UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

EXPLORANDO FUNÇÃO DO 1º GRAU COM ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Rosimiro Araújo do Nascimento

Lajeado, fevereiro de 2019

Rosimiro Araújo do Nascimento

EXPLORANDO FUNÇÃO DO 1º GRAU COM ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO DO MÉDIO UTILIZANDO INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade do Vale do Taquari - Univates, como parte da exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Banca Examinadora

____

Dra. Marli Teresinha Quartieri – orientadora
Universidade do Vale do Taquari-UNIVATES

____

Dra. Ieda Maria Giongo
Universidade do Vale do Taquari-UNIVATES

____

Dra. Italo Gabriel Neide
Universidade do Vale do Taquari-UNIVATES

____

Dra. Clarissa de Assis Olgin
Universidade Luterana do Brasil-ULBRA

Lajeado, fevereiro de 2019

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela importantíssima conquista.

Agradeço a meus pais Francisco (Chico Mira), *in memoriam*, e Isabel (Belita) por terem esforçado bastante pela educação de seus filhos.

À minha esposa Samara e aos meus filhos Natália e Francisco Rafael pelo apoio e incentivo.

A meus irmãos pelo apoio que me têm concedido, especialmente ao Carlos José (Tita) por ser a minha fonte de referência.

Às demais pessoas da minha família que torceram por essa conquista.

Aos amigos que acompanharam esta conquista com ações ou com valiosos pensamentos.

À minha orientadora Marli por ter contribuído significativamente para essa formação.

À minha professora Nazaré (7ª série do Ensino Fundamental) por ter despertado a minha vocação pela Matemática.

Aos demais docentes que ajudaram a me constituir como pessoa e como educador.

Ao bispo Dom José, *in memoriam*,(Diocese de Bom Jesus-PI) pelos seus ensinamentos.

RESUMO

O ensino de Matemática tem passado por constantes transformações provocadas por profissionais compromissados com o ensino dessa Ciência. Nesse sentido, a presente dissertação foi desenvolvida com a participação de 26 alunos do primeiro ano do Ensino Técnico Integrado ao Médio pertencente a uma Escola Pública Federal localizada na região sul do Maranhão. A pesquisa de cunho qualitativo, com características de estudo de caso, teve como objetivo geral analisar as conjecturas e estratégias elaboradas pelos alunos, da 1º ano do curso técnico em agropecuária integrado ao ensino médio, a partir de atividades investigativas com foco na função do 1º grau. Esse propósito teve como alicerce a metodologia da Investigação Matemática defendida por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013). Os dados que nortearam a elaboração do presente trabalho foram coletados por meio do diário de campo do pesquisador, caderno de anotações dos alunos, gravador de voz, fotografias e filmagens. Os resultados mostraram que os alunos elaboraram várias conjecturas e usaram variadas estratégias como, por exemplo, desenhos para representar uma situação problemática, tabelas, gráficos, regra de três simples etc. Observou-se que as ideias construídas possibilitaram as justificativas das tarefas e a aprendizagem no assunto de função do 1º grau. Constatou-se que os discentes evoluíram na resolução das atividades e socialização dos conhecimentos. Assim, verificou-se que a metodologia de ensino assegurada pela Investigação Matemática pode ser implementada na sala de aula.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Função Afim. Ensino Médio. Trabalho Colaborativo.

ABSTRACT

The teaching of Mathematics has been gone through constant transformations caused by committed professionals with the teaching of this Science. In this sense, this dissertation was developed with a participation of 26 Professional Technical High School students from the first grade of a Federal School located in the Southern region of Maranhão. The research, focusing on a qualitative approach and case study, aimed at analyzing conjectures and strategies created by Professional Technical High School students from the first grade of Information, starting from investigative activities focusing on function of the first degree. This purpose was based on the methodology of Mathematical Investigation defended by Ponte, Brocardo and Oliveira (2013). The data which provided the creation of this paper were collected through a field journal of the researcher, notebook of the students, voice recorder, photographs and recordings. The results showed that the students created several conjectures and used lots of strategies like, for example, drawings to represent a problem situation, charts, graphs, rule of three etc. One observed that the ideas constructed enabled the justifications for the tasks and the learning of the functions of the first degree. One found that the students evolved in the resolution of the activities and knowledge socialization. Thus, one checked that the teaching methodology assured by the Mathematical Investigation can be implemented in class.

Keywords: Mathematic Investigation. Function of the First Degree. High School. Collaborative Work.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 ASPECTOS INICIAIS DA PESQUISA

Ao refletir sobre minhas vivências em sala de aula como aluno e docente, a passagem que me vem à mente é o professor explicando o conteúdo e os alunos, enfileirados, prestando atenção para em seguida abordarem os exercícios do livro. Nesse contexto, de acordo com Sadovsky (2010, p. 17) “a questão central que liga o estudante ao docente é o conhecimento, em que o mestre é especialista, a autoridade deste em face do aluno provém basicamente de relação que o professor tem com o saber”. Dizer que essa situação não esteja presente nas aulas da Matemática de hoje, seria arriscar muito.

Zacarias (2008, p. 13) ressalva que “o fracasso do ensino e da aprendizagem da Matemática é um dado real e questionado pelos que se interessam pela educação como uma possibilidade de formar o cidadão crítico e atuante nos diferentes seguimentos da sociedade”. O autor ainda acrescenta que esta ruína está ligada ao fato dos alunos serem preparados apenas para resolverem exercício de fixação. Reginaldo (2012, p.17) reforça essa ideia ao afirmar que “a aplicação direta de técnicas e a repetição de exercícios podem fazer com que o aluno atue mecanicamente, dificultando a valorização da produção matemática, do raciocínio e do aprendizado com o erro”. Sadovsky (2007) acrescenta que é preciso enfrentar o ensino da Matemática com base na participação ativa, direta e objetiva do aluno na elaboração do conhecimento que se quer que aprenda, pois o discente que não domina um conhecimento fica dependente do que o professor espera que ele responda.

Aliando minha experiência de sala de aula às colocações dos autores supracitados, posso certificar de que, em muitos casos, o ensino de Matemática pode ser qualificado como tradicional. Alro e Skovsmose (2010) confirmam esse pensamento ao declararem que o ensino de Matemática tradicional costuma ser dividido em duas partes: na primeira, o professor mostra algumas ideias e técnicas matemáticas quase sempre em conformidade com o livro didático. Em seguida, os alunos fazem os exercícios aplicando diretamente as técnicas que lhes foram apresentadas.

Tenho consciência de que essa metodologia é “viva” em meu trabalho e que precisa ser superada. Tornar o aluno importante nos processos de ensino e de aprendizagem pode não ser fácil, mas essa concepção deve ser um instrumento de constante busca pelo professor que procura se superar em sua ação docente.

1.1 Trajetória discente e profissional

Passei a compreender a Matemática a partir da 7ª série[8] do Ensino Fundamental, em 1993, quando a professora passou algumas orientações para estudar essa disciplina. Durante suas aulas, os alunos eram incentivados a participarem e mostrar o que haviam aprendido. Aquela postura conecta a Freire (2011, p. 24) ao afirmar que “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou sua construção”. Aquele diálogo, não comum para mim, aliado ao meu interesse, foi importante para melhoria da aprendizagem e vocação por esta disciplina.

Cursei o Ensino Médio em uma escola que tinha como foco o ensino voltado para os vestibulares. Durante os três anos a disposição pela Matemática continuava crescendo. Muitas vezes fui parabenizado por professores e colegas de sala quando comentava, no quadro, alguma questão desafio. Neste momento, destaco as ideias de Freire (2011, p. 43) para afirmar que “às vezes, mal se imagina o que pode passar a representar na vida de um aluno um simples gesto do professor”, pois aqueles elogios foram significantes para despertar meu interesse pela docência. Via-me como um excelente professor dessa disciplina.

Na Universidade não tive docentes como aqueles do nível anterior, mas o desejo de tornar-me um “excelente professor” continuava em meus planos. A oportunidade de pôr o desejo em prática surgiu no ano de 2000 quando cursava o terceiro período de Licenciatura Plena em Matemática. Fui selecionado como professor bolsista da Secretaria de Educação e Cultura do Piauí (SEDUC – PI) durante um período de dois anos. No primeiro, o trabalho se concentrou em duas turmas, uma de 5ª série[9] e outra de 7ª série.

---

[8] Hoje, compreendido pelo 8º ano do Ensino Fundamental.
[9] Hoje, compreendido pelo 6º ano do Ensino Fundamental.

Nos dois primeiros meses passei por um teste inesquecível e, de início, dramático em minha carreira, pois preparava as aulas e as ministrava com muita dedicação. Mas a maioria das notas dos alunos era baixa. Ao ver essa situação se repetir no segundo mês, a autoestima desabou, tinha que mudar, porém não sabia como. De acordo com Freire (2015, p. 81) “o educador, que aliena a ignorância, se mantém em posições fixas, invariáveis”. Então precisava sair do ritmo predeterminado no livro de Matemática e encontrar meios que propiciassem aprendizagem aos discentes. As aulas eram presas à explicação do conteúdo no quadro de giz. O desejo por mudança me levou a trabalhar com atividades em grupos e seminários que proporcionassem aos alunos a capacidade de solucionar as questões do final dos assuntos. Embora tentasse outros métodos, a falta de experiência me deixava preso ao livro.

No segundo ano, ministrei aulas para 1º e 2º ano do Ensino Médio. Essa fase também foi marcada por algumas dificuldades. Contudo verifiquei que a qualidade do ensino melhorava à medida que ia envolvendo os alunos nas aulas. Finalizei as duas etapas com uma certeza: essa profissão é cheia de surpresas e desafios, porque não existe um modelo pronto para o ensino.

A partir de agora o foco ficaria voltado somente para a Universidade. Mas, ao iniciar o período de 2002, tranquei o curso por motivos pessoais, porém os quatro semestres que faltavam foram concluídos no final de 2004. E, a oportunidade de retomar à docência surgiu no segundo semestre de 2005, quando a prefeitura de Teresina – PI lançou um edital que oferecia vagas para Licenciados em Matemática. Os selecionados trabalhariam como docentes do Programa Nacional de Inclusão de Jovens (ProJovem)[10] com uma carga horária de 30 horas semanais. A quantidade de candidatos em relação ao de vagas eram desproporcionais, mas fui classificado e voltei à sala de aula no início de 2006.

[10] De acordo com o Artigo 2º da Medida Provisória nº 238/2005, “o ProJovem destina-se a jovens com idade entre 18 e 24 anos, que atendam, cumulativamente, aos seguintes requisitos: I. tenham concluído a quarta série e não tenham concluído a oitava série do ensino fundamental; e II. não tenham vínculo empregatício”.

Os regramentos do programa juntaram pessoas com características bastante variadas. Era um desafio para qualquer professor lidar com um público que não teve acesso aos estudos na idade certa e que se encontrava em situação de vulnerabilidade social. Foi uma fase significativa para minha carreira docente, pois além do aprendizado adquirido em sala de aula, o programa oferecia formação a cada 30 dias.

Deixei o Projovem no final de 2007 e, no início de 2008, voltei para a SEDU – PI, agora como professor efetivo. Trabalhei aproximadamente quatro anos em uma escola que oferecia estudos do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º do Ensino Médio. Nesta etapa trabalhei em todos os anos do Ensino Fundamental e Médio. Neste último, o foco dos alunos era a Universidade. As aulas tinham que ser voltadas para o vestibular, era uma exigência das turmas. Essa imposição estava de acordo com as concepções do Ensino Médio que tive e, desta forma, minha ação docente voltaria a ser refém dos programas de vestibulares e do livro didático.

No final de 2011, migrei para o Instituto Federal do Maranhão (IFMA), e a metodologia das aulas continuaria a mesma, pois a maioria dos alunos visava ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Mas, nessa Instituição, observei um professor de mesma área que havia concluído o Mestrado em Educação para Ciências e Matemática[11], trabalhar com aulas que, a meu ver, eram atrativas, porque envolviam os alunos no processo de ensino. Este mesmo professor comentou sobre algumas metodologias de ensino de Matemática, dentre elas, a Investigação Matemática. Passei a ter interesse pelo assunto e, a leitura do livro Investigações Matemáticas na Sala de Aula de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), em 2016, foi fundamental para que a via metodológica de ensino trilhada por mim há dez anos, tomasse outra dimensão. Os autores declaram que nas aulas investigativas, o aluno é chamado a agir como um matemático, pois além de formular questões e conjecturas e produzir provas e refutações, também apresenta os resultados e faz discussão com os colegas e o professor.

[11] Mestrado em Educação para Ciências e Matemática no Instituto Federal do Goiás, Campus Jatai de 2014 a 2016.

Conhecer com maior profundidade essa concepção passou a ser um desafio para mim, pois estava disposto a mudar a tradição usada em sala de aula, focada somente no livro didático adotado pela escola. Assim, ficava com a sensação de dever cumprido quando fazia a exposição do conteúdo no quadro, passava os exercícios para os alunos responderem em casa e, na aula seguinte, conseguisse corrigi-los.

A esse respeito Alro e Skovsmose (2010) ressalvam que ao trabalhar com metodologias tradicionais, o docente impõe como complementação do conteúdo exposto em sala, a resolução dos exercícios do livro. Nesse seguimento, esses autores acrescentam que o tempo gasto entre a exposição do assunto e esse complemento pode sofrer variações. De acordo com esses autores, posso inferir que a maneira como estava ministrando minhas aulas estava ultrapassado. Lembro que, às vezes, passava duas semanas expondo um assunto para depois abordá-lo, com os alunos, por meio das questões propostas pelo livro.

Porém, ao abrir a porta da Investigação Matemática, fiquei me perguntando, porque minhas aulas recebiam elogios de meus alunos? Imaginei que certamente eles não conhecessem outras metodologias de ensino, como por exemplo, a que problematizei neste trabalho de pesquisa. Esse entendimento está apoiado nas observações que fiz durante minhas aulas a partir do primeiro semestre de 2017. Esse estudo teve como marco inicial o trabalho com atividades de Investigação Matemática propostas pela disciplina de Pesquisa em Ensino e Estágio Supervisionado do Programa de Pós-Graduação Mestrado em Ensino de Ciências Exatas, da Univates.

Nesse sentido Goldenberg (1999, p. 37) afirma que atividades investigativas “motivam os alunos, e ainda, desenvolvem capacidades que contribuem para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilitam a aprendizagem”. A menos de um ano adotando atividades investigativas, tenho observado a confirmação dessa declaração. Isso me deixa mais seguro sobre os avanços que essa metodologia de ensino pode trazer para minha prática pedagógica.

Hoje aquelas aulas nas quais os alunos ficavam admirados vendo o modo como o assunto era explanado no quadro, não fazem sentido. Agora é preciso mostrar aos alunos que eles são capazes de elaborar oportunidade de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 23) ressaltam que na investigação matemática “o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na representação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor”. Presenciar esse contexto em sala de aula e a autoestima dos alunos gerada por eles tem me causado motivação e desejo de aprofundar de forma prática e teórica o tema Investigação Matemática.

Diante dessa concepção tenho procurado me apropriar de conhecimentos que tratam desse assunto. O acesso à obra de Auro e Skovsmose (2010), juntamente com os conhecimentos adquiridos em Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), fizeram refletir sobre os livros didáticos, principal material de estudo que meus alunos tiveram contato durante a maior parte da minha prática docente. Neste contexto, fui investigar se os livros que adoto na minha prática pedagógica proporcionam atividades do tipo Investigação Matemática.

1. 2 Os livros didáticos oportunizam a Investigação Matemática?

Há dez anos ministrando aulas para turmas de primeiro ano do Ensino Médio, valorizei apenas as atividades dos livros didáticos para contemplar cada ponto trabalhado. No entanto, a partir do ano de 2017, essa apreciação tem se dado de forma menos dirigida. Como o meu foco passou a ser a Investigação Matemática, fiz uma análise dos livros (Figura 1), usados na minha prática pedagógica a fim de verificar o tipo de atividades que apresentam.

Figura 1: Livros de Matemática do 1º ano do Ensino Médio, seus autores e o período de utilização pela escola, de acordo com o (PNLD)[12].

Identificação do Livro	Autores	Período
L1	Giovanni, J. Roberto.; Bonjorno, J. Ruy	2006 - 2011
L2	Souza, J. Roberto de	2012 – 2014
L3	Dante, L. Roberto	2015 – 2017

Fonte: Do autor

[12] De acordo com o guia do livro didático (BRASIL, 2006) o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) distribui livro de Matemática gratuitamente para os estudantes da rede pública de Ensino médio desde 2005. Cada escola tem autonomia para escolher a coleção a ser trabalhada durante um triênio.

As três obras, expostas na Figura 01, estão de acordo com o Guia dos Livros Didáticos[13] (BRASIL, 2017) ao enfatizar que as sistemáticas dos livros são apresentadas por meio de definições, seguidas de exemplos ou exercícios[14] resolvidos, que serviram como modelos para a resolução dos exercícios propostos. Destaco que em nenhum desses livros foram considerados assuntos anteriores como, por exemplo, equação do 1º grau, para facilitar a compreensão do conteúdo de Função do 1º grau. Também, não encontrei textos que contribuíssem para esse fim nem, tão pouco, colocação que questionasse sobre a importância desse conteúdo para a compreensão da Matemática e de outras Ciências. Para ampliar a abordagem das questões do assunto Função do 1º grau nos livros citados, apresento, na Figura 2, o ambiente de aprendizagem de Auro e Skovsmose (2010).

Figura 2: ambiente de aprendizagem de Matemática.

	Paradigma do exercício	Cenários para investigação
Referências à Matemática pura	Tipo (1): refere-se à matemática pura. Os enunciados são do tipo, calcule o valor de, determine o valor de, ou seja, sem contextualização, trabalham uma Matemática pura e acabada.	Tipo (2): as atividades podem ter diferentes maneiras de solução, o que pode provocar um ambiente de discussão que favoreça a troca de saberes.
Referências a semirrealidades	Tipo (3): as questões são contextualizadas com dados da vida real, mas os enunciados são artificiais. O propósito é que os alunos cheguem ao resultado único, como por exemplo, em questões objetivas dos exames de classificação.	Tipo (4): as tarefas são elaboradas com dados da vida real, porém os enunciados são artificiais. O propósito é leva os alunos a um cenário de perguntas, hipóteses e conclusões variadas.

[13] O Guia do Livro Didático do Ensino Médio conta com uma resenha sobre as coleções, de cada área da base curricular comum, aprovadas pelo Ministério da Educação para o triênio de 2018, 2019 e 2020. Estas obras serão destinadas aos estudantes do Ensino Médio das escolas Públicas do Estado brasileiro.

[14] De acordo com Ponte; Brocardo; Oliveira (2013, p. 23) “exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido”.

(Continuação)

Referências ao mundo real	Tipo (5): nesse grupo, as questões incluem referências ao mundo real. Exige apenas que o aluno encontre o resultado, como ocorre em (3).	Tipo (6): Desse lado, são atividades que incluem referências ao mundo real e contemplam cenários comuns ao que ocorre em (4).

Fonte: Do autor, adaptada de Auro e Skovsmose (2010)

De acordo com esses autores, o paradigma do exercício está inserido no ensino de Matemática tradicional. Os exercícios são elaborados por um agente externo ou pelo autor de um livro didático com o propósito único de ser resolvido. Neste contexto, a comunicação entre professor e aluno segue um padrão: o discente responde o exercício e o docente confere.

Já nos cenários para investigação, de acordo com os autores, as questões são, por natureza, abertas, ou seja, não há uma resposta pronta. E desta forma os alunos participam do processo, porque se deparam com atividades que os levam a formular questionamentos e linhas diversificadas de investigação. Nesse contexto, o discente assume posição de destaque ao lado do mediador.

Com base nas considerações anteriores, retomo a proposta de classificar as questões referentes à Função do 1º grau, encontradas nos três livros da Figura 1, à luz do ambiente de aprendizagem exposto na Figura 2. Essa abordagem possibilitou embasamento para refletir sobre a metodologia desses livros e a Investigação Matemática. Então levantei alguns dados que estão representados na Figura 3, considerando os exercícios respondidos, não respondidos e as demais questões do assunto de função do 1° grau.

Figura 3: Quantidade de questões, relativas ao paradigma do exercício e cenário para investigação, nos livros (Figura 1) que guiaram minhas aulas de 2008 a 2017.

Identificação do livro	Categoria da Atividade					
	Paradigma do exercício			Cenários para investigação		
	Tipo (1)	Tipo (3)	Tipo (5)	Tipo (2)	Tipo (4)	Tipo (6)
L1	62	35				

(Continuação)

L2	51	55	4	2	2	1
L3	69	16		1	1	
Total	182	106	4	3	3	1

Fonte: do autor

Os dados da Figura 3 mostram que o material didático utilizado por mim, por mais de nove anos, são exercícios do tipo (1) e (3) em que o único interesse era que o aluno chegasse às respostas dessas atividades.

No grupo de questões, vistas em L1, L2 e L3, (Figura 3), muitas exigiam conhecimentos repetitivos. De acordo com o guia (BRASIL, 2017), isso pode dificultar o genuíno interesse pela Matemática que passa a ser vista como uma Ciência acabada, em que tudo já é conhecido, restando-nos aprendê-la. Esse documento acrescenta que, dessa forma, o discente não exerce sua capacidade de decisão sobre quais estratégias de resolução pode escolher. Nesse sentido, apresento, na Figura 4, exercícios de Matemática que exemplificam as questões do Tipo (1) da Figura 3, pois elas se encontram em maior número nos livros analisados.

Figura 4: exemplos de questões apresentadas nos livros L1, L2 e L3 respectivamente:

- Questão 55. (p.165, L1).

Determine os zeros das seguintes funções polinomiais do 1º grau:

a) $f(x) = -3x + 4$ c) $y = 2x + 8$

b) $y = \frac{3}{8x}$ d) $y = 2 + \frac{x}{2}$

- Questão 13. (p. 90, L2).

Calcule o zero de cada função.

a) $f(x) = 3x - 12$ c) $f(x) = 2x + \frac{3}{4}$

b) $f(x) = -x + 9$ d) $f(x) = -\frac{1}{5x} - 6$

- Questão 26. (p. 85, L3).

Sem construir gráficos, descubra os pontos em que as retas, gráficos das

(Continuação)

funções abaixo, cortam os eixos x e y.
a) $f(x) = x - 5$ c) $f(x) = -2x$
$f(x) = -x + 4$ d) $f(x) = \frac{1}{2x} - 1$

Fonte: Giovanni e Bonjorno (2005); Souza (2010) e Dante (2017).

As questões expostas na Figura 4 não foram contextualizadas por seus autores. Posso comentar que quando trabalho com questões desse tipo, em sala de aula, observo que os alunos compreendem o enunciado, mas não sabem de onde vem e nem qual sua utilidade, pois encontram resultados únicos que só servem para o docente verificar se estão certos ou errados. Essa acepção para Auro e Skovsmose (2010) é vista como o paradigma do exercício, pois estes costumam ser, para os que vivenciam a sala de aula, elementos preestabelecidos. Isso pode alimentar a ideia de Ciência Pronta.

Com base nessas ponderações, afirmo que o ensino de Função do 1º grau, durante o período considerado na Figura 1, girava em torno das questões e exemplos do tipo (1) e (3), contados na Figura 3. Desta maneira, de acordo com Auro e Skovsmose (2010), essa metodologia se destaca como tradicional, porque está associada à resolução de exercícios referentes à Matemática pura ou à semirrealidade.

Hoje tenho consciência de que é preciso ultrapassar a metodologia apresentada nesses livros, sem abandoná-los, trabalhando de maneira a despertar a curiosidade dos alunos e sua capacidade de investigar. Essa conduta me leva a adaptar as questões dos livros didáticos para que possam gerar um olhar investigativo. Partindo desse ponto de vista, em 2017, trabalhei com questões de L3 que apresentavam potencial para investigação[15]. Destaco que, nesta obra, várias questões do grupo (3) podem ser direcionadas para o paradigma do exercício ou ser ajustadas para o cenário de investigação.

[15] Consideramos com essa característica questões que podem ser adaptadas para atividades investigativas.

Figura 5: Exemplo de questão do tipo (3) em L3 que pode ser ajustada para investigação:

Questão 4. (p. 76, L3).

Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Sendo x o número de unidades produzidas:

a) escrevam a lei da função que fornece o custo total de x peças;
b) indiquem a taxa de variação dessa função e o seu valor inicial;
c) calculem o custo de 100 peças.

Fonte: Dante (2013).

Os itens “a”, “b” e “c” da Figura 5 apresentam os verbos no plural, porque o autor expressa que a atividade é para ser feita em dupla. Essa questão exige, para cada letra, uma resposta que pode ser encontrada com base no raciocínio repetido em atividades anteriores. Caso considerasse assim: Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. O que vocês podem elaborar com os dados dessa atividade? Justifique suas respostas.

Eles poderiam construir uma tabela de valores, outros a lei da função como também, construir um gráfico, ou seja, poderiam surgir várias possibilidades de abordagem. Dessa maneira, seria uma atividade investigativa, porque não exige uma resposta única e tem caráter aberto. Assim os alunos poderiam apresentar diferentes conclusões e, consequentemente, resultados que poderiam contemplar os itens “a”, “b” e “c”.

Nesse sentido, Skovsmose (2000, p. 13) ressalta que “alguns exercícios podem provocar atividades de resolução de problemas, as quais poderiam transformar-se em genuínas investigações matemáticas”. Essa posição valoriza o livro didático dentro da proposta defendida por este trabalho, apontando que posso fazer uso desse material dentro do cenário para investigação.

A partir do ano de 2017 procurei trabalhar dessa forma, porque acredito que a Investigação Matemática se destaca como uma metodologia que auxilia no desenvolvimento da criatividade dos estudantes. Assim, procuro, por meio desse trabalho, aprofundar os estudos desta metodologia de ensino para superar, de forma prudente e fundamentada, alguns métodos utilizados na minha prática docente os quais considero ultrapassados. Essa conquista teve como principal dirigente os cenários para investigação de Alro e Skovsmose (2010) e as abordagens de Investigação Matemática propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013). Assim, para proporcionar habilidades com investigação matemática efetivei uma pesquisa, na qual optei em trabalhar com atividades investigativas que envolveram o conteúdo de Função do 1º grau.

1.3 A opção pela função do 1º grau

A escolha pelo assunto função do 1º grau, o qual foi problematizado neste trabalho, está ligada a duas considerações. Primeira consideração: durante minha profissão como docente do 1º ano do Ensino Médio, tenho observado que a maioria dos alunos dessa etapa não teve contato com esse assunto em anos anteriores. Segunda consideração: a importância que deve ser dado a esse conteúdo, pois ele é importante para o entendimento de diversos pontos da Matemática como também de outras áreas da Ciência. Por exemplo, o movimento uniforme visto na disciplina de Física, no primeiro ano do Ensino Médio, tem sua compreensão facilitada quando os discentes relacionam com os conhecimentos de função do 1º grau.

A Base Nacional Comum Curricular (doravante BNCC) (BRASIL, 2016) corrobora com esse entendimento ao enfatizar que a escola deve dar um destaque especial ao ensino de funções, pois o entendimento desse conteúdo facilita a compreensão de fenômenos do mundo natural ou social. Esse documento acrescenta que o trabalho com função afim deve levar o estudante a compreender o modelo dessa função e entender o significado do coeficiente angular e comportamento do gráfico. Compreende-se que para alcançar essa determinação apostou-se em intervenções pedagógicas com atividades investigativas envolvendo função afim. Tratarei do assunto (função) com mais profundidade no capítulo 2 do presente trabalho.

1. 4 Problema e objetivos

Nas seções anteriores justifiquei a escolha do tema do presente trabalho: Investigação Matemática e o estudo da função do 1º grau. Assim, diante do exposto, elaborei o seguinte problema de pesquisa: Que conjecturas e estratégias, os alunos do 1º ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio elaboram ao trabalharem com atividades envolvendo Investigação Matemática com foco na função do 1º grau, de forma colaborativa?

Objetivo geral:

Analisar as conjecturas e estratégias elaboradas pelos alunos, do 1º ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, a partir de atividades investigativas com foco na função do 1º grau, de forma colaborativa.

Objetivos específicos:

Propor aos alunos atividades investigativas com foco em função do 1º grau, para que sejam exploradas em grupos colaborativos.

- Propor aos alunos atividades investigativas com foco em função do 1º grau, para que sejam exploradas em grupos colaborativos.
- Incentivar o gosto pela escrita e a socialização dos conhecimentos a partir das conjecturas validadas.
- Identificar as conjecturas e estratégias apresentadas pelos alunos durante os desdobramentos das tarefas de investigações propostas.

1.5 Organização do trabalho

A estrutura da presente dissertação apresenta, além desta introdução que possui a justificativa do tema em estudo, o problema e os objetivos, mais quatro capítulos, além das referências bibliográficas e os apêndices.

No capítulo 2, discuto o referencial teórico, composto por seis seções. A primeira aborda o ensino de funções; a segunda disserta sobre a Investigação Matemática; a terceira tem como ênfase o trabalho em grupo; na quarta apresento trabalhos sobre Investigação Matemática e ensino de funções já efetivadas por outros pesquisadores. Os autores os quais sustentam cada uma dessas partes serão apresentados à medida em que elas forem produzidas.

No capítulo 3, descrevo a Metodologia. Esta parte está organizada da seguinte forma: ilustrei o contexto no qual o trabalho foi desenvolvido, a abordagem da pesquisa; os instrumentos de coleta de dados; os sujeitos e a organização da pesquisa. Descrevo, neste capítulo, as atividades que foram desenvolvidas no decorrer da intervenção pedagógica acompanhadas de seus objetivos. No final, deste capítulo, apresento como ocorreu a análise dos dados. No capítulo 4, fiz a descrição e discussão dos dados da pesquisa. Em seguida, foi dissertado sobre as considerações finais de pesquisa. E, para finalizar a composição da presente dissertação, apresento, ao final desta, as referências bibliográficas e os apêndices.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo abordo questões relevantes sobre função do 1º grau, função do 2º grau, função exponencial e logarítmica, por serem vistas, no primeiro ano do Ensino Médio na escola onde trabalho. Entretanto, irei destacar a primeira função, pois foi o assunto abordado nas atividades investigativas propostas nesta pesquisa. Em seguida, discorro sobre a Investigação Matemática, tendo como apoio principal o trabalho de Ponte (2003); a obra de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) e a ideia dos ambientes de aprendizagem de Auro e Skovsmose (2010). Na terceira seção, discuto ideias sobre o trabalho em grupo e enfatizo o trabalho colaborativo, pois defendo ser a melhor forma de se obter resultados significativos em questões investigativas. E, na quarta seção, abordo cinco trabalhos de pesquisadores que envolveram o ensino de função com Investigação Matemática.

2.1 O ensino de funções

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), os estudantes devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar com base em discussões investigativas e validações conjuntas. Esse documento estabelece que os discentes sejam capazes de ascenderem essas competências, entretanto o professor precisa orientá-los que:

- Para o desenvolvimento do raciocínio, é necessário que os alunos entrem em interação com seus colegas e docente para que possam investigar, explicar e justificar com ênfase na argumentação matemática.
- A representação pressupõe a elaboração de registros para salientar o produto da investigação para que possa dar compreensão aos fatos, ideias e conceitos formulados.
- Para comunicar seus resultados os estudantes precisam apresentar justificativas e interpretar seus resultados aos colegas e interagir com eles.
- Para argumentar suas elaborações, os alunos precisam formular e testar suas conjecturas com foco nas justificações.

Essa preocupação com o desenvolvimento de valores, habilidades e atitudes tem sido minha preocupação constante no ensino de Matemática. Afirmo que, para atingir essa proposta, recorri aos métodos de ensino realçados pela Investigação Matemática.

Diante dessa precaução, lembro que há dez anos ministrando aulas para o ensino médio, principalmente para a 1ª série, tenho observado que muitos alunos declaram que não tiveram contato com o ensino de função em anos anteriores. Segundo Smole, Centurión e Diniz (2004), este tópico, rico em possibilidade de abordagem e empregos, poderia ser visto já nos primeiros anos do ensino fundamental para que o aluno se familiarize mais cedo com a interpretação de gráficos e o conceito de função.

De acordo com o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2017) no primeiro ano do Ensino do Médio é abordado o conceito de função; funções afins e afins por partes; funções quadráticas; funções exponencial e logarítmica; e funções trigonométricas. De acordo com o referido guia o conteúdo de funções tem potencial, pois influencia na compreensão de diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, na Medicina, Física, Economia, Engenharia, Tecnologia etc.

Por sua vez, Paiva (2013, p. 169), descreve uma aplicação deste conteúdo na Astronomia:

> No início do século XX, o astrofísico norte-americano Edwin Hubble (1889-1953) descobriu que o universo está em constante expansão. Suas conclusões basearam-se nas observações de estrelas conhecidas como cefeídas. Essas estrelas são referenciais que permitem determinar distâncias entre corpos celestes muito afastados da terra. As medições efetuadas por Hubble permitiram-lhe concluir que as galáxias afastam-se da Via-Láctea a uma velocidade diretamente proporcional à distância em que se encontram dela: quanto mais distante, maior a velocidade de afastamento. A função linear, deduzida por Hubble, para descrever a velocidade de afastamento da galáxia é: $V(R) = 16R$ em que $V(R)$ é a velocidade de afastamento da galáxia, em quilômetros por segundo, e R é a distância, em milhão de anos-luz, entre a galáxia e a terra.

Isso exemplifica a importância da função do 1º grau para essa ciência, já que por meio desse assunto, os astronautas puderam levantar hipóteses sobre o *Big Bang* e, então, calcular a idade da terra. Segundo Iezzi *et al*. (2010, p. 53), “A ideia de função que temos hoje em dia foi sendo construída ao longo do tempo por vários matemáticos”. Os autores comentam também:

> O matemático alemão G. W. Leibniz (1646-1716) introduziu as palavras *função*, *constante* e *variável* na linguagem matemática. A noção f(x) para

> indicar a lei de uma função foi introduzida pelo matemático suíço L. Euler (1707-1783). O matemático alemão P. G. Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu uma definição de função muito próxima de que se usa hoje em dia. Por fim, com a criação da teoria dos conjuntos no fim do século XIX, foi possível definir função como um conjunto de pares ordenados (x, y) em que x é elemento de um conjunto A, y é elemento de um conjunto B e, para todo x ∈ A, existe um único y ∈ B tal que (x, y) ∈ f. (IEZZI ET AL. (2013, p. 53).

Nessa mesma linha de raciocínio segundo Smole, Centurión e Diniz (2004, p. 84) "função é uma lei ou associação entre dois conjuntos, que a cada elemento do primeiro conjunto associa um único elemento do outro". Paiva (2013, p.117) afirma que "uma variável y é dada em função de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y". Essa relação de dependência, entre os valores dos eixos "x" e "y", é imprescindível para a existência da função. Nesse seguimento, Rodrigues (2007) afirma que o conceito de função que os livros apresentam é resultado de investigações ao longo de muitos anos por matemáticos de relevância como, por exemplo, Johann Bernoulli e Leonhard Euler. Esse resultado leva às definições expostas nas obras voltadas para o primeiro ano do Ensino Médio de hoje.

Ressalto que na escola onde desempenho minhas atividades docentes o assunto "função" é abordado a partir do primeiro ano do Ensino Médio, contemplando função do 1º grau, função do 2º grau, função exponencial e logarítmica. Desta forma, como o presente trabalho foi desenvolvido nessa mesma escola, abordo nas subseções seguintes ideias sobre essas funções. Entretanto, destacarei a função do 1º grau, porque foi o conteúdo abordado nas atividades investigativas desenvolvidas nesta pesquisa.

2.1.1 Função do 1º grau[16]

De acordo com Freitas (2016), as funções afins fornecem uma variedade de aplicações no cotidiano das pessoas, de maneira que fica acessível ao estudante compreender seu conceito por meio de aplicações simples. Diante dessa amplitude, Iezzi *et al*. (2017) aconselham ao docente a relacionar o conceito de grandezas diretamente proporcionais à função linear. Esses autores acrescentam que o professor também deve destacar a taxa média de variação que é uma característica própria da função afim.

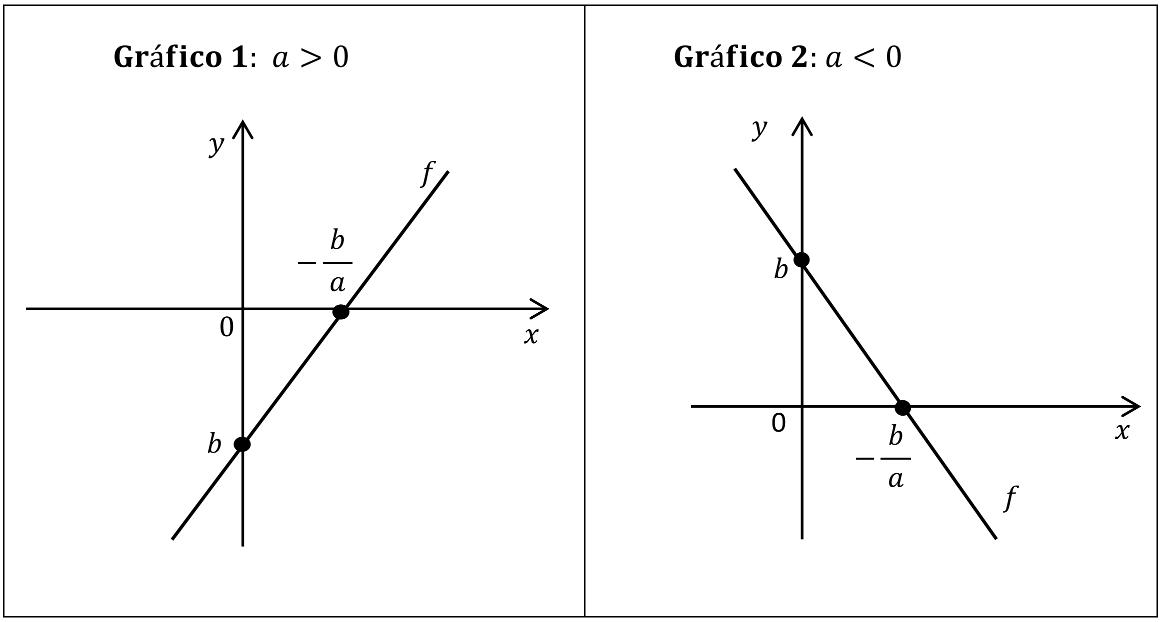
[16] A presente pesquisa considera como função do 1º grau a função afim e a função linear.

Diante dessas ponderações apresento o seguinte exemplo: quando uma pessoa se desloca de táxi, normalmente ela paga um valor no qual está embutida uma taxa fixa (bandeira) e o preço por quilômetro rodado. Em Teresina-PI, o preço da bandeira, na região do centro, é R$ 4,20, e o preço por quilômetro rodado é igual a R$ 4,50, nessas condições, quanto paga uma pessoa que se desloca de táxi do centro desta Capital até sua casa distante 10 km? A organização desses valores pode compor o modelo matemático que estabelece a função do 1º grau. De acordo com Iezzi *et al*. (2017, p. 71), "chama-se função polinomial do 1º grau ou função afim, qualquer função f de R[17] em R dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais dados e $a \neq 0$".

Nessa lei, o a é coeficiente de x e b é chamado de termo constante ou independente. Tenho observado em minha prática docente que as descobertas dos alunos, a partir de atividades investigativas exploradas antes da definição da função do 1º grau, são fundamentais para a compreensão do significado dos valores de $f(x) = ax + b$. Nesse sentido, ao enfatizar o ensino de função afim, Minisini (2016) recomenda que o docente deve valorizar a formulação de conjecturas por parte do estudante, bem como suas conclusões, suas provas e contraprovas e, também, incentivar a criação de modelos matemáticos e argumentações. As orientações desse autor valorizam a autonomia dos alunos junto à interpretação do conceito dessa função. Já as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (doravante OCEM) (BRASIL, 2006) ressaltam que é importante destacar o significado da representação gráfica da função afim, quando são alterados seus coeficientes, ou seja, observar os movimentos realizados pelo gráfico quando esses valores sofrem alterações. De forma geral, o gráfico dessa função tem os formatos representados na figura 6:

[17] Este trabalho considera R como o conjunto dos números reais.

Figura 6: Comportamento do gráfico da função definida por $f(x) = ax + b$, em relação ao valor do coeficiente a.

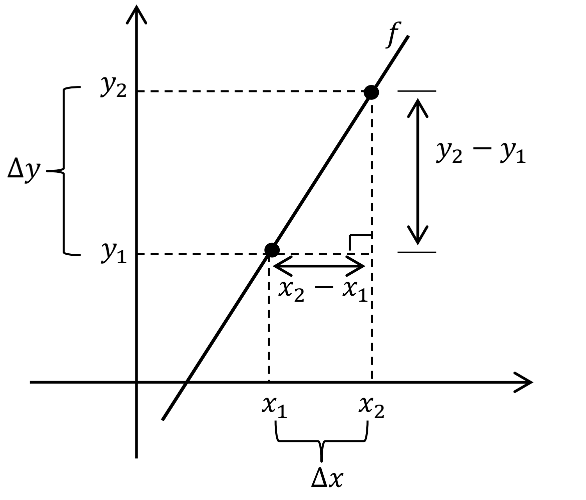


Fonte: Do autor

Diante dessa figura, Paiva (2015) afirma que o gráfico de qualquer função polinomial f do 1º grau, com domínio em R, é uma reta. No gráfico 1 e 2, da figura 6, o discente deve perceber que o termo constante é um valor fixo que pertence ao eixo Oy, ou seja, é o local onde o gráfico "corta" esse eixo y. Já a relação $-\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ representa a raiz da função afim, ou seja, local onde o gráfico intercepta o eixo Ox. Na perspectiva da investigação matemática os alunos têm possibilidades de elaborar situações que condicionam ao formato do gráfico e a compreensão dos significados enfatizados pelas OCEM (BRASIL, 2006).

No tocante ao coeficiente a, Paiva (2015, p. 162) afirma que "em toda função da forma $y = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, a taxa média de variação de y em relação a x, quando x varia em qualquer intervalo, é igual à constante a". Esse autor acrescenta que como essa taxa média é constante, pode ser chamada, simplesmente, de taxa de variação. A Figura 7 representa essa questão.

Figura 7: Exemplo de proporcionalidade da função afim: taxa de variação do gráfico f em relação aos eixos x e y.



Tem que: $x_1 < x_2$ e a função f tem a variação $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Dessa forma, afirmo que: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$.

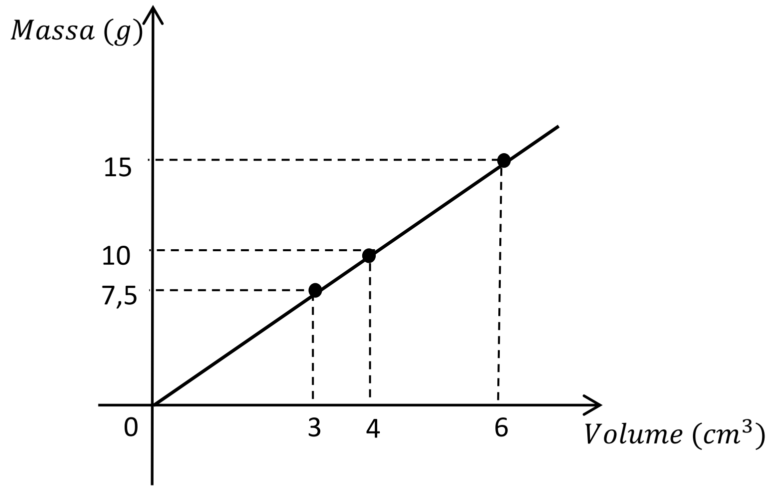
Fonte: Do autor

Na Figura 7 a taxa declara a variação do eixo y cada vez que o eixo x cresce uma unidade. No gráfico 1, (Figura 6), à medida que os valores de x vão aumentando de uma unidade, os valores no eixo “y” aumentam exatamente no correspondente à taxa “a” e, dessa forma, a função é crescente. Por outro lado, no gráfico 2 (Figura 6), cada unidade acrescida em “x” provoca um decréscimo em “y” igual à taxa “a” e, dessa forma, a função é decrescente. A OCEM (BRASIL, 2006) assegura que a riqueza de situações envolvendo a constante declarada na figura 7 permite ao ensino desse ponto muitas formas de contextualização. Nesse sentido, este documento destaca que existem várias aplicações em outras áreas do conhecimento envolvendo função do 1º grau, cujo interesse é a taxa de variação.

Destaco ainda que irei explorar a função do 1º grau da forma $y = ax$, ou seja, em que $b = 0$. Dessa forma, de acordo Iezzi *et al*. (2017), ela se caracteriza por se relacionar com grandezas diretamente proporcionais[18]. Nessa continuidade, Paiva (2015) afirma que, quando na função $y = ax + b$, "b" tem valor nulo, ela é chamada de função linear e seu gráfico é uma reta que passa pela origem do sistema formado pelos eixos Ox e Oy. O autor acrescenta que, nesse caso, existe uma constante de proporcionalidade entre os valores de cada coordenada que compõe o gráfico. A atividade exposta na figura 8 contempla essa afirmação.

Figura 8: Situação em que o gráfico está alinhado com a origem do sistema, representando uma função do 1º grau ou linear.

No gráfico está representada a relação entre a massa e volume de certo óleo combustível



Fonte: Iezzi *et al*. (2017, p. 95).

Abordando os valores do gráfico da Figura 8, a partir das ponderações do autor, verifico que ao dividir os 7,5 por 3, é o mesmo que 10 por 4 e 15 por 6, confirmando que cada par ordenado é formado por valores que guardam uma relação diretamente proporcional. Nesse seguimento, Dante (2017, p. 93) enfatiza que "os problemas que envolvem proporcionalidade, em geral, podem ser resolvidos por meio de uma função linear, e por isso afirmamos que a função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade". Para que os alunos atinjam esse entendimento, sustentei o trabalho de sala de aula com atividades investigativas. Confirmei, durante algumas aulas no ano de 2017, no qual trabalhei

[18] Iezzi *et al*. (2017, p. 78) afirmam que "de um modo geral, quando uma grandeza y é função de uma grandeza x e para cada par de valores (x, y) se observa $\frac{y}{x} = k$ (com $x \neq 0$) é constante, as duas grandezas são ditas diretamente proporcionais".

com questões abertas, que os alunos podem expor diversos conhecimentos que terminam contemplando aprendizagem sobre função do 1º grau.

