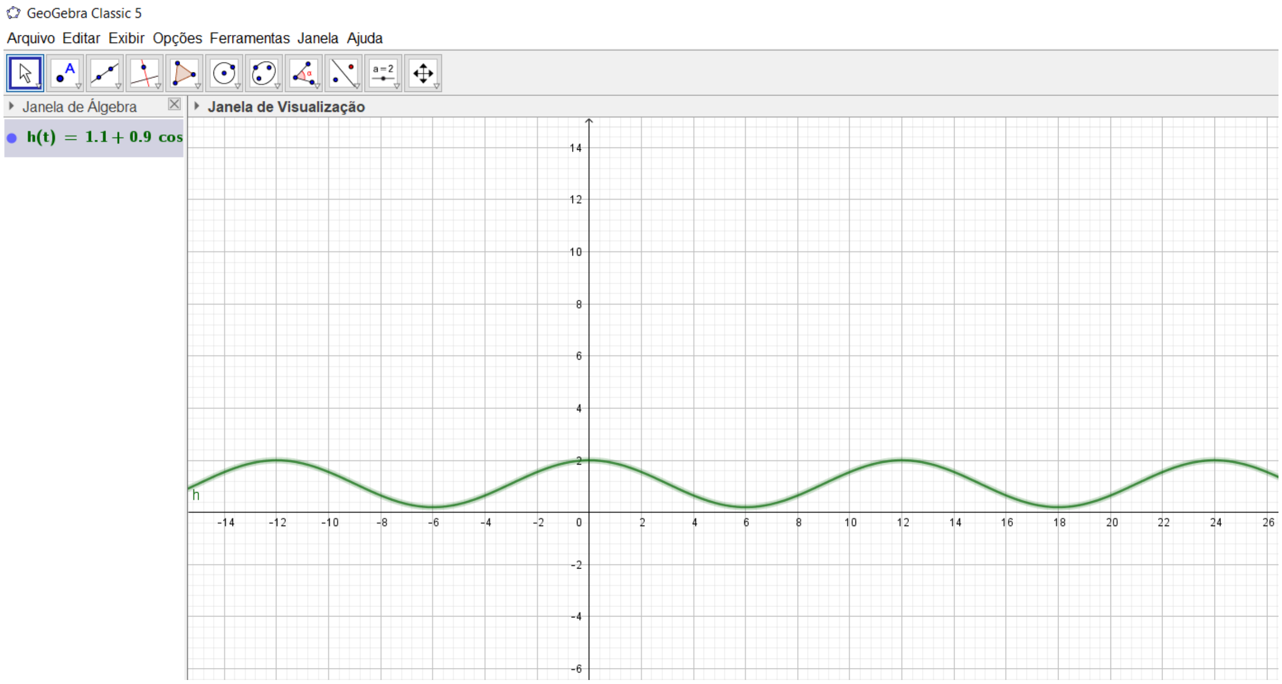
$h(28) = 1{,}1 + (-0{,}45)$

$\boxed{h(28) = 0{,}65\ m}$

e) Usando o GeoGebra, construa o gráfico da função obtida no item c.

Para a solução do item e, destaca-se a Figura 30, desenvolvida pelo estudante E1:

Figura 30. Resolução do gráfico da função h (t) = 1,1 + 0,9 cos (pi/t), estudante E 1.



Fonte: elaboração E 1(2019).

Essa atividade propiciou ao estudante relacionar o estudo da função cosseno com o fenômeno das marés. A função dada h(t) a qual representa o nível da água do mar, em metros, em função do tempo, t, em horas possibilitou ao aluno calcular as alturas das marés em função dos valores do cosseno máximo e mínimo o qual vai caracterizar a maré alta quando o cosseno for máximo e a maré baixa quando o cosseno for mínimo.

Dos trinta estudantes participantes desta atividade, dezoito acertaram todos os itens propostos, enquanto doze estudantes erraram alguns dos itens. O objetivo foi estabelecer a relação entre os conceitos das funções seno, cosseno e tangente com os problemas do dia-a-dia. Ficou evidente que os estudantes que acertaram todos os itens da atividade conseguiram construir e analisar os gráficos por meio dessa construção. Puderam, ainda, interpretar e calcular os períodos e a imagem, identificando os valores máximos e mínimos das funções. Com relação aos estudantes que erraram alguns dos itens, pode-se afirmar que não conseguiram estabelecer relação entre as atividades propostas e os conceitos trigonométricos das funções seno e cosseno. Diante dessa proposta, foi possível observar que o *software* potencializa a relação entre os conceitos trigonométricos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As tecnologias estão cada vez mais presentes em, praticamente, todas as atividades da vida da sociedade. Nesse contexto, torna-se um imperativo o professor estar atento às dinâmicas da sociedade e fazer uso de práticas de ensino consonantes a essa realidade.

A presente pesquisa decorreu dessas necessidades e foi considerada como um desafio pessoal pelo pesquisador, uma vez que este sempre fez uso de práticas pedagógicas tradicionais – como uso do quadro, giz e aulas expositivas – e, ainda, sempre teve dificuldade de adotar metodologias de ensino mais dinâmicas em suas práticas pedagógicas cotidianas. Portanto, foi a superação dessas dificuldades que resultou na proposta e no desenvolvimento desta pesquisa.

Outrossim, a partir da questão norteadora "como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração do conteúdo de Trigonometria?", buscou-se investigar como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração de tópicos da trigonometria. Como consequência, a pesquisa desdobrou-se em uma intervenção pedagógica junto a uma turma de trinta e seis estudantes, com idade média de quinze anos, do 2º ano do Ensino Médio Integrado do Curso de Informática. A escolha dos sujeitos deu-se em razão de ser uma turma para a qual o pesquisador ministrava aulas de Matemática, sendo o conteúdo de Trigonometria ofertado no segundo ano do referido curso. Por serem estudantes do curso de Informática e terem, durante o curso, aulas práticas de Informática no laboratório, percebeu-se que já estavam familiarizados com o manuseio e o uso de tecnologias.

A intervenção pedagógica proposta para o desenvolvimento desta pesquisa foi realizada por meio de uma sequência didática sistematizada, elaborada de forma exclusiva pelo pesquisador contando com exercícios que possibilitaram aos estudantes a interação com o *software* GeoGebra, permitindo que diferentes conjecturas fossem testadas, o que não poderia se dar por meio de uma aula tradicional. Assim, essa intervenção pedagógica ocorreu por meio de vinte e quatro aulas, sendo cada uma com duração de cinquenta minutos, que foram desenvolvidas em um laboratório de informática que dispunha de computadores suficientes para todos os estudantes da turma desenvolverem as atividades por meio do uso do *software* GeoGebra, previamente instalado pelo pesquisador nos computadores.

Tendo como ponto de partida o objetivo principal da pesquisa – verificar como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração de tópicos da trigonometria –, desenvolveram-se os objetivos específicos, sendo que o primeiro foi verificar as potencialidades e promover a participação dos estudantes no estudo da trigonometria. Percebeu-se que aumentou a interação entre estudantes e professor, uma vez que, na elaboração dos gráficos das funções, ficou garantida a visualização de forma interativa, o que possibilitou que os estudantes criassem hipóteses, explorassem e propusessem alternativas, em um trabalho coletivo que favoreceu a discussão e interatividade professor-estudante.

Destarte, a forma como esses recursos foram utilizados na pesquisa garantiu a efetividade do computador e do software GeoGebra como ferramentas pedagógicas, uma vez que foram potencializados e aproveitados em sala de aula.

Percebeu-se que a intervenção trouxe impactos positivos não só ao ensino aos estudantes, mas também à prática pedagógica do docente, uma vez que foram superados todos os desafios impostos por uma prática docente desenvolvida, ao longo de quarenta e um anos, de forma tradicional. Essa mudança de paradigma pode vir a servir de exemplo a outros profissionais de forma a reduzir ou dirimir a resistência ao uso de ferramentas tecnológicas, como o uso de computadores e de *softwares*.

Ainda por meio da metodologia proposta na pesquisa, evidenciou-se que o uso do *software* GeoGebra pode ressignificar a forma de ensinar matemática, auxiliando na compreensão, no desenvolvimento e na explicação da disciplina. O uso desse *software* pode, ainda, propiciar, aos estudantes, um recurso didático que irá auxiliá-los na compreensão dos conteúdos a partir da utilização do simbolismo matemático envolvido, a fim de oportunizar o raciocínio e a autonomia desses estudantes na realização de tarefas e desenvolver sua capacidade de resolver exercícios e problemas contextualizados, por meio do uso do computador.

É importante destacar que a ideia é aproveitar o melhor possível o *software* educativo e fazer com que os estudantes se envolvam ao máximo com as atividades propostas, possibilitando que eles explorem os diversos recursos disponíveis.

Este trabalho, apontou, ainda, que a forma de ensinar matemática pode ser reinventada por meio do uso de *softwares* computacionais, mediante uma prática pedagógica diferenciada utilizada junto aos estudantes, para que haja a compreensão da Matemática enquanto uma disciplina que perpassa as diferentes dimensões da vida humana. Para tal, o doente deve considerar o uso do *software* na perspectiva do desenvolvimento de uma metodologia ativa e dinâmica, de caráter mediador, que possibilita aos estudantes consolidarem conhecimentos matemáticos de forma autônoma e que, ainda, viabiliza o elo e a interpretação do compromisso social na produção do conhecimento.

REFERÊNCIAS

AMADO, Nélia Maria Pontes. CARREIRA, Susana Paula. Recursos Tecnológicos no Ensino e Aprendizagem da Matemática. In: **Explorando a Matemática com Aplicativos Computacionais - Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** Orgs. Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha Quartieri. Lajeado: Ed. da Univates, 2015.

BEZERRA, Adriana da Silva Velozo. ARAÚJO, Aylla Gabriella Paiva. ARAÚJO, Andriely Iris Silva. **O Ensino de Trigonometria Subsidiado por Novos Recursos.** Tecnologias da Informação e Comunicação e Educação Matemática. VII EP Bem Trabalhando Matemática: percepções contemporâneas. 2012.

BORBA, Marcelo de Carvalho, ALMEIDA, Helber Rangel Formiga Leite de CHIARI, Aparecida Santana de Souza. **Tecnologias Digitais e a relação entre teoria e prática:** uma análise da produção em trinta anos de BOLEMA Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1115-1140, dez. 2015.

BORBA, Marcelo de Carvalho. **Informática e Educação Matemática.** 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BRASIL. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil.** Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico, 1988. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 05 de jan. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Portaria n.º 1.570, publicada no D.O.U. de 21/12/2017, secção 1, p. 146. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf. Acesso em: 10 de jan. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Plano Nacional de Educação** (2014-2014). Lei n.º 13.005 de 25 de junho de 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio** - Parte III Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000.

CHAVANTE, Eduardo. **Quadrante matemática, 2º ano:** ensino médio. 1 ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

DAMASCO NETO, José Roque. **Registros de representação semiótica e o GeoGebra:** um ensaio para o ensino de funções trigonométricas. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). 2010. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. 130f. 2010.

DANTAS, Aleksandre Saraiva. O uso do GeoGebra no ensino de trigonometria: uma experiência com alunos do ensino médio Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 123– 142. **Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas** – UFSM. 2014.

DEMO, Pedro. **Pesquisa e construção de conhecimento:** metodologia científica no caminho de Habermas. 5. ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 2002.

DULLIUS, Maria Madalena; HAETINGER, Claus. Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Informatizados: Concepção, Desenvolvimento, Uso e Integração Destes no Sistema Educacional. **Anais IV Encontro Ibero-Americano de Coletivos Escolares e Redes de Professores que fazem investigação na sua escola.** Porto Alegre, 2004. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/ienci/uploaded/ATA_EIBIEC_IV.pdf. Acesso em: 05 de jun. 2019.