A BNCC (BRASIL, 2016) amplia essa posição ao ressaltar que o ensino de função do primeiro grau deve ser feito de maneira que contemple a autoestima do aluno e a capacidade do trabalho em grupo. O documento acrescenta que, dessa forma, os discentes podem aprender as representações algébricas e gráficas desse assunto, como também, respeitar o modo de pensar dos colegas. A preocupação com o ensino desse conteúdo focado no gráfico também pode ser visto em Paiva (2015, p. 301) quando declara que ao final do estudo da função do 1º grau "os estudantes devem estar aptos a construir gráfico de uma função afim a partir da lei de associação e construir gráfico de uma função dada por mais de uma sentença". Nesse sentido, a BNCC (BRASIL, 2016, p. 561) destaca que:

> O trabalho com função afim deve ser realizado de modo a proporcionar ao estudante compreender o modelo de variação que se estabelece entre as variáveis envolvidas e perceber aspectos importantes como taxa de variação, crescimento e decrescimento, incluindo os casos em que a relação entre as variáveis envolvidas é proporcional, o caso da função linear.

Essa determinação declara uma abrangência ampla dos conhecimentos a serem adquiridos pelos discentes. Embora o presente trabalho não contemple todas as partes da função afim, defendo que as habilidades adquiridas, nas partes que foram abordadas, atende a afirmação do documento oficial citado.

2.1.2 Função do 2º grau

A função do 2º grau, cuja definição está na Figura 9, contempla algumas aplicações do cotidiano. Em Física, por exemplo, os conhecimentos sobre essa função facilitam a compreensão do conteúdo de Movimentos Uniformemente Variados e dos fenômenos de queda livre.

Figura 9: Definição de função do 2º grau disponível em Iezzi *et al*.

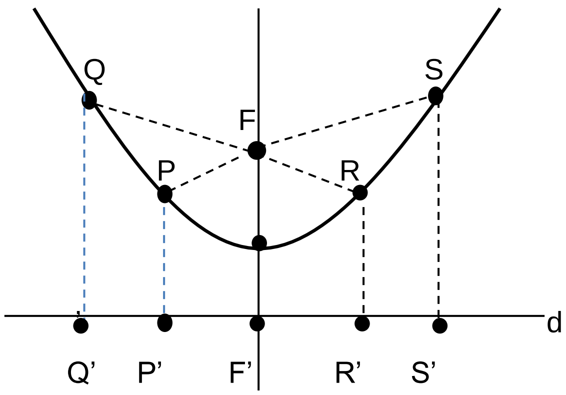
Chama-se função quadrática, ou de função do 2º grau, qualquer função f de R em R dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Fonte: Iezzi *et al*. (2017, p. 95).

O gráfico da função definida na figura 9 é uma parábola que pode assumir duas posições: concavidade voltada para cima, nesse caso, o gráfico possui um valor mínimo e concavidade voltada para baixo, de maneira que o gráfico assume um valor máximo. Na Figura 10 há uma representação destes dois casos. De acordo com Iezzi *et al*. (2017, p. 325), “a parábola é o conjunto de pontos equidistantes de uma reta (diretriz) e de um ponto (foco)”.

Figura 10: Exemplifica os gráficos da função do 2º grau.

1º Caso



Os pontos Q, P, V, R e S são alguns pontos da parábola.
Assim:
QF=QQ’; PF=PP’; VF=VF’;
RF=RR’; SF=SS’

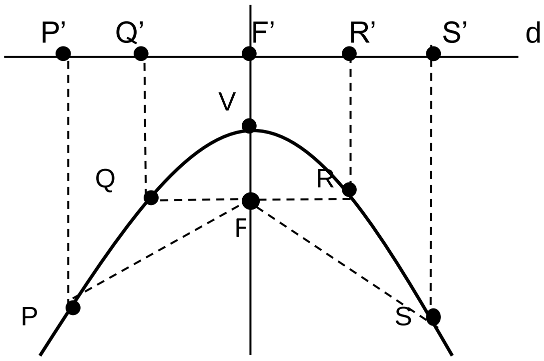
Observe o ponto Q, por exemplo. A distância de Q à diretriz (d) é igual à distância de Q a Q’, sendo Q’ a interseção de d com a reta perpendicular a d por Q. Da mesma forma definimos as distâncias de P, V, R e S à diretriz.

Temos ainda:

- A reta perpendicular à diretriz traçada pelo foco F é chamada eixo de simetria da parábola;
- O ponto V é o ponto da parábola mais próximo da diretriz e recebe o nome de vértice da parábola. Com esse formato, dizemos que a parábola tem a concavidade (“aberta”) voltada para cima.

(Continuação)

2º Caso



Pode ocorrer também que o ponto F (foco) esteja abaixo da reta d (estamos considerando d horizontal, isto é, paralelo ao eixo das abscissas). Observe o formato da parábola obtida:

P, Q, V, R e S são alguns pontos da parábola: PF=PP'; QF=QQ'; VF=VF'; RF=RR'; SF=SS'; ...

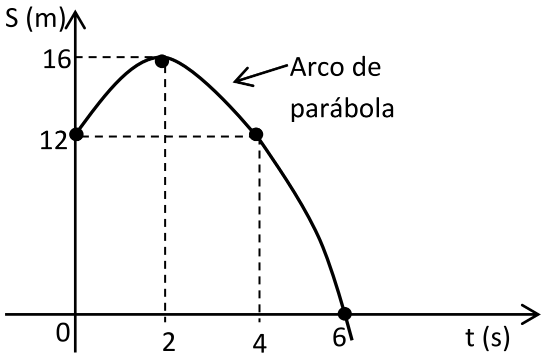
Com esse formato, dizemos que a parábola tem a concavidade ("aberta") voltada para baixo.

Fonte: Iezzi *et al*. (2017, p. 96).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2016) o trabalho com situações em que envolva os gráficos da Figura 10 deve ser desenvolvido de maneira que favoreça ao estudante a compreensão dos valores que se relacionam com o gráfico e o significado dos pontos de máximo e mínimo. Nesse sentido, Iezzi *et al*. (2017) destacam que as características das funções do 2º grau de possuírem um ponto de máximo (ou de mínimo) devem ser valorizadas pelo professor, ou seja, o docente deve propor aos alunos atividades que contribuam para o entendimento desses pontos.

Preocupado com a compreensão dos gráficos da Figura 10, Freitas (2016) afirma que muitos professores, quando explicam essa parte, afirmam que o gráfico da função do 2º grau é uma parábola. Esse autor alerta que essa afirmação pode levar os alunos a imaginarem que todas as curvas que têm formatos similares à parábola, são gráficos de funções do 2º grau. Dante (2017) corrobora com essa ideia ao afirmar que um fio flexível suspenso entre dois pontos sob a ação exclusiva da gravidade descreve uma curva chamada de catenária, muito parecida com a parábola. Nesse sentido, Freitas (2016) aconselha que é preciso fazer a demonstração do gráfico da função quadrática e da parábola e mostrar que são similares. Nessa continuidade, na Figura 11, Yomamoto e Fuke (2016) enfatizam uma aplicação desse ponto na Física.

Figura 11: Apresenta o diagrama s x t de uma parábola em movimento uniformemente variado (MUV).



Apresenta um arco de parábola, em que o espaço (s) é uma função quadrática em t, com as seguintes características:

a) concavidade para baixo: $a < 0$.

b) para $0 \leq t \leq 2$ s: a altura aumenta e a velocidade(v) é maior que zero e a aceleração é negativa; portanto, o MUV é progressivo e retardado.

c) em $t = 2$ s: o móvel muda de sentido (v = 0).

d) para $t \geq 2$ s: a altura diminui e v < 0; portanto, o MUV é retrógrado e acelerado.

e) em $t = 6$ s: o móvel passa pela origem dos espaços (s = 0).

Fonte: Do autor, adaptada de Yomamoto e Fuke (2017).

As várias interpretações retiradas apenas de um gráfico, como mostra a Figura 11, destaca a importância sobre a necessidade do ensino da função do 2º grau com ênfase na interpretação dos gráficos.

2.1.3 Função Exponencial e Logaritmo

A função exponencial, nos livros didáticos de nível médio, geralmente vem após o estudo da função abordada na seção anterior. Iezzi *et al*. (2017, p. 136) enfatizam que “chama-se função exponencial qualquer função f de R em R_+^* dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$”. Os autores destacam que para facilitar o entendimento dessa função é imprescindível que o docente faça uma revisão sobre os diversos tipos de potenciação e suas propriedades. Quanto ao uso dessa função em situações práticas, Silva (2016, p. 53) afirma que:

> As aplicações no cotidiano do aluno são em diversas situações e em diferentes disciplinas, na biologia, onde geralmente, o crescimento de determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias, acontece exponencialmente. Na química onde a decomposição ou desintegração de determinadas substâncias também acontece segundo um padrão exponencial. Na matemática financeira onde o sistema de juros compostos também funciona de forma exponencial.

Além dessas utilidades, essa função também pode ser abordada por docentes e discentes para facilitar o entendimento de outros conteúdos do 1º ano do Ensino Médio. Esse entendimento está de acordo com Alves (2014, p. 22) ao afirmar que "é interessante perceber como se pode introduzir a noção de progressão geométrica como a restrição desta função ao conjunto dos números naturais". Esse autor acrescenta que, ao fazer isto, o professor tem menos dificuldade em ensinar essa sequência e os alunos compreendem que a progressão geométrica[19] é uma aplicação da função exponencial. Após a abordagem dessa função, em sala de aula, costumo passar para o conteúdo de logaritmo e função logarítmica.

No que diz respeito à função logaritmo, Iezzi *et al* (2017, p. 160) ressaltam que "dado um número real a ($0 < a$ e $a \neq 1$), chama-se função logarítmica de base a a função f de R_+^* em R dada pela lei $f(x) = log_a x$". Esses autores afirmam que, de um modo geral, essa função tem características importantes que, inclusive, podem ser relacionadas com a função exponencial. Na Figura 12, há algumas propriedades desta função.

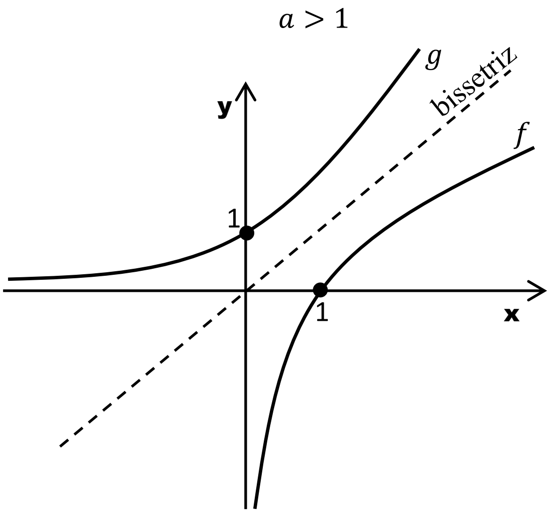
Figura 12: Propriedades da função logarítmica e o comportamento de seu gráfico com o da função exponencial.

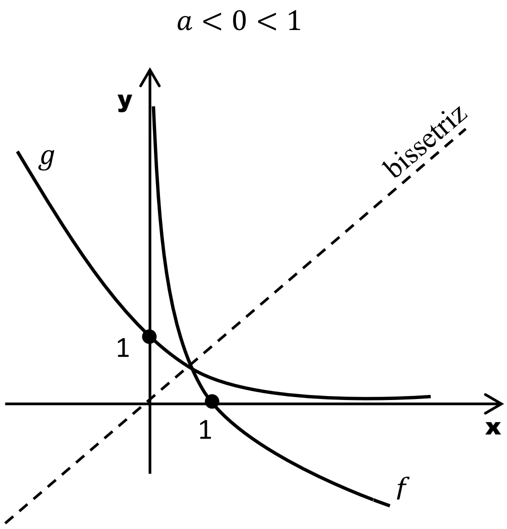
De um modo geral, o gráfico de uma função f definida por $y = log_a x$ tem as seguintes características:

[19] Alves (2014, p. 22) define progressão geométrica como sendo "uma sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao seu anterior multiplicado por um fator constante é uma progressão geométrica e esse fator constante é chamado de razão da progressão".

(Continuação)

- Corta o eixo Ox no ponto da abscissa 1, ou seja, no ponto $(1, 0)$, pois, se $x = 1$, $y = log_a 1 = 0$, $\forall a \in R, 0 < a$ e $a \neq 1$.
- É simétrico do gráfico da função exponencial g (de mesma base) definida por $y = a^x$ em relação à reta bissetriz do 1º e 3º quadrantes.
- Toma o aspecto de um dos gráficos abaixo:





Leis de f e g: $f(x) = log_a x$ e $g(x) = a^x$.

- O conjunto imagem de fé R, pois todo número real y é imagem do número real positivo $x = a^y$.

Fonte: Iezzi *et al*. (2017, p. 163).

Ao mostrar os gráficos da Figura 12, de acordo com Dante (2017), o docente deve levar o aluno a perceber que quando $a > 1$, a função exponencial cresce muito rapidamente e, por outro lado, a logarítmica cresce muito lentamente. Outro comportamento existente entre essas duas funções, provocado pelo valor de “a", é que seus gráficos são simétricos em relação à reta bissetriz. Essa característica, para Sousa (2010) mostra que as funções exponenciais e logarítmicas são inversas. De acordo com Silva (2016), é importante que o aluno perceba e assimile os conhecimentos adquiridos a partir dessas funções. Entretanto essa acepção é facilitada quando o docente propõe situações próprias do cotidiano dos educandos.

Nesse sentido, Iezzi *et al*. (2017, p. 326) acrescentam que a função exponencial e logarítmica proporcionam várias possibilidades ao ambiente escolar quando trabalhado de forma interdisciplinar, pois pode, por exemplo, “envolver a Física (relacionar os logaritmos ao estudo da intensidade dos sons), a Química (o pH de uma solução aquosa por meio do uso de logaritmos; o decaimento radioativo – a meia-vida – e a função exponencial)”. Nessa continuidade, tenho observado, em minha prática docente, que a compreensão do conteúdo se torna mais significativa quando os discentes têm acesso à aplicabilidade do assunto. A figura 13 exemplifica uma situação em que esse ponto é valorizado.

Figura 13: Exemplo de aplicação relacionado a Química.

Toda substância radioativa se desintegra a uma taxa constante, isto é, seu decaimento é exponencial. O tempo necessário para que sua massa se reduza à metade é chamado de meia-vida da substância. O rádio é um metal radioativo cujo isótopo Ra-226 tem meia-vida de 1.600 anos. Qual é o tempo, em ano, necessário para que 10 g desse isótopo se reduzam a 1 g?

Fonte: Paiva (2015, p. 247).

A figura 13 mostra uma situação em que pode ser investigada com o auxílio da função exponencial, pois de acordo com Iezzi *et al*. (2017) a lei usada para estudar a meia-vida de elementos radioativos é uma função exponencial definida por $n(x) = \frac{n_0}{2^x}$, em que “x” é a quantidade de meias-vidas, n_0 o número de átomos inicial e $n(x)$ o número de átomos em atividades após “x” meias-vidas.

As ideias expressadas até o momento estão de acordo com a BNCC (2016). Esse documento destaca que, ao estudar as funções exponenciais e logarítmicas, os alunos devem estar aptos a compreender seus modelos de variações e interpretar os gráficos.

Diante do exposto até aqui, destaco que as habilidades adquiridas com o domínio das funções tratadas no presente capítulo ampliam a visão dos alunos a respeito das aplicações desse conteúdo. Segundo a BNCC (BRASIL, 2016), a riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture utilizando exemplos do cotidiano, das formas gráficas que outras áreas do conhecimento utilizam para mostrar fenômenos de dependência entre grandezas.

O documento supra, acrescenta que os alunos devem aprender função para que possam interpretar seus gráficos, elaborar suas representações algébricas e usá-las em aplicações práticas e na resolução de problemas que envolvem fenômenos naturais, sociais e de outras áreas. Assim, foi envolvida a abordagem desse assunto, em particular a função do 1º grau, em sala de aula, usando a metodologia da Investigação Matemática. Dessa maneira pude oferecer a aprendizagem proposta pelos documentos oficiais e nas obras expostas e discutidas nessa seção.

2.2 Investigação Matemática

De acordo com Ponte (2003), existem diferentes concepções sobre o que é investigação. Essa indefinição também acontece com outras palavras como, por exemplo, "investigar" que pode assumir diferentes significados. Este autor acrescenta que na sociedade moderna, estabeleceram-se poderosas comunidades científicas de diversas áreas, que reivindicam somente para si a capacidade de realizar investigação.

Dessa forma, Ponte (2003), afirma que foram gerados diversos mitos como:

- Investigar é uma atividade transcendente, que envolve o uso de metodologias sofisticadas, requerendo recursos especiais e uma longa preparação prévia.
- Investigar é uma atividade reservada a um grupo especial de pessoas, os "investigadores profissionais".
- Ensinar e investigar são duas atividades contraditórias, que não se conseguem fazer em simultâneo sem comprometer a qualidade de uma ou outra.

Mas na perspectiva desse autor, "investigar" não é mais do que explorar um problema para conhecer, compreender e encontrar soluções válidas. Assim, Ponte (2003) acrescenta que o hábito de investigar deveria ser uma abordagem de primeira importância dentro do ambiente escolar objetivando mediar o trabalho entre professores e alunos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) enfatizam que a investigação realizada pelos matemáticos é voltada para descobrir relações entre objetos conhecidos ou desconhecidos visando identificar as propriedades existentes entre os mesmos. Ainda de acordo com os referidos autores, uma investigação matemática é desenvolvida geralmente com um ou mais problemas não necessariamente difíceis ou sofisticados na fronteira do conhecimento. Os pesquisadores citados acrescentam que são questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, porém que procura clarificar e estudar de maneira organizada.

Nesse sentido Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) afirmam que o processo investigativo em Matemática possui particularidades próprias, pois rapidamente desenvolve-se a formulação de conjecturas que podem ser testadas e provadas. Os autores ainda enfatizam que “as investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração (2013, p. 10)”. Também afirmam que:

> [...] uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 20).

Esses autores garantem que esses momentos surgem, muitas vezes, de forma simultânea podendo sofrer permutações durante o processo de investigação. Isso proporciona um valor formativo importante para os alunos, pois desenvolve a competência para formular novas ideias e conjecturas.

Durante as fases da Investigação Matemática, os discentes podem se deparar com situações novas na medida em que desdobram os problemas. Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) relatam que é possível programar o começo de uma investigação, porém não se tem uma previsão do seu fim, porque os alunos seguem por uma variedade de caminhos que podem levá-los a avançar, recuar ou divergir, ou seja, podem ocorrer diversas possibilidades de enfrentamentos.

Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) enfatizam que numa investigação matemática, o objetivo é explorar as propostas que surgem como significativas a partir de uma ou mais abordagens. Esses autores ainda acrescentam que na abordagem das atividades o processo é divergente, pois tanto o professor quanto os alunos conhecem o ponto de partida, mas não se sabe qual será o de chegada. De acordo com Freire (2011, p. 28) “os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo”.

Para sustentar que as ideias expostas até o momento tenham sucesso Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) afirmam que é indispensável que o discente se sinta à vontade, tendo tempo suficiente para colocar questões, pensar, explorar suas conjecturas e expô-las ao professor e aos seus colegas. O aluno deve sentir que seu ponto de vista é valorizado e que se espera que a discuta com os colegas. Assim é preciso que o discente esteja motivado ao desafio para enfrentar essa multiplicidade de situações.

> Desafiar o aluno significa propor situações que ele considere complexas, mas não impossíveis. Trata-se de gerar nele certa tenção, que o anime a ousar, que convide a pensar, a explorar, a usar conhecimentos adquiridos e a testar sua capacidade para a tarefa que tem em mãos. Trata-se, ainda, de motivá-lo a interagir com seus colegas, a fazer perguntas que lhe permitam avançar (SADOVSKY, 2010, p. 14).

Auro e Skovsmose (2010) ampliam essa discussão afirmando que isso é possível quando é abandonado o paradigma do exercício e os alunos são convidados a fazer o cenário para investigação. Esses autores acrescentam que os cenários são por natureza abertos, podem substituir os exercícios e os discentes podem ser agentes ativos do processo de investigação. Nesse sentido,

> Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. O convite é simbolizado pelo “O que acontece se ... T” do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se ... T”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O “Por que isto ... ?” do professor representa um desafio e os “Sim, por que isto ... T” dos alunos indica que eles estão encarando o desafio e que estão procurando explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo (SKOVSMOSE, 2000, p. 6).

Skovsmose (2000) ainda destaca que quando os discentes resolvem fazer a exploração e explicação, ou seja, aceitam o convite para investigar, o cenário da investigação se transforma em uma nova realidade de aprendizagem. Os alunos assumem uma posição de responsabilidade pelo processo, ou seja, formulam questões e explicam na medida em que são questionados pelo professor.

Nesse sentido, a BNCC (BRASIL, 2017) ressalta que ao investigar uma atividade com foco na sua resolução o discente deva mobilizar seus conhecimentos e habilidades, a fim de identificar respostas adequadas à socialização. Nesta mesma linha argumentativa Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) destacam que o sucesso adquirido em uma investigação matemática está relacionado com o ambiente criado pelo docente na sala de aula, assim o professor deve transmitir apoio aos alunos, embora a atividade dependa puramente da iniciativa destes. Em efeito:

> É fundamental que o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas. O aluno deve sentir que as suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com seus colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 28).

Essa afirmação acrescenta que durante as atividades investigativas é importante que o professor motive e valorize as descobertas dos alunos. Nessa continuidade, Schmitt (2015, p. 20) afirma que: “este tipo de atividade deve ser disponibilizado, procurando desenvolver a habilidade e a capacidade dos alunos para solucionarem dilemas e formularem conjecturas a respeito dos problemas apresentados”. Nesta perspectiva, foi desenvolvido neste trabalho um cenário de Investigação Matemática, onde as atividades foram abordadas de acordo com as orientações encontradas em Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 26), no qual eles propõem “uma pequena introdução, seguida da realização da investigação, em pequenos grupos e, finalmente, a discussão dos resultados em grande grupo”. Dessa forma, os alunos avançam na construção do seu próprio saber, já que eles têm a oportunidade de discutir em conjunto e de maneira autônoma as informações e conhecimentos adquiridos durante as aulas. Dando continuidade a essa concepção, Ponte (2003) afirma que as tarefas de investigação têm um papel importante na sala de aula, devendo desenvolver as competências matemáticas dos alunos, de maneira que tenham uma visão ampla da natureza dessa ciência.

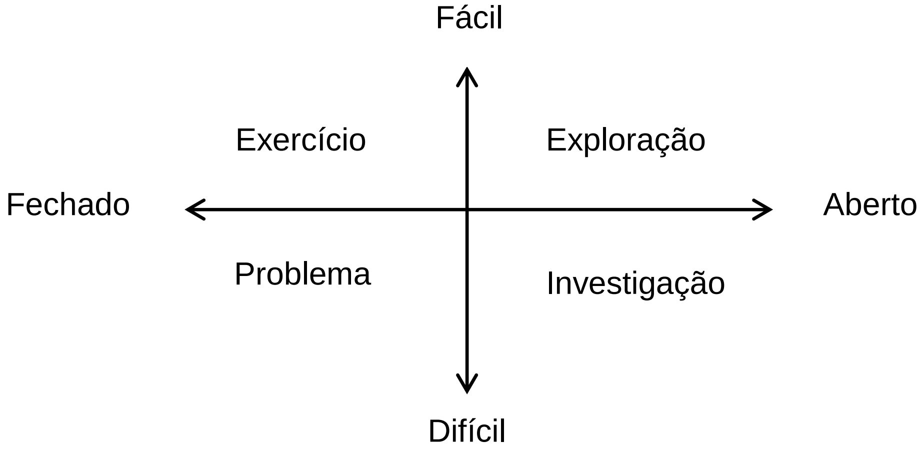
Mas esse autor afirma que o interesse por essas atividades é por vezes desvalorizado com os seguintes argumentos:

> (i) a maior parte dos alunos não tem qualquer interesse por realizar explorações ou investigações matemáticas; (ii) os alunos têm dificuldade em perceber como investigar; (iii) antes de poderem investigar os alunos têm de aprender muitos conceitos e procedimentos básicos; e (iv) a atividade do aluno e a do matemático são necessariamente muito diferentes, porque não se pode comparar um profissional especializado, que trabalha em coisas que lhe interessam, com uma criança ou um jovem, que tem uma dúzia de disciplinas para estudar, e que o faz coagido pelo sistema de ensino (PONTE, 2003, p. 12).

Esse posicionamento remete cuidados ao desenvolver um trabalho de investigação, pois é preciso despertar o interesse dos alunos, como também, buscar a atenção deles para a prática investigativa. Diante dessa preocupação Ponte (2003, p. 4) afirma que “o ensino-aprendizagem da Matemática assenta na actividade que os alunos levam a cabo na sala de aula e esta, por sua vez, depende muito das tarefas apresentadas pelo professor”. Nesse sentido, Fiorentini e Lorenzato (2006) destacam que as aulas investigativas são aquelas que estimulam, em sala de aula, a ocorrência de tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno. Corroborando com esses autores, Ponte (2003) ressalta que na realização destas tarefas em sala de aula, a discussão final é imprescindível para a legitimação da aprendizagem e até, para a exploração de novos caminhos que podem surgir.

Na perspectiva de Ponte (2003), uma tarefa tem quatro dimensões básicas: o seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Na Figura 14 estão expostos os quatro tipos de tarefa associados ao grau de dificuldade (fácil ou difícil) e sua abertura (fechado ou aberto), de acordo com o referido autor.

Figura 14: Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura.



Fonte: Ponte (2003)

Dessa forma, o autor caracteriza cada uma dessas tarefas[20] do seguinte modo:

> Um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido (2º quadrante); Um problema é uma tarefa também fechada, mas com elevada dificuldade (3º quadrante); As investigações tem um grau de dificuldade elevado, mas uma estrutura aberta (4º quadrante) (PONTE, 2003, p. 12).

Essas incumbências estão inseridas ao ambiente de aprendizagem de Auro e Skovsmose (2010), exposto na Figura 2 do presente trabalho, pois podem se inserir a alguma das referências que objetivam aos discentes a elaborarem significados matemáticos. Assim, as questões do 2º, 3º e 4° quadrantes da Figura 14, podem ser elaboradas com referência à Matemática pura, referência à semirrealidade e referência à situação da vida real.

Diante desses pressupostos Fiorentini e Lorenzato (2006) enfatizam que ao verificar-se, durante a atividade, a formulação de conjecturas que provocam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, tem-se, então, uma situação de Investigação Matemática. Nesse sentido:

> Esse trabalho de formulação de questões, elaboração de conjecturas, teste, refinamento das questões e conjecturas anteriores, demonstração, refinamento da demonstração e comunicação dos resultados aos seus pares está ao alcance dos alunos na sala de aula de Matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 22).

Nesse cenário em que o discente ocupa posição ativa, Banchi e Bell (2008) destacam que a maioria dos discentes, dos mais novos aos veteranos, precisa de ampla prática para desenvolver suas capacidades de investigação e compreensão, a ponto de poderem conduzir o processo de investigação do início ao fim. Ponte (2005) contempla esse entendimento ao afirmar que a aprendizagem do aluno não está condicionada somente ao que o professor expõe, mais também, a partir das discussões e registros escritos sobre as atividades que realizou. A posição do autor é relevante para Investigação Matemática, pois ao abordarem atividades

---

[20] Muitas vezes não se distingue entre tarefas de investigação e de exploração, chamando-se “investigações” a todas elas. Isso acontece, muito provavelmente, porque é complicado saber à partida qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos (PONTE, 2013, p. 5).

investigativas é importante que os alunos registrem suas conjecturas e estratégias utilizadas. A esse respeito Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) acrescentam que a escrita dos resultados obtidos pelos alunos permite ao professor analisar o desempenho dos discentes e a planejar as aulas seguintes.

Ao adquirir essa habilidade, o aluno promove ferramentas fundamentais para o envolvimento com os momentos investigativos, de maneira a agregar mais valores aos significados de seus resultados e a constituição do conhecimento matemático válido. Diante de um cenário investigativo, o discente atingirá com maior facilidade esse nível se as atividades forem realizadas em grupo, pois ao colaborarem uns com os outros o empreendedorismo de conhecimentos o tornará mais proficiente. Na próxima seção, discuto algumas ideias sobre o trabalho em grupo, por ser esta a forma que explorei as atividades investigativas.

2.3 Grupos Colaborativos

De acordo com Svinicki e Mckeachie (2012) o gargalo da aprendizagem consiste em levar os alunos a expor seu raciocínio[21] e comunicação por meio da fala, da escrita ou do comportamento que provoquem, nos outros, reações de interesse para o problema envolvido. Esses autores acrescentam que o professor só conseguirá atender um discente por vez, e ao focar a atenção em apenas uma pessoa, o docente pode dar margem para as conversas que não têm relação com o assunto trabalhado. Dessa forma, não é razoável que o processo de ensino fique limitado à comunicação com o professor, pois os pesquisadores acreditam que quando os alunos são expostos em grupos são mais produtivos.

De acordo com Bonals (2003), no trabalho em grupo os alunos ensinam os outros e proporcionam a aprendizagem favorecendo a aquisição de conhecimentos por meio da interação entre eles. Esse autor acrescenta que essa é uma razão significante que justifica a utilização dessa metodologia em sala de aula. Esse

[21] Em Henriques e Ponte (2014, p. 278) verifica-se que "o raciocínio matemático é largamente reconhecido como fundamental na educação matemática. No entanto, coexistem diferentes entendimentos sobre os processos a enfatizar na sala de aula nos vários níveis de ensino (BALL; BASS, 2003; YACKEL; HANNA, 2003). Boaler (2010), por exemplo, refere o raciocínio matemático como "o que os matemáticos fazem – envolve criar e comunicar um percurso entre uma ideia ou conceito e o seguinte" (p. v). No mesmo sentido, Oliveira (2008) descreve raciocínio matemático como "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3)".

cenário é imprescindível para os momentos de Investigação Matemática, pois tomando como base as experiências adquiridas com atividades investigativas durante o ano de 2017, em turmas de 1º ano do Ensino Médio, é mais fácil a aquisição do envolvimento dos alunos quando estão expostos em pequenos grupos. A esse respeito Svinicki e Mckeachie (2012, p. 204) enfatizam que:

> Os alunos falam mais em grupos pequenos do que em grandes. Alunos que estão confusos têm maiores chances de fazer perguntas sobre suas dificuldades ou falhas ao grupo de colegas do que com o docente. Os alunos que não estão confusos devem organizar e reorganizar ativamente o próprio aprendizado para poder ajuda-lo. Assim, tanto o aluno confuso quanto aquele que possui poucas dúvidas se beneficiam das interações com os colegas do grupo.

Essa forma de trabalho em sala de aula aproxima docente de discente, pois como afirma Gasparin (2011) quando o professor possibilita espaço ao aluno, tornam-se companheiros. Essa postura pode gerar aproximação e a relação entre eles torna-se confiante, do ponto de vista das relações em sala de aula. Isso exige que o docente conceba uma teia de aproximação entre ele e os grupos para que possam potencializar um trabalho significativo. Ao disponibilizar um ambiente propício às investigações, pulverizando um cenário de colaboração entre os alunos, estes aprendem a aprender e passam conhecimentos aos pares durante as discussões em pequeno e grande grupo. Para enfatizar essa discussão Boavida e Ponte (2002) destacam as seguintes vantagens de um grupo que trabalha adotando procedimentos de colaboração[22]:

- Juntando pessoas que se empenham num propósito comum, reúnem-se mais energias do que as que possuem quando atuam isoladamente, fortalecendo-se, assim, a ação discente na aprendizagem.
- Reunindo-se pessoas com conhecimentos prévios e competências diversificadas dispostas em grupos, obtém-se mais recursos para abordar uma dada investigação, havendo, deste modo, possibilidade de promover novos conhecimentos.
- Reunindo em grupos pessoas que interagem, dialogam e refletem sobre seus apontamentos e conjecturas, criam-se sinergias que possibilitam uma

[22] De acordo com Borba (2013, p. 56) “na colaboração, todos trabalham conjuntamente (“co-laboram”) e se apoiam mutuamente, visando atingir objetivos comuns negociados pelo coletivo do grupo. Na colaboração, as relações, portanto, tendem a ser não hierárquicas, havendo liderança compartilhada e ‘corresponsabilidade’ pela condução das ações”.

capacidade de aprendizagem mútua. Esta prática permite avanços na investigação e concebe melhores condições para enfrentar os desafios e obstáculos que surgem.

Assim, na perspectiva de Boavida e Ponte (2002) as aulas que utilizam o método de trabalho em colaboração ocorrem quando os diversos intervenientes trabalham conjuntamente. Os autores acrescentam que nesse contexto não há uma relação hierárquica, mas uma base de igualdade de modo a haver ajuda mútua, de maneira que todos se beneficiam com as discussões.

Svinicki e Mckeachie (2012) partilham desse ponto de vista ao apontarem, em sua obra, as seguintes habilidades a serem acordadas pelos discentes no momento das discussões entre os membros dos pequenos ou grandes grupos:

- Declarar a importância das discussões para a aprendizagem dos alunos e, que ao expressar uma compreensão o discente pode obter reações dos outros e do professor, mas esse procedimento é fundamental para o aprendizado.
- Destacar ao aluno a relevância de expor suas conjecturas e conclusões, ouvir as dos outros e interagir com eles durante os momentos investigativos.
- Planejar as ações para o tempo da aula.
- Incentivar os alunos a valorizar as ideias de seus pares para evitar competição de conhecimentos.

Os autores colocam que a saída significante para a primeira e segunda afirmação está no diálogo que o professor deve conferir à turma antes de iniciar as atividades que serão abordadas pelos grupos. Na ocasião, o aluno deve entender que pode se enganar com suas percepções e, verbalizá-las é uma maneira de verificar a validade do que pensa, já que ouvirá a posição dos colegas e, se necessário, a confirmação ou intervenção do professor. Neste sentido Oliveira, Segurado e Ponte (1998) acrescentam que é relevante a importância da ação do professor nas questões que propõe, nas interações que promove, em especial encorajando os alunos a discutir e a explicar os conhecimentos matemáticos que construíram. As discussões assumem um papel importante, favorecendo o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de comunicar-se matematicamente.

Em relação ao terceiro e quarto ponto, conforme os autores anteriormente citados, o mediador deve aventar que as discussões atinjam certo valor antes do término da aula ou do grupo ser desfeito. O docente deve ficar atento sobre os rumos que as argumentações tomam durante o processo investigativo, tanto em relação ao tempo da aula como no sentido que os discentes podem tomar.

Brunheira e Fonseca (1995) afirmam que nesse contexto podem-se inserir as atividades de investigação, porque elas se destacam como uma oportunidade para os discentes realizarem trabalhos em grupo, exporem suas ideias, superarem dificuldades e aumentarem a confiança nos pares em enfrentar novos desafios. Lima (2013, p. 20) corrobora com essa posição ao ressaltar que “uma forma de mudar o foco da educação é tornar o aluno o protagonista da própria aprendizagem e o professor deverá motivar e auxiliar os alunos na resolução de tarefas elaboradas”. Para tal, é preciso valorizar métodos que colaboram para despertar a criatividade do aprendiz em construir conhecimentos colaborando uns com os outros. Os trabalhos em grupo, com atividades abertas promotoras de discussões colaborativas e reflexão sobre o conteúdo, se destaca como uma estratégia para a proposta do presente trabalho.

Para Moran (2000), ao garantir metodologias que despertem curiosidade e motivação dos alunos, o professor facilita a aprendizagem significativa e estimula os discentes a explorar suas qualidades. O autor acrescenta que, dessa forma os discentes tornam-se interlocutores lúcidos[23], aprendem e ensinam, avançam mais, ajudam o docente a ensiná-los melhor.

Desta forma, Gadotti (2003) comenta que o professor se torna um aprendiz permanente, um construtor de sentidos, um coadjuvante, e, sobretudo, um organizador da aprendizagem. O autor acrescenta que de nada adiantará ensinar, se os alunos não têm autonomia para explorar seus trabalhos e, ao lado do seu orientador, serem sujeitos ativos da aprendizagem.

---

[23] De acordo com Moran (2000) interlocutores lúcidos, no ambiente escolar, são alunos que exploram o raciocínio na busca de compreender o que lhe é dito.

Por acreditar nessa posição e nas ponderações anteriores, apostei no trabalho em grupo, porque acreditei ser apropriado para sustentar os momentos de Investigação Matemática que foram desenvolvidos durante as atividades propostas pela pesquisa.

2.4 Análise de trabalhos com Investigação Matemática

Esta seção tem como foco discutir cinco dissertações de Mestrado que tematizaram a metodologia da Investigação Matemática junto ao ensino de Função do 1º grau. Este estudo é denominado de "Estado da arte" e, segundo Wichnoski e Klüber (2015), diz respeito a pesquisas de caráter bibliográfico, que têm o desafio de mapear e discutir a produção acadêmica em estudo, a fim de tentar responder que concepção e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares. Nesse sentido, Fonseca (2002) acrescenta que esse tipo de busca tem por objetivo compilar informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta.

Então, conforme os autores citados busquei conhecimentos e contribuições em trabalhos de conclusão de cursos, em nível de pós-graduação *stricto sensu*, que dissertam sobre o ensino de função do 1º grau alicerçada na Investigação Matemática. Os trabalhos discutidos foram extraídos do catálogo de Teses e Dissertação da Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (CAPES) no primeiro semestre de 2017. A procura envolveu os anos de 2007 a 2016, e ocorreu em duas etapas. Na primeira, ao utilizar o termo "Investigação Matemática e Ensino de Função" foram identificados 409.911 trabalhos. Em seguida, foi aplicado um filtro marcando as opção Mestrado (dissertação) e a área de conhecimento (Matemática). Dessa forma, refinou-se para 1.779 trabalhos. Na segunda etapa, foi utilizada a expressão "Investigação Matemática e Sequências" e foram identificados 409.911 trabalhos. Em seguida, a procura foi refinada utilizado o mesmo procedimento da primeira busca. Desta maneira, foram reveladas 1.171 dissertações.

Ao analisar os resumos dos trabalhos resultantes das buscas, na primeira, foram identificadas as dissertações de Rodrigues (2007), Bonotto (2015) e Romanello (2016), pois envolve o ensino de função com investigação matemática.

Na segunda, Saraiva (2012) e Ramos (2015), porque envolve o ensino de sequências com investigação matemática. Para cada um destes trabalhos, elaborei um quadro contendo partes importantes do texto e, logo após, apresento algumas considerações do autor sobre sua pesquisa. Assim, no Quadro 1 inicio a discussão dos trabalhos encontrados apresentando dados referentes ao trabalho de Rodrigues (2007).

Quadro 1: dissertação de Márcio Urel Rodrigues, defendida em 2007.

TÍTULO	Narrativas no ensino de Funções por meio de Investigação Matemática.
TEMA	As possibilidades didático-pedagógicas das narrativas por meio da perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas no ensino do conceito de Função.
QUESTÃO	Quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no contexto do ensino de Funções?
OBJETIVO(S)	Investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas em processos de ensinar e aprender Funções.
SUJEITOS	27 alunos, sendo 17 meninos e 10 meninas, pertencentes a uma turma de oitava série do Colégio Adventista de Barra do Bugres/MT.
PRESSUPOSTOS	Neste ponto, o trabalho teve com foco, Funções, Narrativas e Investigação Matemática. O trabalho abordou o ensino de função de acordo com os PCNs (1998), PCNs (2001) e o Currículo Nacional do Ensino Básico (2001). Observou que este ensino pode ser realizado utilizado diferentes metodologias, dentre elas, a Investigação Matemática. Ao expor sobre as narrativas, o autor destacou-as como importante ferramenta de ensino e comunicação em sala de aula, tendo como principal sustento os trabalho de Morais e Galiazzi (2003). Já a Investigação Matemática foi abordada sob a ótica das tarefas exploratório-investigativas. Neste ponto, Rodrigues buscou apoio, principalmente, em Ponte (2003).
ABORDAGEM	O trabalho em destaque optou pela pesquisa qualitativa de natureza interpretativa que se valeu dos dados extraídos de gravações em áudio, entrevistas, diários de bordo do pesquisador, narrativas escritas, questionários, observações diretas e conversas informais.

Fonte: Do autor

Rodrigues (2007) tendo em vista a questão de pesquisa, afirma que procurou destacar as seguintes peculiaridades: contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Função; enfatizar as potencialidades da Investigação Matemática para o ensino de Matemática e as narrativas como uma forma de viabilizar a prática de sala de aula contribuindo para a aprendizagem por meio da comunicação de ideias matemáticas.

Diante dessa abordagem, Rodrigues (2007) concluiu que as potencialidades didático-pedagógicas das narrativas contribuem firmemente para o envolvimento, participação e interação dos alunos, como também, para dinamizar a prática pedagógica do docente. O autor finaliza destacando que as narrativas dos discentes favorecem o desenvolvimento das competências de argumentação e justificação das ideias matemáticas.

A seguir, no Quadro 2 destaco ideias da autora Saraiva em seu trabalho defendido em 2012.

Quadro 2: dissertação de Lucilene Oenning Saraiva, defendida em 2012.

TÍTULO	Atividades investigativas para o ensino e aprendizagem dos conceitos e propriedades de sucessões numéricas.
TEMA	Uma experiência de ensino, em sala de aula, envolvendo Atividades investigativas focadas no estudo de sequências numéricas com futuros professores.
QUESTÃO	Em que a metodologia da Investigação Matemática pode contribuir para o ensino e aprendizagem dos conceitos e propriedades de sucessões numéricas?
OBJETIVO	Analisar as possibilidades que a Investigação Matemática ao ensino e aprendizagem dos conceitos e propriedades de sucessões numéricas.
SUJEITOS	28 estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade do oeste paranaense.
PRESSUPOSTOS	Saraiva (2012) destacou a Investigação Matemática de acordo com os pressupostos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). Nesse contexto, Saraiva (2012, p.16) afirma que “o trabalho com Investigação Matemática está centrado no trabalho coletivo, que valoriza a participação ativa dos alunos de forma a torná-los corresponsáveis pelo trabalho em sala de aula”. Saraiva (2012) também referenciou autores do Ensino Médio e Superior para enfatizar o ensino de sequências. Em seu trabalho revela que o livro didático não deve ser rigorosamente seguido, podendo, o professor complementar suas atividades.
ABORDAGEM	A pesquisa foi de caráter qualitativo que utilizou como instrumentos de coletas de dados o diário de campo do professor, diário de campo do aluno e o questionário. Com essa metodologia, a abordagem focou a exploração dos conceitos e propriedades do conteúdo por meio de atividades investigativas.

Fonte: Do autor

Saraiva (2012) percebeu que as atividades propiciaram aos alunos um espaço de discussão, criatividade e interação entre os grupos e entre estes e o professor. Entretanto, a autora comenta que antes de chegar a esse ponto, alguns alunos resistiram à proposta, porque não queriam explorar o raciocínio constantemente. Apesar das limitações, a pesquisadora observou que os alunos desenvolveram habilidades para “argumentações sobre as suas explorações, justificativas e sobre suas conjecturas; ouvir as opiniões dos outros; capacidade de investigar, pois eles passaram a formular de maneira mais autônima suas conjecturas" (SARAIVA, 2012, p. 79). A autora concluiu que a Investigação Matemática se destaca como uma alternativa metodológica que pode ser adotada para ensinar Matemática nos diferentes níveis de ensino.

No quadro 3, dados da dissertação de Bonotto (2015) que explorou a função exponencial por meio de atividades investigativas.

Quadro 3: dissertação de Aline Kempa Bonotto, defendida em 2015.

TÍTULO	Ensino e aprendizagem da função exponencial por meio de atividades investigativas e do uso de objeto de aprendizagem.
TEMA	Uma sequência didática, abordando função exponencial, para investigar a utilidade de um objeto de aprendizagem no desenvolvimento de habilidades investigativas.
QUESTÃO	O ensino de funções exponenciais, mediado pela utilização de recursos tecnológicos e de um objeto de aprendizagem favorece o desenvolvimento de habilidades investigativas no aprendiz?
OBJETIVO	Analisar uma proposta de ensino de Funções Exponenciais mediada pela utilização de recursos tecnológicos e de Objeto de aprendizagem, a fim de favorecer o desenvolvimento de habilidades investigativas no aprendiz.
SUJEITOS	Foram 20 alunos de uma turma do segundo ano do Ensino Médio Técnico Integrado de uma escola Federal do município de São Vicente do Sul/RS.
PRESSUPOSTOS	Neste ponto Bonotto (2015) aborda as Tecnologias de Informação e Comunicação, destacando o Objeto de aprendizagem e o *Software Geogebra*, enfatizando que "a tecnologia assume o papel de auxiliar no processo de ensino mediante a mediação do Professor" (p. 24). Bonotto (2015) também acentua as etapas da Investigação Matemática propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) para estabelecer os caminhos que nortearam as investigações propostas em sua pesquisa.
ABORDAGEM	A pesquisa foi qualitativa e contou com o diário de campo, questionário e análise documental (resolução das atividades) para a coleta dos dados surgidos das investigações.

Fonte: Do autor

Bonotto (2015) observou que, no início das atividades, os alunos apresentaram resistências para justificar suas conjecturas. Mas, após se familiarizarem com a metodologia do trabalho notou que os discentes conseguiram generalizar as leis de formação da Função Exponencial. Bonotto (2015) também notou que as atividades proporcionaram aos alunos a capacidade de argumentação e justificação das conjecturas. A pesquisadora finaliza seu trabalho destacando que "os recursos computacionais aliados à perspectiva metodológica de Investigações Matemáticas pode contribuir significativamente para a abordagem da Função

Exponencial e auxiliar no processo ensino-aprendizagem” (BONOTTO, 2015, p. 114).

No quadro 4, alguns dados da dissertação de Ramos (2015) que explorou o estudo de sequências e regularidades utilizando atividades investigativas.

Quadro 4: dissertação de Rose Mary dos Santos Farias Ramos, defendida em 2015.