DULLIUS, Maria Madalena; QUARTIERI, Marli Teresinha. Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha Quartieri (Org.). **Explorando a matemática com aplicativos computacionais:** anos iniciais do ensino fundamental. 1 ed. Lajeado: Editora Univates, 2015. p. 5-6. Disponível em: https://www.univates.br/editora-univates/media/publicacoes/144/pdf_144.pdf. Acesso: 7 fev. 2018.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes; GODOY, Herminia Prado; TAVARES, Dirce Encarnacion. **Interdisciplinaridade na pesquisa científica.** Campinas, São Paulo: Papirus, 2015.

GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes; SOUZA. Vera Helena Giusti; MIASHIRO, Paulo Masanobo. **A Transição das Razões para as Funções Trigonométricas.** Bolema [online] 2016, vol. 30, n. 56, pp. 1127-1144.

GEOGEBRA. Salzburgo, 2015. **Software GeoGebra.** Disponível em: www.geogebra.org. Acesso em: 20 mar. 2017.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisas Sociais.** São Paulo: Atlas, 2008. v.6.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8 ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRAVINA, Maria Alice *et al*. **Matemática, Mídias Digitais e Didática:** tripé para formação do professor de Matemática. Maria Alice Gravina [*et al*] (org.). Porto Alegre: Evangraf. p. 37-52. 2012.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001. 277f. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados.** In: IV Congresso RIBIE, Anais, Brasília, 1998.

IEZZI, Gelson. **Matemática: ciências e aplicações:** ensino médio. Volume 2. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

INSTITUTO FEDERAL DE MATO GROSSO. **Colégio de Dirigentes do IFMT.** Cuiabá, IFMT, 2017.

LIMA, Elon Lages. CARVALHO; Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto César: **A matemática do ensino médio:** Volume 1. SBM, Rio de Janeiro, 8ª ed., 2005.

LINCK, Fábio Gomes. **O GeoGebra e a Música como recursos auxiliares no Ensino das Funções Trigonométricas.** Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Maria. UFSM. Universidade Aberta do Brasil, 2010.

LOPES, Maria Maroni. **Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria.** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, 2011.

LOPES, Maria Maroni. **Sequência Didática Para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra.** BOLEMA, Rio Claro- SP. V.27, n.46, p.631-644, Ago. 2013.

LOPES, Maria Maroni; ANDRADE, Jéssica Agna Cavalcante de. Potencialidades do software GeoGebra na sala de aula de matemática: um exemplo com ensino e aprendizagem de trigonometria. **Anais/Actas do 6º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática – SBHMat, Natal,** 2014.

MAIA, Joaildo. **O ensino de funções trigonométricas através do software GeoGebra.** Dissertação (Mestrado em Matemática). 2013. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. 48f. 2013.

MEDEIROS, Margarete Farias; VALLETTA, Débora; MAGAGNIN, Evandro Bitencourt; RIBEIRO, Elizete Maria Possamai; DABOIT, Katelun Luzia dos S. Daboit. A atenção voluntária na Construção de Conceitos Trigonométricos em Ambientes de Geometria Dinâmica. **Revista Brasileira de Informática na Educação** – RBIE. REBIE V. 25, n. 1-2017.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. Sueli Ferreira Deslandes; Romeu Gomes; Maria Cecília de Souza Minayo (orgs). 28 ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2009.

MORAN, José Manoel; MASETTO, Marcos; BEHRENS, Marilda. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica.** 21ª ed. Campinas (SP): Papirus, 2013.

NEIDE, Italo Gabriel; QUARTIERI, Marli Teresinha. Recursos Tecnológicos nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática e da física. In: **Aproximando a Matemática e a Física por meio de recursos tecnológicos:** Ensino Médio. Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha

Quartieri (Org.). Lajeado: Ed. Da Univates, 2016. p. 9-14. Disponível em: https://www.univates.br/editora- univates/media/publicacoes/191/pdf_191.pdf. Acesso: 20 de maio 2019.

OLIVEIRA, Gerson de Pastre. Estratégias didáticas em educação matemática: as tecnologias de informação e comunicação como mediadoras. **Anais do IV Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – IV Sipem. Brasília: SBEM, 2009.

OLIVEIRA, Gerson de Pastre; FERNANDES Ricardo Uchoa. **O uso de tecnologias para ensino de trigonometria:** estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem Educ. Matem. Pesq. São Paulo, v.12, n.3, pp.548-577, 2010.

PAIVA, Marcos Henrique Pereira. **Aprendizagem de Frações com Softwares e aplicativos matemáticos *online*.** Dissertação (mestrado) Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES. Lajeado, 2016. 112f.

PARELLADA, Ibelmar Lluesma; RUFINI Sueli Édi. **O Uso do Computador como Estratégia Educacional:** Relações com a Motivação e Aprendizado de Alunos do Ensino Fundamental. Revista Psicologia: Reflexão e Crítica, vol. 26, n. 4. Porto Alegre, 2013. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/S0102-79722013000400015. Acesso em 10 out. 2018.

PERRENOUD, **Avaliação em cursos on-line colaborativos:** uma abordagem multidimensional. (tese de doutorado), USP: São Paulo. Abril de 2007.

PERRENOUD, **Avaliação.** Porto Alegre: Editora Artmed, 1999.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO - PUC-SP. **Sobre o GeoGebra.** Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. s/d. Disponível em: https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html. Acesso em: 10 mar. 2019.

SCALDELAI, Dirceu. O *software* GeoGebra. In: **O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica:** frações, estatística, círculo e circunferência. Maria Ivete Basniak, Everton José Golgoni Estevam (Orgs.). p. 13-23. Curitiba: Ithala, 2014.

STRASBURG, Ezequiel Bobsin, SPEROTTO, Fabíola Aiub. MENEGHETTI Cinthya Maria Schneider . **Atividades de Trigonometria para o Ensino Fundamental com o uso do software GeoGebra Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial. 2015.

TRALDI JR, Armando; ROSENBAUM, Luciane Santos. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtiva.** Jan. 2011.Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.I].[, v. 12, n. 2, jan. 2011. Disponível em: https://revistas.pucsp.br.br/emp/article/view/4192. Acesso em: 15 de abr. 2019.

VALENTE, José Antônio Valente. **O uso inteligente do computador na educação**. Pátio Revista Pedagógica: Editora Artes Médicas Sul. Ano I, n. 1, p. 19-21, mai/jul, 1997.

APÊNDICES

APÊNDICE A- TERMO DE ANUÊNCIA DO CAMPUS DO IFMT

TERMO DE ANUÊNCIA

Autorizo que o pesquisador Carlos Carlão Pereira do Nascimento**,** devidamente matriculada no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade do Vale do Taquari - UNIVATES, desenvolva no Campus Cuiabá sua pesquisa intitulada **O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO,** sob orientação da professora Dra. Maria Madalena Dullius e coorientação do professor Dr. André Krindges. A pesquisa tem por objetivo geral desenvolver por meio do *software GeoGebra* uma proposta de ensino para tornar significativa a aprendizagem de conceitos das funções trigonométricas, suas características e seus gráficos.

Ciente dos objetivos, métodos e técnicas que serão usados nesta pesquisa, autorizo a utilização do nome, dados e imagem da instituição. Também concordo em fornecer todos os subsídios para o seu desenvolvimento, desde que seja assegurado o que segue abaixo:

a) A garantia de receber e solicitar esclarecimentos antes, durante e depois do desenvolvimento da pesquisa;

b) Não haverá nenhuma despesa decorrente desta unidade de ensino durante o desenvolvimento da pesquisa;

c) A garantia de que os estudantes do Campus Cuiabá, serão identificados durante a divulgação dos resultados, e que as informações obtidas serão utilizadas apenas para fins científicos vinculadas à pesquisa;

d) No caso do não cumprimento dos itens acima, há a liberação de retirar a minha anuência a qualquer momento de minha pesquisa.

O referido projeto será desenvolvido com estudantes do 2º ano do Ensino Médio Integrado do Curso de Informática do Campus Cuiabá.

Cuiabá, ... de ..... de 2019.

____

Cristóvão Albano da Silva
Diretor Geral

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

A presente pesquisa, cujo título é "**O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO**", foi desenvolvida pelo mestrando Carlos Carlão Pereira do Nascimento, discente do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES, sob orientação da professora Dra. Maria Madalena Dullius e coorientação do professor Dr. André Krindges. Tem como objetivo investigar como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração de tópicos da trigonometria. Os dados coletados para esta pesquisa serão obtidos por meio da aplicação de uma sequência didática e uso de um *software* computacional denominado GeoGebra. Os resultados da pesquisa constituirão subsídios para produções científicas a serem encaminhadas para publicações e apresentadas em eventos da área.

Pelo presente Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, declaro que autorizo a minha participação nesta pesquisa, pois fui devidamente informado sem qualquer constrangimento e coerção sobre os objetivos e instrumentos de coleta de dados que serão utilizados, já citados neste termo.

Fui igualmente informado (a):

- Da garantia de receber resposta a qualquer pergunta ou esclarecimento a qualquer dúvida acerca dos procedimentos relacionados à pesquisa;
- Da garantia de retirar meu consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo;
- Da garantia de que não serei identificado (a) quando da divulgação dos resultados e de que as informações obtidas serão utilizadas apenas para fins científicos vinculados à pesquisa;
- De que, se existirem gastos adicionais, estes serão absorvidos pelo orçamento da pesquisa, portanto não terei nenhum tipo de gasto previsto.

Este termo será assinado em duas vias, sendo que uma delas será entregue ao sujeito pesquisado e a outra será arquivada em local seguro pelo pesquisador.

Cuiabá, __ de ____________ de 2019.

______________________________	________________________________
Assinatura do responsável pelo participante da pesquisa	Assinatura do pesquisador

APÊNDICE C - SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Aulas 1 e 2: Noções básicas do *software GeoGebra* (2 aulas de 50 min cada).

OBJETIVOS:
- Apresentar o *software* GeoGebra aos estudantes.
- Executar atividades para gerar familiaridade com a plataforma.
- Ensinar o manuseio das ferramentas que possibilitam ações como: inserir ponto, reta, segmento de reta, reta perpendicular, reta paralela, circunferência, controle deslizante, polígono, medida de ângulo, caixa de texto e distância.
- Conhecer e trabalhar com o controle deslizante do *software*.

A seguir, é apresentado o planejamento das aulas 1 e 2:

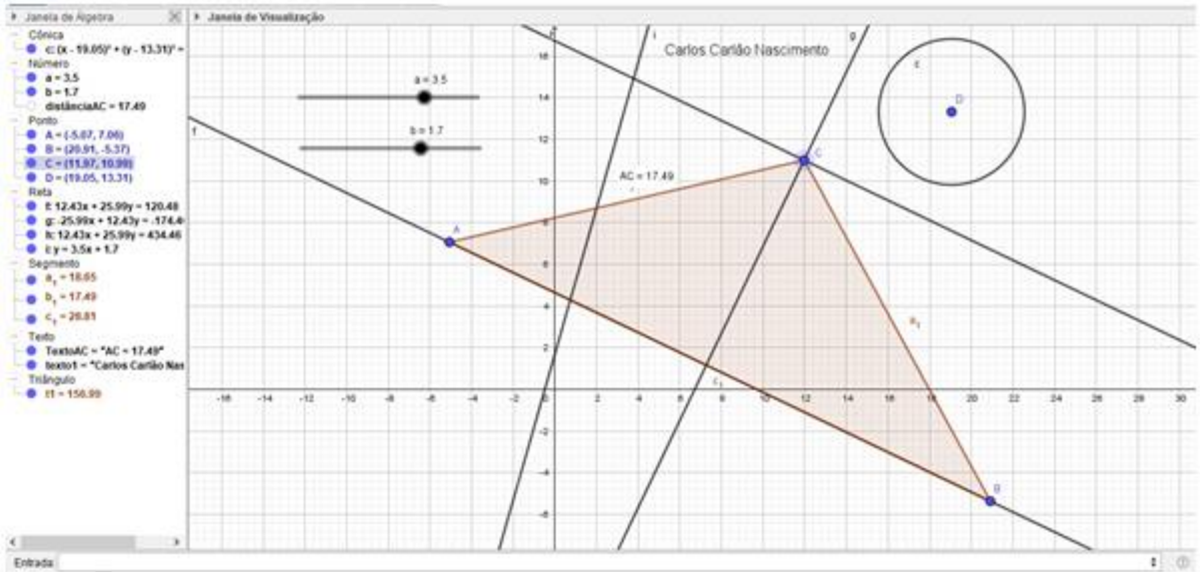
Aulas 1 e 2 - Desenvolvimento:

O aluno passará pelas seguintes etapas (todos em um mesmo arquivo):

17. Abra o *software* GeoGebra;
18. Insira dois pontos A e B;
19. Insira uma reta que passe por A e B;
20. Insira um ponto C;
21. Insira uma reta perpendicular à reta do item 3, passando por C;
22. Insira uma reta paralela à reta do item 3, passando por C;
23. Insira um ponto D;
24. Insira um controle deslizante;
25. Insira uma circunferência centrada em D e raio igual ao controle deslizante do item 8 (mexa com o controle deslizante);
26. Crie um polígono com os pontos A, B e C;
27. Meça um ângulo qualquer do polígono do item 10;
28. Meça um lado (aresta) qualquer do polígono do item 10;
29. Crie uma caixa de texto e insira seu nome;
30. Insira um controle deslizante (da mesma forma que no item 8), nomeando-o como b;
31. Vá até a caixa de entrada (barra inferior da janela do *software*) e digite: $y=ax+b$. Observe que a e b são os controles deslizantes criados nos itens 8 e 14. Qual o gráfico gerado?
32. Mexa nos dois controles deslizantes e observe o que eles provocam na reta criada no item 15;
33. As retas criadas nos itens 3, 5 e 6, podem ser vistas/entendidas como gráficos de funções do 1ºgrau, portanto identifique na barra lateral esquerda as suas equações.

Segue possível resultado das aulas 1 e 2, destacado na Figura 1.

Figura 1. Possível solução para as aulas 1 e 2:



Fonte: Elaboração do autor (2019).

Aulas 3 e 4: Círculo trigonométrico; Radiano (2 aulas de 50 min cada).

OBJETIVOS:

- Construir e visualizar o círculo trigonométrico e, posteriormente, o radiano.

- Usar as ferramentas do GeoGebra para construir, analisar e movimentar a construção tendo por finalidade assegurar a nova medida de ângulo: o radiano.

Segue o desenvolvimento das aulas:

O aluno passará pelas seguintes etapas (todos em um mesmo arquivo):

1. Construa, no GeoGebra, uma circunferência de raio igual a 1 e centro no ponto A (0,0);
2. Insira um ponto B com coordenadas (1,0).

   Comentário: Os eixos coordenados (x e y) dividem a circunferência em 4 partes, as quais são chamadas de "quadrantes".
3. Insira um ponto C sobre a circunferência, pouco acima de B (no sentido anti-horário);

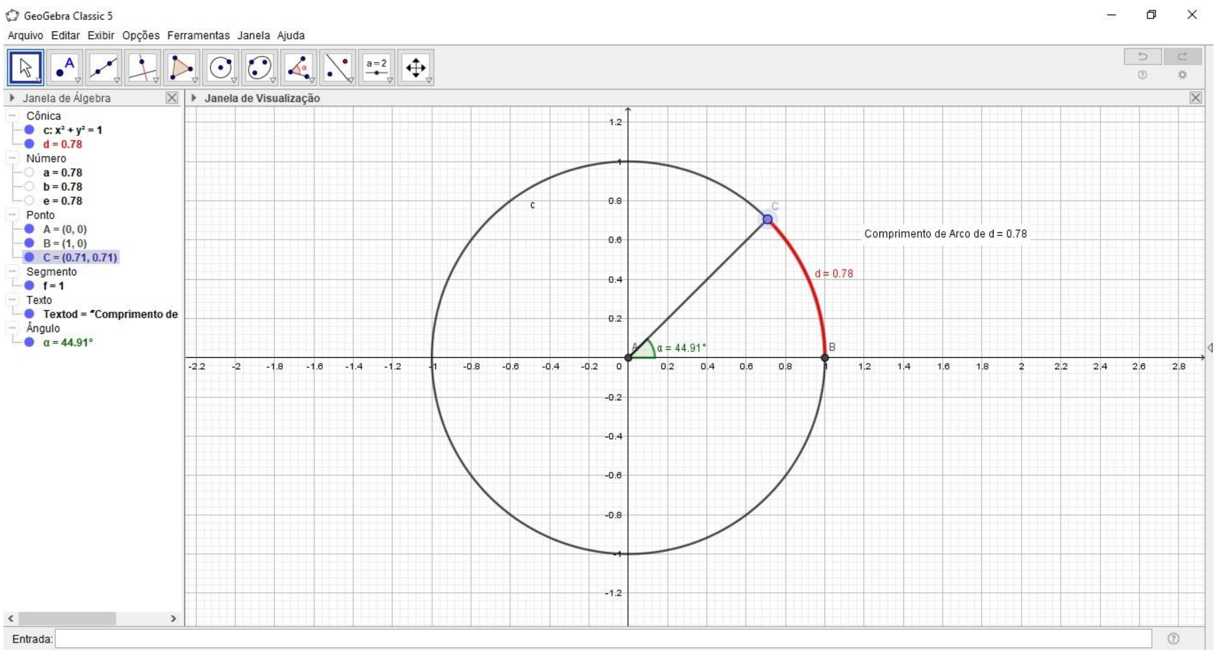
Comentário: o sentido anti-horário, a partir do ponto B é convencionado como sendo o sentido positivo do círculo trigonométrico e os quadrantes são enumerados nesse sentido.

De outra forma, tem-se que x e y assumem os sinais, conforme tabela:

- ✓ Crie o segmento que vai de A até C;
- ✓ Crie um arco de circunferência que vai de B até C;
- ✓ Comentário: o arco de circunferência BC (orientado de B para C, no sentido positivo) determina um ângulo (central) BÂC, ou seja, existe uma relação entre o comprimento do arco e o ângulo determinado por ele.
- ✓ Entre em *propriedades* desse arco e em *estilo*, altere a grossura da linha e em cor, coloque vermelho.
- ✓ Com a ferramenta distância ou comprimento, meça o comprimento do arco BC
- ✓ Meça o ângulo BÂC;
- ✓ Movimente o ponto C e observe o comprimento do arco BC e também o ângulo formado em BÂC.
- ✓ Quando BÂC=180°, qual é o comprimento do arco BC?
  - ○ Comentário: Lembre-se que o comprimento da circunferência é $C=2\pi r$ (r=raio) e que a circunferência trigonométrica possui raio igual a 1, ou seja, $C=2\pi 1=2\pi$. Sendo assim, quando se tem BÂC=360°, tem-se que o arco BC medirá 2π. Portanto, é estabelecida uma relação entre o comprimento do arco e o respectivo ângulo central, da seguinte forma: $360° \leftrightarrow 2\pi$ radianos, ou mais simplificadamente: $180° \leftrightarrow \pi$ radianos (a unidade radiano vem do fato do comprimento da circunferência ser 2π vezes o comprimento do raio).

Esta atividade ensejou a construção do ângulo central, assim, na medida em que o aluno movimentasse o ponto C, aparecia automaticamente a medida do arco e também do ângulo. Para visualização, destaca-se a Figura 2.

Figura 2. Possível resultado após o desenvolvimento das aulas 3 e 4.



Fonte: Elaboração do autor (2019).

Após gerarem o círculo trigonométrico, os estudantes responderam a Atividade 1, que consistiu na conversão de grau para radiano e radiano para grau:

Atividade 1

1) Faça as conversões de grau para radiano dos ângulos a seguir:

Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano
0°		90°	π/2	180°	π	270°	
30°		120°		210°		300°	
45°		135°		225°		315°	
60°		150°		240°		330°	

2) Faça as conversões de radiano para grau dos ângulos a seguir:

Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau	Radiano	Grau
0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{11\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{3}$	
$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π	

Aulas 5, 6, 7, 8 e 9: Trigonometria no círculo trigonométrico: Seno, Cosseno e Tangente (4 aulas de 50 min cada).

OBJETIVOS

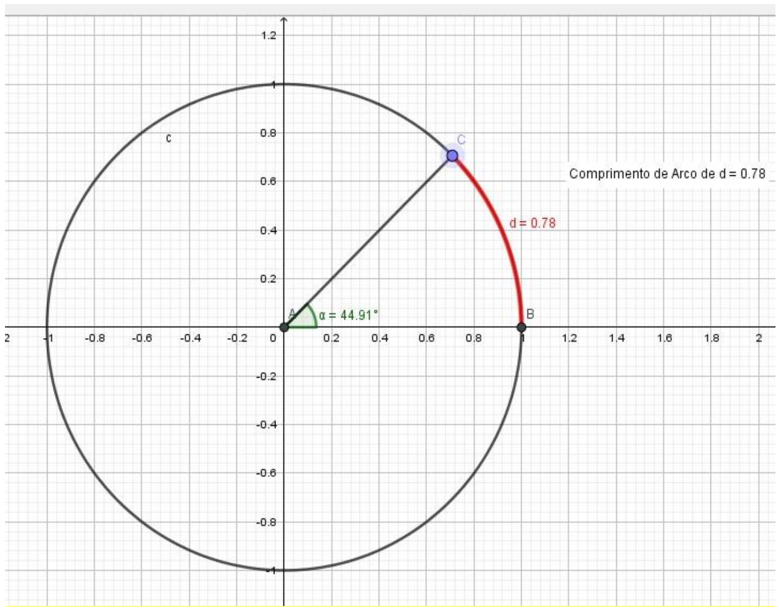
-Definir as principais razões trigonométricas no círculo trigonométrico: seno, cosseno e tangente.

-Visualizar a trigonometria no triângulo retângulo no círculo trigonométrico.

Assim, para auxiliar a condução sobre o tema, foi sugerido o seguinte desenvolvimento para Seno e Cosseno (1ª parte):

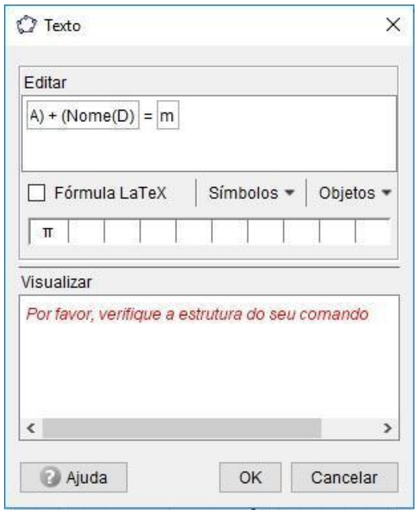
Aulas 5, 6, 7 - Desenvolvimento: Para ajudar a conduzir as discussões sobre o tema, sugere-se a construção:

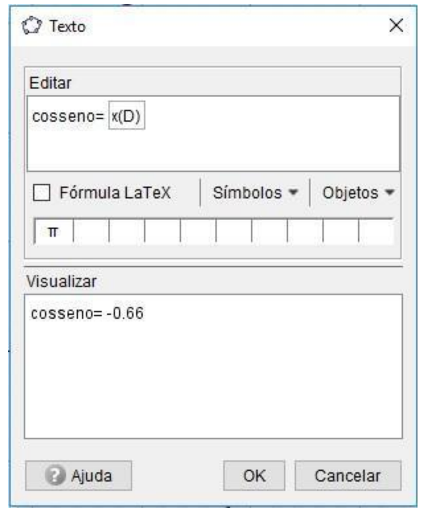
1. Resgate o círculo trigonométrico visto na aula 3 e 4 (ou construa novamente).