TÍTULO	A Investigação Matemática como suporte para o estudo de sequências e regularidades: uma experiência com alunos do 1º ano do ensino médio.
TEMA	Aborda a importância da Investigação Matemática, por meio de atividades investigativas, para o ensino sequências e formação de regularidades.
QUESTÃO	Quais as possibilidades e as contribuições de se utilizar a Metodologia da Investigação Matemática no ensino de matemática, em especial no estudo de sequências e regularidades?
OBJETIVO	Estudar as possibilidades e as contribuições de se utilizar a Metodologia da Investigação Matemática, no ensino de matemática, em especial no estudo de sequências e regularidades.
SUJEITOS	Foram 30 alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio, de um Colégio Estadual do Município de Rio do Antônio-BA.
PRESSUPOSTOS	Nesta parte Ramos (2015) expõe as tendências metodológicas no ensino da matemática, declarando a Investigação Matemática como estratégia imprescindível aos estudos e práticas educacionais atuais. Ramos (2015) também destaca a importância na Investigação Matemática no ensino e aprendizagem de matemática. Essa pesquisadora discute ideias de Ponte (2003) para expor as etapas envolvidas na realização de atividades investigativas em sala de aula. Ramos (2015) também trata do papel do professor e do aluno no processo investigativo e, posteriormente referencia Skovsmose (2000) para sustentar a explanação sobre os cenários para investigação.
ABORDAGEM	O trabalho valeu-se da pesquisa qualitativa na modalidade pesquisa-ação, pois a autora aponta que se centrou na aplicação de atividades que aperfeiçoassem a aprendizagem por meio da participação ativa do pesquisador e dos participantes. Os instrumentos de coleta de dados foram o questionário de sondagem, diário de bordo do professor, escrito dos alunos e questionário final da pesquisa. Esse trabalho tomou como guia a abordagem de investigação proposta por Ponte et al (2013).

Fonte: Do autor

Ramos (2015) observou que no início das atividades os alunos mostraram dificuldades, porque não estavam acostumados a utilizarem atividades de maneira investigativa, mas essa deficiência foi superada ao longo das aulas. Ao finalizar os encontros, a pesquisadora evidencia que apesar das dificuldades, a experiência vivida possibilitou identificar as potencialidades da Metodologia da Investigação Matemática para o ensino de conteúdos matemáticos.

Ramos (2015) também notou que o método de trabalhos em grupo aprimorou a capacidade de cada aluno a argumentar junto ao professor e aos colegas. A pesquisadora acrescenta que “a Investigação Matemática como uma alternativa metodológica deve ser constante em sala de aula, visto que, a mesma oportuniza o desenvolvimento de diversas habilidades” (RAMOS, 2015, p.101). Ao finalizar seu trabalho, a referida autora concluiu que a Investigação Matemática desponta como uma ferramenta relevante para ensinar Matemática no Brasil.

No quadro 5, apresento dados relevantes da dissertação de Romanello (2016) que potencializou o celular e as atividades investigativas para o ensino de funções.

Quadro 5: dissertação de Laís Aparecida Romanello, defendida em 2016.

TEMA	Potencialidades do uso do celular na sala de aula: atividades investigativas para o ensino de função.
QUESTÃO	Quais as potencialidades do uso do celular inteligente na sala de aula, quando conceitos de função são trabalhados?
OBJETIVO	Investigar o uso do aplicativo Matemática para celulares inteligentes no desenvolvimento de conceitos de função em sala de aula.
SUJEITOS	Turma com 36 alunos do 9º ano de uma escola estadual de Limeira/SP.
PRESSUPOSTOS	Nesta parte a pesquisadora destaca o Construcionismo exposto por Papert (1985 e 1994). Essa teoria, de acordo com Romanello (2016), afirma que o processo de aprendizagem deve ser ativo, ou seja, o aluno deve participar da construção do conhecimento adquirido por ele. Dessa forma vai ao encontro da Investigação Matemática. Romanello (2016) aborda as características de Investigação Matemática de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), já que as atividades propostas são de caráter investigativo em um ambiente de aprendizagem construcionista.
ABORDAGEM	A pesquisa foi qualitativa e os dados foram colhidos por meio de gravações das discussões dos alunos, questionário aberto respondido pelos discentes durante as aulas e pela entrevista com o professor ao finalizar as atividades. Os dados giraram em torno das observações do docente e das vivências dos discentes com as atividades investigativas, sobre Função, brotados com o auxílio do aplicativo Matemática em celulares dos alunos.

Fonte: Do autor

Romanello (2016) afirma que buscou evidenciar as potencialidades do celular para explorar atividades com Gráficos, de modo que os alunos compreendessem o conceito de função. Diante dessa pesquisa, a autora sustenta que “o aplicativo foi importante por permitir a dinamicidade na aula no sentido de poder explorar uma variedade de gráficos em pouco tempo, além de instigar a curiosidade dos alunos” (ROMANELLO, 2016, p.126). Desta forma, concluiu que o uso do celular em atividades investigativas potencializa: discussões matemáticas valiosas; a curiosidade e a autonomia do aluno na generalização dos resultados escritos e falados; oportuniza a interação entre aluno-professor e aluno-aluno.

Diante das dissertações exploradas, percebi algumas convergências nos resultados que foram relevantes para o desempenho desta pesquisa. Rodrigues (2007), Saraiva (2012) e Romanello (2016), por exemplo, observaram que o ambiente de aprendizagem que valoriza o trabalho com Investigação Matemática, favorece aos alunos e entre eles e o professor convivências que oportunizam a troca de conhecimentos. Todos os trabalhos envolveram pesquisa qualitativa. Outro ponto comum firmado pelos cinco autores citados, ao concluírem seu trabalho com atividades investigativas, é que as mesmas possibilitam ao aluno o desenvolvimento de habilidades para argumentar e justificar suas ideias.

Bonotto (2015) e Ramos (2015) observaram que quando os alunos não conhecem a metodologia da investigação matemática, no início das atividades, eles podem apresentar dificuldades em formular conjecturas. Para evitar essas dificuldades, no desenvolvimento da presente pesquisa, informei no início da intervenção pedagógica aos alunos sobre a metodologia de ensino proposta e incentivei-os em relação aos procedimentos que deveriam ser usados.

Os cinco trabalhos estudados não declararam de que forma envolveram os alunos nos grupos, se colaborativo ou cooperativo. Nesta intervenção os momentos investigativos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) foram vividos pelos alunos por meio de grupos colaborativos. Dessa forma, analisei quais conjecturas, os alunos da 1ª série de um curso técnico integrado ao ensino médio elaboraram ao trabalharem de forma colaborativa com atividades investigativas envolvendo função do 1º grau. No próximo capítulo, apresento os procedimentos metodológicos que usei no decorrer desta pesquisa.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

De acordo com Bicudo (1993), pesquisar significa ir à busca de compreender e interpretar de forma significativa a pergunta estabelecida. Ainda, segundo essa obra, a pesquisa em Educação Matemática leva a compreensão da Matemática, o modo como ela é formada, bem como o significado dessa ciência para o mundo e para o auxílio na ação político-pedagógica.

Para vivenciar esse entendimento, neste trabalho foi usada a abordagem qualitativa, pois foi a interpelação que melhor se destacou na busca de resposta para o problema proposto na pesquisa. Nessa concepção, destaco as características da investigação qualitativa reveladas por Bogdan e Biklen (1994): a fonte direta de dados é o ambiente natural e o investigador é o principal instrumento, porque está em contato direto com os acontecimentos; descritiva, os elementos recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números; os investigadores preferem o processo aos resultados ou produto, o relevante é a maneira como algo acontece; a análise da informação ocorre de forma indutiva, ou seja, as respostas são construídas à medida que os dados se agrupam; e, nessa abordagem o significado dos pensamentos e modo de ser das pessoas se destaca como imprescindíveis.

Por confiar nessas peculiaridades, apostei em uma intervenção pedagógica dentro da sala de aula, pois é acentuado o ambiente social de maior convivência entre os discentes na escola. Nesse sentido, Bogdan e Biklen (1994, p. 48) afirmam que: “as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência”. Ludke e André (2012) fortalecem essa proposta ao afirmar que, para obter uma compreensão mais detalhada do objeto de estudo, é preciso levar em conta o contexto no qual ele está inserido. Isso mostra a importância de se escolher o próprio local onde os alunos estão acostumados assistir suas aulas.

Acrescento que essa abordagem foi otimizada por meio de características de estudo de caso. De acordo com Bogdan e Biklen (1994) no estudo de caso a análise dos dados consiste na observação detalhada de um cenário ou indivíduos, podendo ser um grupo específico de uma escola. É nesse contexto que a presente pesquisa foi desdobrada, pois foi desenvolvida com um grupo de alunos do 1º. Ano do Ensino

Médio. Para delinear essa abordagem, utilizei as três fases do estudo de caso destacadas por Ludke e André (2012). Na primeira fase, que é exploratória ou aberta, os acontecimentos ganham significados válidos à medida que os estudos se desenvolvem. Para a pesquisa desenvolvida neste trabalho essa foi uma etapa que precisei orientar os discentes sobre o que tiveram que fazer e como proceder para que ganhassem confiança e os pontos relevantes acontecessem. Na segunda fase, delimitação do estudo, os autores ressaltam a importância de identificar os elementos-chave a serem pesquisados. Para essa etapa, destaco a coleta de informações focadas nas discussões dos pequenos e grandes grupos que abordaram conhecimentos construídos a partir dos momentos de investigação elencados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013).

A terceira fase, a análise sistemática e a elaboração de relatório, consiste na interpretação dos dados e elaboração dos resultados. Paralelo à segunda e terceira fase, contei com o apoio do diário de campo para registro dos acontecimentos. De acordo com Lima, Mioto e Prá (2007) o diário de campo consiste em um instrumento de registro de observações, comentários e reflexões de atividades de pesquisas e/ou registro do processo de trabalho. Nesse sentido Bogdan e Biklen (1994) ressaltam que o diário está ligado ao pesquisador para arrolar as notas de campo que são “relatos escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo (p. 150)”. Nesse sentido, usei esse documento para dar subsídio às anotações das falas no decorrer de cada atividade; registrei as reflexões que surgiram, minhas e dos alunos, sobre a aula; anotei declarações valiosas à pesquisa não capturadas pelas gravações.

Desta forma, para o registro dos acontecimentos fiz uso da observação participante, pois a necessidade de estar juntos com os alunos foi fundamental para a elaboração do diário de campo. Nessa acepção, de acordo com Becker (1994, p. 47):

> O observador participante coleta dados através da sua participação na vida cotidiana do grupo organizado que estuda. Ele observa as pessoas que estão estudando para ver as situações com que se deparam normalmente e como se comportam diante delas. Entabula conversação com alguns ou com todos os participantes desta situação e descobre as interpretações que eles têm sobre os acontecimentos que observou.

Por meio dessas ideias, fiz uso contínuo desse recurso durante as investigações, pois foram imprescindíveis à constituição do diário, como também ao acompanhamento dos outros instrumentos de coleta de dados. O propósito era verificar os registros que contemplassem o objetivo geral do presente trabalho: analisar as conjecturas e estratégias elaboradas pelos alunos, do 1º ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, a partir de atividades investigativas com foco na função do 1º grau, de forma colaborativa.

No que diz respeito às anotações feitas pelos alunos, foi disponibilizado apenas um caderno por grupo de quatro a cinco membros. Dessa maneira, somente um aluno fez os registros das conjecturas, estratégias de abordagem das atividades e conclusões da equipe. Esses escritos foram formados por um pensamento comum dos pares de uma equipe colaborativa. O caderno foi dividido em seis partes, ou seja, uma para cada atividade.

Os outros instrumentos que aconteceram paralelos ao diário de campo e ao caderno foram à fotografia e o gravador de voz. Este último foi necessário para fazer a gravação das vozes e assim, assegurar a integridade das informações advindas das falas. Dessa forma, para cada grupo foi disponibilizado um gravador. Nesse sentido, as ideias de Marconi e Lakatos (2003, p.200), sobre a importância da gravação das falas em uma pesquisa, destacam que “a anotação posterior apresenta duas inconveniências: falha de memória e/ou distorção do fato, quando não se guardam todos os elementos”. Os autores acentuam a importância do referido instrumento de coleta de dados para a pesquisa, pois nessa fonte pode conter dados não existentes no diário de campo e registros dos alunos. Nesse sentido, Brum (2012) enfatiza que em um processo investigativo pode-se utilizar recursos tecnológicos como gravadores e câmera fotográfica, para ajudar na construção de informações. Fiz uso das fotografias para registrar a imagem de comportamentos dos grupos ou da turma que foram convenientes à complementação de outros dados.

Portanto, os dados foram produzidos a partir das observações do diário de campo, da transcrição de gravações de áudios e imagens do processo vivido e dos registros escritos efetuados pelos alunos durante as atividades. Para somar a esses dados, após o término das atividades, foi aplicado um questionário (APÊNDICE 1) para que os alunos avaliassem o processo de ensino, suas dificuldades e aprendizagem.

Marconi e Lakatos (2003, p. 221) afirmam que “questionário é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito”. A composição deste foi de perguntas abertas. Marconi e Lakatos (2003) destacam que esse tipo de questão permite ao aluno emitir livremente suas opiniões, usando linguagem própria, possibilitando investigações mais profundas e precisas. O conjunto de informações formado por todos esses instrumentos deu apoio à elaboração dos resultados da presente dissertação e proporcionou dados para responder à questão de pesquisa formulada.

A pesquisa foi realizada no Campus São Raimundo das Mangabeiras, pertencente ao Instituto Federal, Ciências e Tecnologia do Maranhão (IFMA). Para tanto, foi solicitado a assinatura do termo de consentimento (APÊNDICE 2) pela direção da referida Instituição. Este Campus iniciou suas atividades em 2011 com 200 alunos, pertencentes a três cursos Técnicos Integrados ao Médio. Hoje, conta com mais de 900 alunos frequentando os cursos técnicos, superior e pós-graduação lato sensu. De acordo com o Projeto Político Institucional (doravante PPI) do IFMA (2016), esta instituição tem o propósito de produzir educação profissional, científica e tecnológica de qualidade pela integração entre ensino, pesquisa e extensão. O PPI acrescenta que o foco educacional deste Campus é promover formação do cidadão e o desenvolvimento socioeconômico sustentável.

Nesse sentido esse Campus atende a uma demanda de estudantes de escolas públicas e privadas de mais de dez municípios que foram selecionados pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) ou passaram por um processo seletivo próprio da instituição. Dessa forma, a pesquisa teve como foco uma turma do 1º ano matutino composta de 32 alunos que entraram no curso técnico integrado ao ensino médio em fevereiro de 2018, por meio do processo seletivo. Os encontros voltados para a pesquisa ocorreram no contraturno dos estudantes para que as intervenções não chocassem com o horário de aula da turma. Desta, 6 discentes não puderam participar porque moravam na zona rural e salientaram que não podiam frequentar os dois turnos na escola. Desta forma, 26 alunos com faixa etária de 14 a 15 anos (14 homens e 12 mulheres) foram os sujeitos da pesquisa.

Para que os alunos vivenciassem as estratégias do trabalho colaborativo os discentes foram divididos em grupos de quatro ou cinco alunos da seguinte forma: grupo A, formado pelos alunos A1, A2, A3 e A4; grupo B, formado pelos alunos B1, B2, B3 e B4; e assim por diante. Essa formação ocorreu em cada atividade que foi investigada. Com esse procedimento os alunos que fizeram parte dos grupos mais proativos puderam se reunir com outros estudantes nas atividades seguintes. Destaco ainda que nos diálogos em que aparece a participação do professor, este é nomeado com a letra “P”.

3.1 Atividades Investigativas

As atividades de investigação matemática que os discentes exploraram abordaram o conteúdo de função do 1º grau. Antes de iniciar as atividades foi realizada uma reunião com os alunos para recolher o termo de consentimento (APÊNDICE 3) que já haviam recebido para que assinassem (ou seus responsáveis, se menor de idade). Nessa ocasião, os discentes foram informados sobre a metodologia da Investigação Matemática e de que forma deviam agir diante do processo. Esse cenário foi composto por seis atividades que foram abordadas com momentos específicos para cada uma.

Nos seis encontros, os pequenos grupos tiveram oportunidade de vivenciar, de forma colaborativa e autônoma, os quatro momentos investigativos, mostrados na figura 15, para construir suas conclusões a respeito da questão explorada. Tais conclusões foram escritas no caderno entregue a cada grupo. Para cada tarefa foi organizada uma discussão em grande grupo para que um representante de cada grupo pudesse expor oralmente os resultados obtidos. Essa apresentação objetivou socializar os conhecimentos adquiridos por todos os grupos.

Figura 15: Quatro momentos apreciados na realização de uma investigação.

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)

(Continuação)

Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 21)

As atividades foram apresentadas aos discentes por meio de um enunciado impresso e também projetadas na lousa digital para uma melhor visualização. Na continuidade deste contexto os alunos iniciaram o cenário investigativo expressando as conjecturas e estratégias no caderno de anotações. Para apoiar a apresentação em grande grupo, os alunos utilizaram o quadro, cartolinas, papel milimetrado e a lousa digital. No final de cada momento investigativo o material utilizado para as anotações eram recolhidos pelo pesquisador.

Destaco que os quatro momentos investigativos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), os trabalhos colaborativos, as observações vistas no estado da arte e as estratégias dos procedimentos metodológicos foram considerados como diretrizes norteadoras para cada atividade investigativa desta dissertação. Dessa forma, foram gerados acontecimentos significativos durante a exploração dessas atividades que oportunizaram responder ao problema de pesquisa proposto.

Sendo assim, os grupos foram incentivados, a todo o momento, a explorar as questões para que despertassem a criatividade e construíssem conjecturas válidas para apresentá-las de forma oral e escrita. Para Freire (2011), o exercício da curiosidade desperta a imaginação, a intuição, as emoções, a capacidade de conjecturar e de comparar suas descobertas. Então, à medida em que os alunos mostraram envolvimento e comportamentos colaborativos, eles foram elogiados, pois de acordo com Freire (2011, p.43) “às vezes, mal se imagina o que pode passar a representar na vida de um aluno um simples gesto do professor”. Nesse sentido, acrescento que essa ação serviu como força formadora à assunção dos educandos.

As atividades investigativas foram elaboradas com base nos pressupostos teóricos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) e na possibilidade da realização das mesmas em grupos colaborativos. Três tarefas foram adaptadas e as outras foram elaboradas com base nos conhecimentos do autor sobre função afim, Física (movimento uniforme) e metodologia da investigação matemática. Cada atividade foi constituída para um encontro próprio das 14 às 17 horas. Dessa forma, os grupos não se sentiram pressionados pelo tempo (180 minutos) disponível à discussão.

A seguir descrevo as atividades investigativas realizadas no decorrer da intervenção pedagógica. Apresento, antes de cada figura, o objetivo específico relacionado ao conteúdo que foi desenvolvido com cada atividade planejada. Na Figura 16, apresenta-se a primeira atividade investigativa que teve por objetivo identificar que a função do 1º grau representa relação de dependência entre dois conjuntos de valores.

Figura 16: primeira atividade investigativa.

ATIVIDADE 1: Considere o calendário do mês de abril de 2018.

MÊS DE ABRIL DE 2018

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Nestas condições:

a) Quais relações podem ser elaboradas observando-se a disposição dos dias do referido mês?

b) Utilizando os números que formam as linhas, elabore uma relação que seja uma função. No que diz respeito tanto aos números das colunas quanto aos números que formam as diagonais, quais funções podem ser elaboradas?

c) Dentre as funções elaboradas no item “b”, construa no mesmo plano o gráfico da que possui a menor e maior inclinação em relação ao eixo “x”. Quais valores estão relacionados com esta inclinação? Quais outros significados eles têm para os gráficos?

d) Quais funções do item “b” podem representar uma relação diretamente proporcional entre dois valores? Justifique sua resposta. Quais outras características comuns você pode identificar nessas funções?

Fonte: Do autor, adaptada de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013)

A Figura 17 refere-se à segunda atividade que teve por objetivo compreender as partes que compõem a função afim.

Figura 17: Segunda atividade investigativa.

ATIVIDADE 2: Uma loja de pneus está oferecendo emprego nas seguintes condições:

I) **Representante comercial**:

Salário de R$ 1000,00 + R$ 5,00 por pneu vendido.

II) **Vendedor direto na loja**:

Salário de R$ 700,00 + (10% pela venda de cada pneu aro 13) ou + (8% pela venda de cada pneu aro 14) ou + (6% pela venda de cada pneu aro 15).

III) **Vendedor direto no site**:

Salário de R$ 800,00 + (8% pela venda de cada pneu aro 13) ou + (6% pela venda de cada pneu aro 14) ou + (4% pela venda de cada pneu aro 15).

Nessas condições, considere que a loja efetua uma grande quantidade de vendas de pneus por mês.

a) Qual destas propostas é a mais conveniente? Justifique sua resposta.

b) É possível identificar que alguma proposta é sempre mais vantajosa que as outras? Justifique sua resposta.

c) Em quais condições a proposta menos conveniente passaria a ser a mais interessante? Justifique sua resposta.

Fonte: Do autor, adaptado de REDLING e JUNIOR (2011)

A Figura 18 expõe a terceira atividade que objetiva estabelecer comparações entre valores com o intuito de visualizar o crescimento ou decrescimento da função do 1º grau.

Figura 18: Terceira atividade investigativa.

ATIVIDADE 3: Suponha que uma aluna de um curso superior, durante os intervalos, venda trufas para uma confeitaria de sua cidade. Com as vendas, ela obtém um salário mensal composto de duas partes:

- Uma parte fixa de R$ 200,00;
- Outra parte variável, que corresponde a um adicional de 50% sobre o total de trufas vendidas no mês.

Sabe-se que em quatro meses seguidos, os respectivos totais de trufas vendidas foram 400; 700; 1000 e 1300. Preencha o quadro a seguir, de maneira que cada linha corresponda a um mês.

(Continuação)

Mês	Valor fixo	Adicional	Total de trufas	Salários
1º				
2º				
3º				
4º				

Responda:

a) Mantendo esse padrão de crescimento, qual o valor do décimo quinto salário?

b) Qual é a expressão matemática usada para calcular o salário de cada mês?

c) Como seria a representação dessa situação em um gráfico, colocando o total das trufas vendidas no eixo “x” e o valor dos salários no eixo “y”?

d) Este gráfico representa uma função crescente ou decrescente? Por quê?

e) Qual é a taxa de crescimento ou decrescimento para este gráfico? Justifique sua resposta.

Fonte: Do autor, adaptada de Iezzi *et al*. (2017)

Na Figura 18, apresento a quarta atividade que objetiva investigar os valores da função do 1º grau a partir de suas coordenadas inseridas no plano cartesiano e perceber a função como uma relação de dependência entre dois conjuntos de valores.

Figura 19: Quarta atividade investigativa.

ATIVIDADE 4: Observe o xadrezado abaixo. Ele representa uma parte do plano cartesiano. Cada deslocamento para a direita corresponde a 1 copo de suco e para cada deslocamento acima equivale a R$ 1,00.

Sabe-se que os pontos A(3, 4); B(5, 6) e C(7, 8) pertencem ao gráfico de uma função do 1º grau correspondente às vendas de copos de suco na lanchonete de uma escola.

Identifique cada ponto no xadrezado e investigue os casos a seguir dessa função:

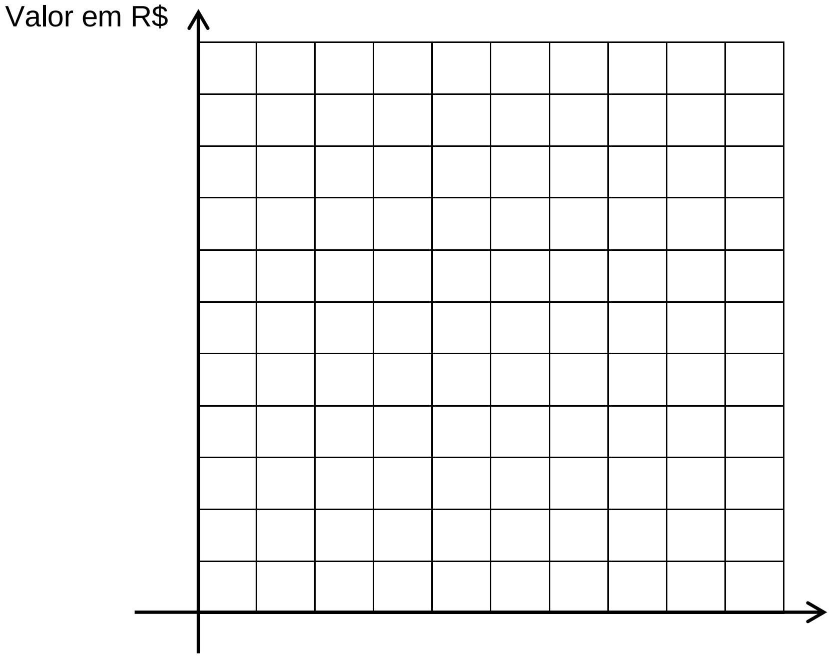
a) Considerando apenas o espaço formado por este xadrezado, qual o número máximo de pontos dessa função? Nesta condição, por que não se podem colocar mais pontos? Justifique sua resposta.

b) Qual é o modelo matemático dessa função?

(Continuação)

c) O que é mais vantajoso, pagar adiantado 50 copos de sucos ou comprar um copo a cada dia, durante cinquenta dias? Justifique sua resposta.

d) O que é mais vantajoso, comprar 20 copos de sucos e pagar de uma só vez ou comprar em dez etapas, ou seja, de 2 em 2 copos? Justifique sua resposta.



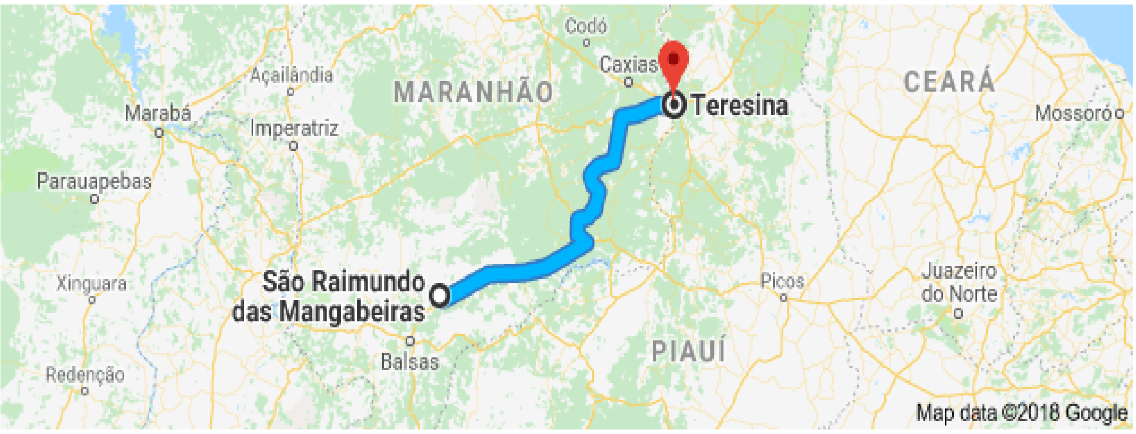
Fonte: Do autor

A Figura 20 destaca a quinta atividade que teve por objetivo identificar que a função afim pode ser contextualizada com situações do dia a dia.

Figura 20: Quinta atividade investigativa.

ATIVIDADE 5: Carlos precisa pegar um ônibus, na cidade de São Raimundo das Mangabeiras – MA, para visitar alguns parentes em Teresina – PI. Com base no percurso apresentado no mapa abaixo, a distância aproximada é de 520 km.

(Continuação)



Fonte: Google maps

Ao chegar à rodoviária, ele fica sabendo que o ônibus saíra há 5 minutos. No momento em que ele pega um táxi, o motorista o informa que o ônibus se encontra a uma distância de 4,5 quilômetros e que mantém uma velocidade média[24] constante de 15 m/s. Nessas condições, quais situações, envolvendo tempo e velocidade, podem ser elaboradas para mostrar ao taxista como alcançar o ônibus em no máximo 20 minutos? Justifique sua resposta.

Fonte: Do autor

Na Figura 21, apresento a sexta atividade cujo objetivo foi analisar diferentes abordagens de função afim para situações do dia a dia.

Figura 21 – Sexta atividade investigativa.

ATIVIDADE 6: Três amigos foram ao centro de sua cidade em um carro para fazer algumas compras. Para guardar o transporte, eles observaram três opções de estacionamentos:

ESTACIONAMENTO **A**	ESTACIONAMENTO **B**
R$ 5,00 FIXO mais R$ 0,50 por HORA	R$ 1,50 Por HORA

[24] Nessa atividade foi considerada apenas a velocidade média dos veículos. Dessa forma, a velocidade Instantânea foi desprezada. De acordo com Yomamoto e Fuke (2017) a velocidade média compreende a razão entre o deslocamento do veículo e o tempo percorrido pelo mesmo. Os autores acrescentam que a velocidade instantânea é a velocidade média verificada em um tempo muito pequeno, praticamente zero, ou seja, é o valor da velocidade em um instante.

(Continuação)

ESTACIONAMENTO **C**
Para demora de no mínimo 3 horas
Pague R$ 2,00 por HORA e tenha um **DESCONTO** de R$ 4,00 sobre o valor total

Dessa forma, cada amigo optou por um estacionamento. Um defendia que o melhor preço seria o “A”, outro defendia o “B” e o terceiro apostava que o “C” era mais barato.

Nessas condições:

a) Em cada caso, o que se pode afirmar sobre o valor a ser pago em relação a passagem das horas?

b) Qual dos três estacionamentos é o mais barato? Justifique sua resposta.

Fonte: Do autor

Após a aplicação das atividades os estudantes avaliaram o processo investigativo por meio de um questionário (APÊNDICE 1). As colocações registradas somaram-se aos demais dados da pesquisa e concederam valores reais às informações presentes nos comentários das tarefas e às percepções sobre as atividades de investigação matemática. Entretanto, para a constituição dessas informações observou-se Yin (2015) ao destacar que para o trabalho não admitir um olhar tendencioso é necessário uma descrição cuidadosa dos dados. Corroborando com essa preocupação, as informações foram separadas por encontros, em cada um destes, os dados foram tratados com foco no objetivo geral e a resposta à questão da pesquisa. Nesse sentido, fiz uma análise descritiva dos dados obedecendo ao cronograma das atividades.

Cervo (2007) estabelece que a referida análise é um método voltado para explicar cientificamente os resultados de uma observação de maneira precisa fazendo com que o leitor seja capaz de visualizar o que o pesquisador observou. Nesse sentido, descrevi os acontecimentos de cada atividade analisando-os e discutindo os resultados obtidos a luz dos referenciais teóricos do capítulo 3. Nessa continuidade, também procurei obedecer a Gil (2009) por aconselhar ser necessário empenho do pesquisador em seu estudo para que os resultados sejam de fato válidos, pois geralmente os leitores são profissionais que têm interesse na aplicação das atividades da pesquisa tendo em vista os seus resultados.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Antes de iniciar os comentários das investigações exponho os acontecimentos que antecederam as atividades. As principais ocorrências aconteceram em uma reunião com os alunos que aceitaram participar da pesquisa. Aos estudantes, o convite foi feito durante uma aula com a turma. Naquele momento os alunos receberam o termo de consentimento (APÊNDICE 3) que foi assinado por seus responsáveis. A pauta da reunião foi: informar aos estudantes sobre as etapas da pesquisa, apresentação das atividades e os procedimentos que os alunos deviam tomar durante as investigações.

Esse encontro foi marcado por discussões que considerei importante para as etapas seguintes. Após tomarem conhecimento dos momentos investigativos segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), comentei com a turma que eles seriam os autores do processo investigativo. Vi ali a pesquisa nascer, pois alguns se mostraram assustados e outros preocupados como deveriam proceder. Para essa reunião, foram convidados dois alunos 2º ano para ajudar nas exposições das etapas e procedimentos da pesquisa. No ano anterior, eles foram sujeitos de um trabalho investigativo proposto pela disciplina de Pesquisa em Ensino e Estágio Supervisionado a qual cursei no Mestrado em Ensino de Ciências Exatas. Ao ouvir de seus pares que eles deveriam trabalhar em grupos e explorar o raciocínio para conseguirem elaborar resultados válidos, a turma se acalmou, porém percebi que no rosto de alguns alunos ainda passava preocupação. A insegurança exposta pelos alunos, talvez geradas pelas dúvidas escondidas e a ausência de contatos com atividades investigativas, poderia trazer desafios inesperados.

Outro acontecimento que mereceu atenção ocorreu no momento em que falei da formação dos grupos. Alguns alunos que tinham uma convivência mais próxima mostraram resistência à ideia porque queriam fazer parte dos mesmos grupos durante a pesquisa. Para superar essa dificuldade foi discutido na turma as ideias de Bonals (2003), Boavista e Ponte (2002) e Svinicki e Mckeachie (2012), apresentadas na seção 2.3, do presente trabalho. Após essa abordagem os alunos ficaram mais tranquilos.

Outra ocorrência relevante foi identificada na apresentação das atividades. Esse momento ocorreu de forma breve, pois não era meu interesse que os discentes se familiarizassem com as tarefas ainda. Quando terminou a reunião, notei que três alunos discutiam sobre uma das questões. Tratava-se da atividade 2, Figura 17. A sala já estava sendo esvaziada, no entanto chamei-os para conversar sobre o assunto. Um deles disse: “professor eu estava dizendo para eles que a questão foi mostrada de forma rápida, mas deu para ver no enunciado que não havia preço para os pneus.” Outro aluno me questionou: “mas tem preço sim né professor, porque eu vi uns valores.” Eles pediram para ver o enunciado, porém não era o momento. Encerrou-se a discussão quando solicitei que aguardassem o momento investigativo da questão. Logo após essa discussão, olhei a atividade, tentei várias alternativas de soluções, percebi que sem os valores para cada tipo de pneu, os alunos poderiam enveredar para conclusões vagas ou inválidas. Assim, a curiosidade dos alunos trouxe outros valores para essa tarefa. Compreendi que cada aro de pneu deveria levar um preço. Isso deixaria mais claro possíveis conclusões.

Assim, este encontro foi fundamental para inserir os alunos no processo investigativo, bem como orientar o pesquisador sobre possíveis imprevistos no que diz respeito à motivação dos alunos e o trabalho em grupo. A seguir, relato os acontecimentos que considerei relevantes no decorrer da resolução de cada uma das atividades exploradas.

4.1 Desdobramento das atividades desenvolvidas

Nesta seção, faço a descrição e o comentário de acontecimentos verificados a partir do instante em que os alunos iniciam a leitura da tarefa até finalizarem a investigação em pequenos grupos. Dessa forma, levei em conta o tempo da realização da atividade, as estratégias, as conjecturas e os registros falados e escritos durante os momentos vivenciados para cada atividade investigativa.

4.1.1 Atividade 1

Nessa tarefa os grupos levaram 130 minutos. Ao lerem a atividade da Figura 16, os alunos mostraram resistência para explorá-la, questionando que estavam faltando dados. Esse comportamento é algo natural, pois eles não estavam acostumados com esse tipo de tarefa. A seguir um diálogo que ocorreu na sala de aula:

> B3: - Aqui não dá para fazer nada, só tem um calendário.
> P: - Pessoal o que vocês estão achando dessa atividade?
> A1: - Professor é porque está difícil, não dá para saber o que está pedindo.
> P: - Olhem o que está solicitando a questão “a”, o que vocês podem afirmar sobre ela?
> A1: - Está pedindo para elaborar relações.
> Professor: - Quais relações?
> A1: - Não está dizendo aqui, pode ser do jeito que a gente quiser?
> Professor: - Sim. - Vocês têm liberdade para criar as relações que quiserem.
> A1: - Ah! - Então vamos lá pessoal!

Quando a aluna chama seu grupo para a discussão, o convite se estendeu para os outros grupos, pois os estudantes da sala se voltaram para investigar a questão. Já havia passado mais de meia hora do início da atividade e, até o momento do diálogo anterior, os grupos não haviam registrado nada em seus cadernos e as discussões giravam, em geral, em torno de dois componentes de cada grupo. Apesar das explicações dadas durante a reunião de véspera das atividades, alguns alunos não se sentiam seguros para trabalhar em grupos. Liam a atividade e ficavam observando as colocações dos colegas, porém não queriam expor suas opiniões. Essa era uma realidade presente em todos os grupos.

Comentei então que todos deveriam colaborar com as discussões em seus grupos e que os equívocos cometidos por algum membro deveriam ser recebidos como uma oportunidade de ensino e aprendizagem. Outro comportamento comum, durante essa atividade, foi a conversa entre membros de grupos distintos. De acordo com Svinicki e Mckeachie (2012), para que um trabalho em grupo seja bem-sucedido, os alunos devem manter o foco no que estão produzindo para que possam ouvir os colegas, expressar opiniões e compartilhar informações. Nesse sentido, expus para a turma a importância de valorizarem as ideias que seus pares estavam construindo e interagir mais na investigação proposta.

Alro e Skovsmose (2010) apontam que é por meio de um diálogo com o professor que os estudantes podem definir perspectivas e, assim, tomarem o sentido do que têm para fazer. Após certo tempo, quase completando uma hora (60 minutos) do início da atividade o grupo “B” me chamou.

> B2: - Professor, criamos um problema e respondemos com a regra de três.
> P: - Onde está a relação solicitada?
> B1: - Usamos a regra de três. - É a relação.

> P: - Como assim, vocês podem explicar melhor?
> B3: - É uma regra de três simples. – É uma relação direta.

De acordo como o exposto pelo grupo, posso inferir que não compreenderam que era para elaborar relações de acordo com as disposições dos dias do mês. Entenderam que era para elaborar uma situação que envolvesse os dias do mês sem levar em conta as disposições dos valores correspondentes aos dias.

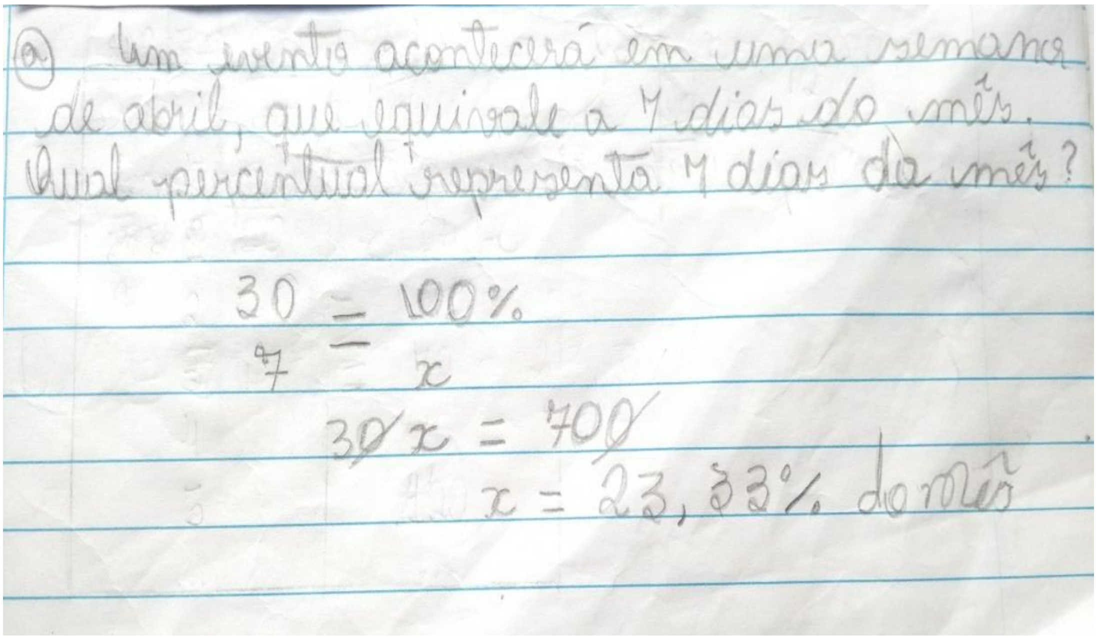
> P: - Vocês podem ler a questão para mim?
> B2: - Sim, professor!

A aluna leu a questão e disse que continuava sem entender como seria possível criar outras relações diferentes da que haviam elaborado. Não conseguiam entender que era para observar a organização dos dias e, a partir disso, elaborar relações. Dessa forma fiz uma interposição.

> P: - O que vocês podem dizer sobre o termo presente na questão: “observando-se a disposição dos dias do referido mês”?
> B4: - Como assim, professor?
> B2: - Ah, entendi, é para observar as colunas né?
> P: - O que as colunas representam?
> B1: - Os dias.
> P: - O que as linhas representam?
> B4: - Pode ser os dias da semana né?
> B2: - São as semanas.
> P: - E as colunas?
> B3: - Os dias do mês.
> P: - E em relação as semanas, as colunas querem dizer o quê?
> B2: - Os dias das semanas, a primeira é os dias de domingo, a segunda os dias de segunda-feira, até a última que é os dias de sábado.
> P: - Então os dias de um mês estão dispostos em?
> B2: - Linhas e colunas.
> P: - Então leem a questão novamente e vejam que relações podem criar obedecendo a essa disposição.

O grupo se voltou para a atividade. Na figura 22 consta o problema elaborado por eles antes do diálogo com o professor.

Figura 22: mostra o problema elaborado pelo grupo “B”:



Fonte: alunos do grupo B

Por meio da observação da figura 22 posso inferir que os alunos ainda não haviam compreendido como deveriam elaborar uma relação, provavelmente, por não estarem acostumados com essa proposta metodológica. Isso pode estar relacionado ao que Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) apontam, ao dizerem que esse tipo de atividade exige um raciocínio indutivo por parte dos alunos, entretanto a tarefa foge ao que eles estão habituados na sala de aula. Essa afirmação convém à realidade dos discentes, pois ao serem questionados durante a reunião se já tinham abordado tarefas investigativas, todos responderam que não. O entendimento do grupo “B”, em relação à questão “a”, mostra que o docente precisa dialogar com os alunos a respeito do que estão entendendo sobre as atividades em discussão. Alro e Skovsmose (2010, p. 70) corroboram com esse entendimento ao afirmarem que “o professor pode atuar como um facilitador ao fazer perguntas com uma postura investigativa, tentando conhecer a forma como o aluno interpreta o problema”. De acordo com esse entendimento, notei que os alunos podem não contemplar ao que o professor almeja por não compreender o que está sendo solicitado.

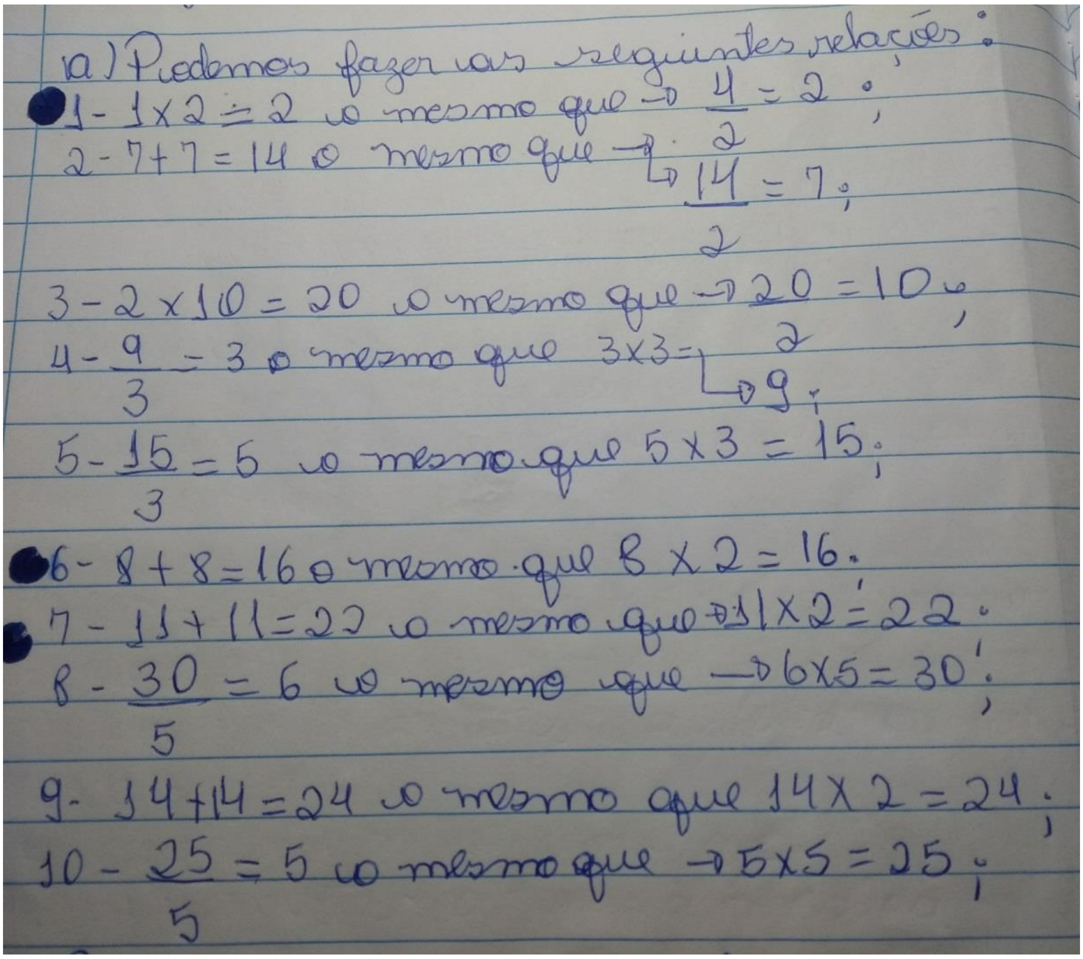
Após alguns minutos do diálogo com o grupo “B”, outros me chamaram para mostrar suas produções. Esse momento declarou que a aceitação à investigação começou a fluir. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), para os docentes o início de uma investigação pode parecer que nada está acontecendo, mas essa etapa é decisiva para que os alunos ganhem confiança para elaborar conjecturas e usar estratégias diferentes. A seguir o exposto pelo grupo “C”.

P: - Como vocês estão se saindo?

B1: - Acho que bem, professor!

Na figura 23, há a apresentação das relações elaboradas pelo grupo C:

Figura 23: mostra as criações do grupo “C” para a questão “a”.



a) Podemos fazer as seguintes relações:

1- $1 \times 2 = 2$ o mesmo que → $\frac{4}{2} = 2$;

2- $7 + 7 = 14$ o mesmo que → $\frac{14}{2} = 7$;

3- $2 \times 10 = 20$ o mesmo que → $\frac{20}{2} = 10$;

4- $\frac{9}{3} = 3$ o mesmo que $3 \times 3 = 9$;

5- $\frac{15}{3} = 5$ o mesmo que $5 \times 3 = 15$;

6- $8 + 8 = 16$ o mesmo que $8 \times 2 = 16$.