2. Insira uma reta perpendicular ao eixo x, passando por C;
3. Insira uma reta perpendicular ao eixo y, passando por C;
4. Nas interseções das retas dos itens 2 e 3 com os eixos x e y, crie os pontos D e E;
5. Crie os segmentos AD e AE, EC e DC e em seguida oculte as retas perpendiculares criadas nos itens 2 e 3;
6. Em propriedades do segmento AD, engrosse o segmento e coloque na cor azul;
7. Em propriedades do segmento AE, engrosse o segmento e coloque na cor verde;
8. Com a ferramenta *distância*, meça a distância entre os pontos A e D e a distância entre os pontos A e E;
9. No item 8, foram criadas duas caixas de texto: AD=…. e AE=…. . Entre em *editar* (botão direito e editar) e deixe como na figura (exemplo para AD):

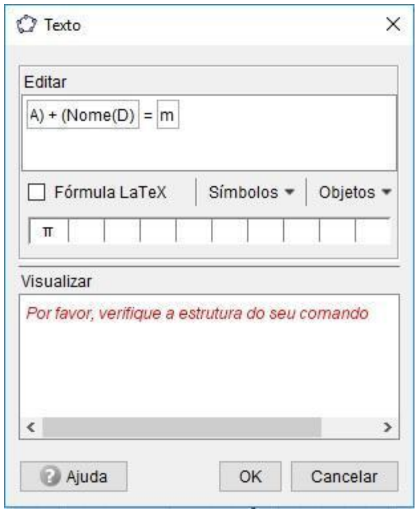
Obs.: observe que na segunda caixa, define-se o valor de cosseno como sendo a abscissa do ponto D, ou seja, no GeoGebra é usado o comando x(D). Faça o mesmo para a caixa de texto AE, colocando ‘seno’ e a ordenada do ponto E, ou seja, y(E).

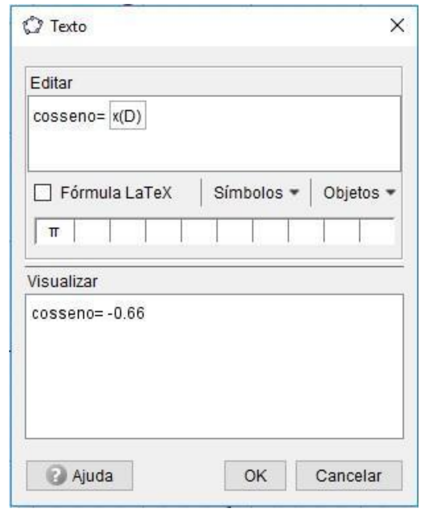




10. Insira uma reta perpendicular ao eixo x, passando por C;
11. Insira uma reta perpendicular ao eixo y, passando por C;
12. Nas interseções das retas dos itens 2 e 3 com os eixos x e y, crie os pontos D e E;
13. Crie os segmentos AD e AE, EC e DC e em seguida oculte as retas perpendiculares criadas nos itens 2 e 3;
14. Em propriedades do segmento AD, engrosse o segmento e coloque na cor azul;
15. Em propriedades do segmento AE, engrosse o segmento e coloque na cor verde;
16. Com a ferramenta distância, meça a distância entre ponto A e D e distância entre pontos A e E;
17. No item 8, foram criadas duas caixas de texto: AD=…. e AE=…. . Entre em editar (botão direito e editar) e deixe como na figura (exemplo para AD):

Obs.: observe que na segunda caixa, definimos o valor de cosseno como sendo a abscissa do ponto D, ou seja, no GeoGebra usamos o comando x(D). Faça o mesmo para a caixa de texto AE, colocando ‘seno’ e a ordenada do ponto E, ou seja, y(E).





18. Com a ferramenta polígono, crie o triângulo ADC;
19. Analise o triângulo ADC e relembrando as razões trigonométricas no triângulo retângulo (e),

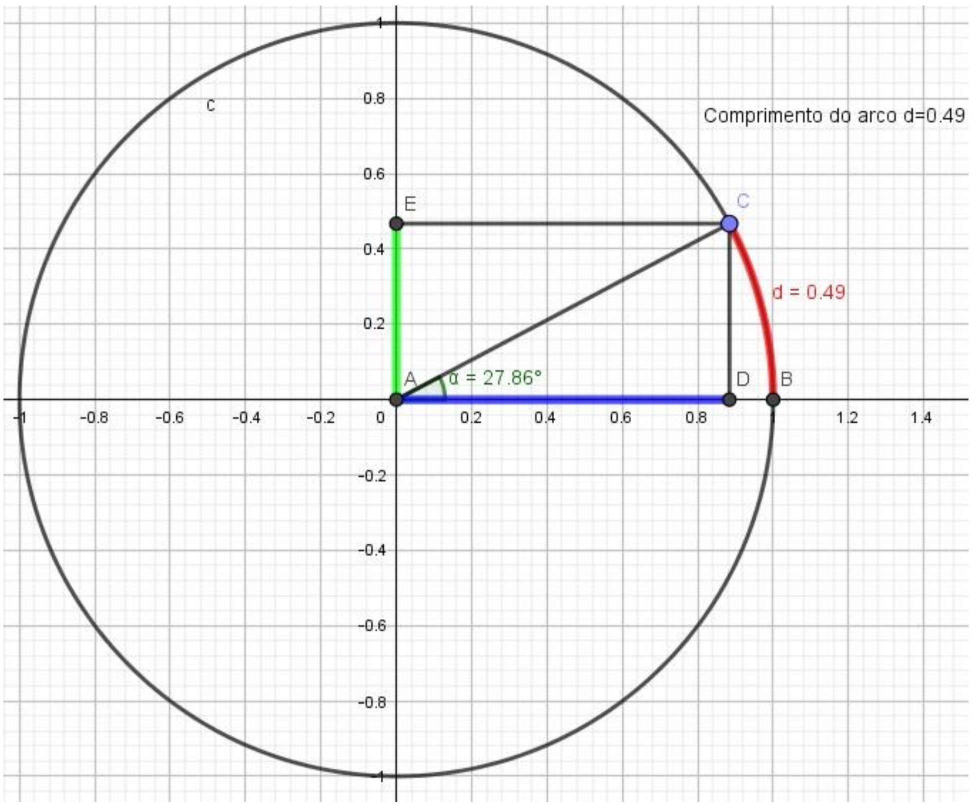
$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

E conclua que seus catetos (devido a hipotenusa ser de tamanho 1) são os valores de Seno (projetado no eixo y, em verde) e Cosseno (projetado no eixo x, em azul) do ângulo DÂC.

20. Relembre o teorema de Pitágoras: $\text{hipotenusa}^2=\text{cateto}_1^2+\text{cateto}_2^2$. Com base nesse teorema, aplicando-o no triângulo retângulo ADC, conclua que $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Dessa forma, o possível resultado das aulas 5, 6, 7 pode ser observado na Figura 3:

Figura 3. Possível resultado das aulas 5,6 e 7



Fonte: Elaboração do autor.

Após gerarem o círculo trigonométrico, os estudantes responderam a Atividade 2 que continha seis questões. Esta atividade possibilitou aos estudantes visualizarem, no triângulo retângulo, o lado que representava os valores do seno e do cosseno, assim como visualizar, no círculo trigonométrico, os sinais em cada quadrante do seno e do cosseno. Além disso, possibilitou determinar os valores de seno e cosseno a partir dos ângulos dados em graus e radianos e, ainda, comparar o seno e o cosseno dos diversos ângulos nos respectivos quadrantes.

Atividade 2

1) Observando a construção feita no GeoGebra, responda os itens:

a) Qual segmento representa o seno do arco BC (ou ângulo BÂC)?______

b) Qual segmento representa o cosseno do arco BC (ou ângulo BÂC)? _______

2) Movimente o ponto C observando o sinal de seno e cosseno. Com base nisso, preencha a tabela com “positivo” ou “negativo”:

	Seno	**Cosseno**
1° quadrante		
2° quadrante		
3° quadrante		
4° quadrante		

3) Movimente o ponto C de forma a obter o seno e o cosseno dos seguintes ângulos:

	Seno	**cosseno**
30°		
45°		
60°		
120°		
135°		
150°		
210°		
225°		
240°		
300°		
315°		
330°		

4) Movimente o ponto C e visualize os valores de seno e do cosseno do ângulo formado. Em especial, movimente o ponto C para encontrar os seguintes valores:

a) sen(0)= ___

b) $\cos(0)=$ ____
c) $\text{sen}(\pi/2)=$ ____
d) $\cos(\pi/2)=$ ____
e) $\text{sen}(\pi)=$ ____
f) $\cos(\pi)=$ ___
g) $\text{sen}(3\pi/2)=$ ____
h) $\cos(3\pi/2)=$ ____
i) $\text{sen}(2\pi)=$ ____
j) $\cos(2\pi)=$ ____

5) Complete com > , < ou = :

a) sen(20°) …… sen(170°)
b) sen(120°) …… sen(240°)
c) sen(30°) …… sen(150°)
d) sen(210°) …… sen(300°)
e) cos(10°) …….cos(10°)
f) sen(10°) …….cos(10°)

6) Sendo x um arco no segundo quadrante do círculo trigonométrico, responda com V ou F:

a) ( ) $\text{sen}(x) > \cos(x)$
b) ( ) $\cos(x) > 0$
c) ( ) $\text{sen}(x) < 0$
d) ( ) $\text{sen}(x) \cdot \cos(x) < 0$

Com relação aos estudantes que erraram alguns itens da Atividade 2, observou-se que os mesmos construíram os devidos gráficos, entretanto, não souberam extrair os valores dos senos e cossenos de cada ângulo.

A seguir, apresentou-se a segunda parte, as aulas 8 e 9, relacionadas ao desenvolvimento da tangente:

2ª parte do desenvolvimento: Tangente

1) Construa novamente o círculo trigonométrico (Centro A=(0,0), B=(1,0), arco BC).

2) Insira uma reta perpendicular ao eixo x, passando por B;

3) Crie uma reta passando por A e C;

4) Na interseção das retas dos itens 2 e 3, insira o ponto D;

5) Crie o segmento AD;

6) Oculte a reta do item 3;

7) Crie o segmento BD e edite sua espessura e cor (laranja);

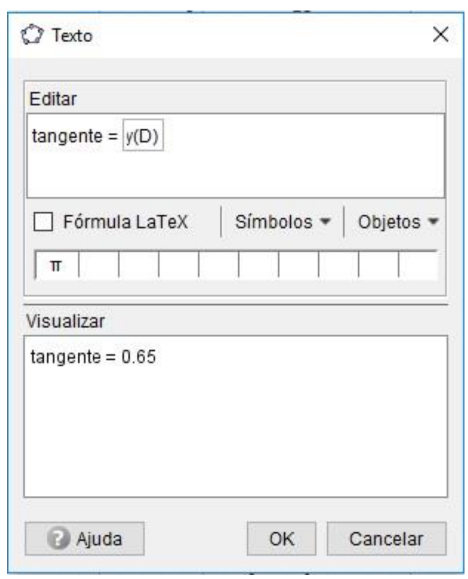
8) Crie o polígono com os pontos ABD e insira a medida do ângulo BÂD;

9) Relembre a razão trigonométrica: $tg\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$ e conclua, a partir do triângulo ABD, que devido a AB=1, temos que tan(α)=BD.

10) Movimente o ponto C e visualize os valores de tangente do ângulo formado.

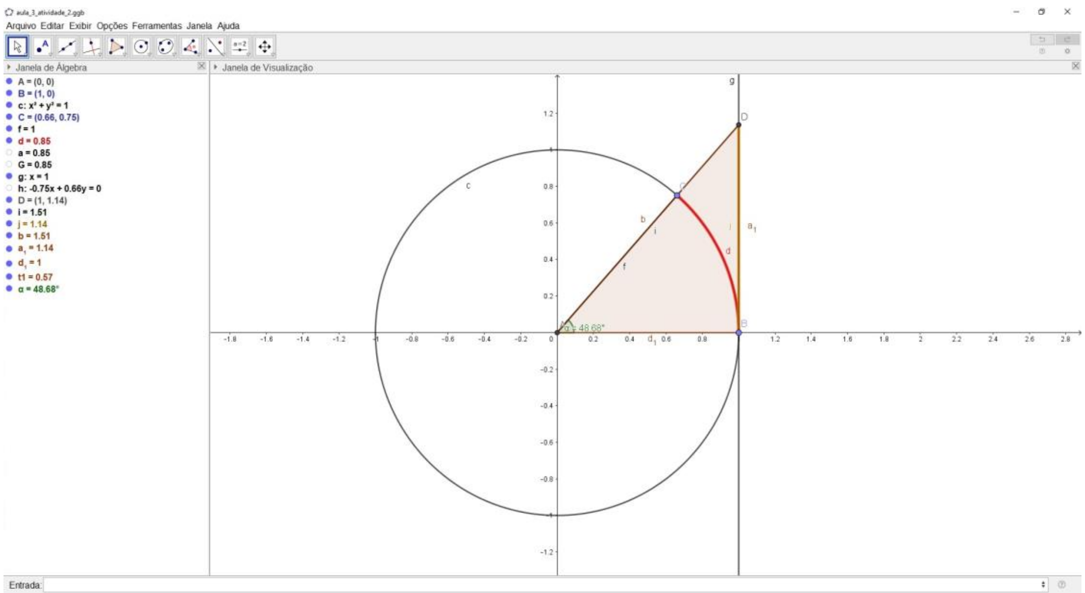
11) Com a ferramenta *distância*, meça a distância entre ponto B e D;

12) No item 11, foi criada a caixa de texto: BD=…. . Entre em editar (botão direito e editar) e deixe como na figura:



Dessa forma, como possível resultado da segunda parte, destaca-se a Figura 4:

Figura 4. Possível solução para o desenvolvimento da aula 8



Fonte**:** Elaboração do autor

Após gerar o gráfico, os estudantes responderam a Atividade 3 que continha seis questões:

Atividade 3

1) Observando a construção feita no GeoGebra, qual segmento representa a tangente do arco BC (ou ângulo BÂC)? ______________

2) Movimente o ponto C observando o sinal da tangente. Com base nisso, preencha a tabela com “positivo” ou “negativo”:

	Tangente
1° quadrante	
2° quadrante	
3° quadrante	
4° quadrante	

3) Movimente o ponto C de forma a obter a tangente dos seguintes ângulos:

	Tangente
30°	
45°	
60°	
120°	
135°	
150°	
210°	
225°	
240°	
300°	
315°	
330°	

4) Complete com > , < ou = :

g) tan(20°) …… tan(210°)

h) tan(120°) …… tan(290°)

i) tan(30°) …… tan(150°)

j) tan(210°) …… tan(300°)

5) Sendo x=260° um arco no círculo trigonométrico, responda com V ou F:

a) ( ) sen(x) < cos(x) <tan(x)

b) ( ) sen(x) < tan(x) < cos(x)

c) ( ) tan(x) < sen(x) < cos(x)

d) ( ) cos(x) < tan(x) < sen(x)

6) Movimente o ponto C e visualize os valores da tangente do ângulo formado. Em especial, movimente o ponto C para encontrar os seguintes valores:

a) tan(0)= ____

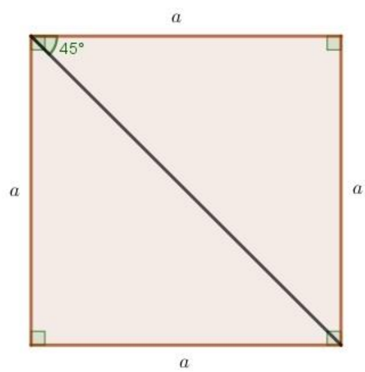
b) tan(π)= ____

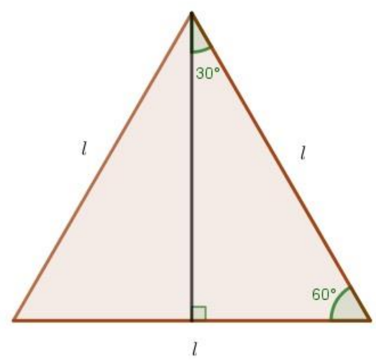
c) tan(2π)= ____

d) $\tan(\pi/2)=$ _____

e) $\tan(3\pi/2)=$ ____

OBS.: Arcos notáveis do primeiro quadrante.





Arcos	Seno	Cosseno	Tangente
30°			
45°			
60°			

Aulas 10 e 11: Explorando simetrias no círculo trigonométrico (2 aulas de 50 min cada).

OBJETIVOS:

- Usar as simetrias do círculo trigonométrico para relacionar seno, cosseno e tangente de ângulos em outros quadrantes (2°, 3° e 4°) em comparação com ângulos do 1° quadrante.

- Reconhecer, via congruência de triângulos, as simetrias e, posteriormente, comparar seno, cosseno e tangente destes ângulos simétricos. Para a execução desta proposta, os estudantes receberam o material contendo o planejamento das aulas:

Desenvolvimento: Para se chegar à discussão sobre as simetrias, observou-se os seguintes passos, os quais proporcionam a reflexão:

12) Construa novamente o círculo trigonométrico (Centro A=(0,0), B=(1,0), arco BC).

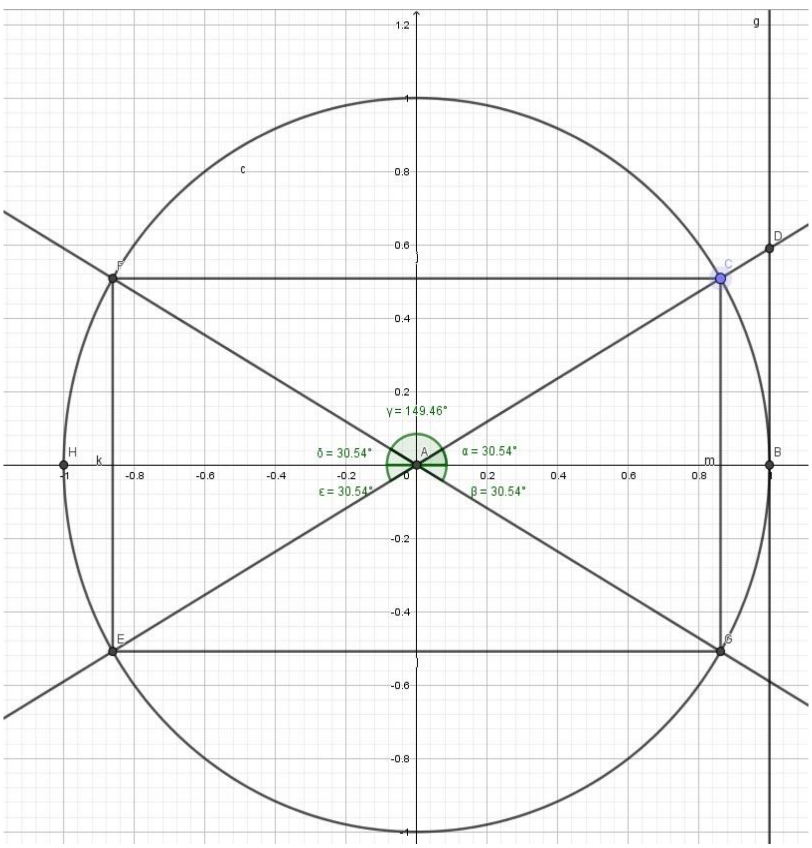
13) Insira a reta que passa por A e C;

14) Insira o ponto D como interseção da reta do item 2 com a reta auxiliar para visualizarmos a tangente nesse ponto;

15) Insira o ponto E como interseção da reta do item 2 com a circunferência (já existe uma dessas interseções que é o ponto C);
16) Insira uma reta paralela ao eixo x, que passe por C, e nomeie como F a interseção dessa reta com a circunferência;
17) Insira a reta que passa por F e A e nomeie como G a interseção dessa reta com a circunferência;
18) Meça o ângulo BÂC e BÂG e observe a congruência;
19) Crie os segmentos: CF, FE, EG e CG (oculte a reta que passa por F e C);
20) Movimente o ponto C para visualizar vários ângulos congruentes;
21) Meça o ângulo BÂF;
22) Crie o ponto H (-1,0) e meça os ângulos FÂH, HÂE e GÂB.

Dessa forma, como possível resultado das aulas 10 e 11, destaca-se a Figura 5:

Figura 5. Possível resultado da construção: visualizando congruências



Fonte: Elaboração do autor.

Atividade 4

1) Escreva um ângulo que tenha o mesmo valor de:

a) sen(30º)=sen(____)
b) sen(45º)=sen(____)
c) sen(60º)=sen(____)
d) sen(x)=sen(____), sendo x um ângulo do 1° quadrante
e) tan(30º)=tan(____)
f) tan(45º)=tan(____)
g) tan(60º)=tan(____)
h) tan(x)=tan(____), sendo x um ângulo do 1° quadrante
i) cos(30º)=cos(____)
j) cos(45º)=cos(____)
k) cos(60º)=cos(____)
l) cos(x)=cos(____), sendo x um ângulo do 1° quadrante

2) Movimente o ponto C a fim de avaliar as identidades abaixo, classificando como verdadeiro (V) ou falso (F):

a) ( ) $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$
b) ( ) $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}(\alpha)$
c) ( ) $\text{sen}(2\pi - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$
d) ( ) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
e) ( ) $\cos(\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$
f) ( ) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$
g) ( ) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
h) ( ) $\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
i) ( ) $\tan(2\pi - \alpha) = \tan(\alpha)$

3) Encontre os valores pedidos (usando se necessário, as ***identidades verdadeiras*** do exercício anterior):

a) sen(120º) =sen(180° - 60º)=sen(60°)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) sen(240º)= ________________________________
c) sen(315º)= ________________________________
d) cos(135º)= ________________________________

e) cos(210º)= ________________________________

f) cos(330º)= ________________________________

g) tan(150º)=__________________________________

h) tan(225º)=__________________________________

i) tan(300º)=__________________________________

Aulas 12, 13 e 14: Definição das funções sen(x), cos(x) e tan(x) (3 aulas de 50 min cada).

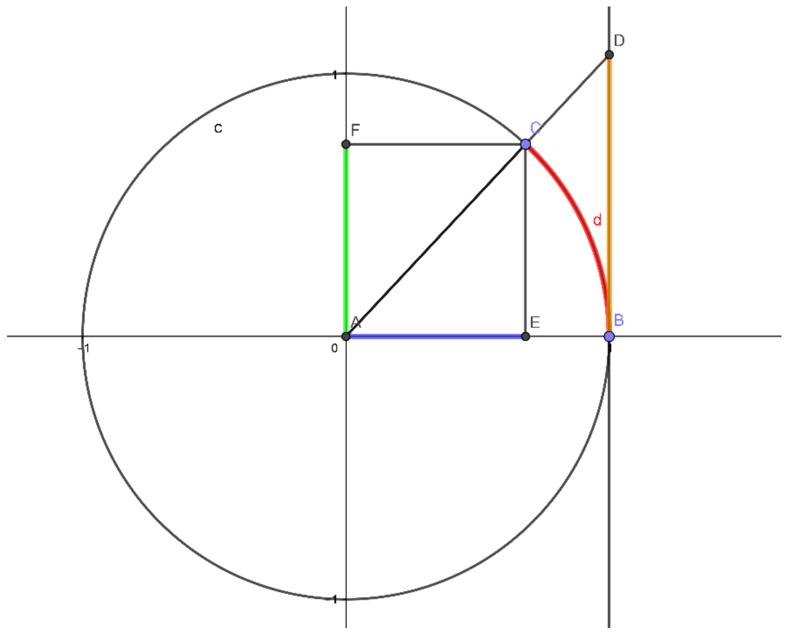
OBJETIVOS:

- Compreender a construção das funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico.
- Relacionar o comprimento do arco (radiano) com a projeção em cada eixo coordenado (eixo X, no caso de cosseno e eixo Y no caso de seno e reta auxiliar no caso de tangente).
- Visualizar este relacionamento graficamente.