7- $11 + 11 = 22$ o mesmo que → $11 \times 2 = 22$.

8- $\frac{30}{5} = 6$ o mesmo que → $6 \times 5 = 30$;

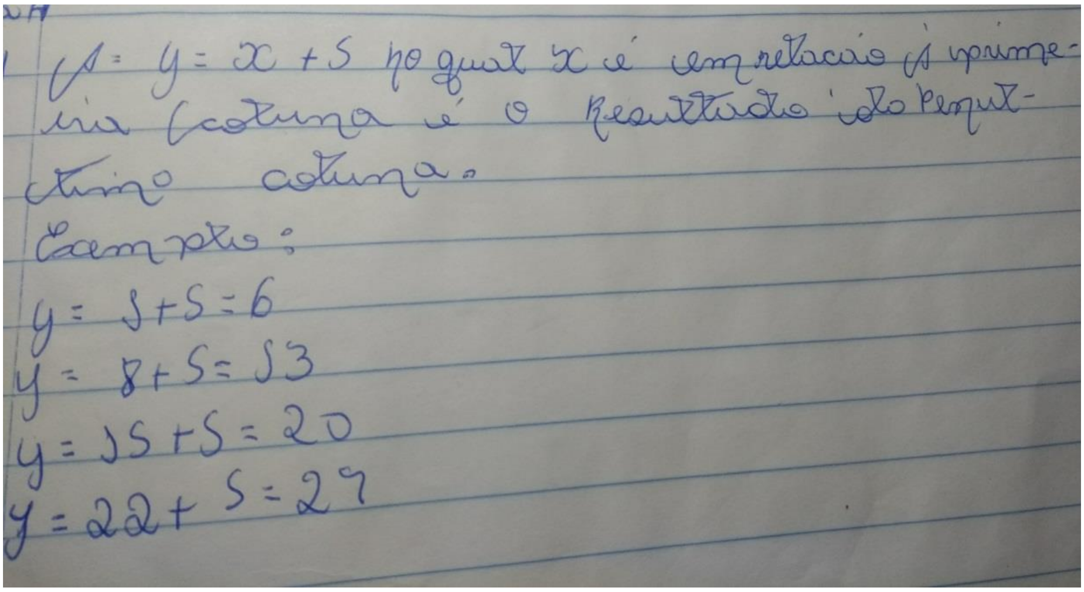
9- $14 + 14 = 24$ o mesmo que $14 \times 2 = 24$;

10- $\frac{25}{5} = 5$ o mesmo que → $5 \times 5 = 25$;

Fonte: alunos do grupo C

Nota-se na Figura 23, que os alunos desse grupo compreendiam por relações as operações de soma, divisão e multiplicação entre dois valores. Outros dois grupos manifestaram entendimentos parecidos, pois diziam ter criado dízimas periódicas e frações. Nessa questão, apenas dois grupos conseguiram expor relações matemáticas. Componentes desses grupos disseram que já haviam estudado função do 1º grau no nono ano. Apesar de esses grupos terem mostrado interesse por pelo menos 30 minutos de discussão, também não conseguiram elaborar mais de um exemplo. Ao final dessa questão (“a”) foi notado que os alunos haviam aceitado o convite para o cenário de investigação, estabelecido por Alro e Skovsmose (2010), porém precisavam amadurecer mais o processo, pois apesar de estarem voltados para a tarefa, precisavam interagir mais com questionamentos e ideias. Mesmo com essa dificuldade, o grupo “F” elaborou o exposto na figura 24.

Figura 24: relação matemática elaborada pelo grupo “F”.



Fonte: alunos do grupo F

> P: - Qual é a relação existente nesse modelo que vocês criaram?
> F3: - “x” é a primeira coluna e o resultado é a penúltima coluna.
> P: - Então qual é a relação existente?
> F2: - Entendi! Uma coluna está relacionada com a outra ou não?
> F3: - “x” é a primeira coluna e o resultado que é “y” é a penúltima coluna.
> P: - Então quais valores se relacionam na primeira semana?
> F2: - 1 e 6, domingo e sexta.
> F1: - 8 com 13, 15 com 20, 22 com 27 e 29 já via com o outro mês.

É possível notar no diálogo anterior que o grupo estabeleceu uma relação entre as duas colunas adicionando um valor fixo a cada elemento da primeira, dessa forma elaboraram a função da figura 24. Diante das dificuldades da maioria dos grupos com a questão “a” foi perguntado à turma se lembravam do plano cartesiano. Os componentes do grupo “B” manifestaram que já estavam pensando no assunto. O diálogo do docente com esse grupo pode ter contribuído para o envolvimento deles na investigação proposta.

P: - O que vocês pensaram?
B2: - Para relacionar os valores de uma coluna com a outra pensamos em colocar os valores no plano, porque as outras questões estão pedindo função e gráfico.
B1: - A função é “y” igual a alguma coisa né? - Mas se colocar “y” igual a “x” não dá certo para nenhum.
B2: - Depende.
B1: - De quê? – Se tem que tirar os valores das colunas.
B2: - Assim ó, a última coluna pode ser a do lado mais 1.
B3: - Desse jeito também dá certo para a primeira com a segunda linha.
B2: - Dá sim! – É só colocar “y” para ser o maior valor. – Porque vai ser “y” igual a “x” né?
B3: - Pode ser “y” igual a “x” mais 1, para dar certo.

Percebi que a estratégia de envolver o plano cartesiano facilitou a compreensão dos alunos na busca de relações matemáticas envolvendo as colunas e linhas do calendário com os eixos cartesianos. É notória nas falas do grupo a elaboração de questões e conjecturas que foram refinadas para o modelo da função do 1º grau. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 28), os alunos “devem saber que podem contar com o apoio do professor, mas que a atividade depende, essencialmente, da sua própria iniciativa”. Nesse sentido, o amadurecimento do grupo foi perceptível. Após alguns instantes foi notado que o grupo “B” já estava construindo gráficos. Diante desse ponto, foi realizado um diálogo com esse grupo sobre a função $y = x + 1$, que eles criaram.

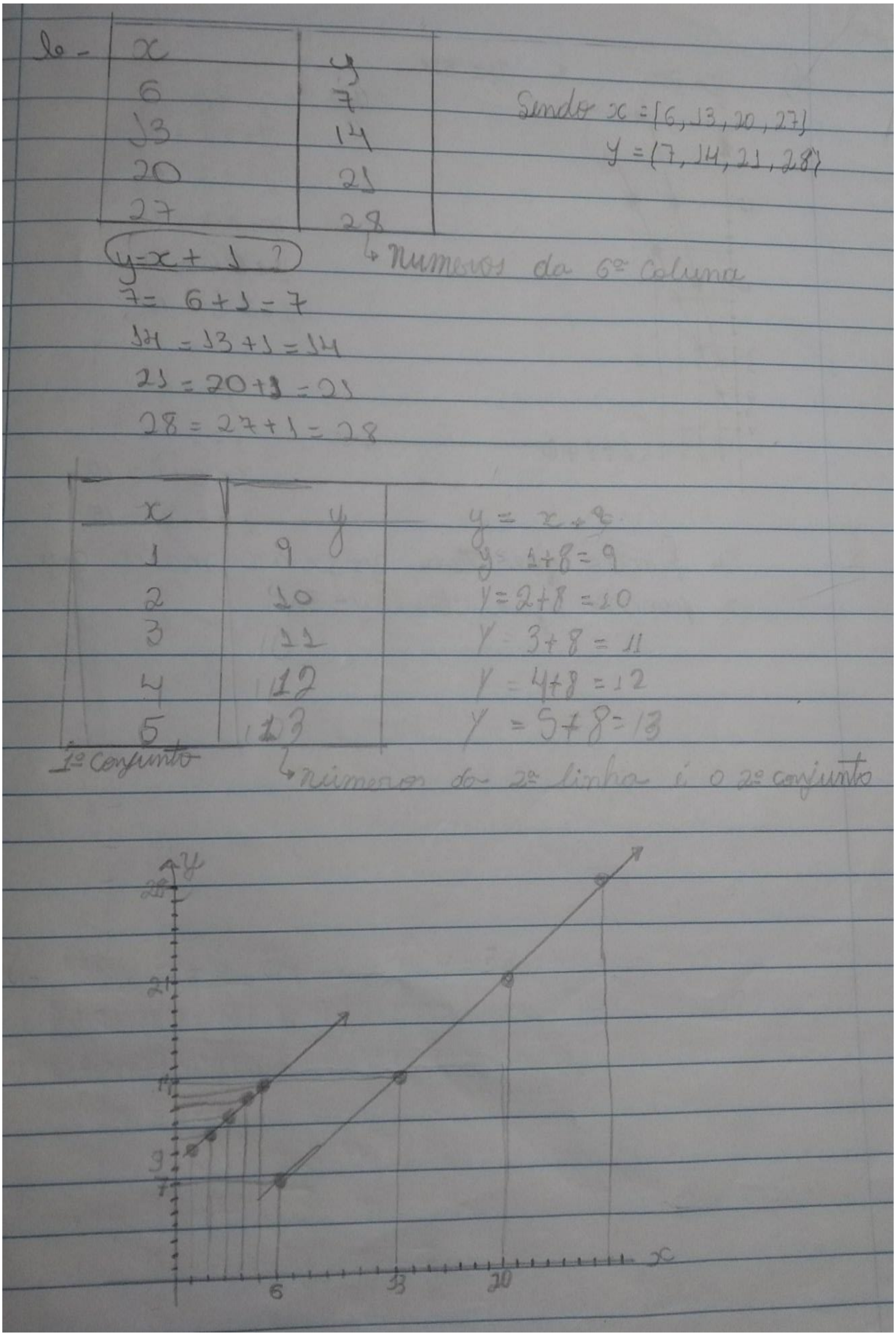
P: percebo que “x” representa os valores de uma coluna e “y” os valores de outra coluna, é isso?
B1: - Sim.
P: - A sexta coluna pode representar um conjunto?
B2: - Como assim? – Ah! - Entendi pode sim.
P: Então, e a sétima?
B2: - Todas pode ser um conjunto.
P: - Então o que vocês podem concluir a respeito das colunas e a função $y = x + 1$?
Após um curto instante de silêncio, eles começaram a discutir. Nesse momento me afastei do grupo.
B3: - Acho que as colunas estão para a função né?
B2: - Deve ter relação com os conjuntos. O professor começou falando em conjunto né?
B3: - Não sei, pode ser.

Como a pergunta que fiz “então, o que vocês podem concluir a respeito das colunas e a função $y = x + 1$?", eles não estavam conseguindo chegar à relação que eu gostaria, mas de acordo com suas discussões foi possível notar que o conceito de função, como uma relação entre dois conjuntos, começava a ser construído. Passei ao lado do grupo e disse: - Então vocês podem definir função como uma relação entre o quê?

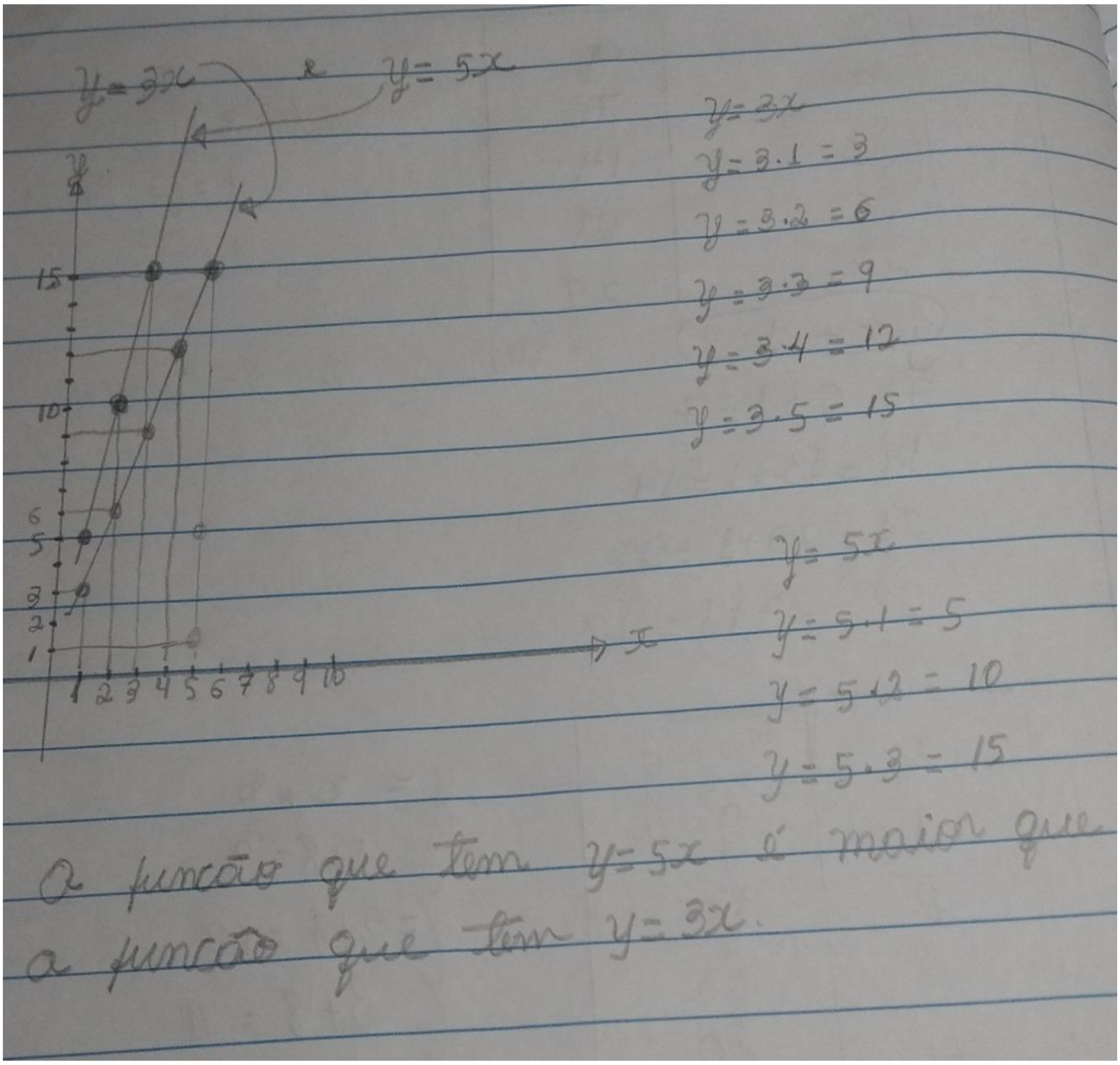
B1: - Entre as colunas.
B2: - Pode ser entre dois conjuntos? - Porque as colunas são conjuntos!
P: - O que vocês acham?
B2: - Ah é! – É uma relação entre os dois conjuntos sim.
P: - Então podemos dizer que cada elemento da coluna “x” está relacionado com?
B3: - Cada elemento da coluna “y”.
P: - Então, de acordo com a função $y = x + 1$, o primeiro elemento do conjunto “x” forma um par com?
B2 e B1: - O primeiro de “y” (esses alunos falaram ao mesmo tempo).
B3: - O segundo com o segundo, o terceiro com o terceiro...
B2: - E assim por diante.

Solicitei a eles que fizessem os registros no caderno, pois deveriam apresentar suas conclusões no final do encontro. Ficou esclarecido para a turma, no decorrer da socialização, que todas as funções elaboradas pelos grupos são representadas por uma relação entre dois conjuntos de valores. Na figura 25 aparecem as criações do grupo “B”.

Figura 25: elaborações do grupo “B” para as questões “b” e “c” da primeira atividade investigativa.



(Continuação)



Fonte: alunos do grupo B

A primeira parte da figura 25 mostra que o grupo “B” ampliou o foco da investigação, pois suas discussões giraram em torno das questões “b” e “c” ao mesmo tempo. A ideia de pares ordenados ficou evidente, porque à medida em que os alunos foram testando os valores da sexta coluna na função $y = x + 1$, foram encontrando os valores correspondentes na sétima coluna e, dessa forma, conseguiam os pares que utilizariam na construção do gráfico. Essa mesma estratégia se estendeu para a função $y = x + 8$, presente nessa figura. Ao construir os gráficos, relativos às funções citadas, eles perceberam que as inclinações que surgiram não davam para elaborar respostas para a questão “c”.

Na segunda parte da Figura 25, eles construíram mais duas funções que obedeciam à sequência dos dias no calendário. As discussões que levaram ao modelo dessas funções levaram em torno de 30 minutos. A fala de uma aluna do grupo declara o quanto essa atividade foi enriquecedora: “só com esse calendário dá para fazer muitas funções”. A interação entre os pares do grupo “B” foi decisiva para o avanço das investigações, pois todos cooperavam entre si. Dessa forma elaboraram as funções $y = 5x$ e $y = 3x$ tomando para “x” os elementos das linhas. De acordo com as falas dos alunos, o valor máximo que “y” assume é 30.

Na afirmação da segunda parte da Figura 25, “a função que tem $y = 5x$ é maior que a função que tem $y = 3x$”, penso que queriam dizer que a primeira função possui uma inclinação maior que a segunda. Apesar desse grupo não conseguir contemplar toda a atividade, no que diz respeito às produções para os itens “b” e “c”, considerei suas respostas criativas, pois as elaborações com a interposição do professor e os registros no caderno conseguiram compreender e justificar o que elaboraram.

Os outros grupos seguiram a ordem em que as questões apareceram, ou seja, preferiram investigar uma de cada vez. Dentre os grupos restantes, o “C” foi o que se destacou. Esse grupo discutiu a formação das funções para satisfazer a questão “b” e em seguida procuraram elaborar modelos que envolveram as colunas, linhas e diagonais. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), esses alunos discutiam o primeiro momento das etapas de um processo investigativo: estavam reconhecendo uma situação problema a fim de explorá-lo. Durante o processo tiveram momentos de dúvidas, mas não me chamavam, ficavam em silêncio e retomavam as discussões. Esse comportamento também foi notado em outros grupos, principalmente a partir da segunda questão (“b”). Observei nos áudios do grupo “C” que durante o momento que debatiam sem a participação do docente levantaram a seguinte discussão:

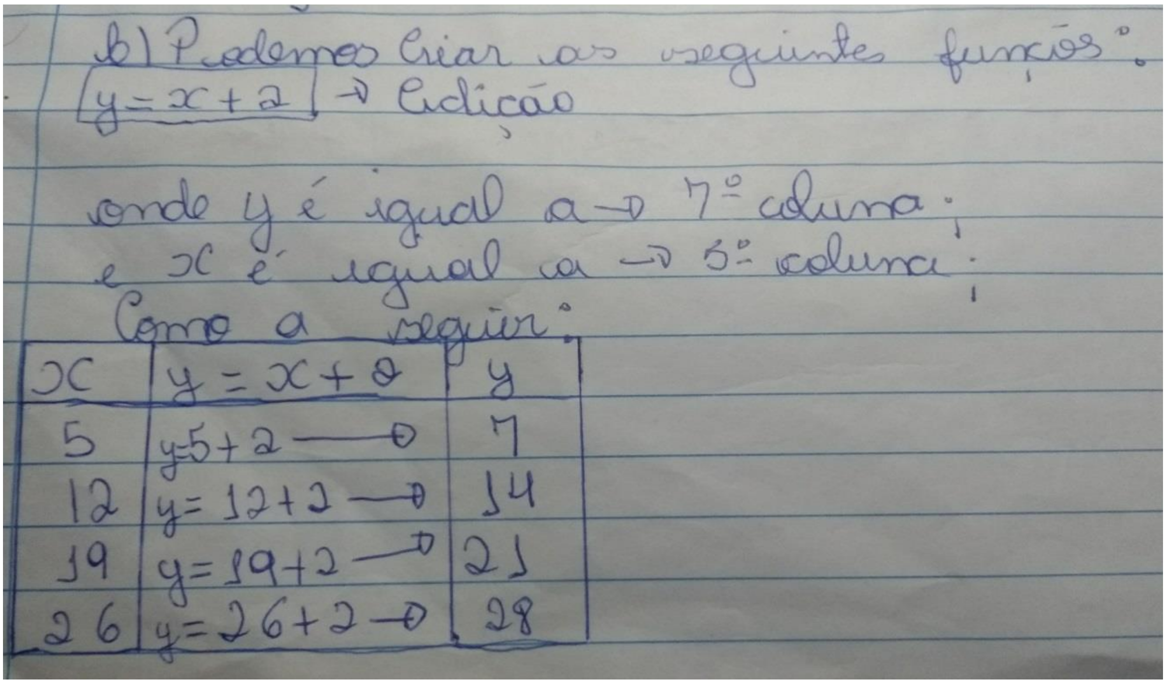
> C3: - É para usar só os números do mês né? – Vamos usar soma e subtração porque é mais fácil.
> C4: - Se colocar $x + 2$ dá 7. – “y” fica sendo o resultado aqui (o aluno se refere a última coluna).
> C1: - É o “x”?
> C4: - É dessa coluna aqui (o aluno se refere à quinta coluna da esquerda para a direita). Aí fica $y = x + 2$. Já criamos a da soma.

A seguir a discussão para a formação da segunda função que ocorreu após os registros da questão anterior no caderno:

> C3: A outra é só trocar o sinal né?
> C4: É melhor botar outro valor para ficar diferente.
> C1: Bota $x - 3$. - Será que dá?
> C4: - Aqui se tirar $7 - 3$, dá o elemento da 4ª coluna. – Se tirar $7 - 3$, dá o elemento da 4ª também.
> C1: - Fica $y = x - 3$ né?
> C4: - É.

Posteriormente, eles notaram como havia afirmado C3, que se mudasse o sinal da função anterior gerava outra que envolvia a primeira coluna com a quarta. Dessa forma, a ideia "*É melhor botar outro valor para ficar diferente*" foi superada, ou seja, as discussões cooperativas no grupo levaram seus componentes a entenderem que a mudança de sinal entre o termo independente e o coeficiente linear gerava outro modelo com duas colunas presentes no calendário. Esse episódio lembra Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), pois estes autores enfatizam que, após os alunos ganharem confiança com o amadurecimento das primeiras conjecturas, eles começam a formular outras questões e conjecturas com base nas anteriores. Na figura 26, os registros desse grupo.

Figura 26: elaborações do grupo "C" para a questão "b".



b) Podemos criar as seguintes funções:
$\boxed{y = x + 2}$ → Adição

onde y é igual a → 7º coluna;
e x é igual a → 5º coluna;
Como a seguir:

x	y = x + 2	y
5	y=5+2 →	7
12	y= 12+2 →	14
19	y= 19+2 →	21
26	y= 26+2 →	28

(Continuação)

$\boxed{y = x - 3}$ → Subtração

x	$y = x - 3$	y
7	$y = 7 - 3 =$	4
14	$y = 14 - 3 =$	11
21	$y = 21 - 3 =$	18
28	$y = 28 - 3 =$	25

x	$y = x - 4$	y
9	$y = 9 - 4 =$	5
16	$y = 16 - 4 =$	12
23	$y = 23 - 4 =$	18

Linhas: (Relações que sejam funções)
Neste exemplo usamos alguns elementos da 2ª linha.
Relações:

$10 + 12 = 22$; $\frac{22}{2} = 11$; $12 + 14 = 26$; $\frac{26}{2} = 13$;

$8 + 10 = 18$; $\frac{18}{2} = 9$.

Funções:

x	$y = x + 3$	y
1	$y = 1 + 3 \rightarrow$	4
8	$y = 8 + 3 \rightarrow$	11
15	$y = 15 + 3 \rightarrow$	18
22	$y = 22 + 3 \rightarrow$	25

Onde x é igual a alguns elementos da primeira coluna e y é igual a x somado mais três.

Diagonais: (Funções com elementos das diagonais).
diagonal 1 → 3, 11 e 19.
função → $19 + 3 = 22$ e $\frac{22}{2} = 11$.
onde x é 19 e $y = 3$.
e o resultado é a divisão entre x e y.

Fonte: alunos do grupo C

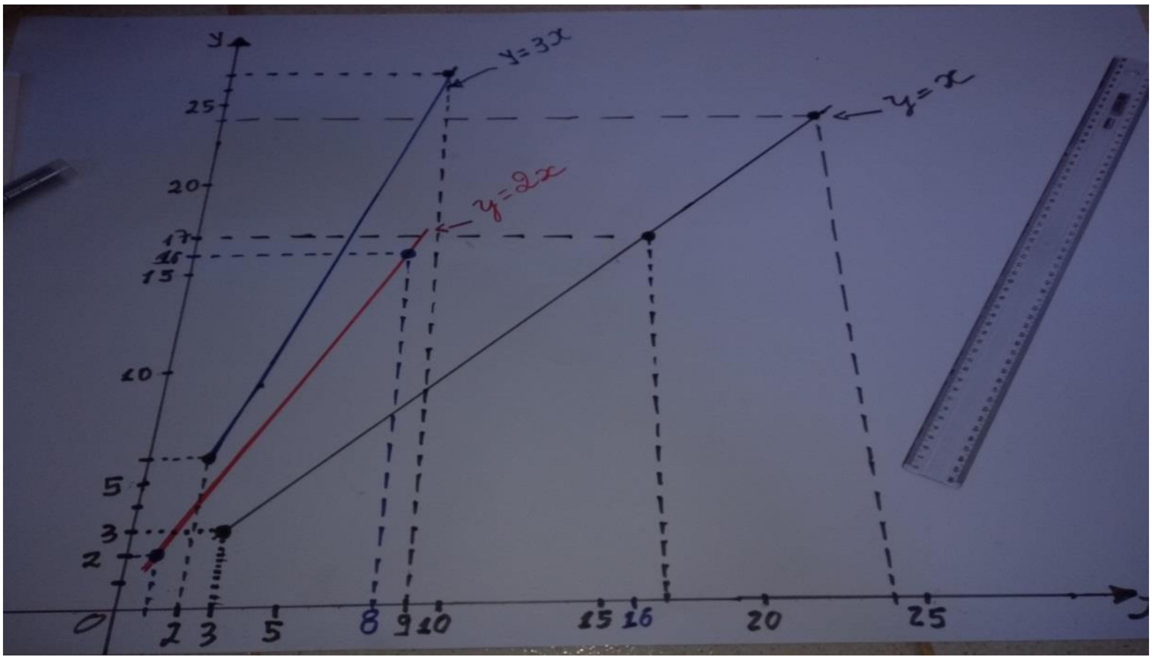
Considerando as discussões que levaram a criação das funções $y = x + 2$, $y = x - 3$ e $y = x + 3$, representadas na Figura 26, bem como as demonstrações e testes inerentes a cada uma delas, observei que os quatro momentos investigativos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) expostos na seção 2.2 do presente trabalho estiveram presentes no decorrer da resolução.

Por outro lado, a criação referente às linhas e diagonais não ficou claro, pois no primeiro caso (linhas) Figura 26: $10 + 12 = 22$; $\frac{22}{2} = 11$ e $12 + 14 = 26$; $\frac{26}{2} = 13$, consistem a função $y = \frac{x+12}{2}$, mas não mostraram esse modelo. Ao analisar a criação para a diagonal, infiro que eles seguiram a mesma estratégia utilizada para envolver as linhas. Nesse caso a função seria $y = 22 - x$, mas também não conseguiram registrar esse modelo. O raciocínio utilizado não deixa de ser criativo, pois arranjaram os valores de uma diagonal utilizando as operações de soma e subtração, cujo resultado se encontrava na mesma diagonal, depois ficou mais fácil incluir o “x” e o “y” na expressão.

Para a questão “c” apresento os gráficos elaborados pelo grupo “E” (Figura 26). O grupo fez a apresentação de três gráficos no mesmo plano para deduzir quais valores estão relacionados com a inclinação de um gráfico da função do 1º grau. Na apresentação em grande grupo eles disseram: “*como era pra ver a inclinação achamos melhor fazer os gráficos*, *fizemos dois e depois fizemos mais um só para confirmar*”.

Os demais grupos não conseguiram mostrar o porquê da maior e menor inclinação. Dos seis grupos, cinco conseguiram elaborar funções que poderiam utilizar nessa justificação, mas não tiveram a ideia de colocá-las em forma de gráficos, exceto o “B” que estabeleceu uma ideia, mas também não ficou claro. Então a maioria limitou-se a procurar respostas apenas visualizando os modelos de funções criados. Na figura 26, há a elaboração do grupo “E”.

Figura 27: gráficos construídos pelo grupo “E” para a questão “c”.



Fonte: alunos do grupo E

As discussões que levaram os alunos à construção exposta na figura 27 levaram aproximadamente 30 minutos. Tiveram a ideia de construir gráficos de funções cujo coeficiente angulares foi 1, 2, 3. Essa ideia foi fundamental para a compreensão alcançada, visto que à medida em que esses números crescem, seus respectivos gráficos ficam com o ângulo de inclinação em relação ao eixo “x” maior. A seguir, apresento o resumo da explicação do referido grupo.

Representante do grupo “E”: - Como era pra ver a inclinação achamos melhor fazer os gráficos, fizemos dois e depois fizemos mais um só para confirmar. - Primeiro fizemos o gráfico da função $y = 2x$, depois o da função $y = x$. Notamos que a de $2x$ era mais alta. Depois fizemos uma com $3x$ e ela ficou na frente. – A inclinação depende do valor que acompanha “x”, pois quanto maior o valor, maior a inclinação. Da explanação surgiu a pergunta: “*ei professor! o gráfico vai ser sempre uma reta*”? Repassei a dúvida do aluno para a turma e a maioria confirmou que sim. Não esperava esse questionamento porque todos os alunos aparentavam ter compreendido esse conhecimento durante as apresentações dos gráficos.

Quando as explanações em grande grupo foram finalizadas, dois alunos começaram a questionar sobre a inclinação do gráfico. Neste momento, alguns alunos da turma já haviam saído. Um deles perguntou: "*se colocar a função como* $y = x + 5$ *vai ser a mesma coisa*"? Ele se referia à apresentação do grupo "E". O outro dizia que sim, pois o que importava era o valor que acompanhava o "x". O silêncio do aluno saindo da sala revelou que ele havia entendido.

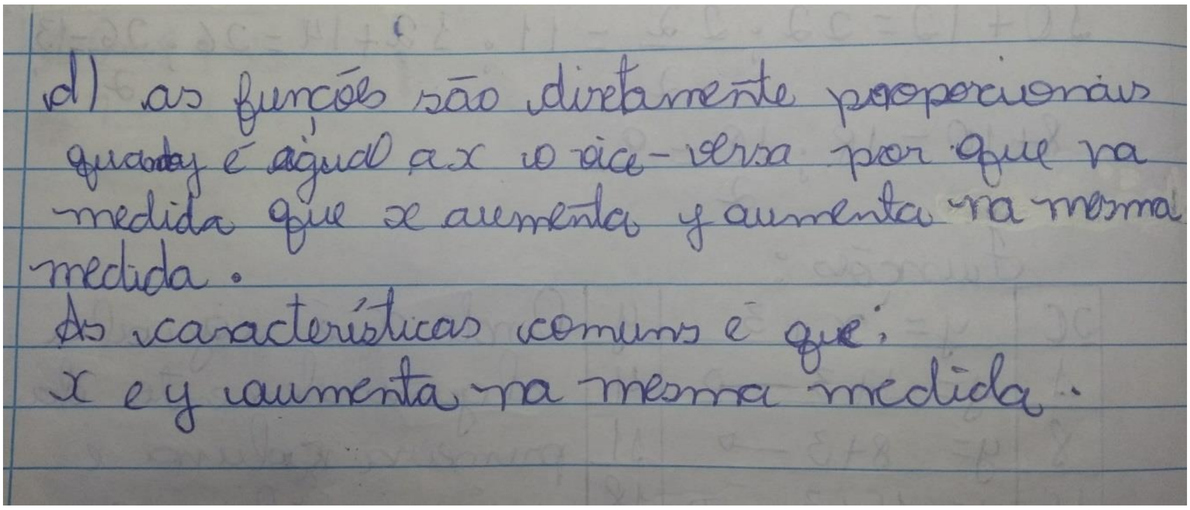
Para a questão "d" várias conjecturas foram estabelecidas pelos grupos, entretanto apenas três deles conseguiram refiná-las. A discussão no grupo "E" girava em torno da função $y = 2x$. Após várias discussões concluíram que:

> Grupo E: - Ela é uma relação diretamente proporcional. – Aqui está variando de 1 em 1 e no resultado de 2 em 2. Outro componente desse grupo comentou: - Então é isso ai, já terminamos.

Ao analisar os dados desse grupo, percebi que os discentes amadureceram a seguinte ideia: para que uma função represente uma relação diretamente proporcional, basta que a sequência de valores de "x" e "y" varie num valor fixo.

O grupo "C" utilizou as funções $y = x - 3$ e $y = x + 3$, porque a variação entre os valores "x" e "y" dessas funções é uma constante. Na figura 28, apresento a conclusão dos componentes do referido grupo.

Figura 28: conclusão do grupo "C" para a questão "d".



Fonte: alunos do grupo C

Ao analisar os dados do grupo "C" expostos na figura 28, foi possível observar que compreendiam que só havia proporção direta entre duas grandezas se estas guardassem sempre a mesma quantidade (medida). Nas funções que eles utilizaram para suas justificativas a "medida" é 7, esse número pode ser notado nos dados da Figura 26, cujos escritos são do mesmo grupo. Dessa forma, tomando por base as conjecturas dos grupos "C" e "E", todas as funções do 1º grau representam uma relação diretamente proporcional. Mas, essa conclusão não é verdadeira, pois de acordo com Iezzi *et al* (2017, p. 78) "quando uma grandeza y é função de uma grandeza x e para cada par da valores (x, y) se observa que $^{y}/_{x} = k$ (com $x \neq 0$) é constante, as duas grandezas são ditas diretamente proporcionais".

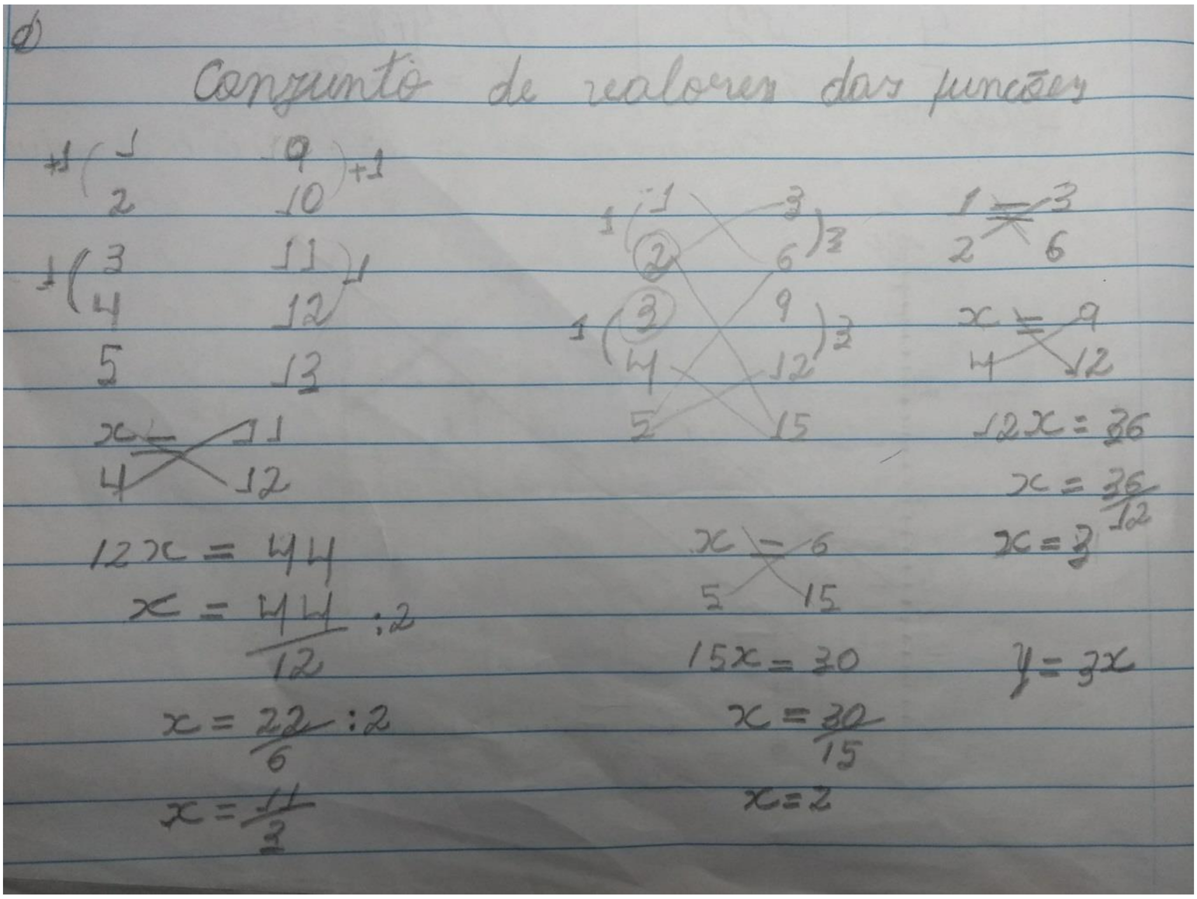
Já o grupo "B", por meio das elaborações que conseguiram criar, tomou uma conclusão mais conveniente. Uma das falas da discussão deste grupo: - "*vamos colocar os valores das funções pra cá, fica melhor de ver*". Essa estratégia foi fundamental para observar os conjuntos inerentes a cada função. Os valores expostos em colunas e a ideia que já tinham sobre regra de três facilitou o refinamento das conjecturas. Com os olhares na disposição dos valores começaram com a mesma linha de raciocínio dos grupos anteriores, mas logo mudaram de sentido após essa fala "*pegando esse com esse dá 6 e esse com esse dá 6*" [Nota-se na figura 28 que estavam se referindo aos seguintes produtos: 2×3 e 1×6 que contribuíram para visualizar a função $y = 3x$]. Segue a continuidade da discussão:

> B2: - Esse com esse dá... quanto é 4×15?
> B3: - É 60.
> B2: - Esses dois aqui dá 60? – Dá!
> Após uns instantes:
> B3: - pode ser uma regra de três né?
> B3: - Pode, se botar esse valor para ser "x", assim dá $2x$ e a outra dá 6. (o aluno se refere aos dois primeiros valores de "x" e aos dois primeiros de "y").
> B2: mas "x" tem que ser aqui, os primeiros são os de "x" os outros de "y".

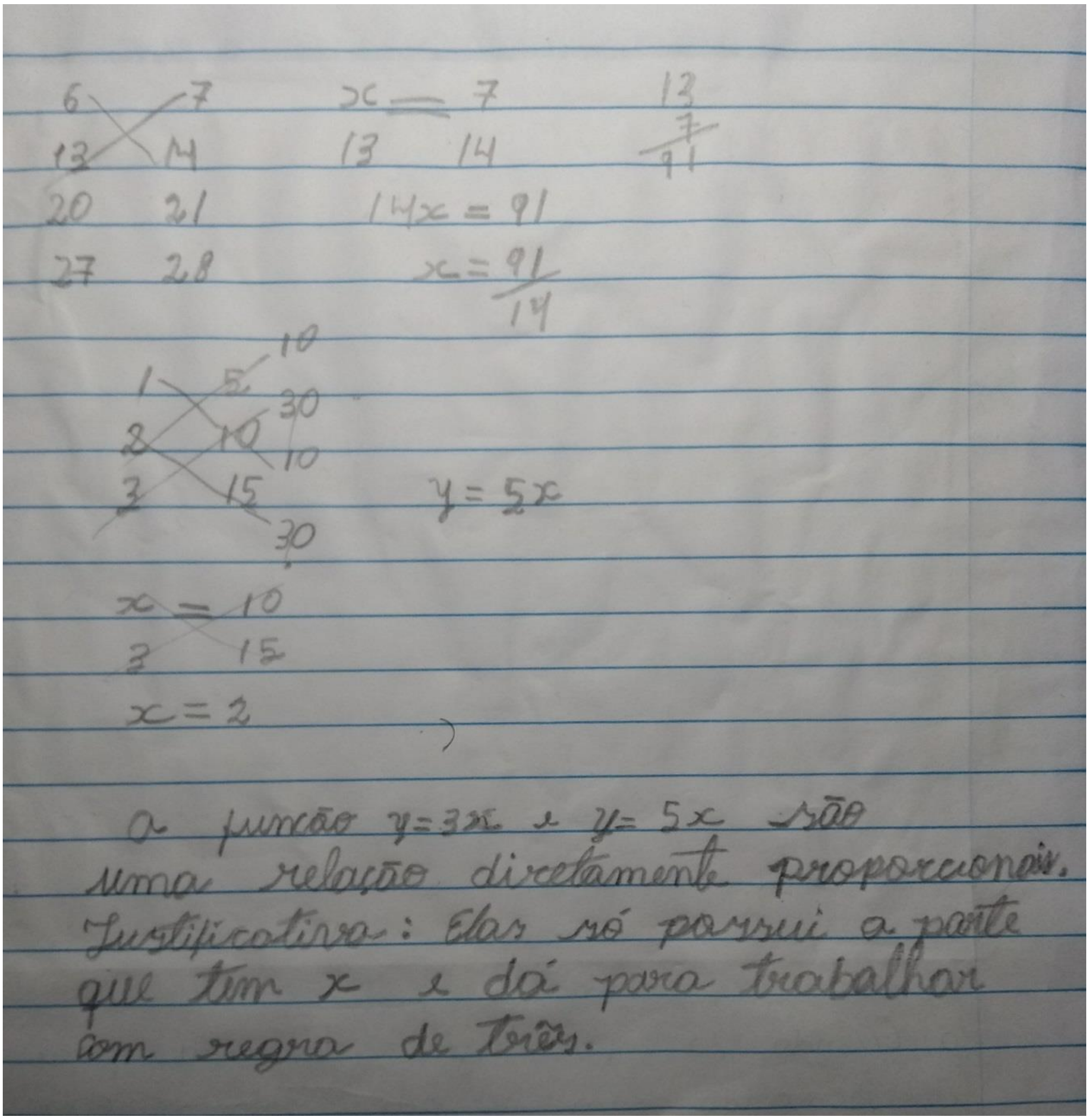
Essa passagem destaca o que eles compreenderam na questão "b" sobre a relação entre conjuntos e funções. Percebi que alguns alunos se destacaram no decorrer da discussão. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), muitas vezes um ou dois alunos podem tomar a liderança da investigação centrada em ideias que facilita o trabalho conjunto do grupo. Retomando o diálogo um dos alunos comentou: A regra de três é uma relação direta (B3).

Apoiados nessa informação, eles excluíram as funções $y = x + 1$ e $y = x + 8$ e, selecionaram as funções $y = 3x$ e $y = 5x$. Os autores, antes citados, enfatizam que muitas vezes o conhecimento prévio do aluno pode facilitar os trabalhos de uma investigação. Esse saber foi decisivo para o grupo chegar à conclusão exposta na figura 29.

Figura 29: registros do grupo “B” para a questão “d”.



(Continuação)

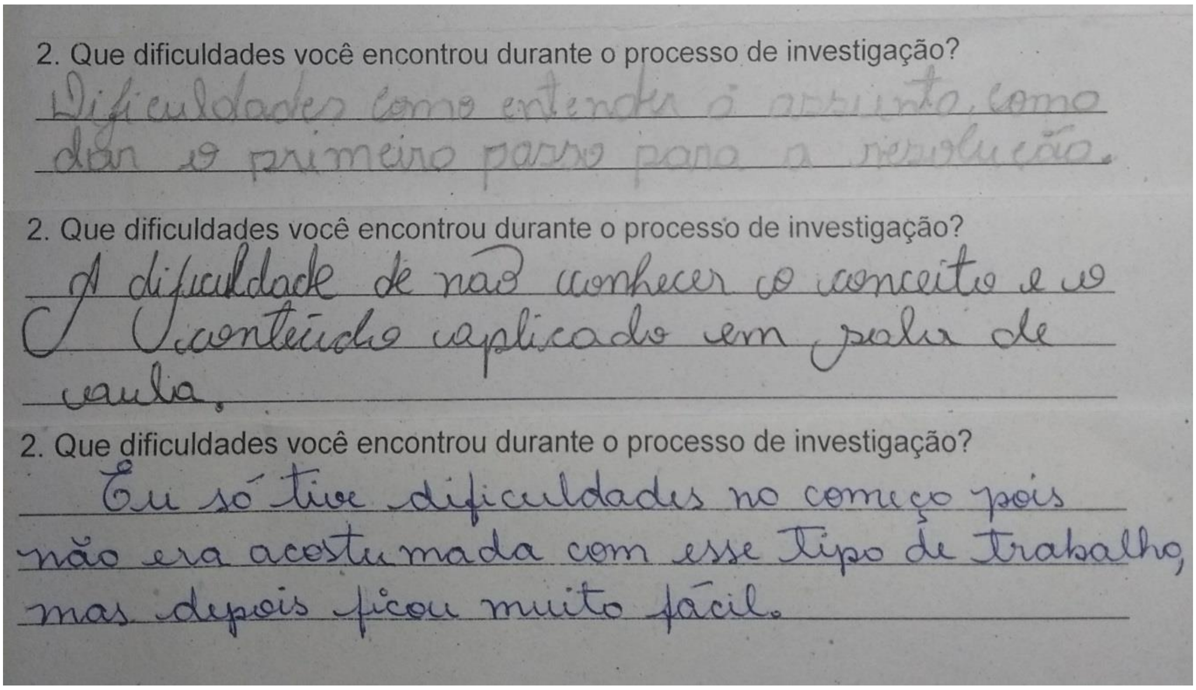


Fonte: alunos do grupo B

Verifica-se na figura 29 que a dedução deles está correta, pois toda função do 1º grau que possuir o coeficiente linear nulo possui os valores de “x” proporcionais aos de “y”. O grupo “B” mostrou-me que os conhecimentos matemáticos podem ser construídos à medida em que os alunos vão se envolvendo com a investigação.

Essa atividade teve seu início marcado por silêncio e falas paralelas entre membros de grupos distintos. A figura 30, oriunda das respostas do questionário final, representa as dificuldades sentidas pela maioria dos alunos nesse primeiro momento.

Figura 30: exemplifica o posicionamento da maioria dos alunos para iniciar um trabalho com investigação matemática.



2. Que dificuldades você encontrou durante o processo de investigação?

Dificuldades como entender o assunto, como dar o primeiro passo para a resolução.

2. Que dificuldades você encontrou durante o processo de investigação?

A dificuldade de não conhecer o conceito e o conteúdo aplicado em sala de aula.