Vale ressaltar que o passo 11 do desenvolvimento desse material serviu de aporte para a Atividade 5.

Desenvolvimento: Para realizar essa atividade, os alunos deverão seguir os seguintes passos:

6. Construa novamente o círculo trigonométrico (Centro A=(0,0), B=(1,0), arco BC).
7. Insira a reta que passa por A e C;
8. Insira uma reta perpendicular ao eixo x, passando por B;
9. Insira o ponto D, como interseção da reta do item 2 com a reta auxiliar (do item 3) onde se visualiza a tangente;
10. Insira uma reta paralela ao eixo y que passe por C e nomeie como E, a interseção dessa reta com o eixo x;
11. Insira uma reta paralela ao eixo x que passe por C e nomeie como F, a interseção dessa reta com eixo y;
12. Crie os segmentos AD e AE, AF, EC, CF e BD e em seguida oculte as retas perpendiculares criadas nos itens 2 e 3;
13. Em propriedades do segmento AE, engrosse o segmento e coloque na cor azul;
14. Em propriedades do segmento AF, engrosse o segmento e coloque na cor verde;
15. Em propriedades do segmento BD e edite sua espessura e cor (laranja);

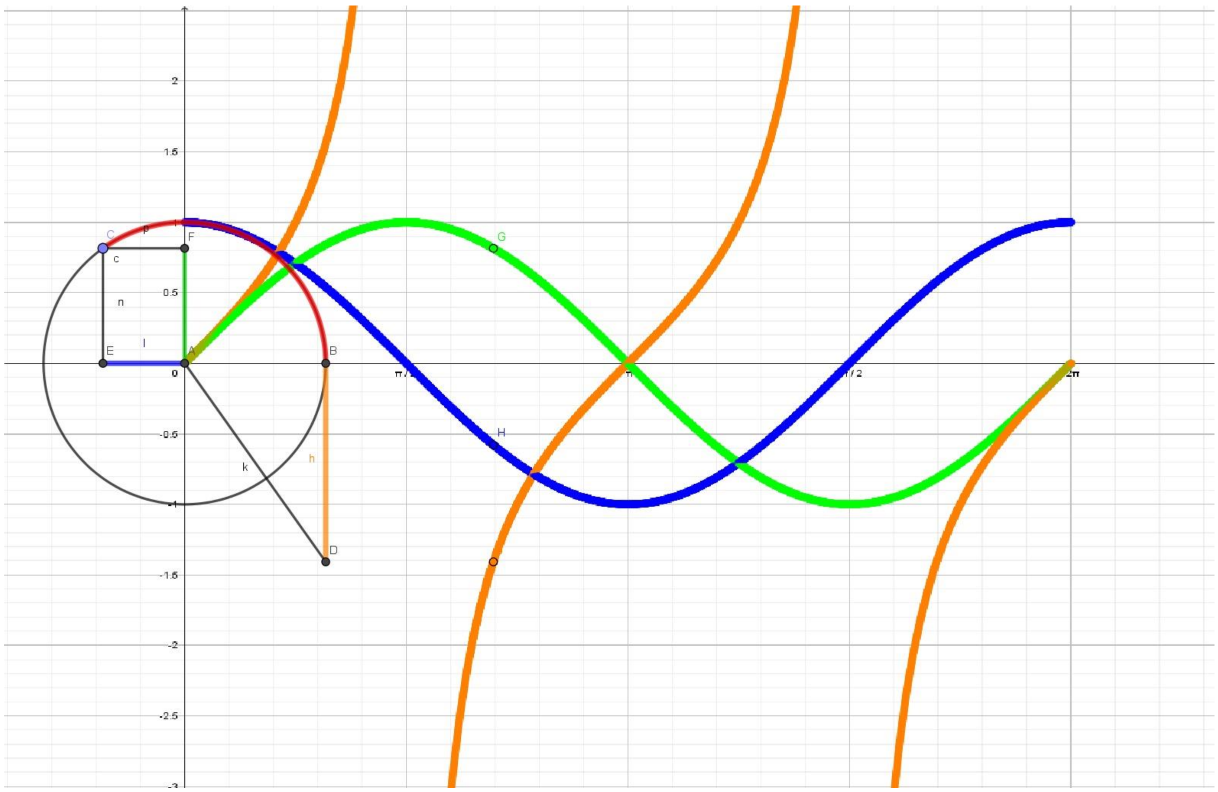


16. Na caixa de entrada, vamos criar um ponto que chamaremos de G. A sintaxe de criação de ponto na ***caixa de entrada*** é sempre da forma: G = (coordenada x do ponto, coordenada y do ponto). Crie um ponto com o seguinte comando: G = (d , y(F)). O Ponto G foi criado usando o comprimento do arco d como sendo sua abscissa e a coordenada y do ponto F, como sendo sua ordenada (que é o respectivo valor do seno desse arco);
17. Entre nas propriedades do ponto G e habilite a função "Rastro". Isso fará com que o ponto G, ao ser movido, deixe um rastro que será o gráfico da função Seno;
18. Por fim, volte ao ponto C e em suas propriedades, habilite "animar"
19. Trace duas retas paralelas ao eixo x e passando pelos pontos 1 e -1 do eixo y. Observe que o gráfico da função seno fica entre essas retas construídas no passo 5. Isso significa que a imagem da função seno está limitada ao intervalo [1, 1].

Atividade 5:

Repita procedimento análogo (a partir do item 11) para criar a função cosseno e tangente, fazendo as mesmas análises. No caso de cosseno H = (d, x(E)) e no caso de tangente, J = (d, y(D)).

Figura 6. Função seno, cosseno e tangente construída a partir do círculo trigonométrico



Fonte: Elaboração do autor.

Foram notáveis o envolvimento e a participação dos estudantes, provavelmente devido à dinâmica da atividade proporcionada pelo *software*, uma vez que estes puderam perceber, em decorrência da construção e da animação dos gráficos, que ambos poderiam ser construídos ao mesmo tempo, em diversas tonalidades de cores e com movimento, o que tornou atrativo e diferente o trabalho das aulas de Matemática, como se pode constatar na figura 6.

Elaborar a sequência didática e acompanhar os alunos individualmente foi imprescindível para a obtenção de um resultado satisfatório. Além disso, a utilização do *software* contribuiu para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos estudados.

Aulas 15 e 16: Alguns gráficos das funções sen(x), cos(x) e tan(x) e suas características (1 aula de 50 min).

OBJETIVOS:

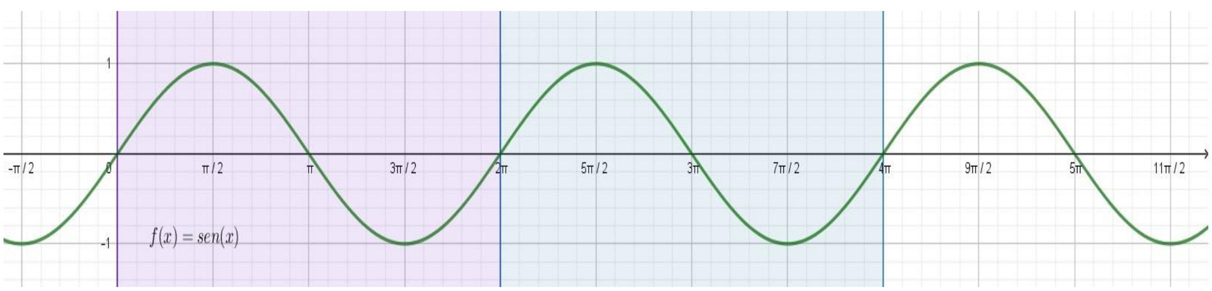
- Construir e visualizar por meio do *software* o comportamento das funções seno, cosseno, tangente.
- Determinar o domínio, a imagem e o período de cada função.

Segundo Iezzi (2016, p. 49) o Período é compreendido como: "Uma função f: A→ B é periódica se existir um número real positivo **p** tal que f(x) = f(x+p), ∀x є A. O menor valor positivo de **p** é chamado de **período** de **f**".

Em relação ao conceito de período, destacou-se seu entendimento por meio da seguinte estratégia:

Observe a Figura 7, a função *f(x)=sen(x)* possui período igual a 2π.

Figura 7. Gráfico da função f(x)=sen(x) e seu período



Fonte: Elaboração do autor (2019).

Atividade 6:

Com o auxílio do GeoGebra, construa os gráficos das funções e, a partir desses, encontre o que se pede:

a) função seno:

	Domínio	**Imagem**	**Período**
f(x)=sen(x)			
f(x)=sen(2x)			
f(x)=2sen(x)			
f(x)=-3sen(x)			

f(x)=2+sen(x)			
f(x)=-2+sen(x)			
f(x)=sen(x - π/3)			
f(x)=sen(x + π/3)			

b) Função cosseno:

	Domínio	**Imagem**	**Período**
f(x)=cos(x)			
f(x)=cos(2x)			
f(x)=2cos(x)			
f(x)=-3cos(x)			
f(x)=2+cos(x)			
f(x)=-2+cos(x)			
f(x)=cos(x - π/3)			
f(x)=cos(x + π/3)			

c) Função tangente:

	Domínio	**Imagem**	**Período**
f(x)=tan(x)			
f(x)=tan(2x)			
f(x)=2tan(x)			
f(x)=-3tan(x)			
f(x)=2+tan(x)			
f(x)=-2+tan(x)			
f(x)=tan(x - π/3)			
f(x)=tan(x + π/3)			

Aulas 17, 18, 19, 20, 21 e 22: Alterações da função seno, cosseno e tangente (6 aulas de 50 min cada).

OBJETIVOS:

-Estudar os efeitos da inserção de coeficientes nas funções seno, cosseno e tangente.

- Manipular essas funções no GeoGebra, com a ajuda de controles deslizantes para melhor visualizar os efeitos dos parâmetros.

Para tanto, seguiu-se, para cada função, o seguinte desenvolvimento:

Desenvolvimento: função seno

(11) No ícone *controle deslizante*, insira 4 controles deslizantes; a, b, c e d.

(12) No campo de entrada do GeoGebra, digite: f(x)=a+b*sen(c*x+d)

(13) Mexa em cada controle deslizante em separado para visualizar muito claramente a sua influência.

(14) No campo de entrada, digite: *período=(2*pi)/abs(c)*. Isso cria uma variável que calcula o período da função seno. Observe que esse comando na verdade é igual a $\frac{2\pi}{|c|}$, que é o período.

(15) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0** e observe o gráfico da função (com esses parâmetros, temos f(x)=sen(x));

(16) Mexa o controle deslizante **a** e observe o que acontece com o gráfico da função; (translação vertical)

(17) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **b** e observe o que acontece com o gráfico da função; (Ampliação/compressão vertical)

(18) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **c** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão horizontal). Ao mexer no controle **c,** observe também a variável *período* criada no item 4.