2. Que dificuldades você encontrou durante o processo de investigação?

Eu só tive dificuldades no começo pois não era acostumada com esse tipo de trabalho, mas depois ficou muito fácil.

Fonte: três alunos da turma

Embora o questionário tenha sido aplicado depois que todas as atividades foram realizadas, vejo que as colocações expostas na figura 30 retratam o início dos trabalhos da pesquisa. Praticamente todos os alunos não tinham tido contato com o conteúdo estudado e nenhum deles havia se conectado com atividades investigativas. Esses dois pontos foram os principais obstáculos para a formação do ambiente de aprendizagem do primeiro encontro. Mas após superar essa fase foi possível observar a maioria dos discentes discutindo sobre Matemática envolvidos de forma cooperativa na busca de conjecturas e resultados satisfatórios.

4.1.2 Atividade 2

Para essa atividade incluí, após a reunião que precedeu os encontros da intervenção pedagógica, valores reais para cada aro dos pneus. Dessa forma essa tarefa foi contemplada por dois momentos. O primeiro ocorreu com uma pesquisa de preço realizada em duas lojas da cidade. O segundo compreendeu a investigação em sala de aula que levou 122 minutos. A figura 31 enfatiza o primeiro destes momentos.

Figura 31:discentes pesquisando os preços dos pneus.

Fonte: arquivo da pesquisa

O momento representado na figura 31 deslocou a atividade da semirrealidade para mais próximo das tarefas que despontam referências ao mundo real. Na loja "A" os valores identificados para o Aro 13, 14 e 15 foram R$ 218,00, R$ 306,00 e R$ 398,00 respectivamente. Na loja "B" os valores foram: Aro 13, 14 e 15 foram R$ 223,50, R$ 300,00 e R$ 399,00, respectivamente. A variação de preços entre as lojas visitadas foram irrelevantes. Dessa forma os preços foram arredondados, o aro 13 fico R$ 220,00; o aro 14, R$ 300,00 e o aro 15, R$ 400,00.

Durante essa pesquisa um dos alunos que havia participado do diálogo voltado para essa atividade na reunião de véspera aumentou a curiosidade de alguns alunos ao comentar "*ei pode estudar porcentagem que vai cair*". Durante o momento no qual ocorreu a investigação, percebi componentes de dois grupos distintos comentando que revisaram o assunto lembrado pelo colega. Observei que a busca de conhecimentos sinalizava positivamente o aceite pela investigação da segunda atividade. A seguir, exponho o momento realizado em sala de aula.

No decorrer da atividade alguns grupos que não possuíam a calculadora comum solicitaram se podiam usar a calculadora do celular porque facilitaria nos resultados, "*professor a gente podia usar a calculadora do celular para ajudar senão vai demorar demais*". Levei em consideração esse desejo, pois se enveredasse para conjecturas que os levassem a realizar operações com números decimais, sem o auxílio da calculadora, as produções da investigação poderiam ser resumidas por causa do cansaço que esses cálculos poderiam provocar. Eles fizeram essa solicitação porque na escola os alunos não têm autorização para manusear o celular durante as aulas. O uso desse aparelho só é permitido quando autorizado pelo professor, mas queriam ter acesso à calculadora existente no celular. Nesse momento, ficaram mais tranquilos e voltaram para a tarefa.

O grupo "B" foi o primeiro a chamar o docente para comunicar que havia concluído as questões "a" e "b", "*professor já terminamos aqui*". Segue o que justificavam:

> P: - Mostra para mim.
> B2: - Professor já fizemos a "a" e a "b".
> P: - Vocês podem me explicar.
> B2: - Assim ó, na "a", como verificar a proposta mais conveniente? – Nós botamos assim. (a aluna apontava para os registros no caderno).
> P: - Como?
> B3: - Tirando a porcentagem de cada pneu vendido e somando com o seu salário (o aluno leu para mim suas anotações).
> Nesse momento percebi que o grupo raciocinou corretamente, mas precisavam mostrar com mais detalhes.
> P: - E a justificativa?
> B2: - Ele leu (quis dizer que o colega havia lido à justificativa).
> P: - No final da atividade vocês devem explicar para a turma suas conclusões.
> B3: Sim, mas isso aqui todo mundo vai entender.
> P: - O que acham de utilizar essa ideia e procurar uma justificativa utilizando os valores dos pneus que vocês pesquisaram?

Com a conjectura que estabeleceram, só precisavam colocar em prática um plano para justificarem sua posição.

> B1: - Na "b" tem que usar também né?
> P: - E a "b"?
> B2: - Se essa não está certa a "b" também não tá.
> B3: Mas eu acho que pode ser assim também.

A questão "b", figura 17, pede para justificar se alguma proposta é sempre mais vantajosa que a outra. Eles registraram no caderno: *A 3ª, pois a diferença de* *um salário para o outro é pouca, e a pessoa fica em casa*. Durante as discussões chegaram à justificativa da seguinte forma:

> B2: - Mas no terceiro ele vai ficar em casa e o primeiro ele vai ficar na loja e ai vai ser aquela correria toda.
> B3: - Não, ele vai ficar na loja de boa e ainda vai ganhar mais de 1000 reais por mês.
> B1: - Mas também tem o vendedor direto no site que não vai sair de casa e não vai precisar gastar gasolina.
> B3: - Exatamente.
> B1: - É muito mais fácil você fazer no site do que numa loja.

O diálogo anterior demonstra que os alunos deste grupo imaginaram uma quantidade pequena de pneus vendidos e, dessa forma, enfatizaram o conforto no emprego (trabalhar em casa), baseado na diferença do valor fixo entre as ofertas e nos valores percentuais que são próximos. Os pequenos comércios das cidades onde eles residem pode ter influenciado nessa visão, já que não observaram na atividade a informação de que era para considerar uma grande quantidade de vendas por mês. Dessa forma incentivei-os a continuarem investigando as questões. Segue o diálogo:

> P: Vocês podem ler a informação que vem antes da questão “a”? – Vejam que ela não diz a quantidade, mas diz o quê?
> B3: - Uma grande quantidade de vendas de pneus por mês.
> B2: - Que é para considerar.
> P: - Então, o que acham?
> B2: - O quê?
> P: Verificar a proposta baseado ...?
> B1: - Em uma grande quantidade.
> B2: - Ah é.
> P: Pela ideia que criaram para a questão “a”, vocês já sabem o caminho né?
> B2: - Ah, aqui não é a resposta é do jeito que a gente vai fazer né?
> P: Isso mesmo.

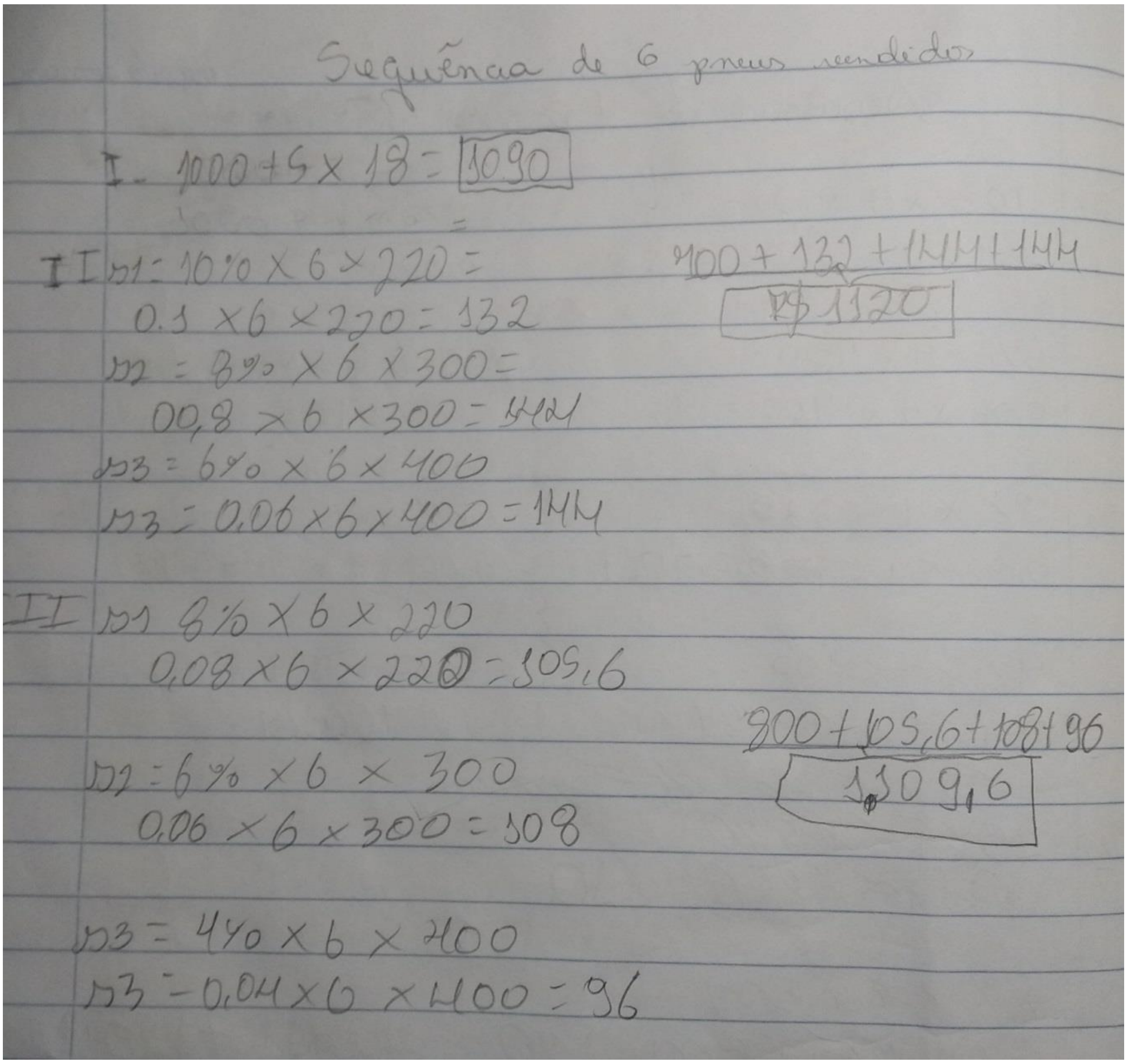
Com o diálogo eles compreenderam que deveriam continuar as discussões com foco na alternativa “a”, pois suas criações apenas informavam como os cálculos deveriam ser feitos. Essa passagem lembra Sadovsky (2010, p. 17) ao destacar que “o aluno pode considerar as intervenções do professor em relação às suas ideias como contribuições que as alimentam, as modificam e o ajudam a elaborar novas conexões”. Percebi que o grupo teve essa percepção, porque retomaram a investigação cooperativamente.

Já o grupo “A” mostrou que estava trilhando por caminho diferente. Seus componentes levantaram várias discussões até combinarem uma estratégia para investigação. A seguir, apresento suas argumentações até a convergência das ideias.

> A1: - Então esse aqui vai ser o salário dele mais 5 reais por pneu vendido. Então vai ser 1000 mais 5, mais a quantidade de Pneus né?
> A2: - Não é mais, é vezes. 1000+5 vezes a quantidade de pneus.
> A3: - Você está fazendo a primeira, é?
> A1: - É melhor fazer de uma por uma.
> A3: - Sim, mas aqui está englobando os três aros. O aro 13, 14 e 15.
> A1: - Mas aqui é a mesma coisa, fica 1000 mais 5 vezes os três.
> A4: - No caso aqui, tem que botar 220 do valor do aro para tirar 10% né?
> A3: - São quantos pneus que vamos usar?
> A1: - É melhor fazer de uma por uma aí passa para outra.
> A3: - Não tem como. - Um de cada é 3, então dá 3, 6, 9 e 12.
> A1: - É por isso que estou dizendo, vamos fazer a um depois a dois e depois a outra.
> A3: - Aí a gente faz com os três, usa 3, faz com 6 e depois os outros.

Essa passagem mostra que os alunos do grupo estavam confusos. Mas, o aluno A1 insistiu que fizessem uma proposta de emprego por vez usando os números dados por A3, pois ele estava focado nas propostas, já os demais estavam situados no todo da questão. A aluna A3 defendeu que deviam utilizar nos cálculos os três tipos de pneus. A sequência 3, 6, 9 e 12, significa que ao usarem um pneu de cada aro teriam 3 pneus, usando dois de cada teriam um total de 6, três de cada 9, e quatro de cada 12. A ideia de A3 levou o grupo a trabalhar com quantidades iguais de cada aro. Essa aluna também convenceu os demais a fazerem os cálculos para as três propostas, ou seja, utilizar os 3 pneus em (I), depois distribuí-los na (II) e (III) de acordo com a porcentagem, depois com 6, 9 e 12. Nesse sentido Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) afirmam que os alunos só entram em consenso quanto às suas construções quando percebem que precisam registrar e justificar suas ideias e conjecturas. Segue esse entendimento, na figura 32.

Figura 32: elaborações do grupo A em relação a atividade 2.

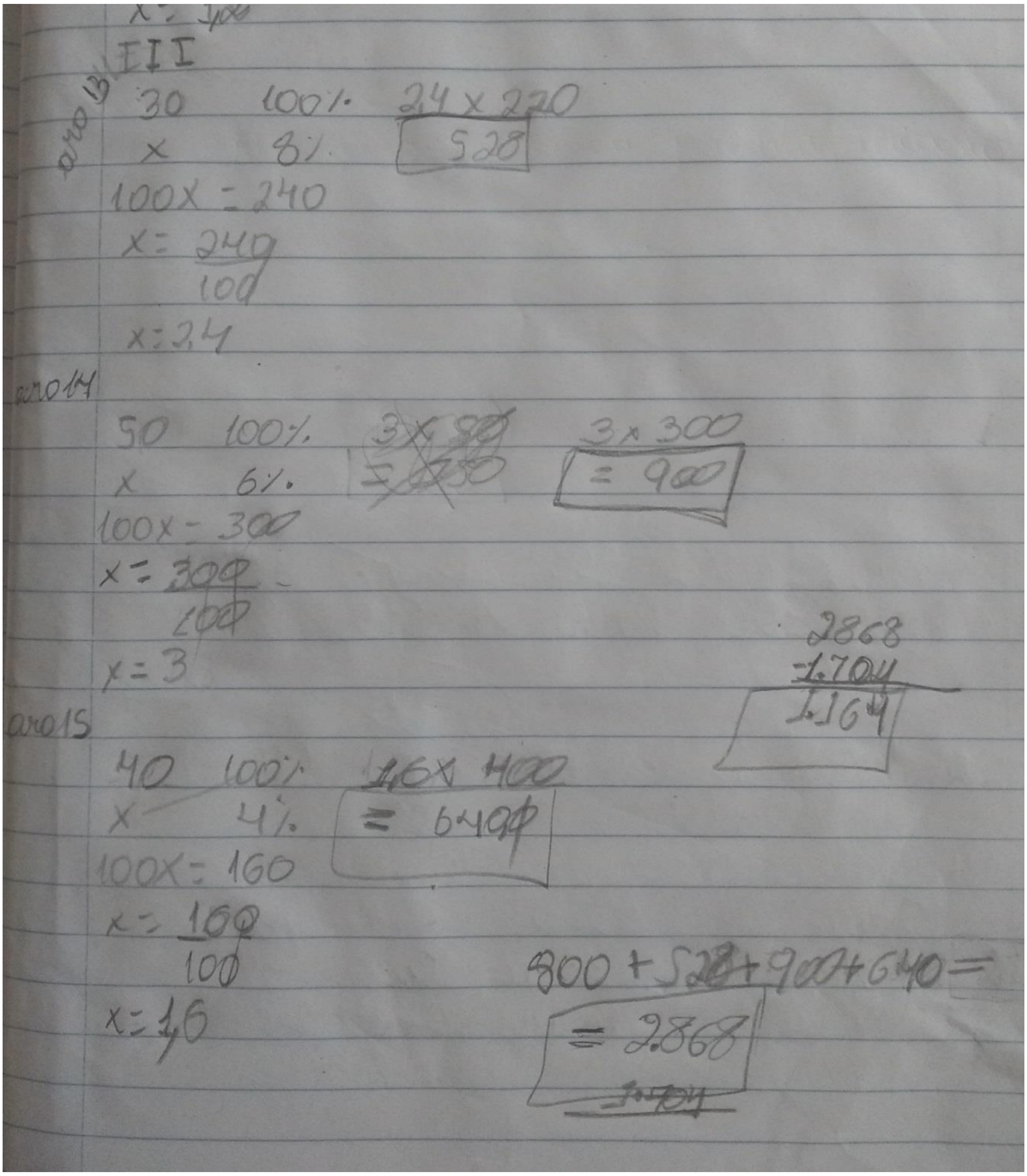


Fonte: alunos do grupo A

Nota-se na figura 32, que fizeram com 6 pneus (dois de cada aro), depois repetiram os cálculos para 9 pneus (três de cada aro) e 12 pneus (quatro de cada aro). Assim, os alunos conseguiram apresentar justificativas para a atividade. No caso da alternativa "b", eles disseram que a proposta mais vantajosa seria a (II): "*a melhor proposta sempre vai ser a segunda*". Ao serem questionados sobre essa justificativa eles disseram: "*se é pra ter sempre uma grande quantidade de vendas, então vai ser ela*". Foi possível notar nos áudios que essa conclusão surgiu depois que fizeram os cálculos com 9 e com 12 pneus, pois observaram que a partir da venda de 6 pneus (dois de cada) o salário da segunda proposta de emprego era sempre melhor. Sobre a questão "c" disseram que a proposta menos conveniente seria a primeira (I), porque era para considerar uma grande quantidade de pneus e dessa forma o salário dela seria sempre menor. A justificativa para a questão “c” gerou várias discussões na apresentação em grande grupo, pois eles foram os únicos que concluíram dessa forma. Os demais grupos defendiam que a proposta seria a segunda.

Após apresentarem suas justificativas, os componentes do grupo “A” receberam um papel milimetrado. O plano era que pudessem criar funções do 1º grau e desenhassem seus gráficos. Conseguiram expor apenas o gráfico de $y = 1000 + 5x$ referente à proposta (I). Outros grupos também alcançaram esse patamar, exceto o grupo “C” que foi mais adiante, pois elaborou uma função para cada proposta de emprego. A estratégia utilizada pelo grupo “B” também foi observada em outros grupos que não optaram em utilizar quantidade padrão de pneus. Foi possível observar que, ao trabalhar com números discrepantes de cada aro para uma mesma simulação de vendas de pneus, trouxe dificuldades para confecção das funções que representasse os casos (II) e (III). Outro grupo enveredou para investigações com o auxílio de regra de três simples. Para cada simulação de quantidades de pneus vendidos eles faziam três operações, uma para cada porcentagem. Percebi que essa estratégia foi cansativa, mas estabeleceram a (III) como a proposta mais vantajosa considerando a venda de grandes quantidades no site. A figura 33 apresenta como o grupo F procedeu para a resolução.

Figura 33: estratégia utilizada pelo grupo F.



Fonte: alunos do grupo F

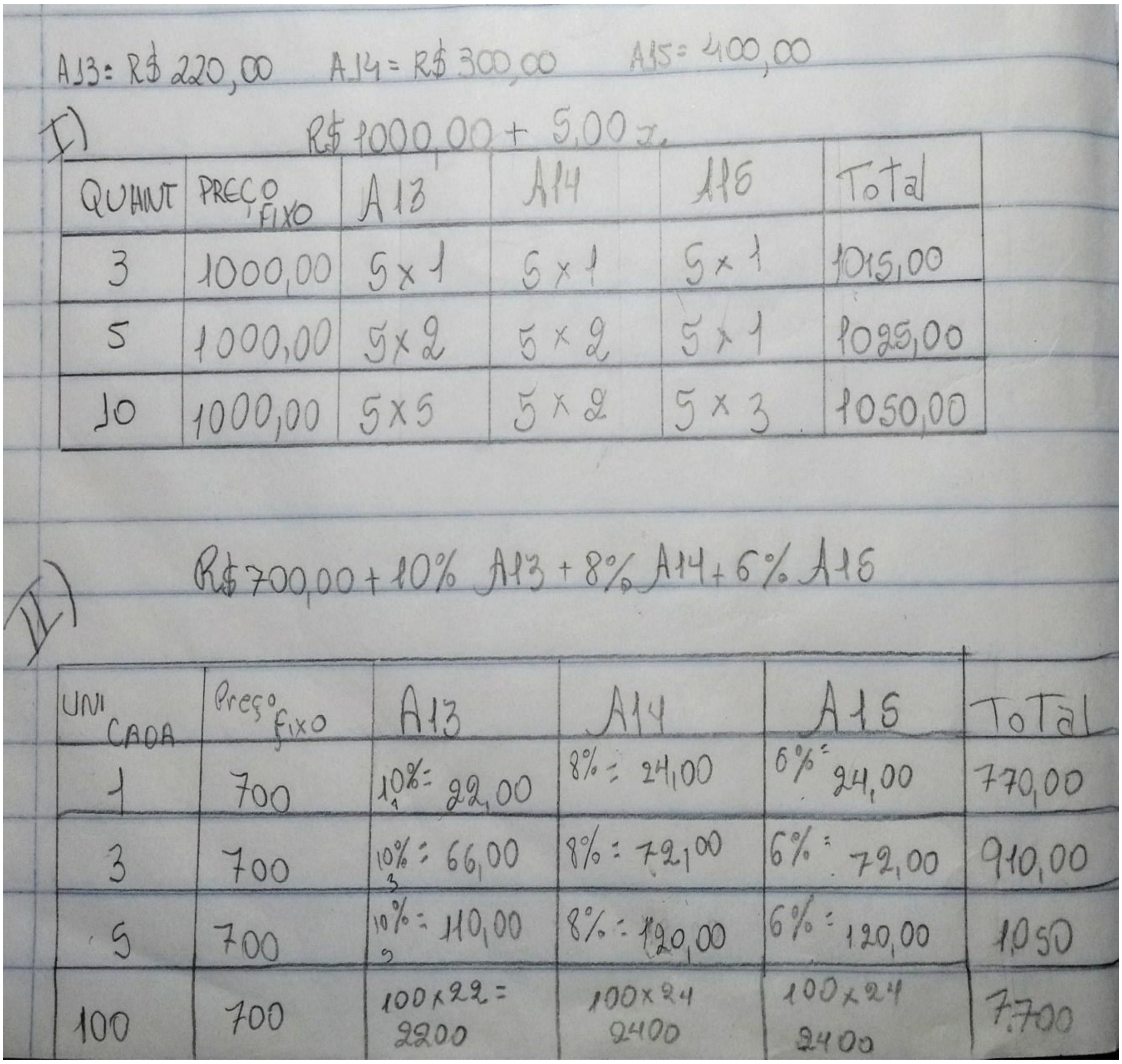
É possível notar na figura 33 que os alunos decidiram utilizar quantidades variadas de pneus para representar as vendas de uma mesma condição de emprego. Eles sustentaram essa conjectura em todo o trabalho porque achavam ser a perspectiva mais correta na vida real. A segunda opção de emprego, que foi a escolhida pelos demais grupos como a mais vantajosa, para o grupo “F” ela foi excluída a partir do momento em que imaginaram ser a alternativa que menos venderia pneus. De acordo com esse grupo o representante comercial fatura mais que o vendedor da loja, porque atende a outras lojas e o vendedor direto no site conseguia uma quantidade de vendas maior que as propostas anteriores, porque alcançaria lojas e pessoas. Eles realizaram seus cálculos sempre de acordo com esse entendimento.

Na Figura 33, nota-se para a proposta (III) uma simulação com 30 unidades do aro 13, 50 do aro 14 e 50 do aro 15 totalizando um salário de R$ 2.868,00. Percebe-se também subtraindo desse salário o valor R$ 1.704,00 que encontraram para o vendedor direto na loja, com as seguintes quantidades: 30 do aro 13, 10 do aro 14 e 20 do aro 15. Esse registro se juntou a outros e foi apresentado pelo grupo para comprovar a escolha pela proposta mais vantajosa. Essa justificativa também provocou discussão com alguns alunos que não concordaram com essa conclusão. Nesse momento um dos discentes me perguntou: "*professor! quem é que está certo*"? O aluno certamente teve confiança em fazer esse questionamento, porque seu grupo havia sido parabenizado pelas criações que conseguiram.

Essa discussão favoreceu ainda mais o trabalho e, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 51), "a realização de investigações proporciona, muitas vezes, o estabelecimento de conexões com outros conceitos matemáticos e até mesmo extras matemáticos". Esses autores acrescentam que o docente precisa aproveitar o momento para estimular os alunos a refletir sobre essa situação. De acordo com essa concepção, no momento foi realizada uma reflexão sobre os diferentes postos de trabalho e quais os caminhos a serem percorridos para conquistar os empregos almejados pelos alunos. Após essa discussão foi comentado com a turma que em atividades investigativas eles podem enveredar por caminhos distintos e tirar conclusões diferentes com base nas conjecturas e estratégias formuladas. Esse momento foi importante para a turma refletir sobre o processo investigativo e se sentirem mais confiantes para as próximas atividades, pois enfatizei que não havia uma resposta pronta para as atividades que estavam sendo exploradas.

O grupo "D" teve a ideia de organizar os dados em planilhas, elaborando uma para cada proposta de emprego. A figura 34 ilustra os resultados desse grupo.

Figura 34: resultados do grupo D.



A13= R$ 220,00 A14 = R$ 300,00 A15= 400,00

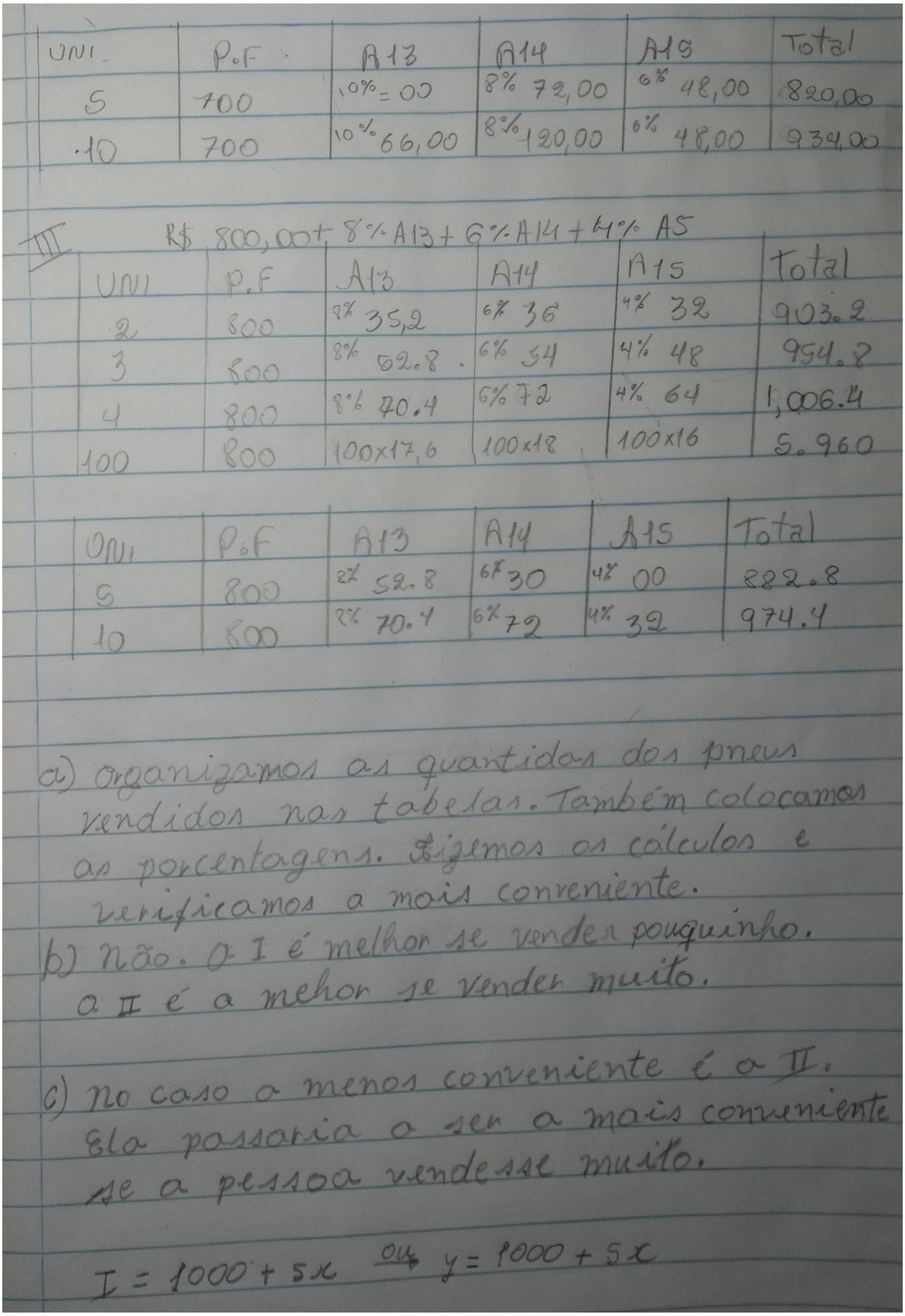
I) R$ 1000,00 + 5,00x.

QUANT	PREÇO FIXO	A13	A14	A15	Total
3	1000,00	5x1	5x1	5x1	1015,00
5	1000,00	5x2	5x2	5x1	1025,00
10	1000,00	5x5	5x2	5x3	1050,00

II) R$700,00 + 10% A13 + 8% A14 + 6% A15

UNI CADA	Preço fixo	A13	A14	A15	Total
1	700	10% = 22,00	8% = 24,00	6% = 24,00	770,00
3	700	10% = 66,00	8% = 72,00	6% = 72,00	910,00
5	700	10% = 110,00	8% = 120,00	6% = 120,00	1050
100	700	100x22 = 2200	100x24 2400	100x24 2400	7.700

(Continuação)



UNI	P.F	A13	A14	A15	Total
5	700	10% = 00	8% 72,00	6% 48,00	820,00
10	700	10% 66,00	8% 120,00	6% 48,00	934,00

III R$ 800,00 + 8% A13 + 6% A14 + 4% A5

UNI	P.F	A13	A14	A15	Total
2	800	8% 35,2	6% 36	4% 32	903.2
3	800	8% 52.8	6% 54	4% 48	954.8
4	800	8% 70.4	6% 72	4% 64	1,006.4
100	800	100x17,6	100x18	100x16	5.960

UNI	P.F	A13	A14	A15	Total
5	800	8% 52.8	6% 30	4% 00	882.8
10	800	8% 70.4	6% 72	4% 32	974.4

a) organizamos as quantidas dos pneus vendidos nas tabelas. Também colocamos as porcentagens. fizemos os cálculos e verificamos a mais conveniente.

b) não. O I é melhor se vender pouquinho. o II é a mehor se vender muito.

c) no caso a menos conveniente é a II. Ela passaria a ser a mais conveniente se a pessoa vendesse muito.

$I = 1000 + 5x \xrightarrow{ou} y = 1000 + 5x$

Fonte: alunos do grupo D

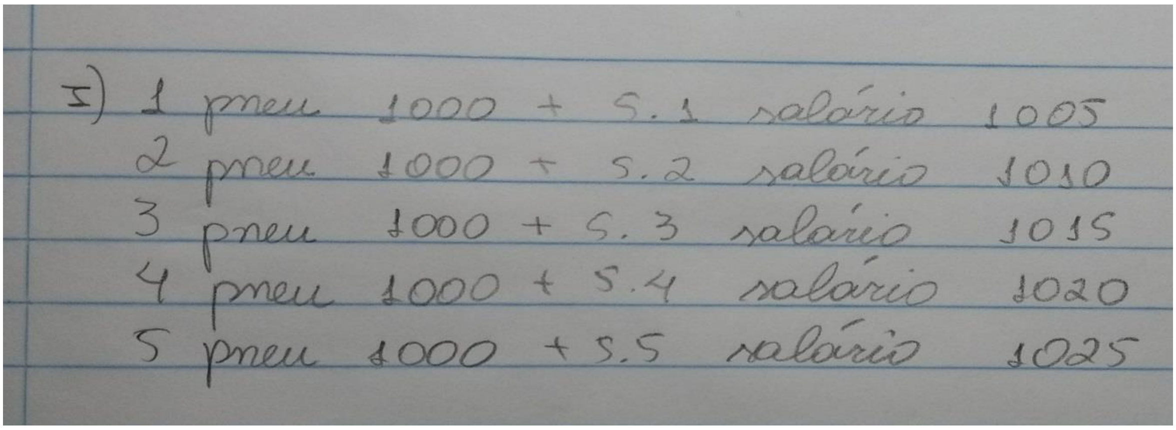
Na figura 34, é possível notar na justificativa da alternativa “a”, que o grupo teve a ideia de organizar os dados na planilha para visualizar o que faziam. Mas a estratégia utilizada na manipulação dos dados não facilitou a justificação das alternativas seguintes. Isso ocorreu porque um mesmo valor foi tratado de maneira distorcida. Por exemplo, a quantidade 3, primeira linha de (I) não tem o mesmo significado da quantidade “3” da segunda linha de (II). Outro exemplo é a quantidade “5” que aparece três vezes, duas para planilha (II) e uma para (III), nos três casos esse valor teve significado distinto. Então a diversidade de tratamentos dados às quantidades de pneus nas planilhas trouxe confusão ao entendimento dos alunos. Dessa forma, eles não conseguiram justificar com precisão as questões “b” e “c”, já que não identificaram o momento em que uma proposta superava as outras.

É possível notar também, na figura 34, que o grupo conseguiu a melhor proposta apenas na comparação entre a 4ª linha das planilhas (II) e (III), mas a quantidade 100 foi tratada de forma padronizada nas duas planilhas. Isso mostra a riqueza de informações quando os dados de uma atividade como essa são envolvidos corretamente em planilhas, como ocorreu com o grupo “C”, que conseguiu mais êxitos em sua investigação. A discussão seguinte demonstra como transcorreu essa ideia:

> C4: - Vamos fazer logo essa depois faz as outras.
> C2: - Porque 3?
> C4: - É a quantidade de pneus, se tem os três tipos né.
> C2: - Mas pode vender um pneu, não é obrigado a vender de tudo.
> C4: - É mesmo. – Se vender 10 pneus só vai ter 50 reais de lucro.
> C5: - Mas têm os 1000 reais.
> C5: - É.
> C1: - Será que está certo? Como é que vou colocar aqui?
> C3: - Pior que tem de fazer um bocado de vez, né?
> C4: - É só escrever 1000 mais 5 vezes o valor, ô a quantidade.
> C5: - Vamos fazer logo um bocado de vez usando o primeiro e os outros a mesma coisa.
> C1: - Pior que o tempo está passando (era o aluno que estava fazendo as anotações no caderno).
> C4: - Como é mesmo?
> C5: - Faz uma quantidade para a primeira depois para a segunda e a mesma coisa na terceira. – Entendeu?
> C4: - E as quantidades? – Faz até os 50 reais de lucro, né?
> C1: - Não é lucro, é o salário.
> C5: - Pois é, faz primeiro com um depois com dois e 3, quando completar faz com as outras e ver a melhor.
> C5: - Eu vou fazer e tu calculas (nesse momento essa aluna pede o caderno para fazer os registros).
> C1: - Ah, melhor.
> C4: - Essa é só de cabeça.

Nesse diálogo é possível notar o envolvimento dos alunos por meio de uma discussão cooperativa na busca de estratégia para investigação da atividade. A sugestão “*Vamos fazer logo essa depois faz as outras*” foi integrada à colocação “*faz até os 50 reais de lucro”* gerando a conjectura: “*pois é, faz primeiro com um depois com dois e três, quando completar faz com as outras e vê a melhor*”. Essa ideia foi significativa para o desempenho do grupo como pode ser notado a partir dos escritos da figura 35.

Figura 35: mostra os primeiros registos do grupo C.

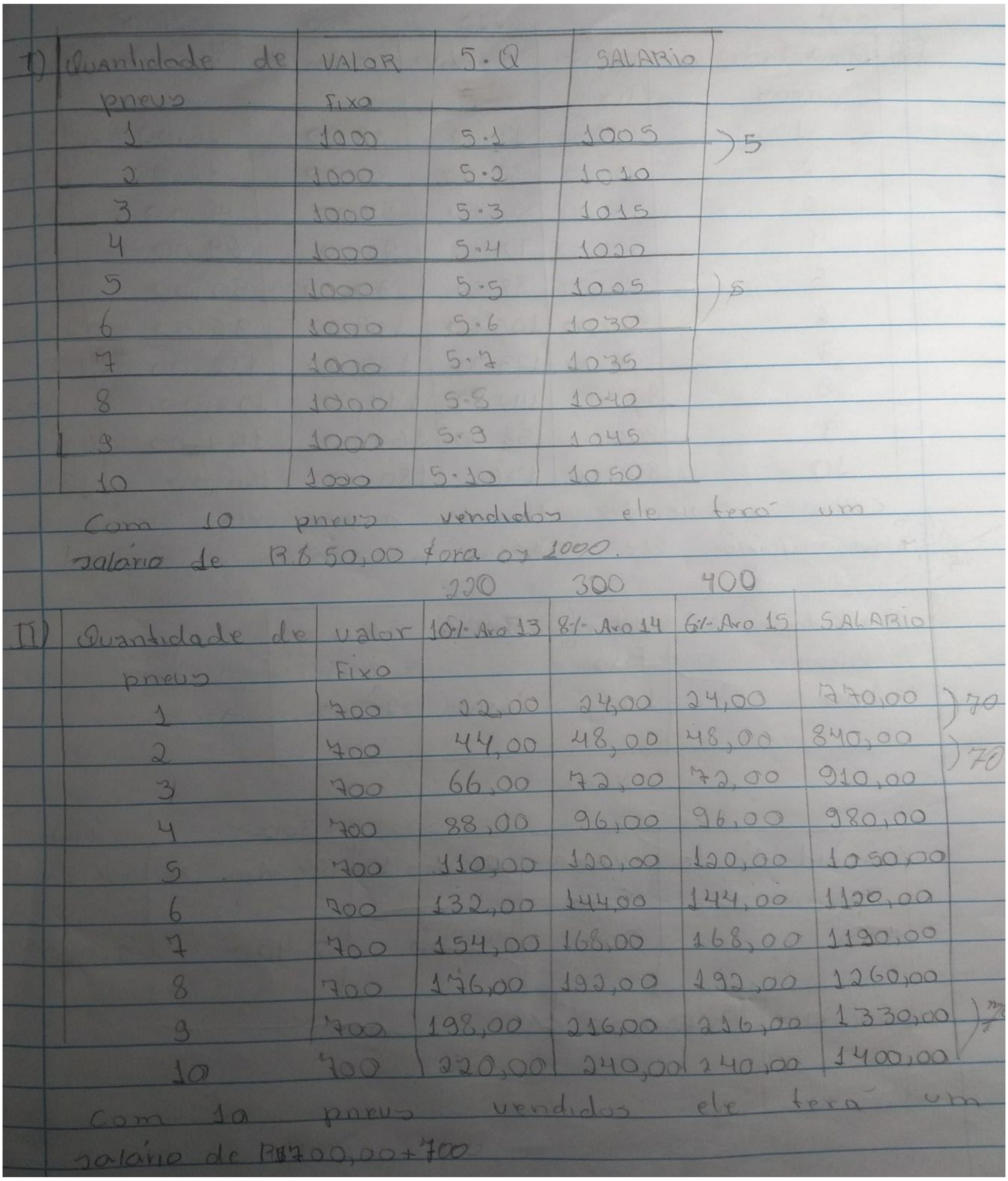


Fonte: alunos do grupo C

Quando a aluna iniciou a parte mostrada na figura 35, os demais ficaram em silêncio até um dos componentes do grupo enfatizar que para os outros casos eles poderiam utilizar uma planilha. Essa proposta certamente foi visualizada por causa da forma como a colega fazia os registros, pois pode ser notada uma coluna com a quantidade de pneus, outra com o valor fixo, com os produtos dos valores da primeira por 5, e a última com os salários. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 36) corroboram com essa percepção ao afirmarem que a escrita dos alunos é fundamental para clarificar as suas ideias, pois ao explicitarem as suas conjecturas, eles são favorecidos a estabelecerem consensos comuns para suas realizações.

Dessa forma discussões sobre o planejamento das planilhas referentes às propostas (II) e (III), levou os alunos a escolher a conjectura que defendia uma planilha composta de doze colunas, dentre elas, três para o aro 13, outras três para o aro 14 e mais três para o aro 15, da seguinte forma: uma era para registrar o valor do pneu, a outra com a porcentagem e a terceira com os resultados das duas anteriores. Mas na sequência das discussões o grupo refinou sua conjectura e juntaram as três colunas referentes a um aro, formando apenas uma, dessa forma a planilha foi reduzida para seis colunas. Assim, decidiram elaborar uma planilha para cada proposta de emprego. Essa estratégia favoreceu a visualização dos dados como, por exemplo, a comparação de valores ocupantes de uma mesma linha. A figura 36 apresenta as planilhas propostas pelo grupo C.

Figura 36: apresenta elaborações do grupo C.



I)

Quantidade de pneus	VALOR Fixo	5·Q	SALARIO
1	1000	5·1	1005
2	1000	5·2	1010
3	1000	5·3	1015
4	1000	5·4	1020
5	1000	5·5	1025
6	1000	5·6	1030
7	1000	5·7	1035
8	1000	5·8	1040
9	1000	5·9	1045
10	1000	5·10	1050

Com 10 pneus vendidos ele terá um salário de R$ 50,00 fora os 1000.

II)

Quantidade de pneus	valor Fixo	220 10% Aro 13	300 8% Aro 14	400 6% Aro 15	SALARIO
1	700	22,00	24,00	24,00	770,00
2	700	44,00	48,00	48,00	840,00
3	700	66,00	72,00	72,00	910,00
4	700	88,00	96,00	96,00	980,00
5	700	110,00	120,00	120,00	1050,00
6	700	132,00	144,00	144,00	1120,00
7	700	154,00	168,00	168,00	1190,00
8	700	176,00	192,00	192,00	1260,00
9	700	198,00	216,00	216,00	1330,00
10	700	220,00	240,00	240,00	1400,00

Com 10 pneus vendidos ele terá um salário de R$700,00+700

(Continuação)

III) Quantidade de pneus	VALOR fixo	220 8% Ano 13	300 6% Ano 14	400 4% Ano 15	SALÁRIO
1	800,00	17,60	18,00	16,00	851,60
2	800,00	35,20	36,00	32,00	903,20
3	800,00	52,80	54,00	48,00	954,80
4	800,00	70,40	72,00	64,00	1006,40
5	800,00	88,00	90,00	80,00	1058,00
6	800,00	105,60	108,00	96,00	1.109,60
7	800,00	123,20	126,00	112,00	1.161,20
8	800,00	140,80	144,00	128,00	1212,80
9	800,00	158,40	162,00	144,00	1264,40
10	800,00	176	180,00	160,00	1316,00

com a venda de 10 pneus ele terá um salário de R$ 516,00 + 800,00

Fonte: alunos do grupo C

Na figura 36 é possível notar o seguinte detalhe para os valores da primeira coluna: no caso (I), as quantidades são repetidas apenas uma vez para multiplicação por 5; já para os casos (II) e (III) as quantidades são triplicadas, ou seja, é usado o mesmo valor para as três porcentagens. Essa padronização facilitou na construção de conhecimentos criados pelo grupo.

Foi possível observar nos áudios que antes de terminarem a última planilha já faziam algumas comparações com base nas anotações existentes. Quando o grupo finalizou, recebi um chamado. Após ouvir algumas colocações fiz a seguinte pergunta: “que outras conclusões vocês podem tirar dessas planilhas”? Identifiquei alguns posicionamentos proativos. Um dos componentes imprimiu a seguinte explicação “*professor dá até para o dono da loja saber quanto vai pagar para os funcionários é só ele olhar na tabela e ver as vendas*”. Outra demonstração significativa foi: “*a gente pode comparar a primeira linha com a última, nas* *porcentagens basta multiplicar por 10 e somar com o fixo que dá o salário*". Logo em seguida perguntei: "e na centésima linha, qual vai ser o salário"? A seguir a continuidade do diálogo:

> C5: - O senhor está dizendo se vender 100, né?
> P: - Sim!
> C5: - É só multiplicar por 100.
> P: - Multiplicar o que?
> C5: - Multiplica as porcentagens, dá 1760, aqui dá 1800 e nessa dá 1600, a vírgula vai duas casas pra cá.

Nesse momento, a aluna operou a calculadora e em seguida disse que dava R$ 5.960,00, esse valor é referente à venda de 100 unidades de cada pneu na proposta (III). Para a proposta (II), o valor foi R$ 7.700,00 e rapidamente calculou o salário da (I) R$ 1.500,00. A rapidez que a discente chegou aos resultados declara a produtividade que se pode ter ao trabalhar com planilhas em atividades como essa. Após a resolução do grupo, solicitei que fizessem a elaboração das funções e os gráficos e registrassem no caderno suas considerações, tendo em vista a apresentação final. Nesse sentido, levantei um questionamento com eles, quando fui chamado novamente ao grupo, porque os componentes divergiam no levantamento de ideias, pois uns diziam que nos casos (II) e (III) seria possível elaborar funções e outros sustentavam que não. Tendo em vista a disposição dos valores em colunas e a realização da atividade do primeiro encontro, fiz uma interposição.