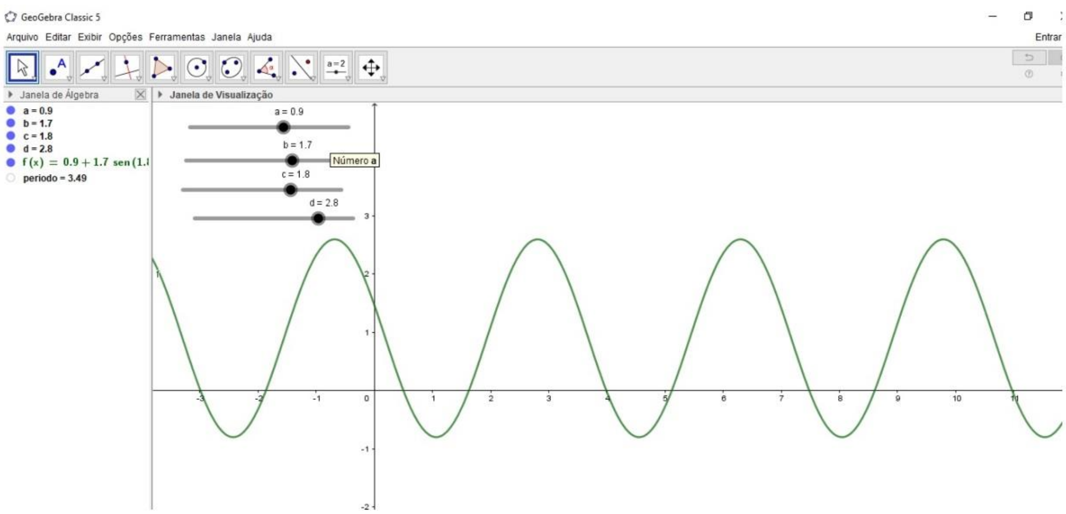
(19) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **d** e observe o que acontece com o gráfico da função (translação horizontal).

(20) Os coeficientes **a, b, c** e **d** provocam alterações na função seno. Relacione cada coeficiente com a respectiva alteração no gráfico.

Alteração no gráfico	Coeficiente
Ampliação/compressão vertical	
Translação vertical	
Ampliação/compressão horizontal	
Translação horizontal	

A partir da sequência apresentada, destaca-se a Figura 8:

Figura 8. Gráfico da função seno e suas variantes.



Fonte: Elaboração do autor.

Alteração no gráfico	Coeficiente
Ampliação/compressão vertical	
Translação vertical	
Ampliação/compressão horizontal	
Translação horizontal	

Desenvolvimento: função cosseno

(11) No ícone *controle deslizante*, insira 4 controles deslizantes; a, b, c e d.

(12) No campo de entrada do GeoGebra, digite: f(x)=a+b*cos(c*x+d).

(13) Mexa em cada controle deslizante em separado para visualizar muito claramente a sua influência.

(14) No campo de entrada, digite: *período=(2*pi)/abs(c)*. Isso cria uma variável que calcula o período da função cosseno. Observe que esse comando na verdade é igual a $\frac{2\pi}{|c|}$, que é o período.

(15) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0** e observe o gráfico da função (com esses parâmetros, temos f(x)=cos(x)).

(16) Mexa o controle deslizante **a** e observe o que acontece com o gráfico da função (translação vertical).

(17) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **b** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão vertical).

(18) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **c** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão horizontal). Ao mexer no controle **c,** observe também a variável *período* criada no item 4.

(19) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **d** e observe o que acontece com o gráfico da função (translação horizontal).

(20) Os coeficientes **a, b, c** e **d** provocam alterações na função seno. Relacione cada coeficiente com a respectiva alteração:

Alteração no gráfico	Coeficiente
Ampliação/compressão vertical	
Translação vertical	
Ampliação/compressão horizontal	
Translação horizontal	

Desenvolvimento: função tangente

(11) No ícone *controle deslizante*, insira 4 controles deslizantes; a, b, c e d.

(12) No campo de entrada do GeoGebra, digite: f(x)=a+b*tan(c*x+d)

(13) Mexa em cada controle deslizante em separado para visualizar muito claramente a sua influência.

(14) No campo de entrada, digite: *período=(pi)/abs(c)*. Isso cria uma variável que calcula o período da função tangente. Observe que esse comando na verdade é igual a $\frac{\pi}{|c|}$, que é o período.

(15) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0** e observe o gráfico da função (com esses parâmetros, temos f(x)=tan(x)).
(16) Mexa o controle deslizante **a** e observe o que acontece com o gráfico da função; (translação vertical).
(17) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **b** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão vertical).
(18) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **c** e observe o que acontece com o gráfico da função (Ampliação/compressão horizontal). Ao mexer no controle **c,** observe também a variável *período* criada no item 4.
(19) Ajuste **a=0, b=1, c=1** e **d=0,** mexa com o controle **d** e observe o que acontece com o gráfico da função (translação horizontal).
(20) Os coeficientes **a, b, c** e **d** provocam alterações na função seno. Relacione cada coeficiente com a respectiva alteração:

Alteração no gráfico	**Coeficiente**
Ampliação/compressão vertical	
Translação vertical	
Ampliação/compressão horizontal	
Translação horizontal	

OBS. Repare que para o caso da função tangente, temos o período igual a $\frac{\pi}{|c|}$, diferentemente do caso de seno e cosseno que é: $\frac{2\pi}{|c|}$.

Atividade 7:

1) Com auxílio do GeoGebra, faça o gráfico de *f, g* e *h* no mesmo plano cartesiano e responda as questões:

a) f(x)=sen(x), g(x)=3+sen(x), h(x)=-3+sen(x)

- Na função *y=a+sen(x)*, qual a diferença em relação ao gráfico de *f(x)=sen(x):*

  a) se *a>0?* ____

  b) se *a<0*? ____

- Houve alteração no período de *g* e *h* em relação a *f*, *sim ou não*? __________.

  Se sim, qual? ____

  ____

- Houve alteração na imagem de *g* e *h* em relação a *f, sim ou não*? _________.

  Se sim, qual? ____

  ____

b) f(x)=sen(x), g(x)=3sen(x), h(x)=-3sen(x) e t(x)=(1/3)sen(x)

- Na função *y=b.sen(x)*, qual a diferença em relação ao gráfico de *f(x)=sen(x):*

  a) se *b>1* ____

  b) se *0<b<1* ____

  c) se *b<0* ____

- Houve alteração no período de *g*, *h* e *t* em relação a *f, sim ou não*? _________.

  Se sim, qual? ____

  ____

- Houve alteração na imagem de *g*, *h* e *t* em relação a *f, sim ou não*? ___________

  Se sim, qual? ____

  ____

c) f(x)=sen(x), g(x)=sen(2x), h(x)=sen(x/2) e t(x)=sen(-2x)

- Na função *y=sen(cx)*, qual a diferença em relação ao gráfico de *f(x)=sen(x):*

  a) se *c>1* ____

  b) se *0<c<1* ______________________________________

  c) se c*<0* ____

- Houve alteração no período de *g*, *h* e *t* em relação a *f, sim ou não*? __________

  Se sim, qual? ____

  ____

- Houve alteração na imagem de *g*, *h* e *t* em relação a *f, sim ou não*? _________

  Se sim, qual? ____

  ____

d) f(x)=sen(x), g(x)=sen(x+π/3), h(x)=sen(x - π/3)

- Na função *y=sen(x+d)*, qual a diferença em relação ao gráfico de *f(x)=sen(x):*

  a) se *d>0* ____

  b) se *d<0* ____

- Houve alteração no período de *g* e *h* em relação a *f, sim ou não*? ________

Se sim, qual? ____

____

- Houve alteração na imagem de *g* e *h* em relação a f, *sim ou não*?__________

  Se sim, qual? ____

  ____

e) f(x)=cos(x), g(x)=2+cos(x), h(x)=-2+cos(x)

- Na função *y=a+cos(x)*, qual a diferença em relação ao gráfico de *f(x)=cos(x):*

  a) se *a>0?* ____

  b) se *a<0*? ____

- Houve alteração no período de *g* e *h* em relação a *f*, *sim ou não*? _______

  Se sim, qual? ____

  ____

- Houve alteração na imagem de *g* e *h* em relação a *f*, *sim ou não*? _______

  Se sim, qual? ____

  ____

f) f(x)=cos(x), g(x)=2cos(x), h(x)=-2cos(x) e t(x)=(1/2)cos(x)

- Na função *y=b.cos(x)*, qual a diferença em relação ao gráfico de *f(x)=cos(x):*

  a) se *b>1* ____

  b) se *0<b<1* ____

  c) se *b<0* ____

- Houve alteração no período de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não*?_______

  Se sim, qual? ____

  ____

- Houve alteração na imagem de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não*? _________

  Se sim, qual? ____

  ____

g) f(x)=cos(x), g(x)=cos(2x), h(x)=cos(x/2) e t(x)=cos(-2x)

- Na função *y=cos(cx)*, qual a diferença em relação ao gráfico de *f(x)=cos(x):*

  a) se *c>1* ____ *b)* se $0<c<1$ ______________________________

c) se $c<0$ ________________________________

- Houve alteração no período de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não*?__________

  Se sim, qual? ____

  ____

- Houve alteração na imagem de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não*? __________

  Se sim, qual? ____

  ____

h) $f(x)=coa(x)$, $g(x)=cos(x+\pi/3)$, $h(x)=cos(x - \pi/3)$

- Na função $y=cos(x+d)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=cos(x)$:

  a) se $d>0$ __________________________

  b) se $d<0$ __________________________

- Houve alteração no período de *g* e *h* em relação a *f*, *sim ou não*?__________
- Se sim, qual? ____
- ____
- Houve alteração na imagem de *g* e *h* em relação a f, *sim ou não*? ___________
- Se sim, qual? ____
- ____

i) $f(x)=tan(x)$, $g(x)=3+tan(x)$, $h(x)=-3+tan(x)$

- Na função $y=a+tan(x)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=tan(x)$:

  a) se $a>0$? ____________________

  b) se $a<0$? ____________________

- Houve alteração no período de *g* e *h* em relação a *f*, *sim ou não*? Se sim, qual? _________

  Se sim, qual? ____

  ____

- Houve alteração na imagem de *g* e *h* em relação a *f*, *sim ou não*? Se sim, qual? __________

  j) $f(x)=tan(x)$, $g(x)=3tan(x)$, $h(x)=-3tan(x)$ e $t(x)=(1/3)tan(x)$

  Se sim, qual? ____

  ____

- Na função $y=b.tan(x)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=tan(x)$:

  a) se $b>1$ ________________________________

  b) se $0<b<1$ ______________________________

  c) se $b<0$ _________________________________

- Houve alteração no período de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não*? __________

  Se sim, qual? ____

  ____

____

- Houve alteração na imagem de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não*? ___________

  Se sim, qual? ____

  ____

l) $f(x)=tan(x)$, $g(x)=tan(2x)$, $h(x)=tan(x/2)$ *e* $t(x)=tan(-2x)$

- Na função $y=tan(cx)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=tan(x)$:

  a) se $c>1$ ________________________________

  b) se $0<c<1$ ______________________________

  c) se $c<0$ ________________________________

- Houve alteração no período de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não*? ___________

  Se sim, qual? ____

  ____

- Houve alteração na imagem de *g*, *h* e *t* em relação a *f*, *sim ou não*? ___________

  Se sim, qual?

  ____

  ____

m) $f(x)=tan(x)$, $g(x)=tan(x+\pi/3)$, $h(x)=tan(x - \pi/3)$

- Na função $y=tan(x+d)$, qual a diferença em relação ao gráfico de $f(x)=tan(x)$:

  a) se $d>0$ _______________________________

  b) se $d<0$ _______________________________

- Houve alteração no período de *g* e *h* em relação a *f*, *sim ou não*? ___________

  Se sim, qual? ____

  ____

- Houve alteração na imagem de *g* e *h* em relação a f, *sim ou não*? ___________
  Se sim, qual? ____
  ____

Aulas 23 e 24: Aplicações da função seno e cosseno (2 aulas de 50 min cada).

OBJETIVO:

- Estabelecer relações entre os conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno e os problemas do dia a dia.

(CHAVANTE, 2016) Na medicina, a trigonometria é apresentada no monitoramento da frequência cardíaca, ou seja, no número de batimentos cardíacos em um período de tempo, usualmente designado por b.p.m (batimentos cardíacos por minuto). A partir do monitoramento, é possível medir a pressão sanguínea ou arterial de uma pessoa.

Essa medida da pressão sanguínea é dada por dois valores: a pressão sistólica, que é o valor máximo atingido quando o coração se contrai e bombeia o sangue, e a pressão diastólica, que é o valor mínimo atingido quando o coração está em repouso, ambas em um intervalo de tempo de um batimento cardíaco. Normalmente, a pressão é representada da seguinte maneira: 120/80 mm Hg (milímetros de mercúrio), em que o primeiro valor é a pressão sistólica e o segundo valor é a pressão diastólica.

A variação da pressão sanguínea (em mm Hg) de uma pessoa, em função do tempo (em s), é uma função trigonométrica (cíclica ou periódica) cuja lei é dada por: $P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$.

a) Usando o GeoGebra, construa o gráfico de $P(t)$;

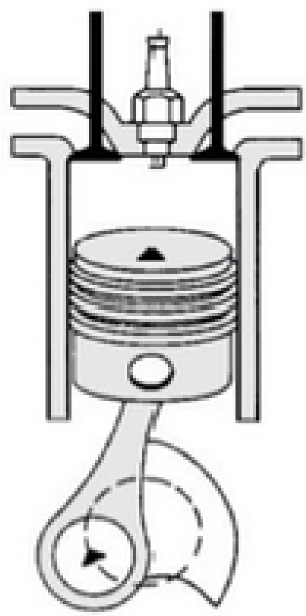
b) Qual o período de $P(t)$ (espaço de tempo em que o fenômeno de variação de pressão completa um ciclo)?

c) Quais os valores das pressões máxima e mínima? Em qual instante de tempo eles ocorrem?

d) Qual a imagem de $P(t)$?

2) (UFPR-2013) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura. Suponha que um instante, em segundos, a altura do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão: $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right)$

Figura 9. UFPR//fac-simileID/BR



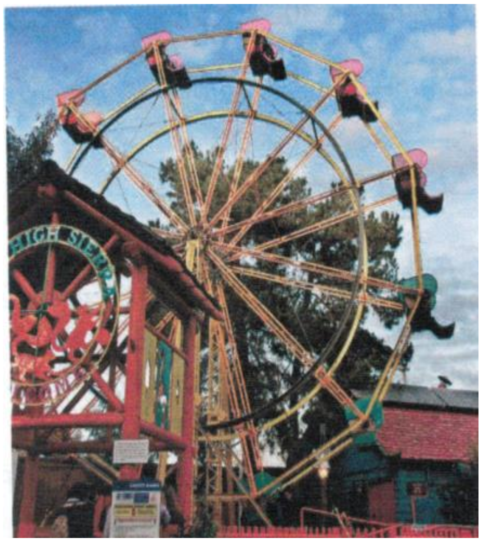
Fonte: Chavante, 2016.

a) Determine a altura máxima e a mínima que o pistão atinge.

b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?

3) (IEZZI, 2016) Em uma pequena roda-gigante, a altura (em metros) em que um passageiro se encontra no instante t (em segundos) é dada pela lei: $h(t) = 6 + 4\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, para $t \in [0{,}270]$.

Figura 10. Thinkstoch/Getty Images



Fonte: Iezzi, 2016.

a) No início do passeio, a que altura se encontra o passageiro?

b) A que altura se encontra o passageiro após 10s do início?

c) Qual é a altura mínima que esse passageiro atinge no passeio?

d) Qual é a altura máxima que esse passageiro atinge no passeio?

e) Qual é o tempo necessário para essa roda-gigante dar uma volta completa?

f) Quantas voltas completas ocorrem no passeio?

(IEZZI, 2016) Um artigo publicado em um caderno de economia prevê que as exportações de um certo país (em milhões de dólares), no ano de $2020+x$, em que $x \in \{0,1,2,3,...,19,20\}$, serão dadas pela lei: $f(x) = 400 + 18\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

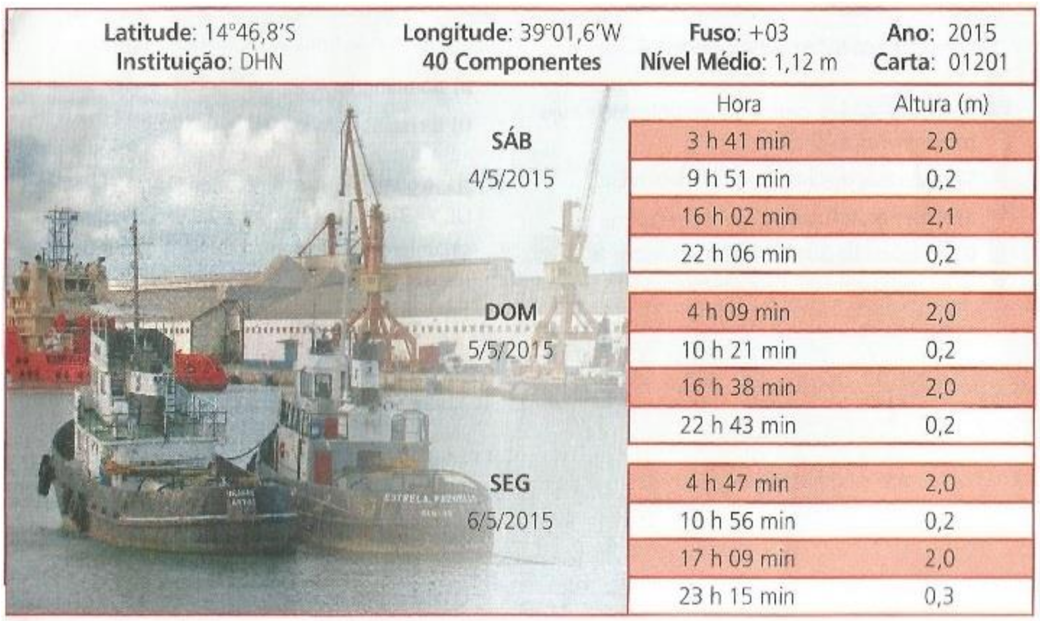
Supondo que isso realmente ocorra, determine:

a) O valor das exportações desse país nos anos de 2020, 2025 e 2030, em milhões de dólares;

b) Quantas vezes, entre 2020 e 2040, f atingirá seu valor mínimo? Qual é esse valor?

5) (IEZZI, 2016) Na tabela abaixo, constam as previsões para a maré alta e para a maré baixa durante três dias consecutivos (4, 5 e 6) de maio de 2015, para o porto de Ilhéus, no sul do estado da Bahia.

Figura 11. Porto de Ilhéus – Malhado (Estado da Bahia)



Latitude: 14°46,8'S	Longitude: 39°01,6'W	Fuso: +03	Ano: 2015
Instituição: DHN	40 Componentes	Nível Médio: 1,12 m	Carta: 01201

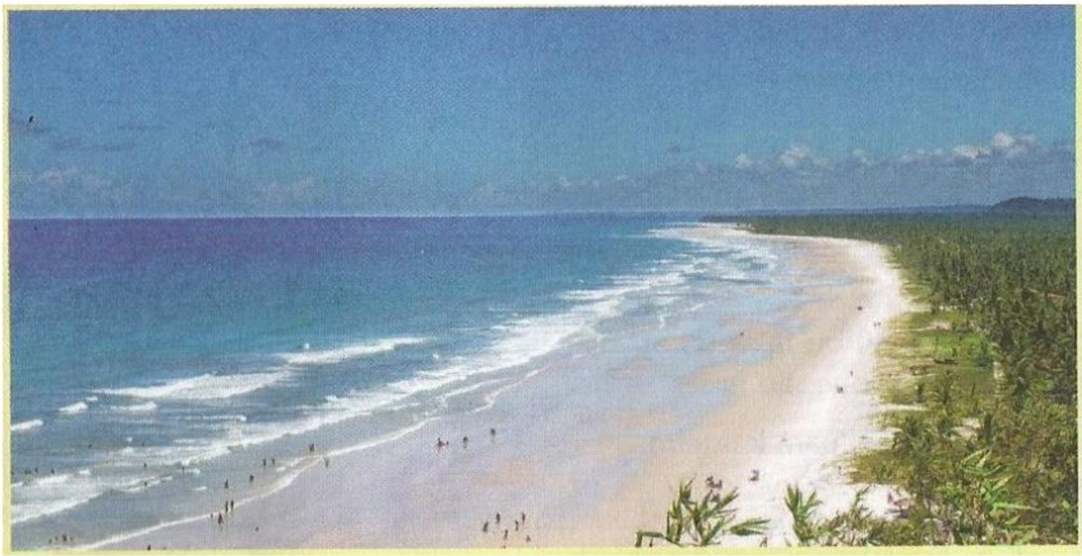
	Hora	Altura (m)
SÁB 4/5/2015	3 h 41 min	2,0
	9 h 51 min	0,2
	16 h 02 min	2,1
	22 h 06 min	0,2
DOM 5/5/2015	4 h 09 min	2,0
	10 h 21 min	0,2
	16 h 38 min	2,0
	22 h 43 min	0,2
SEG 6/5/2015	4 h 47 min	2,0
	10 h 56 min	0,2
	17 h 09 min	2,0
	23 h 15 min	0,3

Fonte: Marinha do Brasil. Disponível em: < www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas/40145jan2016.htm>. Acesso em 10 mar. 2016.

Observe que:

- As marés altas ocorrem de 12 em 12 horas, aproximadamente, como mostram os destaques na cor vermelha da tabela.
- As marés baixas ocorrem, também, de 12 em 12 horas, aproximadamente, como mostra a tabela.
- As alturas da maré alta praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré alta medem 2,0 m.
- As alturas da maré baixa praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré baixa medem 0,2 m = 20 cm.
- As marés altas ocorrem de 12 em 12 horas e, para facilitar a modelagem, vamos admitir 2,0 m como sendo o valor comum previsto nos três dias;
- As marés baixas ocorrem de 12 em 12 horas; vamos adotar o valor 0,2 m como mostra a referência da altura da maré baixa prevista para os três dias.

Figura 12. Praia de Serra Grande - Ilhéus BA 2014



Fonte: Iezzi, 2016.

1ª parte: Considerando as observações anteriores e lembrando que as previsões se referem a três dias seguidos, preencha (com algumas aproximações nos horários) a tabela que relaciona a altura da maré (em metros) e o tempo (em horas), contando a partir do primeiro horário de previsão (3 h 41 min), que será considerado o instante inicial (t = 0).

Tempo (h)	**0**	**6**	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**	**42**	**48**
Altura da maré (m)									

2ª Parte: Vamos supor que a relação entre a altura (h) da maré (em metros) e o tempo (t) (em horas) se estabeleça por meio de uma função do tipo $h(t)=A+B.\cos(wt)$, em que A, B e w são constantes reais positivas. Nesta atividade, você vai determinar a lei da função que relaciona a altura (h) da maré e o tempo (t), construir seu gráfico e resolver um problema. Para isso, é preciso primeiro, encontrar os valores das constantes A, B e w.

a) Determine o valor de w, lembrando que o período dessa função é dado por $p=\frac{2\pi}{|w|}$.

b) Determine os valores de A e B. (sugestão: utilize a informação sobre o conjunto imagem dessa função)

c) Escreva a lei da função que relaciona h com t.

d) Por meio da lei obtida, é possível prever a altura da maré em outros momentos, além dos de baixa e alta. Determine a altura da maré para $t = 10$ (aproximadamente 14 horas do 1º dia) e para $t = 28$ (aproximadamente 8 horas do 2º dia).

e) Usando o Geogebra, construa o gráfico da função obtida no item c.