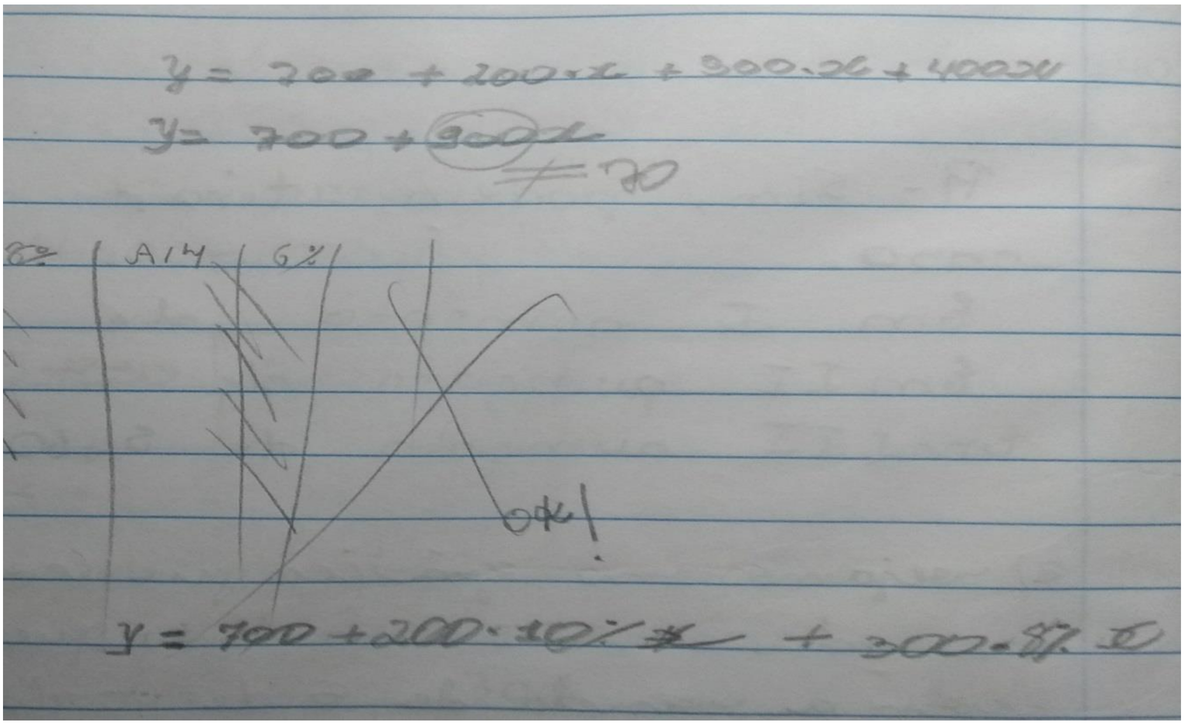
> P: - Nessa primeira que modelo matemático vocês chegaram para calcular os salários?
> C5: - É o fixo mais 5 vezes "x" que é a variável.
> P: - E como ficou?
> C5: - Assim, $1000 + 5x$ (a aluna mostrou no caderno).
> P: - É possível fazer o gráfico dela?
> C3: - Dá sim, é só tirar os valores de cada um e botar no plano.
> P: - Valores de quê?
> C3 e C4 falaram unissonante: - De "x" e "y".
> C4: - "y" é os resultados.
> P: - Muito bem! – E com os outros casos?
> C2: - É mais difícil.
> C5: - Mas eu acho que sim.
> C1: - Eu já fiz o plano. (a aluna havia concluído o desenho do plano no papel milimetrado).
> P: - Então agora criem um modelo matemático para cada uma delas.
> C2: - A primeira é mais fácil e as outras, professor, com esses tantos de números?

Nesse episódio, foi possível notar o empenho dos alunos. Mas, não estavam conseguindo elaborar uma conjectura. Diante dessa situação, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) defendem que o professor deve estimular os alunos a continuarem na busca de conjecturas, ajudando-os a expressar ideias acerca do que procuram. Seguindo esse pensamento assisti-os no sentido de estabelecer um entendimento que levassem a uma ideia.

> P: - Quais comparações vocês podem fazer entre essa primeira planilha e o calendário da atividade anterior?
> C3: - Mas comparar o que?
> P: - Lá tem o quê, que é parecido com essa planilha?
> C5: - Linhas, números ...
> C4: - Colunas também.
> P: - Muito bem! – Vocês utilizaram para encontrar funções, certo?
> C5: - Sim, entendi a gente faz com as colunas daqui, mas a primeira já tem a função.
> P: - Olhando para elas vocês conseguem ver a função $y = 1000 + 5x$?
> C3: - Não entendi.
> C5: - Entendi, como é $1000 + 5x$, fica 1000 mais 5 vezes 1, o resultado é o "y" e o "x" é ...
> C4: - É da primeira.
> C5: - É o 1.
> P: - Então vocês compreendem que a primeira coluna são os valores de?
> C4: - De "x".
> C5: - E a última são os de "y".
> P: - O valor "5" que acompanha "x" dá para ser observado em algum lugar da planilha que não seja na terceira coluna?
> C1: - Eu entendi, é só subtrair 1005 de 1000.
> C4: - É mesmo.
> C5: - Mais aqui também aumenta de 5 em 5.
> P: - Então o valor 5, pode ser tirado dá?
> C5: - Da última coluna, da variação.
> P: - Pois agora vamos lá. (nesse momento saí e os deixei pensar a sós).

Na sequência do áudio, é possível verificar suas dificuldades por causa da quantidade de colunas em (II) que é superior ao caso (I). Eles não observaram que bastava verificar a variação dos salários para obter o número que iria acompanhar "x" em seus modelos. A ideia de coeficiente angular, que começou na atividade anterior precisava ser amadurecida. Eles decidiram seguir a formação $y = 1000 + 5x$, comparando com a planilha. A figura 37 mostra a ideia que eles estavam seguindo.

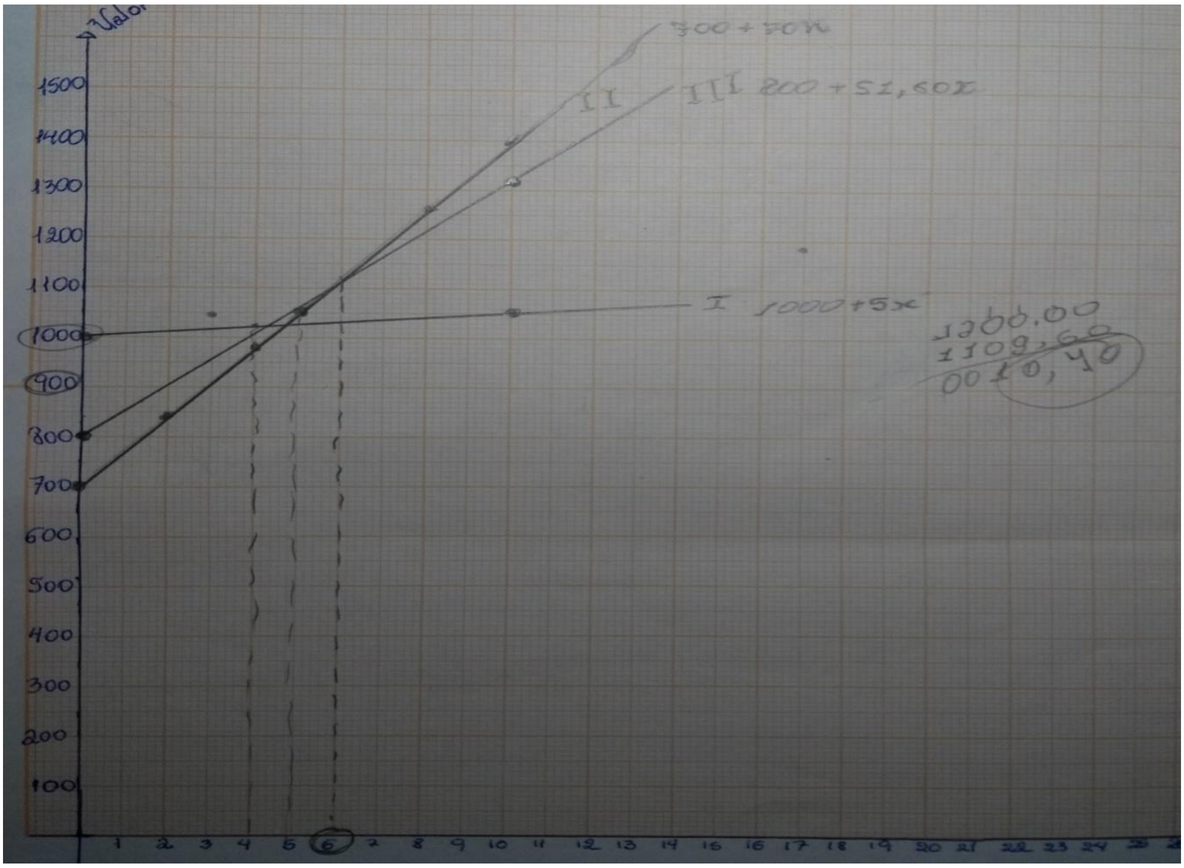
Figura 37: conjectura que o grupo C sustentava.



Fonte: alunos do grupo C

Como mostra a figura 37, com esse plano eles encontraram o valor 900 e compararam com a variação do salário (70). Notaram que o modelo encontrado não seguiu o mesmo formato da primeira função. É possível notar na figura 36 que eles insistiram na ideia e incluíram a porcentagem na expressão. Dessa forma, encontraram a função $y = 700 + 70x$. Nesse momento, eles perceberam que estavam corretos, porque notaram que o "70" da variação dos salários apareceu na função acompanhando "x". A elaboração da terceira função foi imediata, porque eles haviam compreendido que bastava verificar a variação existente entre os valores da coluna correspondente ao salário. Eles ainda montaram a expressão $800 + 220 \cdot 0{,}8 \cdot x + 300 \cdot 0{,}6 \cdot x + 400 \cdot 0{,}4 \cdot x$ e encontraram $800 + 51{,}60x$, perceberam que podiam apenas tomar o valor que ia aumentando de um salário para o outro e utilizar como coeficiente angular da função. A figura 38 mostra como ficaram os gráficos.

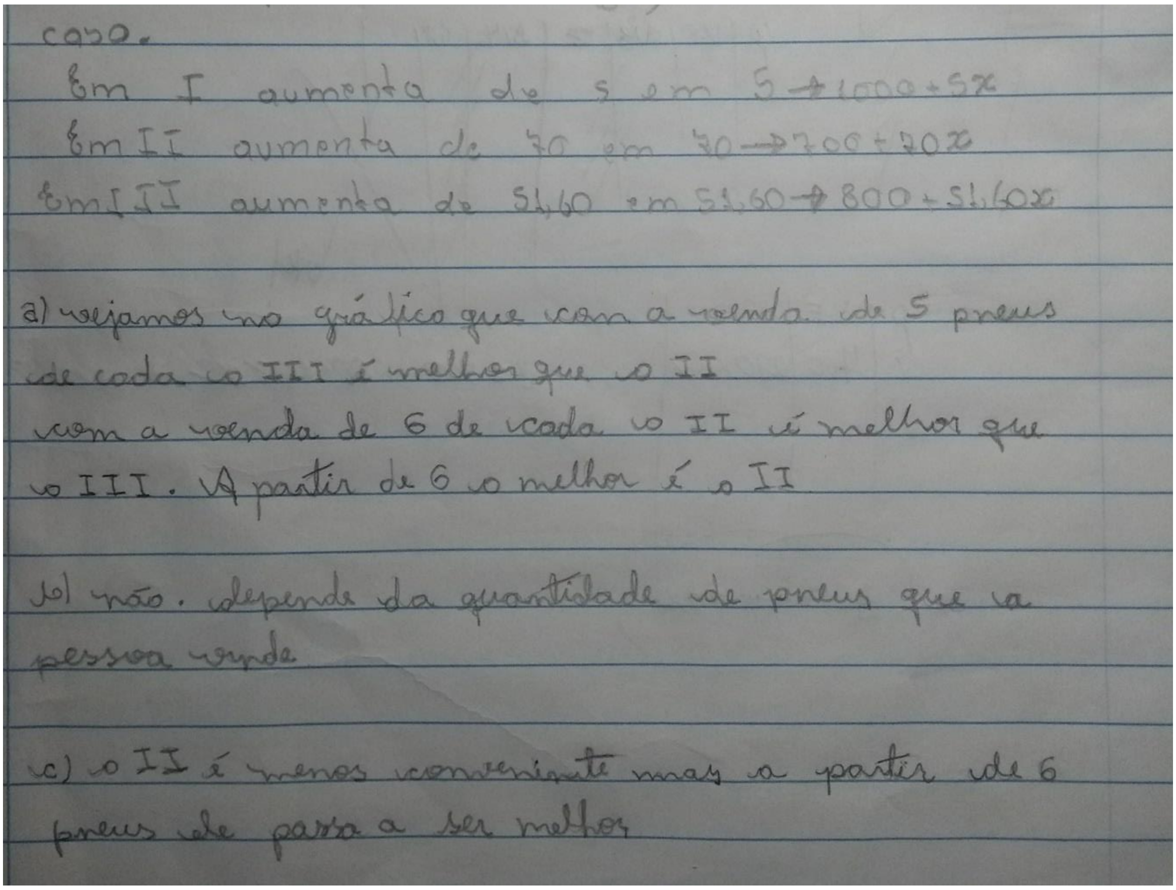
Figura 38: funções criadas pelo grupo C acompanhadas dos gráficos.



Fonte: alunos do grupo C

É possível notar na figura 38 que os discentes verificaram no ponto de abscissa 6 (quantidade de 6 pneus) a diferença entre os salários de (II) e (III), que é de R$ 10,40. Fizeram esse registro na figura 38 porque apenas visualizando os gráficos não dá para observar essa informação. Observei que os modelos das funções e o cálculo da diferença comentada foram registrados na figura 38 para facilitar nas explicações, pois no momento em grande grupo, os discentes utilizavam a lousa digital para mostrar as fotografias com seus trabalhos. Dessa forma, os alunos fizeram as apresentações explorando essas imagens para mostrar as elaborações e conclusões. Percebi que essa ideia contribuiu para que os alunos tivessem mais cuidado com seus registros, já que essa organização iria facilitar a compreensão dos colegas na apresentação final. Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) destacam que a escrita da investigação é fundamental para o momento de discussão do trabalho realizado pelo grupo, porque seus componentes podem comunicar os resultados com mais clareza e o pesquisador também se beneficia porque passa a ter detalhes daquilo que cada grupo fez. De acordo com esse entendimento, passei a elogiar os apontamentos dos alunos, pois de acordo com Freire (2011) o elogio que o docente faz aos trabalhos dos alunos pode elevar sua autoestima para novas produções. A figura 39 destaca o cuidado com os registros.

Figura 39: anotações do grupo C a respeito da atividade em discussão.



caso.
Em I aumenta de 5 em 5 → 1000+5x
Em II aumenta de 70 em 70 → 700+70x
Em III aumenta de 51,60 em 51,60 → 800+51,60x

a) vejamos no gráfico que com a venda de 5 pneus de cada o III é melhor que o II
com a venda de 6 de cada o II é melhor que o III. A partir de 6 o melhor é o II

b) não. depende da quantidade de pneus que a pessoa venda

c) o II é menos conveniente mas a partir de 6 pneus ele passa a ser melhor

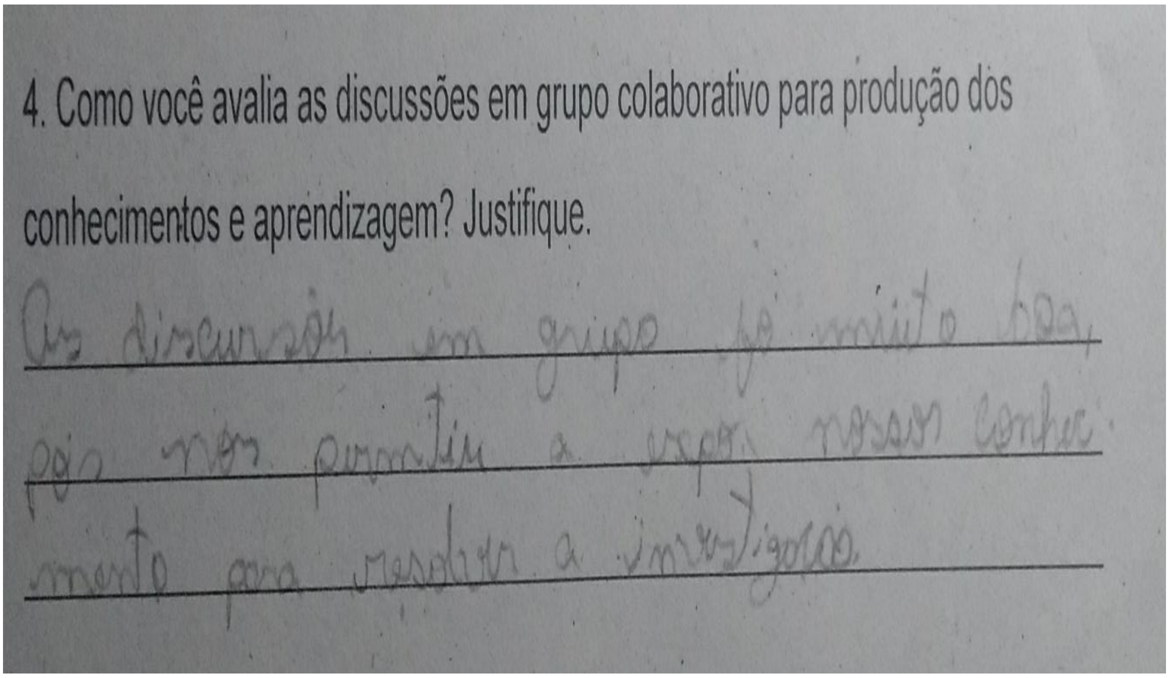
Fonte: alunos do grupo C

Apenas na figura 39 é possível observar as justificativas do grupo para as três questões da atividade. Essa estratégia manifesta a preocupação dos alunos com a exposição de suas conclusões. Tomando por base os diálogos que tive com os alunos, eles já tinham planejado uma justificativa para a questão “a” antes de encontrarem as funções. Mas, pode-se notar na Figura 39, que eles utilizaram os gráficos que construíram para enfatizar o que a questão “a” solicitou. E, as planilhas que foram norteadoras na elaboração das funções, também comprovavam as justificativas exibidas dos gráficos. Dessa forma, eles tiveram mais segurança para elaborar a conclusão que imprimiram.

A forma como foi organizada a escrita dos modelos das funções pensando nas explicações que iriam colocar em grande grupo, explicita que a ideia de coeficiente angular e o que ele representa para a função do 1º grau estava sendo compreendida. Nessa atividade, a ideia de relação entre dois conjuntos para a função afim e as partes que compõem esse modelo ficou mais explícita.

Depois desse encontro percebi que os alunos que vinham mostrando dificuldades em compreender o assunto ficaram mais confiantes para os momentos seguintes. Nesse sentido, Freire (2011, p. 28) afirma que "nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo". Essa afirmação contempla a investigação realizada pelo grupo "C", pois além de aprenderem em cooperação, criaram conhecimentos que possibilitou ampliar os saberes da turma em relação ao que foi discutido na atividade anterior. Dessa forma, a riqueza de discussões surgidas potencializou a capacidade dos alunos em construir conhecimentos variados e comunicá-los matematicamente. Essa compreensão pode ser confirmada com o depoimento na figura 40.

Figura 40: percepção do aluno a respeito do trabalho desenvolvido com os pares.


4. Como você avalia as discussões em grupo colaborativo para produção dos conhecimentos e aprendizagem? Justifique.

As discussões em grupo foi muito boa, pois nos permitiu a expor nossos conhecimento para resolver a investigação.

Fonte: aluno da turma

Pode ser notada, na figura 40, que o trabalho cooperativo foi fundamental para que os discentes conseguissem empreender seus conhecimentos na busca de novos saberes matemáticos.

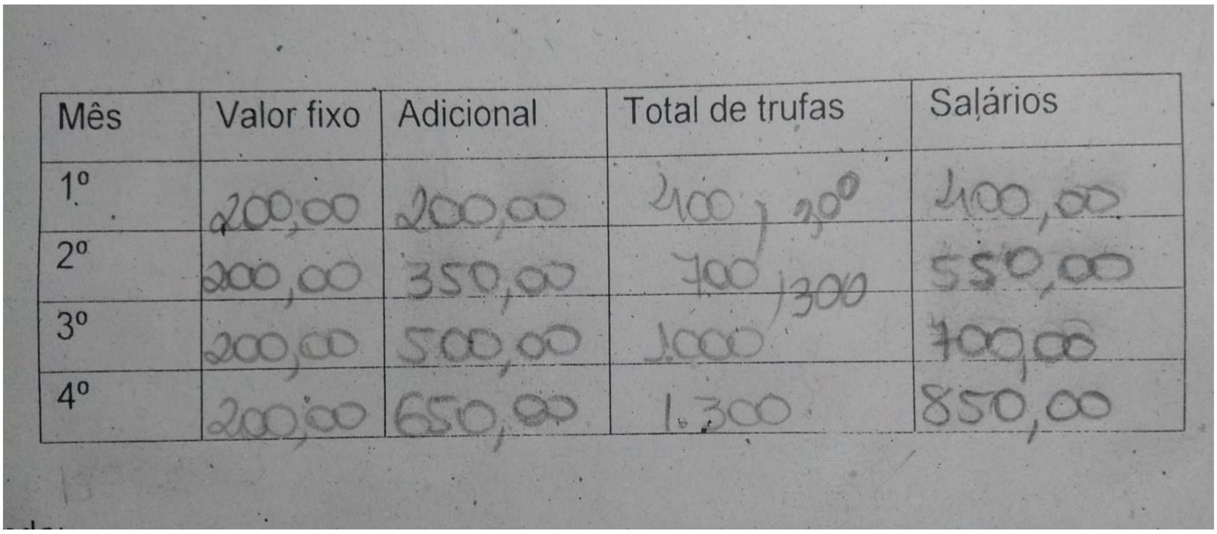
4.1.3 Atividade 3

Nessa atividade, decidi pela formação de novos grupos para que os componentes dos grupos que foram mais proativos pudessem se reunir com outros alunos. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) contemplam essa decisão ao estabelecer que o professor deve ficar atento ao processo investigativo para conceder a participação equilibrada dos alunos. De acordo com esse entendimento na presente atividade e nas seguintes os alunos formaram novos grupos.

Os alunos também foram elogiados em seus registros e relembrados da importância na organização dos escritos, tendo em vista a apresentação do trabalho. De acordo com os autores supracitados, é importante que os discentes sejam informados que suas elaborações serão mostradas aos colegas e que essa ação pode trazer para eles uma valorização pessoal. Dessa forma, os grupos foram incentivados a manter a organização dos trabalhos. Essa tarefa foi investigada em 115 minutos.

Após o início da atividade, o grupo “C” foi o primeiro a se manifestar que havia concluído a alternativa “a” e que estavam com dificuldades de elaborar a expressão matemática solicitada na questão “b”. Para preencher totalmente o quadro, exposto na figura 41, os alunos utilizaram a regra de três simples.

Figura 41: elaboração do grupo C na atividade 3.

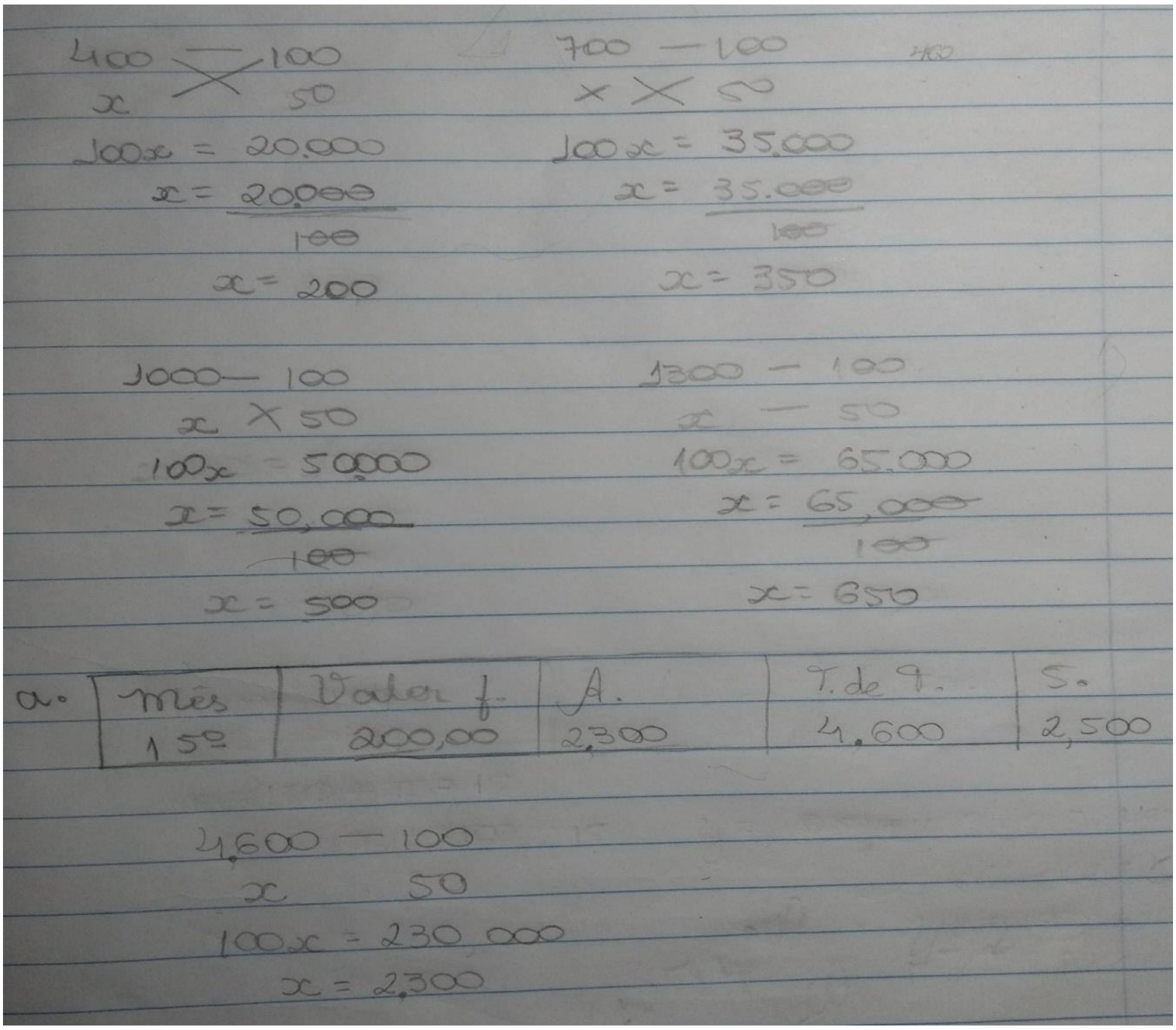


Mês	Valor fixo	Adicional	Total de trufas	Salários
1º	200,00	200,00	400) 300	400,00
2º	200,00	350,00	700) 300	550,00
3º	200,00	500,00	1.000	700,00
4º	200,00	650,00	1.300	850,00

Fonte: alunos do grupo C

Os valores que aparecem no quadro da figura 41 foram colocados da seguinte forma: primeiro, os alunos preencheram as colunas “valor fixo” e “total de trufas”. Para encontrar o valor adicional que é de 50% sobre a quantidade de trufas vendidas no mês, eles aplicaram a regra de três simples, como mostra a figura 42, em seguida somaram o resultado com o valor fixo e obtiveram o salário. A ideia utilizada para auxiliar no preenchimento do referido quadro também se estendeu para o item “a”, como mostra a figura 42.

Figura 42: operações feitas pelo grupo C para o item “a”.



Fonte: alunos do grupo C

É possível notar na figura 42 as operações com a regra de três simples para encontrar o valor do décimo quinto salário, mas também utilizaram o valor “4.600”, nos cálculos. Para encontrar a quantia de trufas para o mês em questão, os alunos expuseram o seguinte raciocínio: “*professor aqui está aumentando de 300 em 300, então a gente multiplicou 300 vezes 14 e deu os 4200, depois foi só somar com o primeiro valor* e deu 4600”. Observei que a estratégia utilizada para encontrar esse valor poderia ter sido usada para determinar o décimo quinto salário (o salário aumenta de R$ 150,00 em R$ 150,00, então $(150 \cdot 14) + 400 = 2500$). De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), os alunos iniciantes de um processo investigativo podem valer-se de uma mesma ideia na busca de resultados para a tarefa apresentada. Dessa forma, o método utilizado para encontrar o total das trufas do 15º mês poderia ter sido aplicado para encontrar tanto o valor adicional quanto o salário correspondente esse mês. Mas, só conseguiam imaginar a solução da questão com operações envolvendo regra de três simples. Retornando ao diálogo:

> P: - E a "b", o que me dizem?
> C4: - Só dúvidas! – Mas nós estávamos pensando assim, dá 200 mais a quantidade de trufas vendidas.
> C2: - Pode colocar $200 + x$ ou $y = 200 + x$.
> C4: - Tá certo né, porque usa "x" para o adicional e o resultado é o salário.
> P: - Parabéns! - Vocês construíram uma função. Vocês poderiam criar outra envolvendo outros valores da tabela?
> C1: - As colunas né?
> P: - O que vocês acham?
> C4: procura outra coluna para o lugar de "x" e a outra vai ser o resultado, o salário.
> P: - Como fica?
> C1: - Só se botar $y = 200 + 400$.
> C2: - Mas $200 + 400$ não é 400.
> C4: - E $200 + 700$ não é 550.
> P: - Pessoal com a função que vocês criaram como vocês utilizariam ela para calcular o salário do trigésimo mês?
> C3: 30 é? - 30 meses?
> P: - Sim.

Nessa hora os alunos silenciaram. Eles estavam focados na atividade, mas viam a questão somente em torno de valores presentes no quadro. Dessa forma, não ampliavam o olhar no sentido de elaborar uma expressão geral. Auro e Skovsmose (2010) pontuam que após o professor perceber que os alunos estão sintonizados, mas sinalizam dificuldades, cabe ao mediador compreender a perspectiva dos discentes, identificando como eles estão entendendo a tarefa. De acordo com esse entendimento, percebi que os alunos procuravam utilizar apenas duas colunas na busca da função. Dessa forma, não estavam conseguindo conjecturar no sentido de criar um termo que representasse o adicional envolvendo a porcentagem (50%) e a coluna do total das trufas. Segue o diálogo realizado com o grupo.

> C4: - É. – Tem que fazer a mesma coisa para a "a".
> P: - Nesse caso toda vez que for calcular o salário para meses diferentes têm que fazer como fizeram para encontrar o total das trufas na questão "a". O que acham?
> C3: - Ela é função, mas não é a que dá o valor direto né?
> P: - E ai, o que vocês acham?
> C4: É isso mesmo.
> P: - Isso o quê?
> C1: ela não dá o resultado sem precisar fazer esses de encontrar o total das trufas.
> P: - Então e agora?
> C1: - Começar do zero.
> P: - O que vocês acham de usar a porcentagem? (nesse momento deixei-os pensando sozinhos e fui até outro grupo).
> C4: - É sobre o total das trufas né?

> C1 e C3: - É.
> C4: - O adicional é 50% do total das trufas. – 50% de 400 é 200 e.
> C1: - E $200 + 200 = 400$.
> C4: - Então fica "y" igual a 200 mais 50% do total das trufas. – "x" é os 50% do total.
> C1: - Das trufas.
> C4: - É $y = 200 + 50\%$ do total, não o "x" é o total das trufas.
> C3: - Como é?
> C4: - É $y = 200 + 50\% \cdot x$.
> C2: - 50% é 0,5 aqui na calculadora.
> C4: - Agora deu, é $y = 200 + 0{,}5 \cdot x$, é $y = 200 + 0{,}5x$.
> C1: - Vamos ver logo se está certo?
> C2: - Vou colocar aqui a do 15. – 0,5 vezes 4600 é 2300.
> C4: - Mais 200 dá 2500, é tá certo.

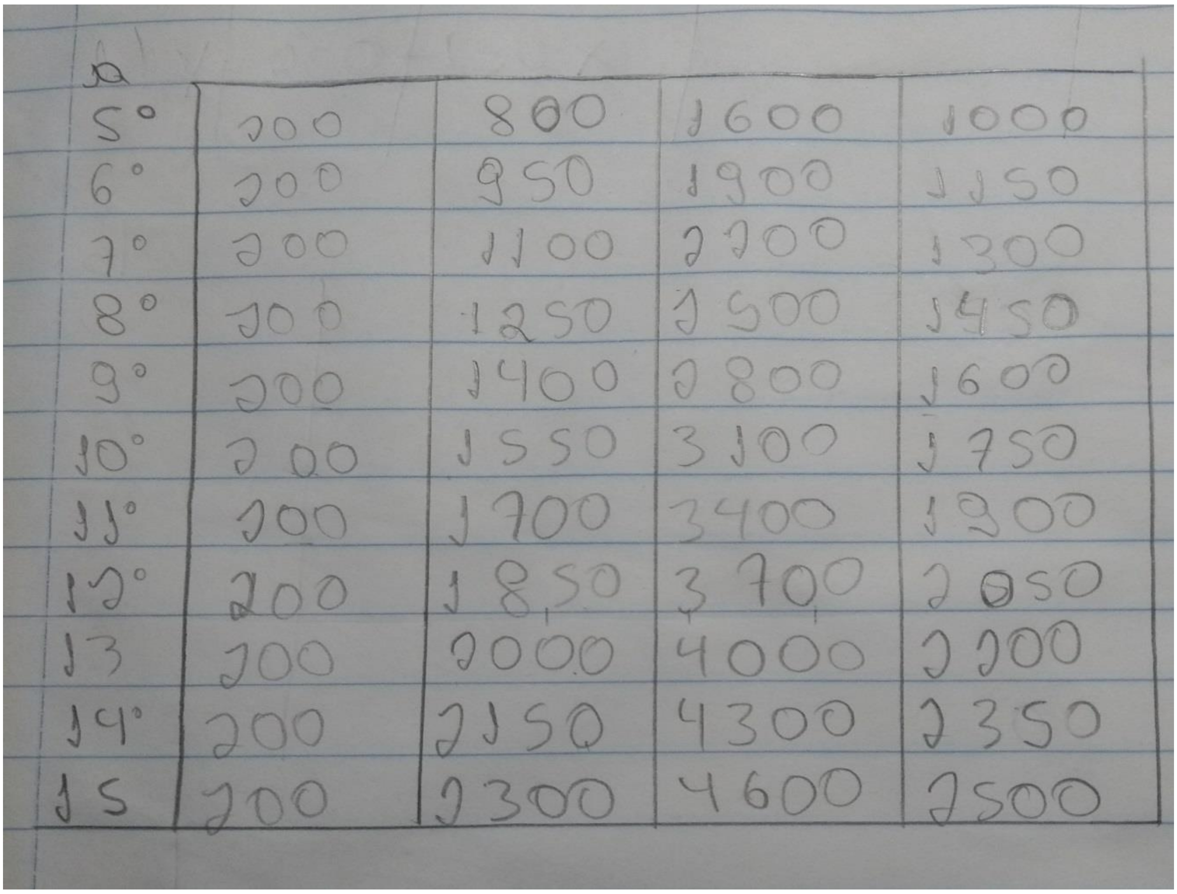
De acordo com Sadovsky (2010), o professor precisa estar atento ao jogo intelectual dos alunos, reconhecendo que eles são capazes de promover discussão de forma autônoma na busca do conhecimento. Partindo desse entendimento, após enfatizar que eles precisavam utilizar a porcentagem, deixei-os trabalhando no grupo. Nos áudios do referido grupo, percebi que eles conseguiram chegar à expressão que atendeu à solicitação da alternativa "b". Partindo da necessidade de utilizar a porcentagem surgiu uma conjectura da fala "*O adicional é 50% do total das trufas. – 50% de 400 é 200*". E, foi com amadurecimento dessa ideia, que a expressão foi elaborada.

Em relação aos gráficos, eles desenharam as retas, não compreenderam que deveria ser uma sequência de pontos alinhados. Para justificar o crescente ou decrescente da função, os alunos preferiram o quadro ao gráfico. Eles afirmaram que as funções eram tiradas do quadro e, nesta, os valores sempre cresciam, então as funções eram crescentes. Em relação a alternativa "e", concluíram que a taxa de crescimento da função é 150, porque o salário aumenta de 150 em 150. Mas, na apresentação em grande grupo, os alunos compreenderam que esse valor é proporcional à taxa presente na expressão $200 + 0{,}5x$. Foi nessa discussão que eles compreenderam que o gráfico é formado apenas por pontos alinhados.

O grupo "A" não apresentou dificuldades no preenchimento do quadro da figura 41, porque visualizaram que pelo porcentual o valor adicional de cada mês representava a metade das trufas do mesmo período. Para a coluna dos salários utilizaram a mesma estratégia utilizada por todos os grupos, somaram o valor fixo ao adicional. Em seguida, decidiram elaborar a expressão e depois utilizá-la para determinar o décimo quinto salário. Nesse sentido, construíram a função $y = 200 +$

$150x$. Para chegar a esse modelo, eles utilizaram a mesma ideia vista na apresentação da atividade anterior: olharam a variação do salário e consideraram que esse valor deveria acompanhar o “x” na expressão. Logo depois, quando os alunos foram calcular o décimo quinto salário, perceberam que não tinham o valor para “x” que seria o total das trufas. Essa situação levou-os a ampliar a tabela até o 15º mês, como mostra a figura 43.

Figura 43: mostra a ampliação do quadro da Figura 40, feita pelo grupo “A”.



5°	200	800	1600	1000
6°	200	950	1900	1150
7°	200	1100	2200	1300
8°	200	1250	2500	1450
9°	200	1400	2800	1600
10°	200	1550	3100	1750
11°	200	1700	3400	1900
12°	200	1850	3700	2050
13	200	2000	4000	2200
14°	200	2150	4300	2350
15	200	2300	4600	2500

Fonte: alunos do grupo A

Quando testaram a função que haviam elaborado para a questão “b” utilizando 4600 como sendo a variável “x”, perceberam que a expressão não estava correta. Assim, os alunos compreenderam que precisavam de novas conjecturas. Algumas ideias foram pensadas utilizando os valores do quadro por tentativas e erros, mas à medida que iam testando eram abandonadas porque não dava o valor do salário. Até que uma componente do grupo disse “*é 200 mais o adicional de 50% sobre o total das trufas, né?”*. Após uns instantes de discussão concluíram assim:

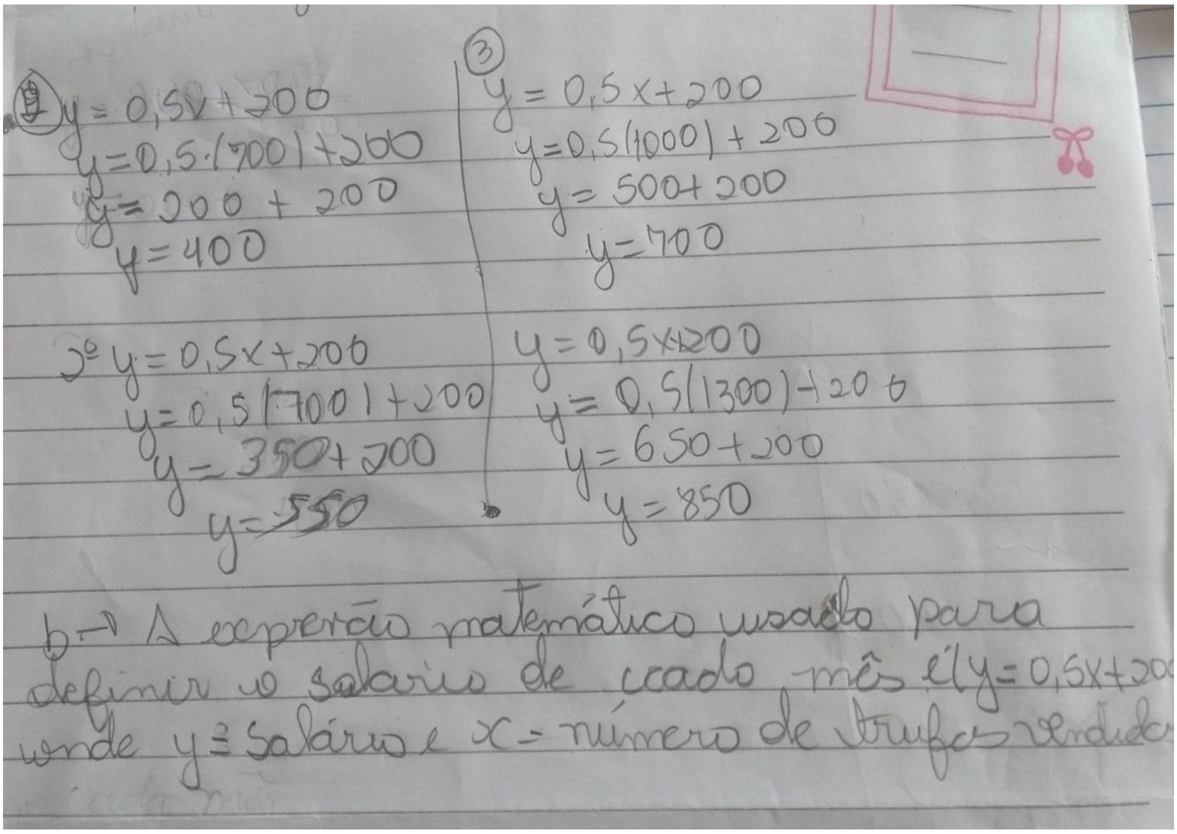
A3: - Então fica como mesmo?

A1: - É $y = 200 + x \cdot 50\%$ do... (aqui eles já haviam decidido trocar o "n" pelo "x", "*como vamos ter que fazer o gráfico, então ficava melhor com o "x"*").
A2: - Se botar os 400 não dá, ah dá.
A1: - Pior que tem que ficar só o resultado sem o "x".
A5: - Mas o "x" é as trufas.
A2 e A3: - É.
A1: É, é assim fica $y = 200 + x \cdot 50\%$, $y = 200 + x \cdot 0{,}5$, o escreve o "x" depois!
A5: - Vou ver no 4º mês.
A1: - Testar.
A5: - Dá certo.
A2: - vê o 15º também!
A5: - dá certo.
A4: - Ei os 50% é 0,5, fica melhor.
A1 e A5: - É isso mesmo, $y = 200 + 0{,}5x$.

Foi possível notar que a expressão foi elaborada a partir da interpretação da questão levantada pelo grupo: "*é 200 mais o adicional de 50% sobre o total das trufas né?"*. Em seguida, eles validaram o modelo utilizando os valores do quadro. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), é fundamental que os alunos manipulem seus dados procurando a validação do que criaram, pois nesse processo novas ideias podem surgir para refinar a conjectura trabalhada. Observei na discussão feita pelo grupo "A" que a função foi elaborada porque se comportaram de acordo com o estabelecido pelos autores supracitados.

Após algumas discussões com o professor, o grupo conseguiu construir o gráfico e explicar o crescimento da função relacionando os valores dos eixos "x" e "y" com suas respectivas colunas no quadro. Mas eles não conseguiram explicar corretamente a taxa de crescimento, sustentaram a mesma ideia do grupo "C", que é igual a 150. Já o grupo "B" não mostrou dificuldades em preencher o quadro da figura 41, depois que desistiram da regra de três, porque não conseguiram fazer o uso correto dessa estratégia para calcular o percentual do valor adicional. Pela maneira que operavam essa regra encontravam a porcentagem correspondente ao total de trufas e não a quantidade referente ao adicional. Como o valor encontrado era bem menor que o esperado, eles preferiram mudar de estratégia. Começaram uma nova busca preenchendo a coluna do adicional com o valor "0,5", porque eles procuravam alternativas com base no texto "um adicional de 50% sobre o total de trufas". Essa ideia os levou à questão "b", como declara a fala de um aluno: "*a gente faz a expressão e já responde a "b" também*, *porque é só multiplicar o 0,5 e soma com o fixo"*. A partir dessa conjectura, eles preencheram o quadro utilizando a expressão $0{,}5x + 200$, como mostra a figura 44.

Figura 44: forma como o grupo B preencheu a coluna dos salários do quadro exposto na Figura 41.



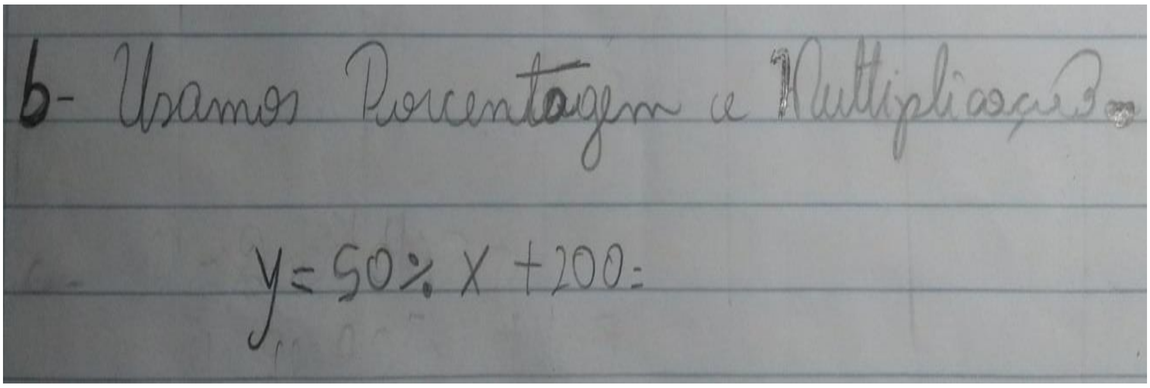
Fonte: alunos do grupo B

É possível observar na figura 44 que o grupo utilizou apenas a expressão criada para encontrar os valores dos salários. E especificaram no texto para a questão "b" os significados das incógnitas. De acordo com Auro e Skovsmose (2010) quando os alunos procuram decidir por si mesmos qual fórmula usar e qual operação fazer sem o auxílio do professor, é porque ganharam autonomia no cenário investigativo. De acordo com esse entendimento, para a alternativa "a" perceberam que precisava da quantidade de trufas correspondente ao décimo quinto mês. Então eles ampliaram a coluna dessa quantia até a linha de interesse, em seguida aplicaram a expressão.

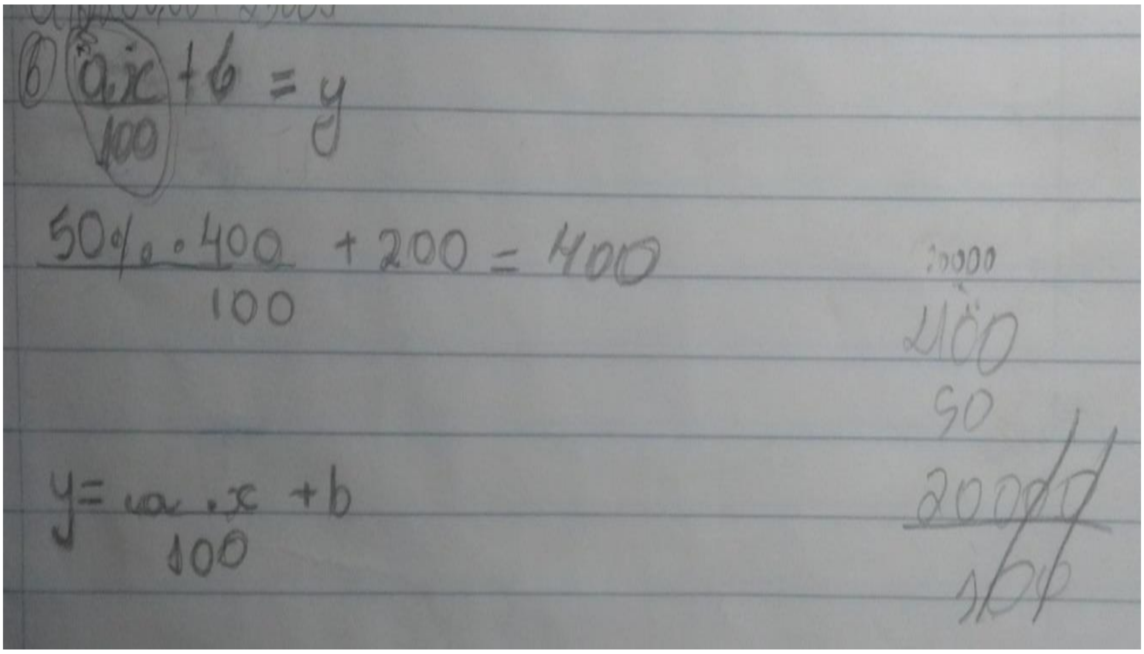
No desenho do gráfico, eles colocaram os pontos e quando foram traçar a reta um dos colegas perguntou: "*porque pode ser só a reta e não os pontos?"*. Eles decidiram pela reta porque a maioria enfatizou que a representação do gráfico devia ser desta forma. Na apresentação final, o grupo percebeu a partir da explanação de outros alunos que o certo seria somente os pontos. Em relação à alternativa "d", colocaram que a função é crescente por causa do valor "150" tirado da variação dos salários. Esse foi mais um grupo o qual relacionou os valores do quadro para justificar o comportamento do gráfico. Ademais, 50% seria a taxa, pois com base nos conhecimentos que tinham sobre juros lembraram que o termo "taxa" estaria relacionado com porcentagem.

Os componentes do grupo "A" fizeram sua investigação praticamente sem solicitar interposição do professor. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 28) "o aluno deve sentir que suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor". Dessa forma, a confiança do grupo (construir suas elaborações sem a interposição do professor) pode estar ligada à satisfação sentida por eles nas atividades anteriores, já que não eram avaliados de forma negativa por seus feitos. Os grupos "D" e "F" também agiram de forma idêntica ao "B", pouco solicitaram a presença do professor. Os referidos grupos tomaram como estratégia para a alternativa "a", a ampliação do quadro da figura 41, até a 15ª linha. Também colocaram na coluna do adicional a porcentagem (50%). Com essa ideia, eles não tiveram dificuldades em elaborar a expressão para o item "b". A figura 45 mostra as funções elaboradas.

Figura 45: expressões elaboradas pelos grupos "D" e "F" para a questão "b" mostrada na figura 18.



(Continuação)

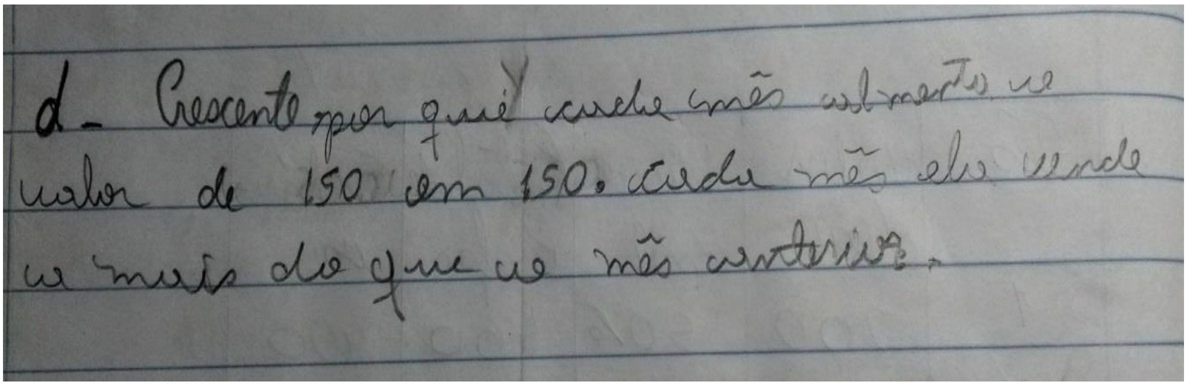


Fonte: alunos dos grupos D e F

Na figura 45, a primeira imagem foi tirada dos escritos do grupo “D” e a segunda dos registros do grupo “F”. É possível notar na primeira imagem que eles anotaram “usamos porcentagem e multiplicação”. Esse registro serviu como apoio na apresentação final, para explicar como chegaram à expressão. O grupo “F” também fez sua apresentação utilizando a conta que aparece à direita da segunda imagem para comprovar a veracidade de sua expressão. Mesmo assim, como os outros grupos, recorriam ao quadro para validar o que explicavam. O grupo defendeu a expressão $y = 50\%\, x + 200$, porque diziam que a função pertencia àquela atividade e, nesta, aparecia o percentual 50%. Já o grupo “F” chamou atenção da turma, pois alguns alunos apoiaram e outros disseram que daquela forma estava complicado. Eles chegaram ao modelo, exposto na segunda imagem da figura 45, porque dois componentes do grupo tiveram contato com a função do 1º grau na série anterior.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) comentam que é comum grupos com conhecimentos diversificados elaborarem resultados variados, porque apresentam interpretações distintas. De acordo com esse entendimento, o grupo “F” elaborou sua função com base no conhecimento prévio dos alunos. Para chegar a conclusão partiram do modelo $y = ax + b$ e foram fazendo adaptações e testando, sendo que os resultados eram comparados com os valores da coluna dos salários. Dessa forma, o quadro serviu como apoio para validar a demonstração. Em relação ao item “d” o grupo “F” expos uma justificativa similar à dada pelo grupo “A”, já o grupo “D” registrou uma justificativa diferente como mostra a figura 46.

Figura 46: justificativa do grupo D para a alternativa “d” da atividade encontrada na Figura 18.

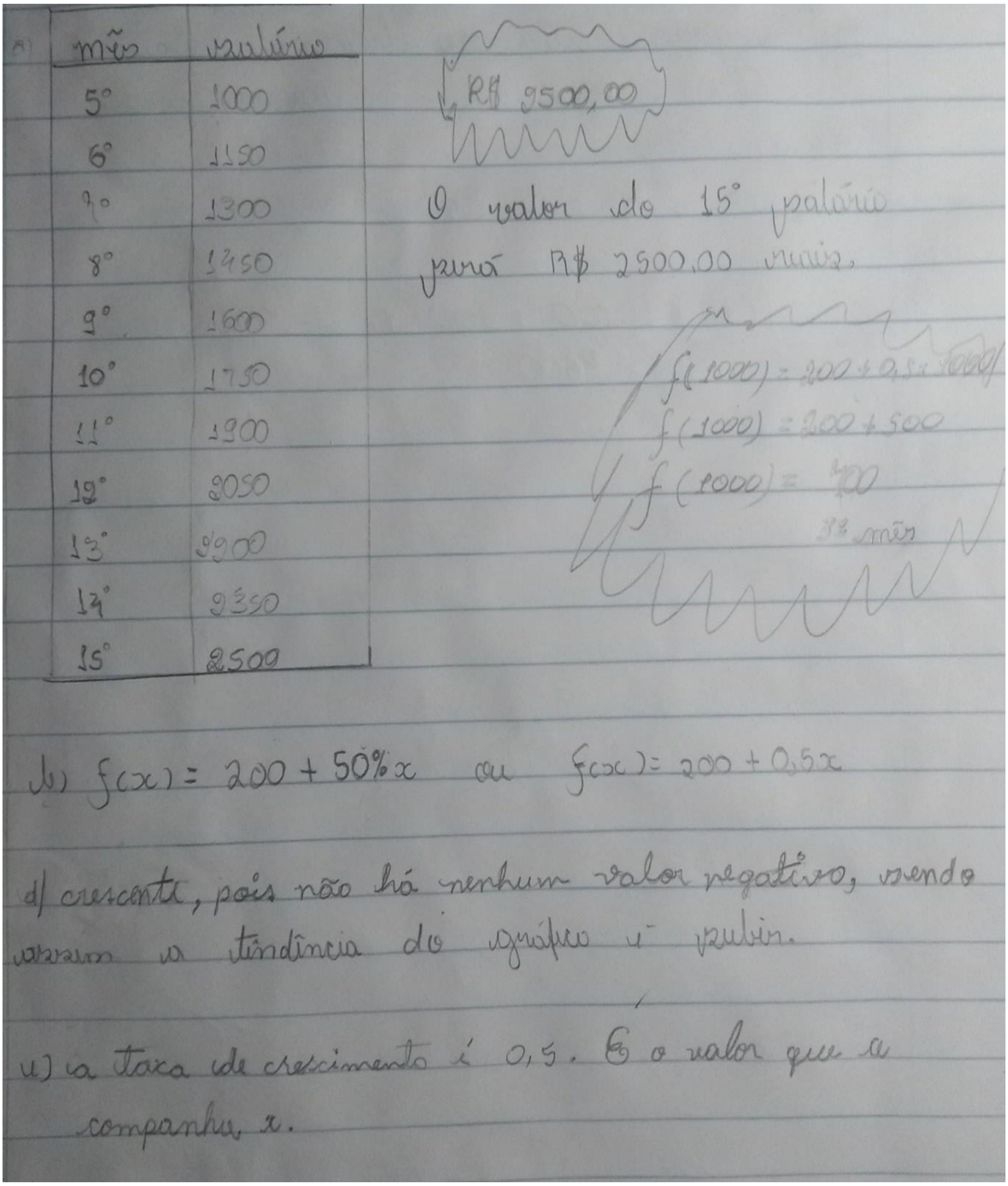


Fonte: alunos do grupo D

O texto exposto na figura 46 para justificar o crescimento da função $y = 50\%\, x + 200$ demonstra como o grupo elaborou a ideia de função crescente. Percebe-se no registro o conceito de função crescente expresso por Paiva (2015, p. 140): “uma função f é crescente em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 de A, com $x_2 > x_1$, a imagem de x_2 é maior que a imagem de x_1 através de f”. Eles contemplaram esse entendimento ao justificar que o número de trufas era cada vez maior e, consequentemente, os salários também. Em relação ao item “e”, esses dois grupos tiveram a mesma percepção do grupo “B”.

O grupo “E” efetivou a discussão dos acontecimentos a partir da figura 47 em que aparece os registros desse grupo. Saliento que a organização dos dados na folha do caderno teve como intenção a apresentação final, já que iriam fotografar para mostrar na lousa digital e, a partir da imagem, efetivaram as explicações.

Figura 47: registros do grupo E para a atividade da Figura 18.



a)

mês	salário
5°	1000
6°	1150
7°	1300
8°	1450
9°	1600
10°	1750
11°	1900
12°	2050
13°	2200
14°	2350
15°	2500

R$ 2500,00

O valor do 15° salário será R$ 2500,00 reais.

$f(1000) = 200 + 0,5 \cdot 1000$

$f(1000) = 200 + 500$

$f(1000) = 700$

3º mês

b) $f(x) = 200 + 50\%x$ ou $f(x) = 200 + 0,5x$

d) crescente, pois não há nenhum valor negativo, sendo assim a tendência do gráfico é subir.

c) a taxa de crescimento é 0,5. É o valor que acompanha x.

Fonte: alunos do grupo E

É possível notar na figura 47 que os componentes do grupo “E”, diferente dos outros grupos, decidiram ampliar apenas a coluna dos salários até a linha do 15º mês. O diálogo seguinte esclarece o preenchimento do quadro da figura 41 e como escolheram a ampliação da coluna citada.

> E2: - Aqui nós vamos pegar a metade de cada mês.
> E1: - Ah, é mesmo.

E2: - O adicional é a metade das trufas.
E4: - Por quê?
E2: - É a metade de cada valor, 50%.
E4: - E o fixo bota direto né?
E1: - É o que ele sempre vai ter, é bota tudo igual.
E3: - E aqui?
E2: - Vai coloca aí 550, 700 e 850, vamos ver o outro.
E3: - Pronto, e o outro?
E2: - O outro? Ah é.
E4: - Mantendo esse padrão de crescimento qual o valor do quinto salário?
E1: - Padrão, o quê?
E2: - É o crescimento, o padrão entendeu?
E1: - As três cresce.
E2: - Mas é só o salário que tá pedindo.
E4: - É cresce de 150 em 150 vi aqui.
E2: - Coloca aí!
E3: - Onde? - Só se for em baixo, não dá.
E4: - Coloca aqui mesmo.
E2: - É só ir somando com 150 até chegar, mas é só fazer uma só pra ele.

É possível notar no diálogo que todos os componentes do grupo estavam envolvidos na elaboração da resposta para a alternativa “a”. E assim conseguiram chegar ao resultado correto. Observando a figura 47, percebi que os estudantes tiveram o cuidado de explicar o significado do valor registrado na linha correspondente ao 15º mês. Nessa acepção Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 40) afirmam que “somente o trabalho continuado com esse tipo de tarefa pode levar os alunos a compreenderem a necessidade de justificarem matematicamente as suas afirmações”. Destaco que foi a partir das falas: “*Mas é só o salário que tá pedindo; É cresce de 150 em 150 vi aqui*”, que eles conseguiram chegar às justificações. Para a questão “b” (figura 18), eles não tiveram dificuldades em elaborar a expressão. Após alguns minutos de discussão, os alunos chegaram a seguinte conjectura:

E2: - Vai ser $y = 200 + 50x$, 50 é 50%.
E3: - É $50x$ ou 50% de x?
E2: - 50% de x.
E4: - É uma função, é melhor botar $f(x)$.
E2: - Não deixa “y”.
E4: - Mas é função.
E2: - Qual é a diferença?
E4: - Expressão deixa “y” e função deixa $f(x)$.
E2: - Deixa $f(x)$ mesmo.
E1: - Depois é só mudar no gráfico.
E2: - Então deixa $f(x) = 200 + 50\%\, x$, pode botar as duas.
E4: - Pode ser também $f(x) = 200 + 0{,}5x$, 50% é 0,5 mesmo.
E2: - É bota as duas ai a gente explica as duas.
E3: - Pronto tá feito.
E2: - Bota o ou.
E4: - É.
E2: - Vamos ver se dá certo no salário de 15 meses.

Dessa forma, o grupo chegou à função para a questão "b" mostrada na figura 47. É possível perceber que eles ficaram em dúvida a respeito das formas "y" ou "f(x)" para iniciar o modelo da função. Percebi também que a ideia, "*vai ser* $y = 200 + 50x$*, 50 é 50%*", foi formulada com base na interpretação do preenchimento da coluna dos adicionais da figura 41. Ao finalizar a expressão, um dos componentes do grupo teve a ideia de convidar os colegas para testar a função utilizando como prova o resultado do 15º salário. Mas, é perceptível na figura 47 que eles decidiram ser válida a expressão, elaborada ao testarem com os valores do 3º mês, exposto no quadro da figura 41. Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 40) enfatizam que "à medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas".

Diante das descrições anteriores exponho que os alunos mostraram evolução em relação às atividades que estavam sendo exploradas. Esse crescimento pode estar ligado à metodologia empregada, pois perceberam que suas ideias podem ser elaboradas de forma autônoma ou com o auxílio do professor e no final são valorizados por suas resoluções e conclusões.

4.1.4 Atividade 4

A presente atividade teve início com alunos empenhados no trabalho, o tempo que levaram para a investigação foi de aproximadamente 90 minutos. Após receberem a tarefa e o professor sinalizar que já podiam iniciar, porque os gravadores já haviam sido ligados, os grupos começaram a leitura do enunciado da questão. Para Boavida e Ponte (2002, p. 7), a confiança é fundamental para que os participantes se sintam seguros para questionar abertamente as suas ideias e valorizar as propostas dos pares nas elaborações do grupo. Combinado esse entendimento com o comportamento dos alunos, percebi que a turma se encontrou com a metodologia empregada. O grupo "A", depois de encerrar a leitura da atividade, começou a discussão em torno das alternativas "a" e "b", mas preferiram encontrar a função primeira. Passados 15 minutos um aluno disse, "*do jeito que está aqui a função é* $1 + x$". Ele teve esse entendimento com base na disposição do ponto (1, 2) no xadrezado. Segue a discussão voltada para a expressão.

> A1: - “x” equivale a que?
> A4: - “x” equivale a 1 real.
> A3: - Tipo assim “x” é o copo, se eu comprar 3 sucos dá 3 reais.
> A4: - Mas acho que é 4, olha aqui 3 dá 4.
> A1: - É 1 mais 3, é porque a função é $1 + x$.
> A3: - Mas $1 + 5$ é igual a 6 e $1 + 7$ é igual a 8, ai é $1 + x$ mesmo.
> A1: - E “y” vai ser ...
> A4: - O resultado final.
> A1: - E o 1 da fórmula?
> A4: - “y” vai ser o valor aqui e o “1” é o valor fixo que acrescenta.
> A2: - Mas “x” num equivale a 1 real?
> A4: - É.
> A1: - Então o que é mais vantajoso? (a aluna se refere ao item “c”).
> A4: - Pagar os 50 copos, porque vai sair mais caro se for cada copo por dia.
> A1: - O que tu está falando? (a aluna mostra que está discordando).
> A4: - Porque se tu comprar um copo separado vai ser diferente de tu comprar o completo.
> A3: - Mas ele não vai saber o valor do copo completo.
> A1: - O copo é 1 real.
> A3: - Mas aqui 3 copos é 4 reais, então 1 copo não é 1 real.
> A1: - Aí se ele comprar 3 copos o dono lucra 4 reais, é o copo é mais de 1 real mesmo.
> A3: - É.
> A1: - Se ele botar 5 copos e paga 6 reais, então é mais de 1 real mesmo.
> A3: - Então quanto mais copo ele comprar menor vai ser o preço.
> A4: - Era isso que eu estava dizendo e vocês não entenderam.
> A3: - É 50 copos vai sair 1 real a mais, ai se tu dividir 50 por 51 via ficar ...
> A4: - 1 real e 2 centavos.
> A3: - E aqui fica quanto? Vê ai!
> A4: - 4 dividido por 3 é ... dá 1,33 aproximado.
> A3: - Entendeu? Se comprar 100 copos vai pagar 101.
> A4: - Cada copo sai por 1 real e 1 centavo.
> A3: - Olha aí, 1 real e 1 centavo.
> A1: - E aqui na “c” os 50 copos? Tem que explicar e fazer os cálculos.
> A3: - Deixa eu fazer logo.
> A4: - É desse jeito que eu estou fazendo aqui.
> A1: - Mas tem que justificar.
> A4: - a primeira está errada, porque o copo não é 1 real.
> A1: - Mas aí é a função.

É possível notar no diálogo anterior que a partir da percepção do aluno “*do jeito que está aqui a função é* $1 + x$” eles aceitaram a ideia, mas se equivocaram em dizer que o valor de “x” seria um real. Tomaram como referência apenas a primeira coordenada do xadrezado (1, 2), ficaram preso ao resultado 2 (dois), ou seja, $y = 2$. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) é comum os alunos aceitarem suas conjecturas depois que fizeram apenas um número reduzido de testes. Os autores acrescentam que essa tendência pode ser combatida pelo docente durante a discussão, estimulando-os a procurar novos contraexemplos. Mas, o grupo estava tão focado na atividade que não precisou da interposição do professor para notar que no modelo elaborado havia algum erro. Essa percepção foi possível a partir do momento em que eles dialogavam sobre a alternativa “c”, em que um aluno disse que era melhor “*pagar os 50 copos, porque vai sair mais caro se for cada copo por* *dia"*. Em seguida explica: "*porque se tu comprar um copo separado vai ser diferente de tu comprar o completo*". A partir do teste que sustentou essa conjectura, os alunos perceberam que o valor do copo de suco não seria R$ 1,00, como haviam pensado quando elaboraram a função. Depois que registraram uma justificativa para a alternativa "c" eles retomaram a discussão para elaborar o modelo solicitado pelo item "b" da atividade.

> A4: - Ainda tem o modelo da função.
> A3: - Eu too achando que ela vai ser $y = \frac{x+1}{50}$.
> A4: - Ai complica mais.
> A3: - Mas vê ai, 51 dividido por 50?
> A2: - Dá 1,02.
> A3: - Olha ai, é o preço, sai mais em conta os 50 copos. Deu a mesma coisa a função.
> A4: - Rapaz nós estava certo, a função é $y = x + 1$ mesmo, tu acabou de usar. Ai é o preço de um copo. Não é a função.
> A1: - É isso mesmo, nós estávamos certos. Mas o "x" não é o valor de um real.
> A4: - É a quantidade de copos de suco do eixo "x".

Nesse episódio, o aluno utilizou a função para encontrar o preço de 50 copos de suco sem notar que estava fazendo uso do modelo procurado. Mas, seus colegas observaram que a ideia defendida por eles voltava a ser válida, pois bastava relacionar a quantidade de copos de sucos com o eixo cartesiano apropriado. Nesse sentido, Boavida e Ponte (2002) enfatizam a riqueza dos trabalhos em grupos colaborativos, que aparece na medida em que as discussões se entrelaçam provocando a construção de novas compreensões. Dessa forma, os componentes desse grupo foram elaborando suas justificativas. Outro momento que contempla o entendimento dos autores antes citados ocorreu no diálogo voltado para o item "d".

> A4: - Dois copos por dia, no primeiro dia vai ser 3 reais e no segundo mais 3, até acabar os 10 dias.
> A3: - É então é mais vantajoso os 20 copos de uma vez.
> A1: - O valor do copo.
> A4: - É 21 por 20, o valor pelo total de copos.
> A2: - Dá 1 real e 5 centavos e os dois copos é 3 reais, um sai por 1 e 50.
> A2: - A diferença é de quarenta e cinco centavos (R$ 0,45).
> A4: - 20 vezes 0,45 dá quanto?
> A2: - 9 reais.
> A4: - Ai é o que passa dos 21 reais dos 20 copos.
> A3: - Entendi, se comprar os 20 dá 21 reais e se comprar de 2 em 2, cada copo aumenta 45 centavos.
> A2: - É, 20 vezes 0,45 é 9.
> A4: - Então vai dá 30 reis. É os 21 mais os 9, entendeu?
> A1: - É, entendi, mas é isso mesmo, 10 etapas de 3 reais é 30 reais.
> A4: - É mesmo.
> A3: - Desse jeito é até melhor para falar.
> A2: - É mesmo, 10 vezes 3 é igual a 30. O outro sai 9 reais mais barato.

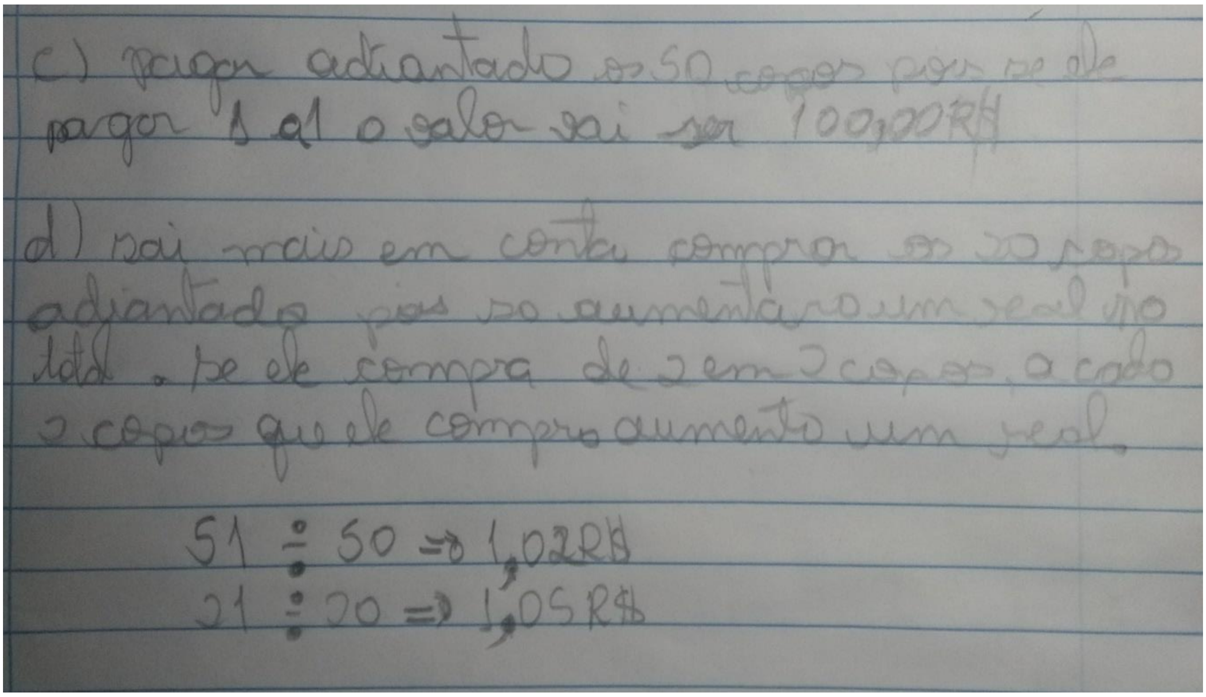
É possível perceber que por meio da ideia "*a diferença é de quarenta e cinco centavos (R$ 0,45)*" eles conseguiram elaborar uma conjectura que foi validada por eles mesmos no momento em que perceberam que com as 10 etapas de R$ 3,00, encontrariam o mesmo valor. Em relação a alternativa "a" eles justificaram corretamente, assim como o grupo "B", registraram os pontos e depois contaram.

Para elaborar a função solicitada, o grupo "B" utilizou o xadrezado e a disposição das coordenadas (1, 2), (2, 3) e (3, 4). Com os números que formavam cada um desses pontos fizeram expressões numéricas simulando ser expressão algébrica. O diálogo seguinte mostra como isso ocorreu.

> B4: - Olha só! $1+2=3$, $1+3=4$ e $1+3=4$. O "1" vai ser o fixo.
> B2: - Ah, é mesmo o 1 vai ser o fixo.
> B4: - Fica 1 mais a quantidade de copos de suco vendidos.
> B1: - Então é $y = 1 + x$

Com essa estratégia conseguiram chegar ao modelo em poucos minutos de discussão. É possível perceber que procuraram um número fixo que somado ao primeiro valor (x) resultava no segundo (y). As alternativas seguintes foram investigadas com o apoio dessa função. A figura 48 destaca o que o grupo "B" preparou para a apresentação final.

Figura 48: justificativas do grupo B para os itens "c" e "d".



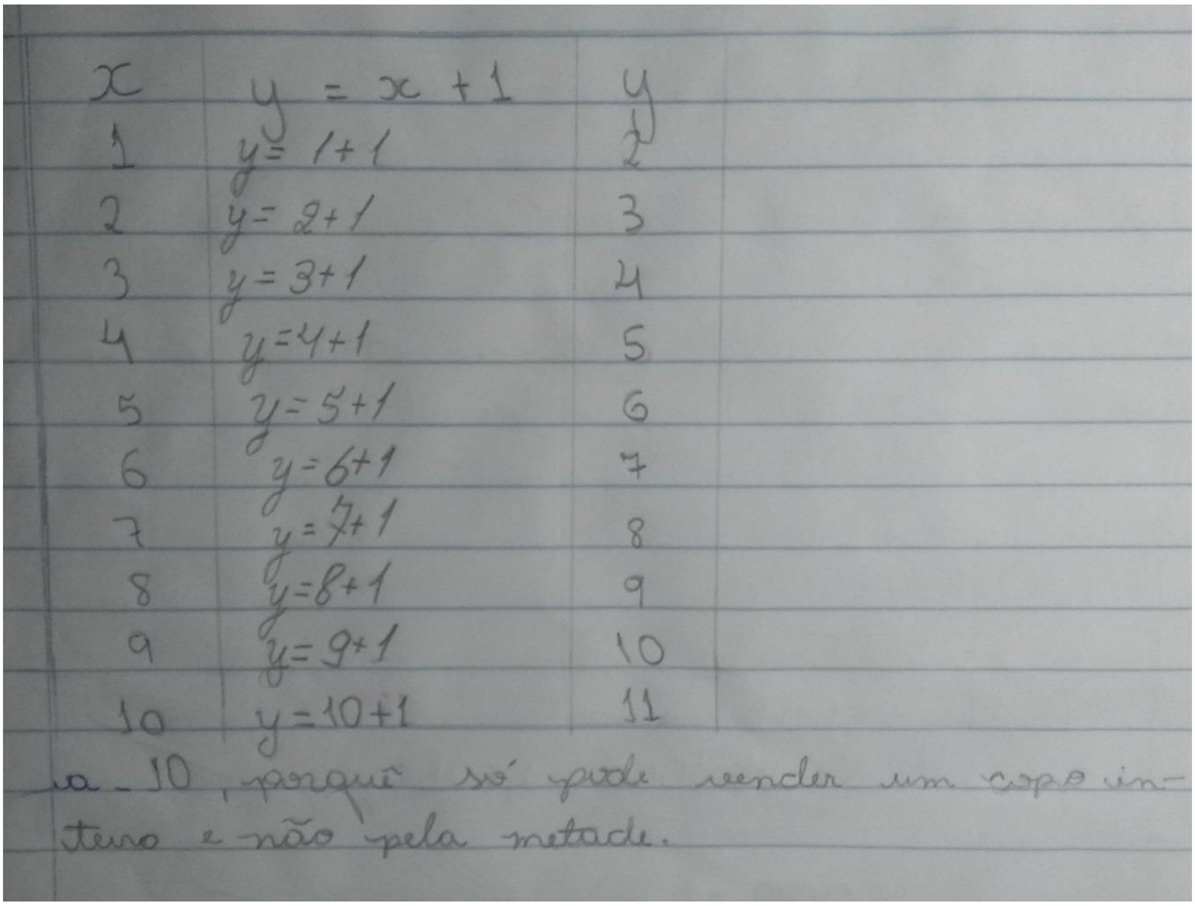
Fonte: alunos do grupo B

É possível perceber, no final da figura 48, na justificativa dada ao item “c” o cálculo: $51 \div 50 = 1{,}02$. O resultado dessa expressão significa: se pagarem os 50 copos adiantado cada um sai por R$ 1,02. Caso prefira de 1 em 1 o valor é R$ 2,00. Em relação à alternativa “d” a justificativa exposta na figura 48, ficou mais explícita na apresentação do grupo. Na expressão “*os 20 copos adiantado pois só aumenta um real no total*” quiseram dizer que para um total de 20 copos de suco o valor a ser pago é R$ 21,00, ou seja, somaram ao número 20, que representa a quantidade de copos o valor de R$ 1,00. Deu para notar que consideraram o valor fixo como sendo R$ 1,00, já que o resultado da função seria um valor em reais. Para o trecho, “*se ele comprar de 2 em 2 copos, a cada 2 copos que ele compra aumenta um real*”, explicaram que ao substituir “x” por 2 na função o resultado encontrado seria R$ 3,00 e, dessa forma, na compra de dois copos aumenta R$ 1,00 nesse valor.

Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) destacam que é natural com alunos iniciantes do processo investigativo alguma dificuldade em expor por meio da escrita o que estão pensando, porque não estão habituados a comunicar suas ideias. Nas explicações do grupo ficou explícito que os alunos aplicaram corretamente a função elaborada, chegando a resultados que justificam as alternativas da atividade, porém as dificuldades com a comunicação escrita levaram-no a não escrever o que tinham concluído.

O grupo “C” não teve dificuldades em investigar a presente atividade, comunicando de forma clara suas justificativas. Para os itens “b”, “c” e “d” obtiveram os mesmos resultados dos grupos anteriores, mas em relação à alternativa “a” registraram o seguinte: “*10 pontos, porque o xadrezado está representando apenas as vendas de 10 copos de suco na lanchonete*”. O grupo “D” também criou a função $y = x + 1$. Os alunos visualizaram esse modelo a partir da afirmação “*quando for 2, no resultado é 3*”. Eles utilizaram o modelo em um quadro (Figura 49) para calcular todos os pontos possíveis do xadrezado. Essa ideia foi utilizada para a justificativa de todos os itens da atividade.

Figura 49: quadro elaborado pelo grupo D.



x	y = x + 1	y
1	y= 1+1	2
2	y= 2+1	3
3	y = 3+1	4
4	y=4+1	5
5	y= 5+1	6
6	y=6+1	7
7	y= 7+1	8
8	y=8+1	9
9	y= 9+1	10
10	y=10+1	11

a_10, porque só pode vender um copo inteiro e não pela metade.

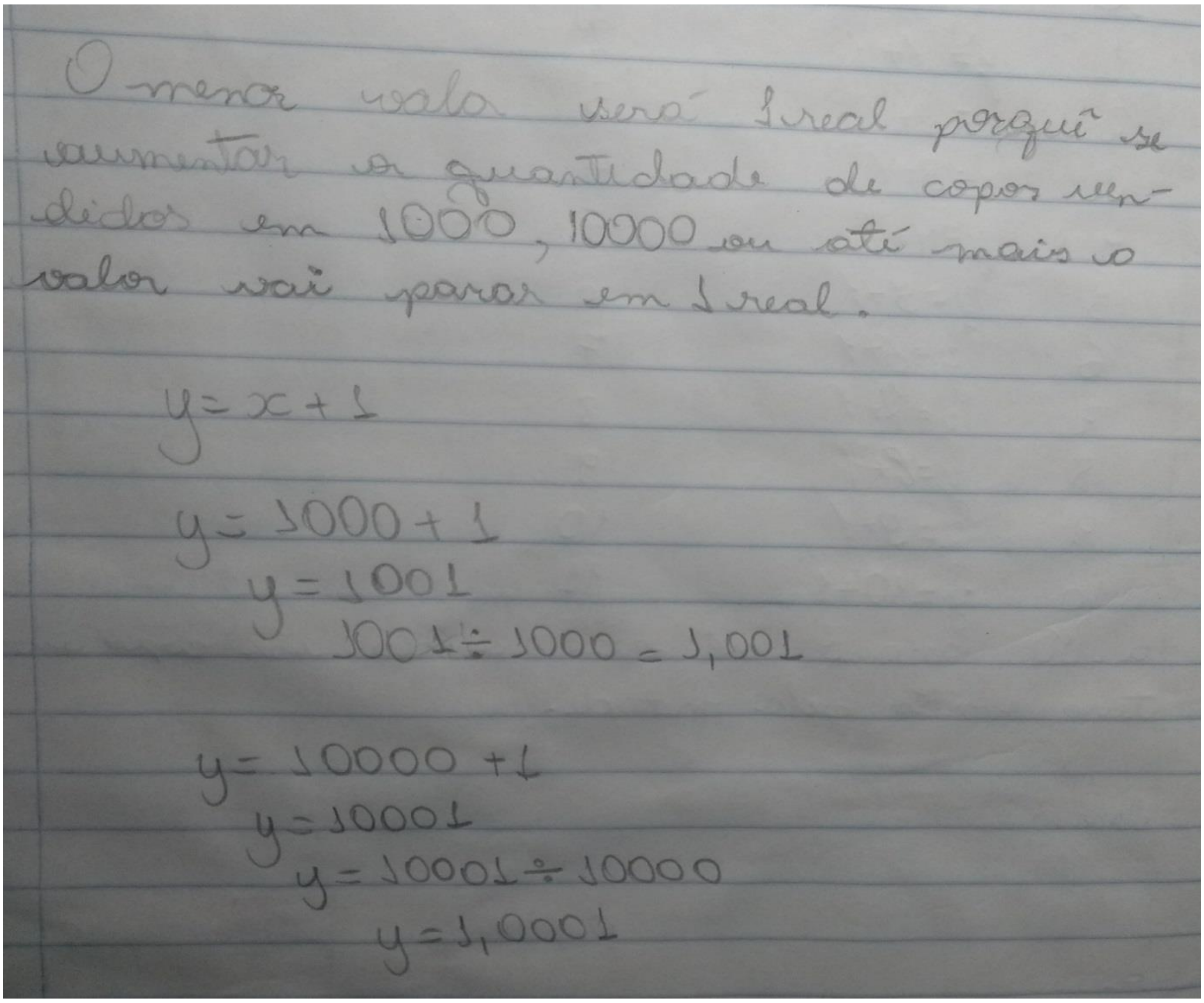
Fonte: alunos do grupo D

Concluíram para o item “a” que no quadro o “x” iria até 10 e o “y” até 11, dessa forma só era possível 10 pontos. Um dos componentes do grupo questionou porque não poderia ser mais pontos. Um dos componentes repetiu a informação já concluída pelo quadro para explicar: “é só se vendesse a metade de um copo”. É possível notar na figura 49 que a resposta à dúvida do aluno serviu como orientação para a justificativa do item “a”. O quadro também foi estrategicamente utilizado para justificar as alternativas “c” e “d”. O diálogo seguinte apresenta as discussões para esses itens.

> D1: - É verdade, do jeito que vai ai, se comprar 50 paga 51 reais é sempre 1 a mais.
> D3: - No caso aqui é mais vantajoso os 50, pela tabela 1 é 2, então os 50 vai ser 100 reais.
> D1: - E na questão “d” é a mesma coisa, é melhor os 20, de 2 em 2 fica mais caro.
> D3: - Como é ela mesmo?
> D1: - Está perguntando se é melhor os 20 de uma vez ou de 2 em 2. São 10 etapas.
> D3: - Isso mesmo, cada etapa é 3 reais. As 10 dá 30.
> D4: - É melhor os 20 mesmo.

As conclusões rápidas do grupo mostram que o quadro auxiliou no entendimento dessa atividade. Com aproximadamente 40 minutos o grupo já havia elaborado todas as justificativas solicitadas pela atividade. Os alunos perguntaram ao pesquisador se já podiam esperar o momento da apresentação final. Como os outros grupos ainda estavam trabalhando, solicitei que mostrassem o maior e o menor preço a ser pago por um copo de suco. Eles, no mesmo instante, olharam para o quadro e disseram que o maior preço seria R$ 2,00. A figura 50 mostra os resultados das discussões para o menor preço.

Figura 50: expõe elaborações do grupo D.


O menor valo será 1 real porquê se aumentar a quantidade de copos vendidos em 1000, 10000 ou até mais o valor vai parar em 1 real.

$y = x + 1$

$y = 1000 + 1$

$y = 1001$

$1001 \div 1000 = 1,001$

$y = 10000 + 1$

$y = 10001$

$y = 10001 \div 10000$

$y = 1,0001$

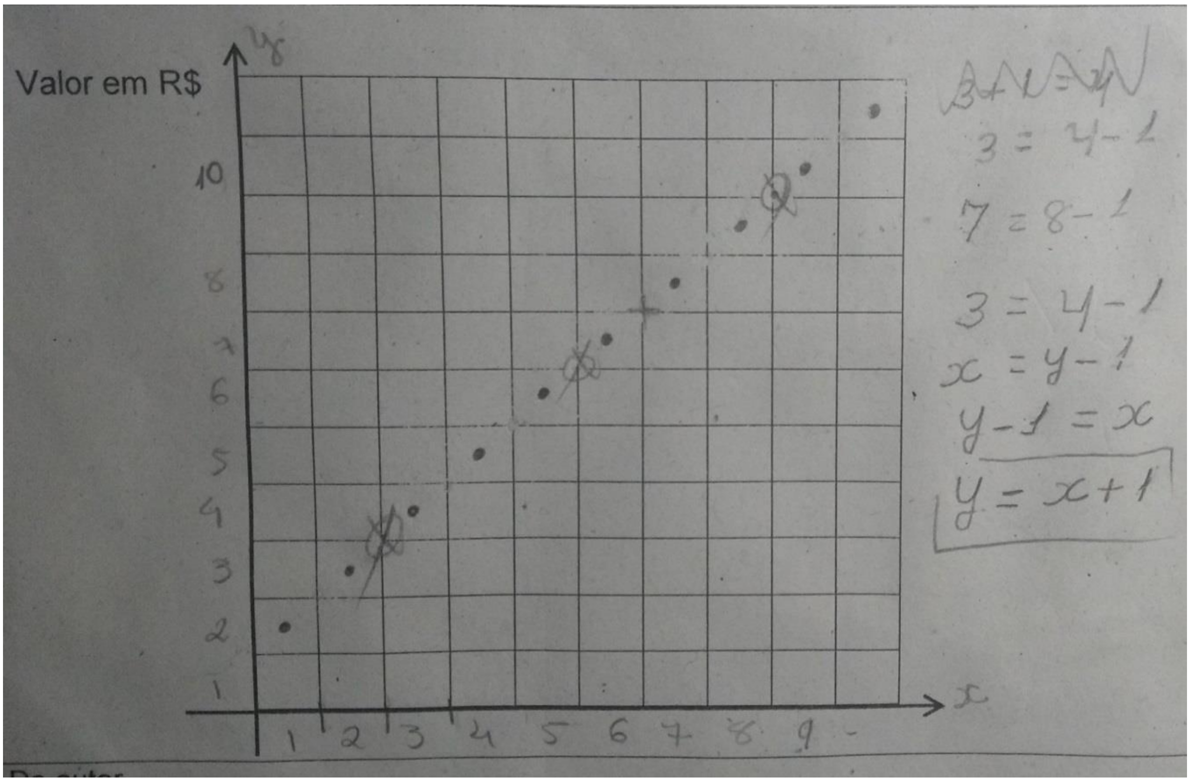
Fonte: alunos do grupo D

É possível perceber na figura 50 que a justificativa dos alunos lembra a ideia de limite de uma função. Houve questionamentos entre eles sobre essa aproximação. A discussão se encerrou quando um dos pares disse que não tinha como cobrar os valores correspondentes a um milésimo ou um décimo de milésimo.

"*Não tem como cobrar esses valores depois da vírgula, eles não valem nem um centavo*", esse foi o posicionamento que o grupo levou para a apresentação. Mas, foi nesse momento, que ocorreram muitos questionamentos. Os alunos diziam que, embora não tivesse como cobrar, os membros do grupo "D" não podiam dizer que o valor iria para R$ 1,00, já que teria números após a vírgula. A discussão encerrou quando uma aluna foi ao quadro e fez o cálculo correspondente a 500 copos de suco e encontrou R$ 1,002. Alguns alunos continuaram dizendo que nunca se chegaria ao valor R$ 1,00. Mas o grupo que estava apresentando pediu para considerarem, já que não tinha como ser cobrado o valor que passava de R$ 1,00, nos casos mostrados. De acordo com Boavida e Ponte (2002, p. 8) "a discussão final é um dos momentos mais importantes para a institucionalização das aprendizagens e até para a exploração de novos caminhos". Nesse momento fiz uma interposição, comentei com a turma que em Matemática havia um assunto que trabalha com a situação em discussão chamada de limite de uma função. Eles compreenderam a justificativa do grupo "D" quando vos expliquei que, de acordo com a teoria dos limites, o valor da função $y = \frac{x+1}{x}$ é igual a 1 quando x tende para o infinito.

O grupo "E" foi o único que colocou os pontos no centro de cada quadrado. Concluíram para a alternativa "a" que só podia haver 10 pontos, porque só havia possibilidade de vender os copos por inteiro. A figura 51 expõe a resposta do grupo E.

Figura 51: mostra como o grupo E visualizou o plano cartesiano no xadrezado.



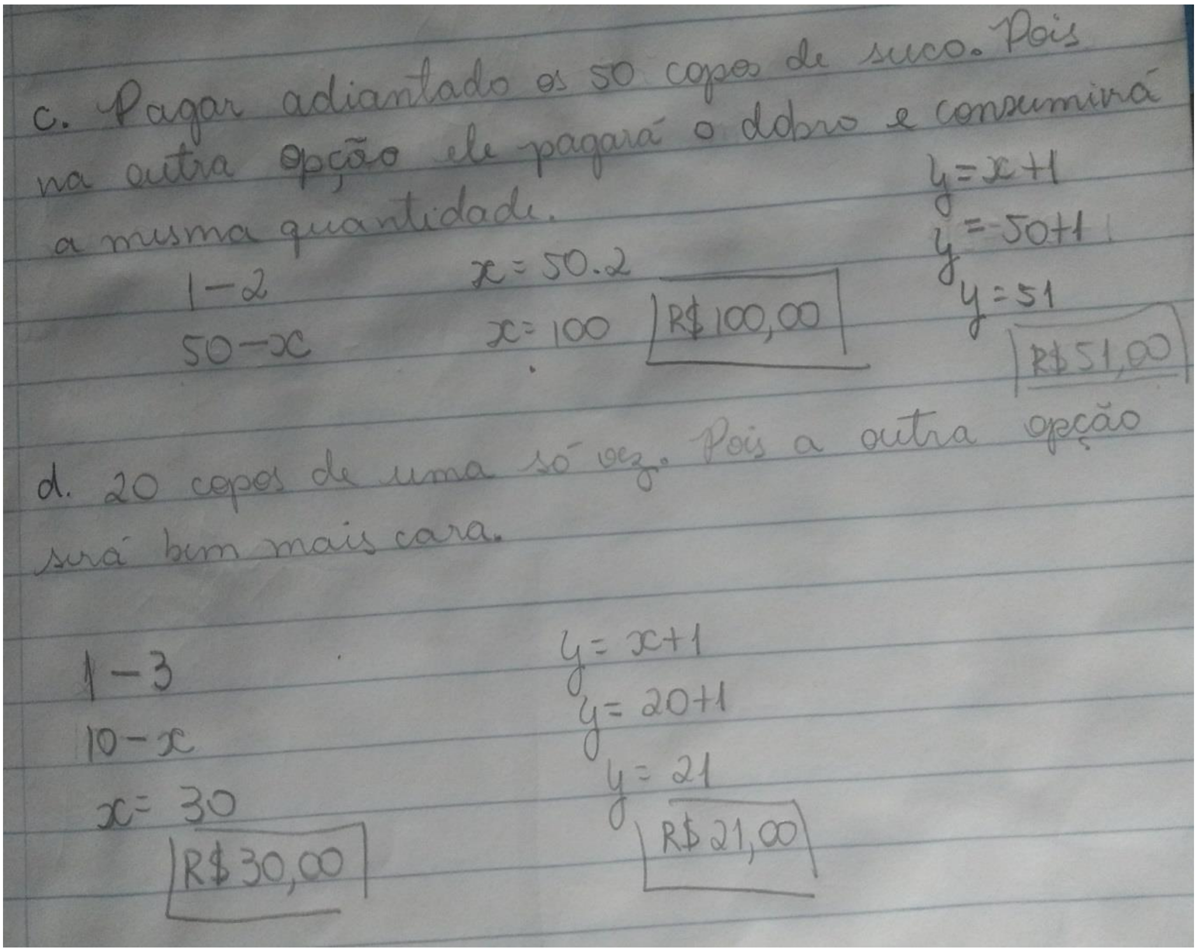
Fonte: alunos do grupo E

E possível perceber na figura 51 a disposição dos 10 pontos possíveis para o xadrezado de acordo com a atividade. O lado direito da figura 51 também mostra a finalização de uma ideia que levou a elaboração da função. No momento em que iniciou essa discussão o docente observava o grupo “E”. A seguir, apresento o diálogo.

> E5: - Professor aqui no eixo “y” pelos pontos, “y” é uma unidade maior do que “x”.
> P: - Então como fica a função?
> E3: - Para o “y” igualar a “x” tem que tirar uma unidade dele.
> P: - Você pode explicar?
> E5: - É que os pontos que estamos vendo são (3, 4), (5, 6) e (7, 8) e “x” é o primeiro valor.
> E3: - Nós queria saber se estava certo. Ficar $3 = 4 - 1$, $5 = 6 - 1$ e $7 = 8 - 1$, ai fica ...
> B5: - 3 é “x” e 4 é “y”.
> P: como fica?

Assim, eles concluíram que a função seria $y = x + 1$, como mostra na figura 51. Para tanto, eles utilizaram a ideia de igualar os valores montando uma expressão numérica. Testaram a conjectura utilizando os três pontos do diálogo anterior e no primeiro substituíram 3 por “x” e 4 por “y”. Dessa forma chegaram ao modelo solicitado no item “b”. Como mostra a figura 51, o grupo “E” investigou as justificativas para as alternativas “c” e “d” com o auxílio da regra de três simples e da função elaborada por eles.

Figura 52: elaborações do grupo E.

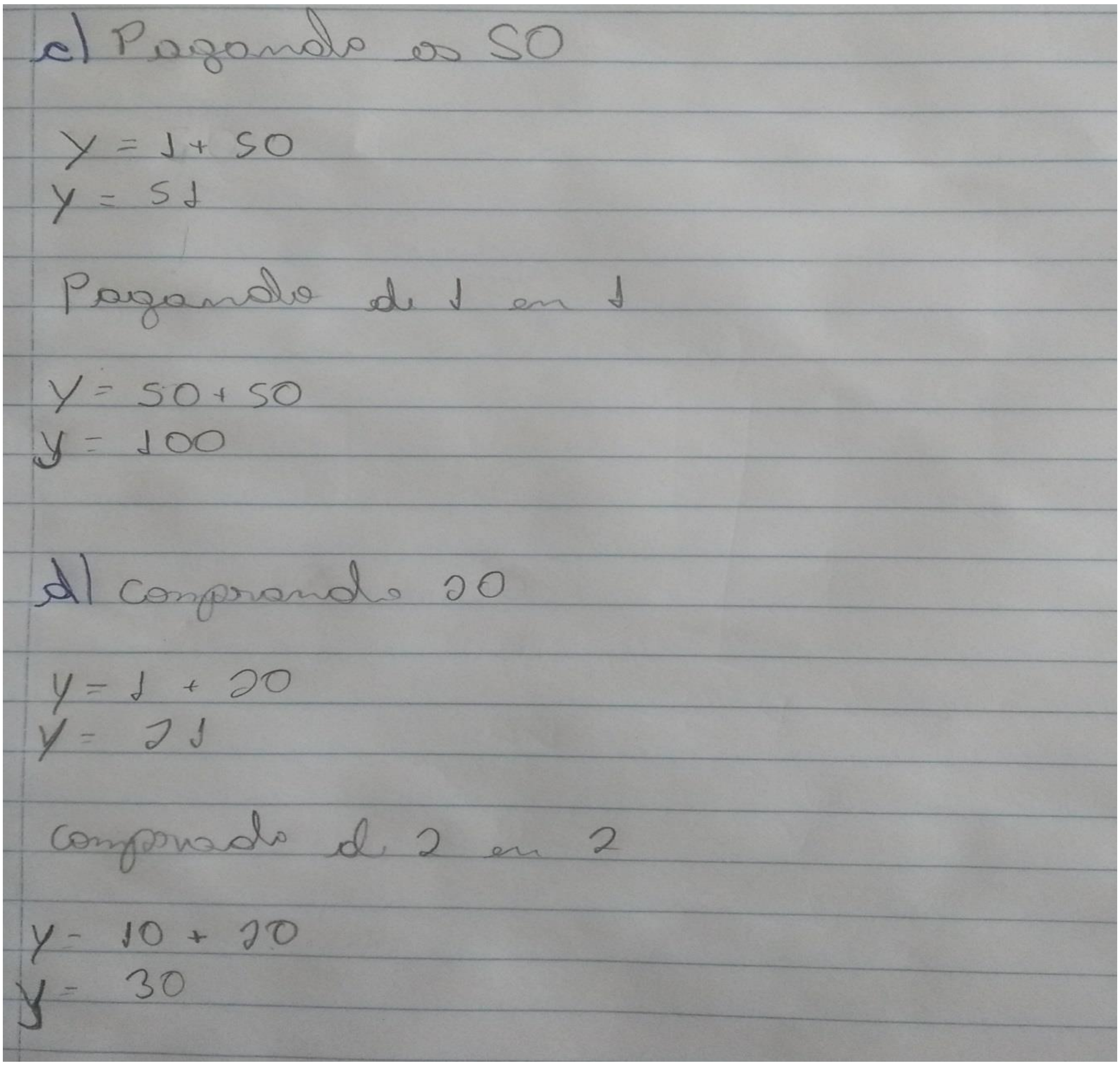


Fonte: alunos do grupo E

É possível perceber na figura 52 que o grupo “E” utilizou o recurso da regra de três simples para encontrar os valores referentes às compras por etapas, ou seja, no item “c” uma etapa está para R$ 2,00, dessa forma encontraram R$ 100,00. Na alternativa “d”, da mesma forma, uma etapa correspondia a R$ 3,00, concluíram que as 10 seria R$ 30,00. Já a função que criaram foi utilizada para calcular o valor referente à compra dos totais dos copos envolvidos. Para o item “c” o valor resultante foi R$ 51,00 e no “d” foi R$ 21,00. Em seguida, fizeram a comparação entre os valores de cada alternativa para elaborar as justificativas.

O grupo “F” não escreveu com detalhes as justificativas para todas as alternativas da atividade, mas na apresentação explicou corretamente cada uma delas. Preferiram registrar os resultados obtidos com a função que criaram. Para o item “a” disseram: “*são 10 pontos, porque o valor fixo do deslocamento é um real*”, “*a própria questão deu o deslocamento que é de 1 real, então não tem como deslocar 50 centavos*”. Percebi durante a apresentação que compreenderam a ideia de conjunto imagem da função formada apenas pelos valores do xadrezado. A figura seguinte 53 expõe o registro que o grupo “F” levou para a apresentação.

Figura 53: destaca as elaborações do grupo F.



Fonte: alunos do grupo F

De acordo com Henriques e Ponte (2014, p. 288), “os alunos privilegiam a apresentação algébrica como ferramenta de exploração, realizando tratamentos de modo a obter informações e conjecturar soluções”. Esse comportamento foi manifestado pelo grupo “F” como pode ser notado na figura 53, pois nas duas alternativas, colocaram as opções e, em seguida, utilizaram a função que criaram para fazer os cálculos. Mas, não escreveram os significados dos resultados, deixaram para explicar no final do encontro. Nesse sentido, Alro e Skovsmose (2010) comentam que essa confiança pode estar ligada a reflexões e aprendizagens anteriores do processo de aprendizagem. Dessa forma, o grupo fez a síntese da investigação e ficou seguro para a discussão final.

Foi possível observar que nessa atividade todos os grupos mostraram pelo menos uma ideia diferente, seja na elaboração das conjecturas ou das justificativas. Também foi notado uma diversidade de conhecimentos empreendidos durante a apresentação em grande grupo.

4.1.5 Atividade 5

Nessa atividade, os grupos levaram 95 minutos. No início, os estudantes leram pelo menos quatro vezes o enunciado. Esta tarefa foi um desafio para os grupos, pois eles tiveram dificuldades para iniciar. Mas, algo importante estava acontecendo, todos estavam interessados em investigar. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) veem esse cenário de maneira positiva, pois afirmam que, em situações iniciais, os alunos que possuem conhecimentos diversificados têm maior possibilidade de se envolverem com questões que são um verdadeiro desafio para eles. Esse entendimento foi verificado durante a presente atividade, pois os discentes mostraram empenho durante o encontro, queriam elaborar pelo menos uma ideia que contemplasse corretamente a atividade. Após compreender a situação problemática, os componentes do grupo “A” perceberam que precisavam trabalhar com as mesmas unidades de medidas de tempo e comprimento. Depois das falas: -“”*é, a cada 15 m ele leva 1 s”, “ - tem que ser em 20 minutos”, é, - 20 vezes 60 dá 1200 segundos*””; conseguiram elaborar a seguinte conjectura: “- *pois é, esses 20 minutos da 1200 segundos, aí é só saber quantos metros percorre nesses 20 minutos*”. Em seguida, os alunos trabalharam a ideia com o auxílio da regra de três simples e encontraram 18.000 metros, que se refere à distância percorrida pelo ônibus durante 20 minutos. A seguir, apresento um trecho do diálogo.

> A3: - Pessoal o táxi é 4,5 quilômetros.
> A5: - Ai é da saída, até o lugar do ônibus dá 4.500 metros.
> A3: - É.

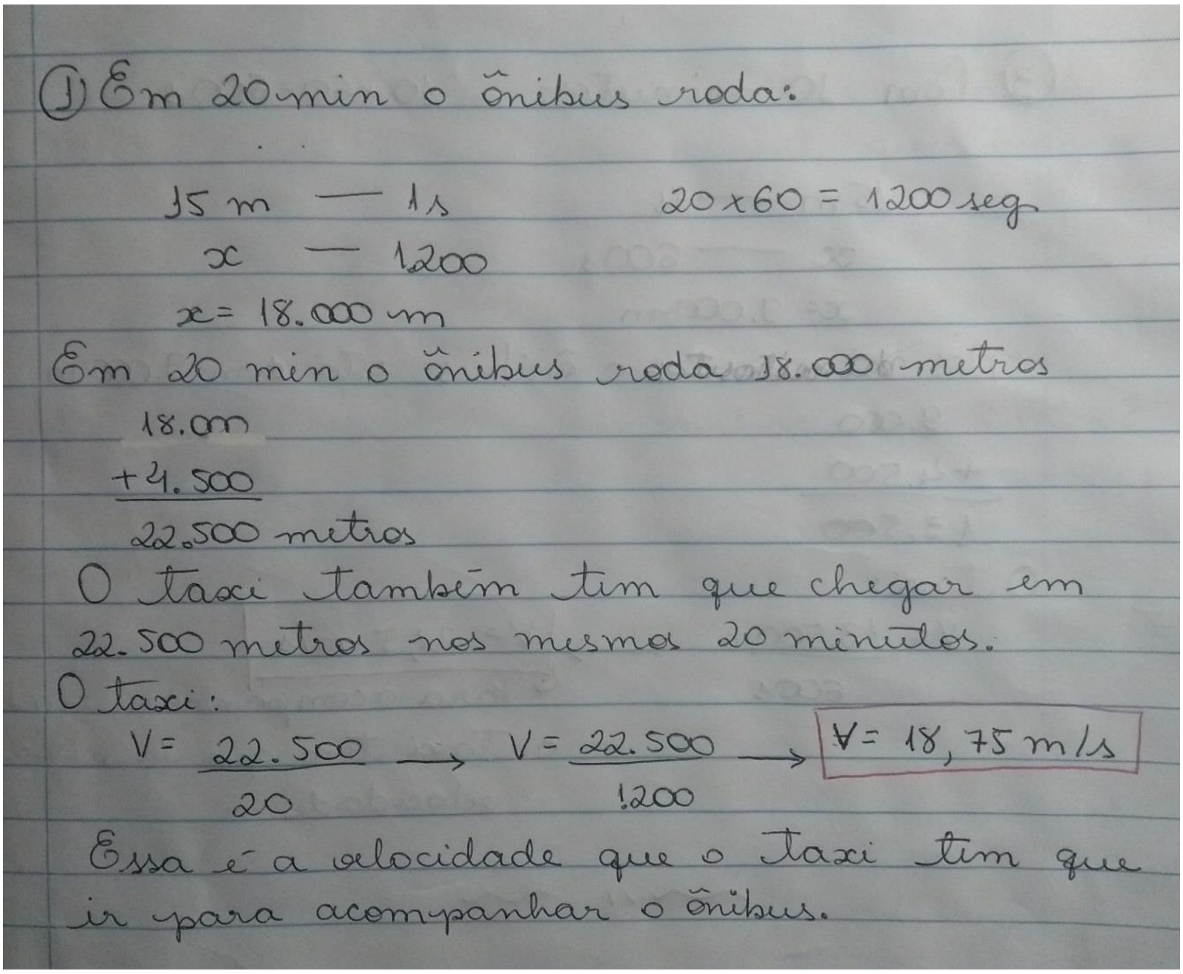
> A1: - ó, o táxi vai andar esse aí e os 18.000 também.
> A3: - É assim?
> A1: - Senão ele não acompanha, entendeu?
> A4: - Ah, é mesmo, ele tem que chegar onde o ônibus está, obvio né.
> A1: - O ônibus roda 18.000 metros e o táxi é 18.000 mais os 4.500 metros que ficou para trás.
> A2: - Agora entendi, ele anda mais porque o ônibus já está na frente mesmo.
> A2: - Agora é que divide para ver a velocidade dos dois, né?
> A1: - Não, é só a do táxi, a do ônibus a questão já deu é só esse mesmo.
> A5: - Não, é isso mesmo, tá certo.
> A1: - Dá 18,75.
> A5: - A diferença é pouca.
> A1: - São metros por segundos, foi 22.500 metros por 1.200 segundos.

Quando chegaram ao final desse feito, os alunos chamaram o docente afirmando que já haviam concluído a tarefa. Quando me aproximei do grupo, um dos componentes falou: *"- professor já foi, estamos só passando a limpo"*.

> P: - O que fizeram?
> A5: - Nos 20 minutos o táxi tem que ir a 18,75 metros por segundos.
> P: - Qual foi a distância percorrida pelo táxi?
> A1: - 22.500 metros, o taxi tem que andar 22.500 metros para alcançar.
> P: - Muito bem! Parabéns.

Embora esse grupo tenha, como os demais, encontrado dificuldades para iniciar os primeiros questionamentos para construir uma conjectura, conseguiram elaborar as informações presentes na figura 54 em menos de 30 minutos.

Figura 54: expõe a primeira conclusão do grupo A.



(1) Em 20 min o ônibus roda:

15 m — 1 s $20 \times 60 = 1200$ seg

x — 1200

x = 18.000 m

Em 20 min o ônibus roda 18.000 metros

$$\begin{array}{r} 18.000 \\ +\ 4.500 \\ \hline 22.500 \end{array}$$ metros

O taxi também tem que chegar em 22.500 metros nos mesmos 20 minutos.

O taxi:

$V = \dfrac{22.500}{20} \longrightarrow V = \dfrac{22.500}{1200} \longrightarrow \boxed{V = 18,75\ m/s}$

Essa é a velocidade que o taxi tem que ir para acompanhar o ônibus.

Fonte: alunos do grupo A

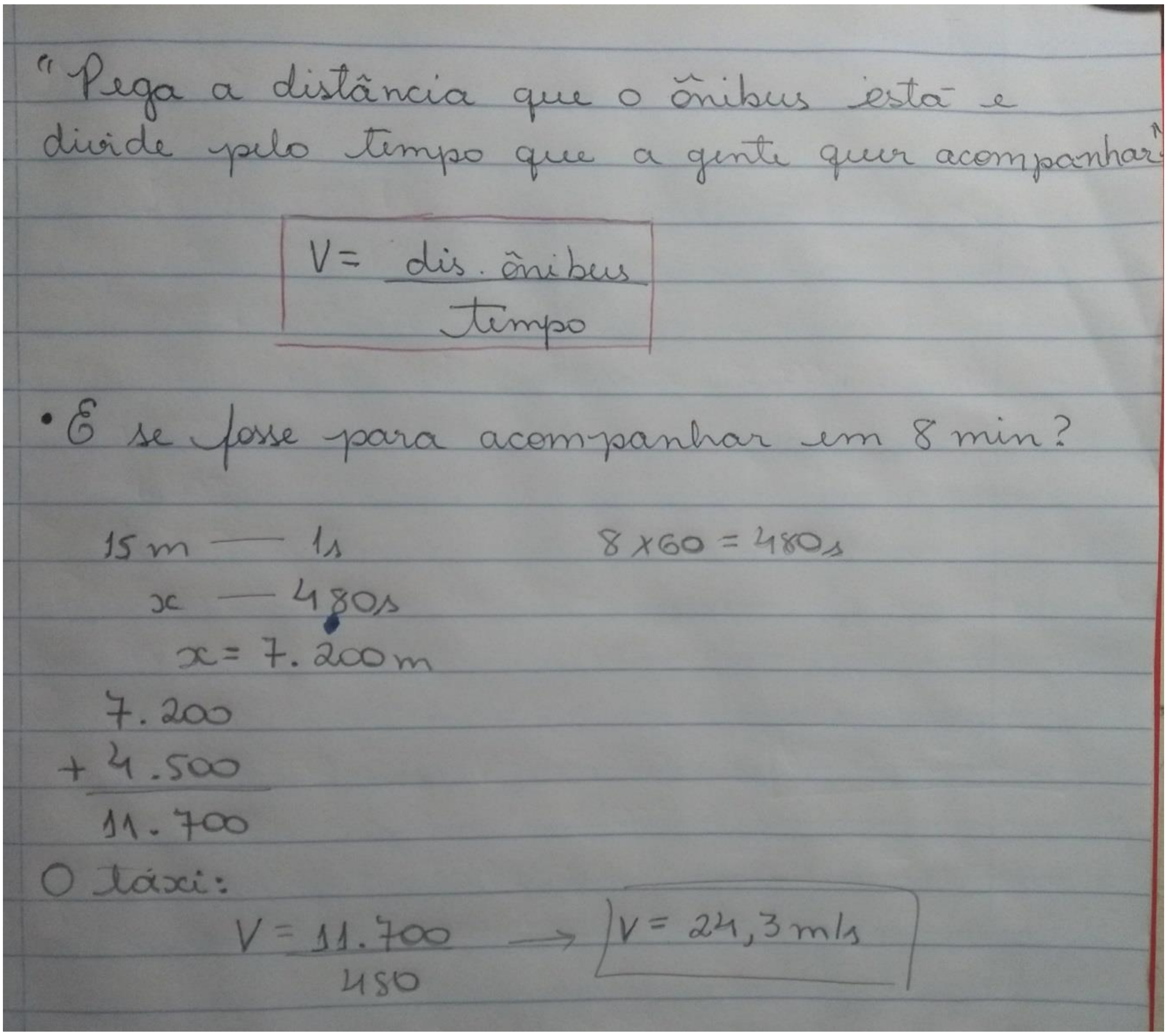
É possível observar na figura 54 que foi utilizado a regra de três simples para determinar a distância que o ônibus percorreu em 20 minutos. Para encontrar o comprimento que o táxi devia percorrer adicionaram a 18.000 m os 4.500 m que é a distância que o táxi se encontrava do ônibus no momento em que Carlos toma o táxi. E, para calcular a velocidade, eles utilizaram a relação distância pelo tempo. Como o grupo estava adiantado em relação aos outros, os levei a continuar investigando. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 37) corroboram com esse entendimento ao estabelecerem que “é fundamental, para que o processo investigativo não saia empobrecido, que o professor procure levar os alunos a compreender o caráter provisório das conjecturas”. Nesse sentido, segue o diálogo entre estes alunos e o docente.

P: - Na atividade diz que o taxista deve acompanhar o ônibus em...?
A1: - No máximo em 20 minutos.

> P: - O que vocês entendem por no máximo 20 minutos?
> A4: - No máximo 20, não pode passar.
> P: - Pode ser menos?
> A1: - Ah, é pode.
> A3 e A5: - Pode!
> P: - Então o que acham em aumentar a velocidade desse táxi?
> A4: - Como assim?
> P: - Pensem um pouco.
> A1: - Só se fizer com um tempo menor que 20, se o tempo é menor a velocidade é maior.
> P: - A atividade também solicita que vocês elaborem uma relação. O que acham disso?

Como a mesma estratégia mostrada na figura 54, eles calcularam mais três situações de velocidades a serem empregadas pelo táxi: para acompanhar em 5, 10 e 15 minutos as velocidades encontradas foram respectivamente $30\,{}^{m}/_{s}$; 22,5 ${}^{m}/_{s}$ e $20\,{}^{m}/_{s}$. Em seguida, os alunos perceberam que essas criações se comportavam como uma ideia para a construção de um modelo que envolveu as duas grandezas estabelecidas pela atividade. A figura 55 destaca essa construção.

Figura 55: relação criada pelo grupo A.


"Pega a distância que o ônibus está e divide pelo tempo que a gente quer acompanhar"

$$\boxed{V = \frac{\text{dis. ônibus}}{\text{tempo}}}$$

• E se fosse para acompanhar em 8 min?

15 m — 1s

x — 480s

x = 7.200 m

8 x 60 = 480s

7.200
+ 4.500
11.700

O táxi:

$V = \frac{11.700}{480} \longrightarrow \boxed{V = 24,3 \text{ m/s}}$

Fonte: alunos do grupo A

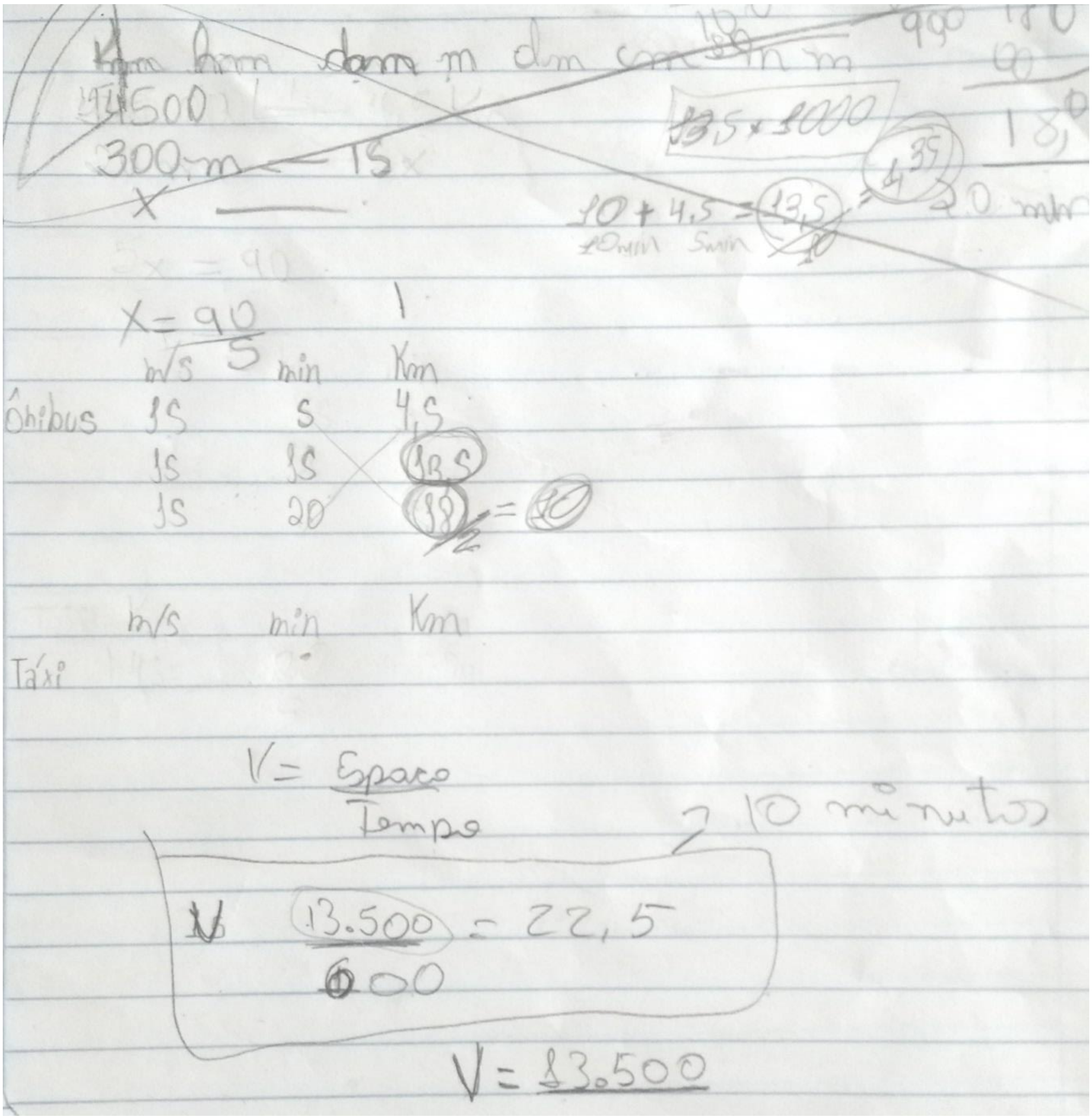
É possível perceber na figura 55 que o modelo elaborado é a própria fórmula da velocidade. A "dis. ônibus" significa a distância que o ônibus se encontra no momento em que o táxi parte para alcançá-lo, já o "tempo" quer dizer o tempo em segundos que o taxista deseja acompanhar o ônibus. Na figura 55, também é possível observar que após elaborarem a relação, eles calcularam a velocidade correspondente ao tempo de 8 minutos, mas para encontrar a distância a ser percorrida utilizaram a mesma estratégia dos casos anteriores.

Os grupos "B", "C" e "D" também fizeram seus trabalhos tendo como principal estratégia para encontrar as distâncias percorridas a regra de três simples e, assim como o grupo "A", os dois primeiros aplicaram a relação distância pelo tempo para identificar a velocidade do táxi. Esses grupos solicitaram por várias vezes a presença do professor, estavam confusos porque a velocidade do ônibus estava em unidades de medidas distintas das outras informações presentes na atividade. Um trecho do diálogo do grupo “B” exemplifica a situação.

> B4: - A gente agora vai mexer em metros por minutos e nos minutos.
> B1: - E agora? Aqui é em minutos e aqui é em $m/_{S}$. Então para acompanhar em 20...
> B4: - Mas a questão está pedindo tempo e velocidade, ou seja, $m/_{S}$ e minuto.
> B2: - Ainda tem os quilômetros.
>
> C3: - O ônibus vai em $m/_{S}$ e a pista está em quilômetros.
> C2: - Mas não é só botar tudo em quilômetros?
> C3: - Em metros, a do ônibus está em metros por segundos. Tem que mexer com transformação mesmo.
> C4: - Tem que ver como é que faz se botar tudo para quilômetro tem que mudar a do ônibus. É velocidade, como é que faz?
>
> D1: - O táxi vai ter que acompanhar em 20 minutos.
> D3: - Aí é o limite dele, pode ser em menos.
> D1: - Pior que o ônibus está com a velocidade em metros e a questão fala em quilômetros. É, tem que ajeitar tudo para minutos ou para segundos por que...
> D3: - É mais complicado mudar a do ônibus.
> D1: - O quê?
> D3: - Em quilômetros por minutos, entendeu? Ela é constante.

Diante desse impasse, eles precisavam encontrar as distâncias percorridas pelos veículos no tempo que determinassem. Mas, depois de vários momentos de discussões, tiveram a ideia de relacionar os dados que tinham com a regra de três simples. As anotações da figura 56 foram tiradas dos escritos do grupo “B”.

Figura 56: anotações do grupo B.

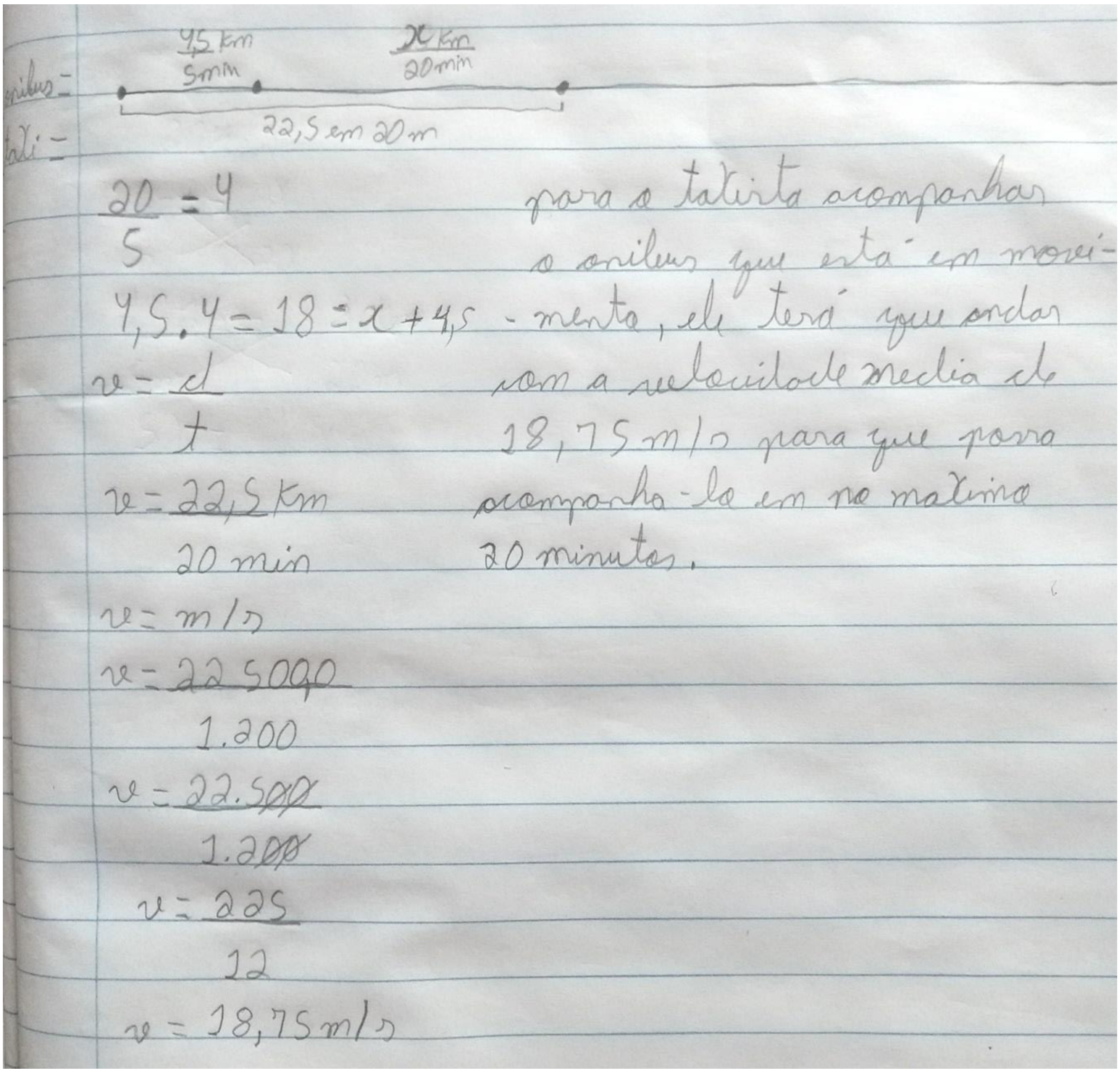


Fonte: alunos do grupo B

É possível perceber na figura 56 que o grupo “B” encontrou a distância (igual a 18 km) que o ônibus percorreu em 20 minutos, em seguida dividiram por 2, porque a demonstração que procuravam era para 10 minutos ($18\ km \div 2$), e registraram 10 Km, mas o resultado correto seria 9 km. A esse valor foi adicionado 4,5 Km, o qual era a distância que o ônibus já havia percorrido nos 5 minutos iniciais, dessa forma o ônibus percorreu um total de 13,5 Km. Na figura 56 é possível observar que dividiram esse valor por 10 min ($13{,}5 \div 10 = 1{,}35$). Entretanto, para eles, esse resultado não representaria a velocidade do táxi, porque era inferior $15\,{}^{m}/_{s}$. Concluíram que para comparar as velocidades, estas deveriam estar nas mesmas unidades de medidas. Assim, os alunos mostraram que o táxi deveria desenvolver uma velocidade de $22{,}5\,{}^{m}/_{s}$ para acompanhar o ônibus em 10 minutos.

O grupo “C” conseguiu compreender a atividade depois que esboçou um desenho para a situação problemática. Essa ideia facilitou a visualização do que precisavam planejar. A figura 57 apresenta as elaborações que o grupo registrou no caderno.

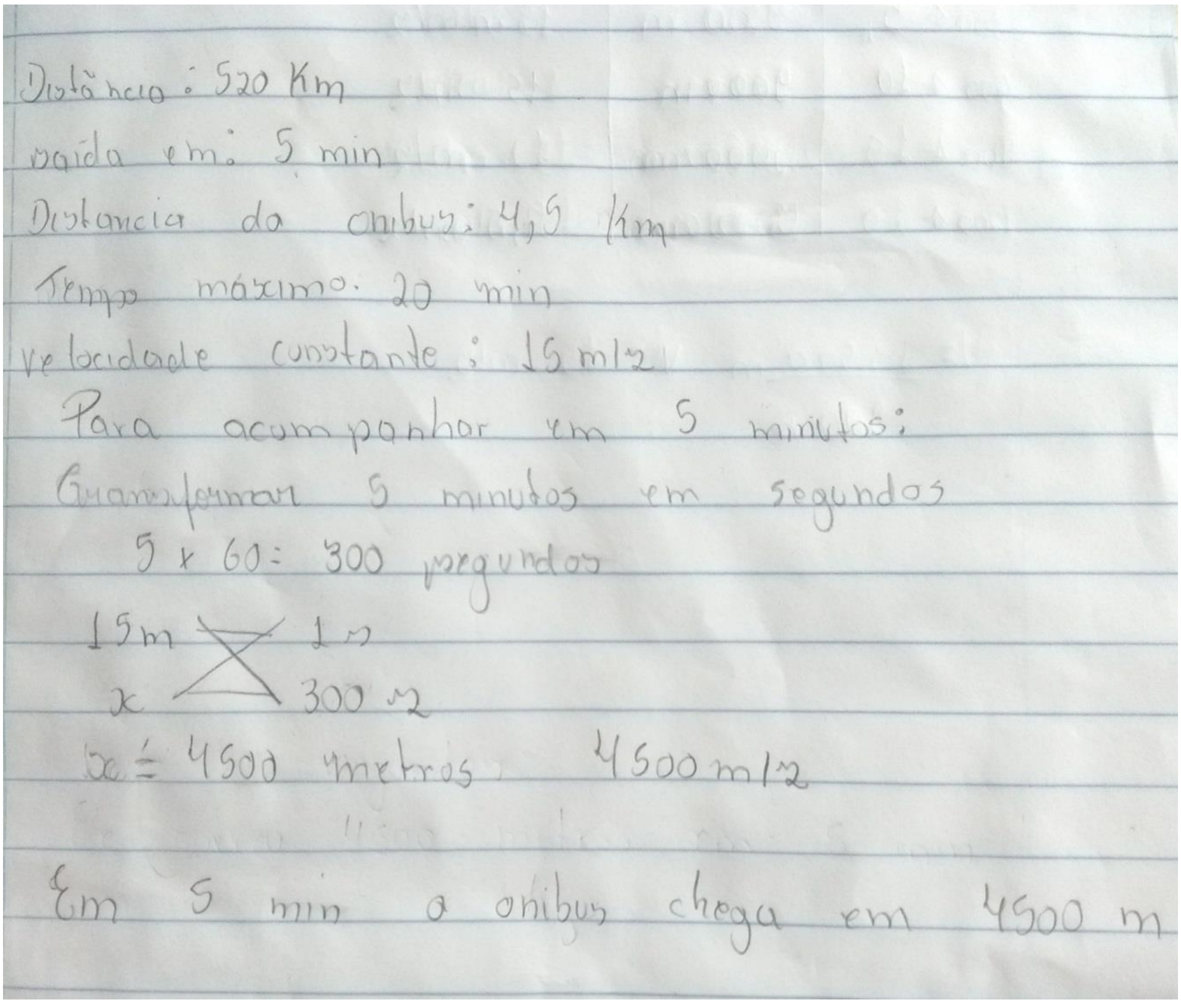
Figura 57: anotações do grupo C.



Fonte: alunos do grupo C

Nota-se na figura 57 que os alunos relacionaram os dados da atividade com os comprimentos apropriados no desenho que construíram. Percebi nas discussões que por meio dessa estratégia os discentes ficaram mais confiantes para colocar ideias. É possível observar na figura 57 que, por meio da regra de três, eles encontraram o valor “18” que corresponde à distância deslocada pelo ônibus em 20 minutos. Juntaram esse valor com 4,5 e calcularam o comprimento que o táxi deveria deslocar em 20 minutos. Percebi também que somente no momento em que os alunos foram calcular a velocidade do táxi é que notaram que deveriam fazer as transformações de quilômetros para metros e minutos para segundos. Já o grupo “D” percebeu que antes de fazer as suas demonstrações, deveriam transformar os dados para as mesmas unidades de medidas que se encontrava a velocidade do ônibus. Os componentes desse grupo também decidiram usar a regra de três simples depois que fizeram uma síntese dos dados da atividade como mostra a figura 58.

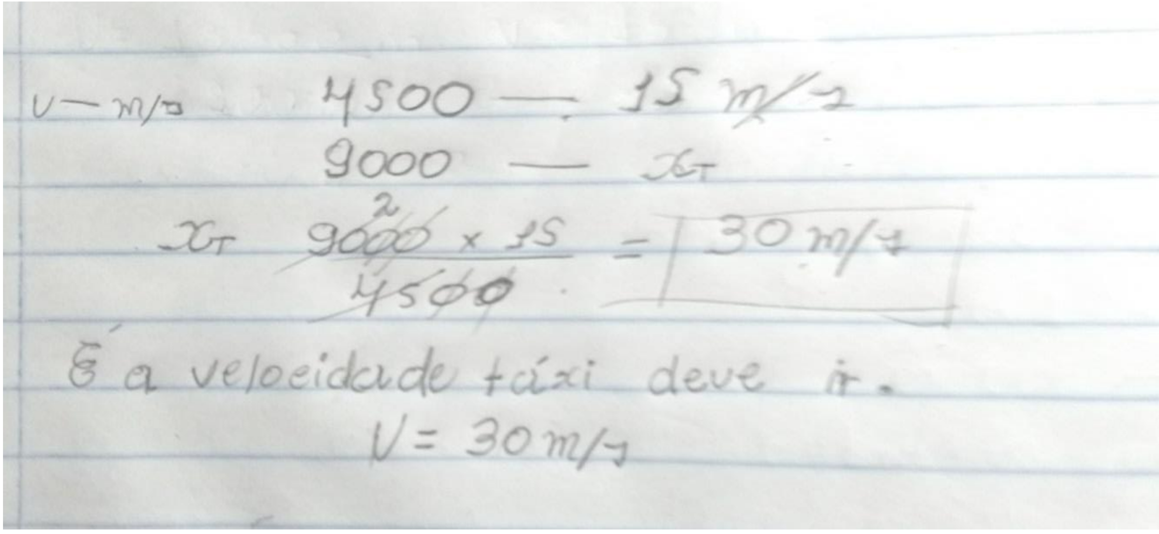
Figura 58: expõe anotações do grupo D.


Distância: 520 Km
saida em: 5 min
Distancia do onibus: 4,5 Km
Tempo máximo: 20 min
velocidade constante: 15 m/s
Para acompanhar em 5 minutos:
Transformar 5 minutos em segundos
5 x 60 = 300 segundos
15m — 1 s
x — 300 s
x = 4500 metros 4500 m/s
Em 5 min o onibus chega em 4500 m

Fonte: alunos do grupo D

De acordo com as discussões (gravadas nos áudios) o grupo “D” teve a percepção de como iriam proceder na investigação a partir da organização dos dados da atividade resumidos na figura 58. É possível perceber na referida figura que encontraram 4.500 m que representa a distância percorrida pelo ônibus em 5 minutos. Em seguida, eles escreveram: “*se em 5 min. o ônibus chega em 4500 m em 10 ele irá percorrer 9000 m*”. Com esse registro, estavam querendo dizer que com 5 minutos o ônibus já se encontrava a 9.000 m do táxi, caso este permanecesse em repouso. De acordo com a figura 59 relacionaram distância e velocidade para determinar a velocidade que o táxi deveria desenvolver.

Figura 59: conclusão do grupo D.



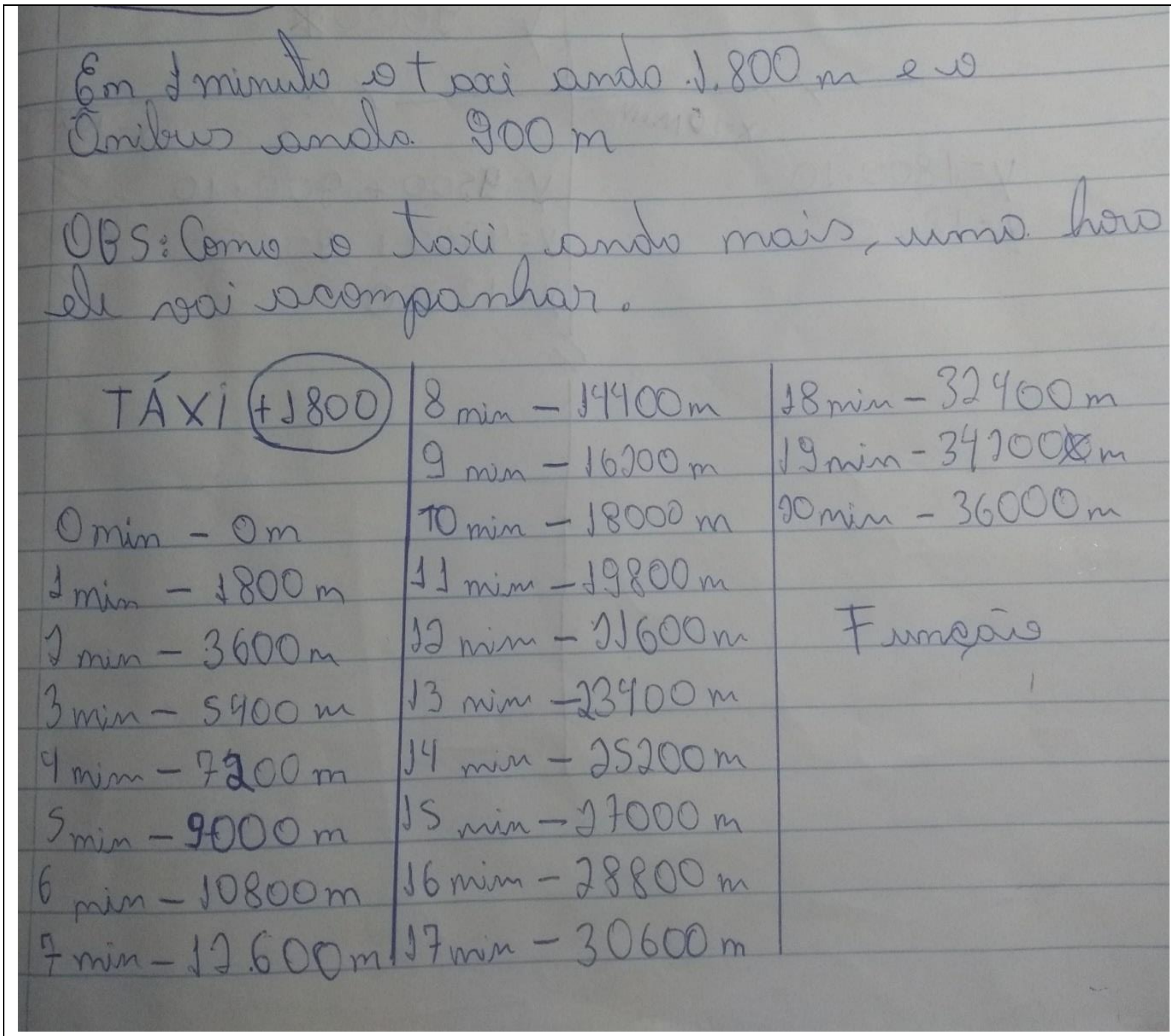
Fonte: alunos do grupo D

É possível perceber na figura 59 que a regra de três também foi praticada. Esses alunos foram os únicos que utilizaram essa estratégia para calcular a velocidade que o taxista deveria desenvolver. Mas nota-se que essa ideia esteve presente nas outras investigações.

Os grupos “B”, “C” e “D” levaram mais de 30 minutos para compreender como deveriam desenvolver seus trabalhos. Destaco que os dois últimos avançaram mais rápido quando o “C” envolveu os dados da atividade em um desenho o qual simulou a pista onde os transportes se deslocavam e discutiam a questão, visualizando esse esquema; e o “D” extraiu os dados do texto e fez um pequeno resumo. Observei que foram estratégias significativas, pois facilitaram na tomada de decisões para a presente atividade. Dessa forma, os discentes não perdiam o foco do que já haviam pensado e não precisavam mudar a atenção com novas leituras do enunciado. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), em um cenário investigativo os alunos são convidados a agir como um matemático, pois procuram alternativas para formular conjecturas que possibilitam a elaboração de resultados que serão discutidos em público. Os resultados apresentados por esses grupos estão relacionados ao aceite desse convite, porque as dificuldades enfrentadas no início da tarefa não causaram desestímulo e foram tratadas como algo natural dentro do contexto em que viveram.

O grupo “E”, depois que passou o momento dedicado à leitura do enunciado, levou aproximadamente 20 minutos de discussão para elaborar a conjectura que norteou o trabalho: “*nós podia fazer para a velocidade de 30, porque é o dobro da do ônibus ai acompanha*”. Esse grupo também fez uso da regra de três, mas apenas para determinar as distâncias percorridas pelo táxi considerando uma velocidade de $30\,{}^{m}/_{s}$ e para o ônibus a $15\,{}^{m}/_{s}$, no tempo de 1 minuto. A figura 60 mostra como esses dados foram usados.

Figura 60: estratégia utilizada pelo grupo E.



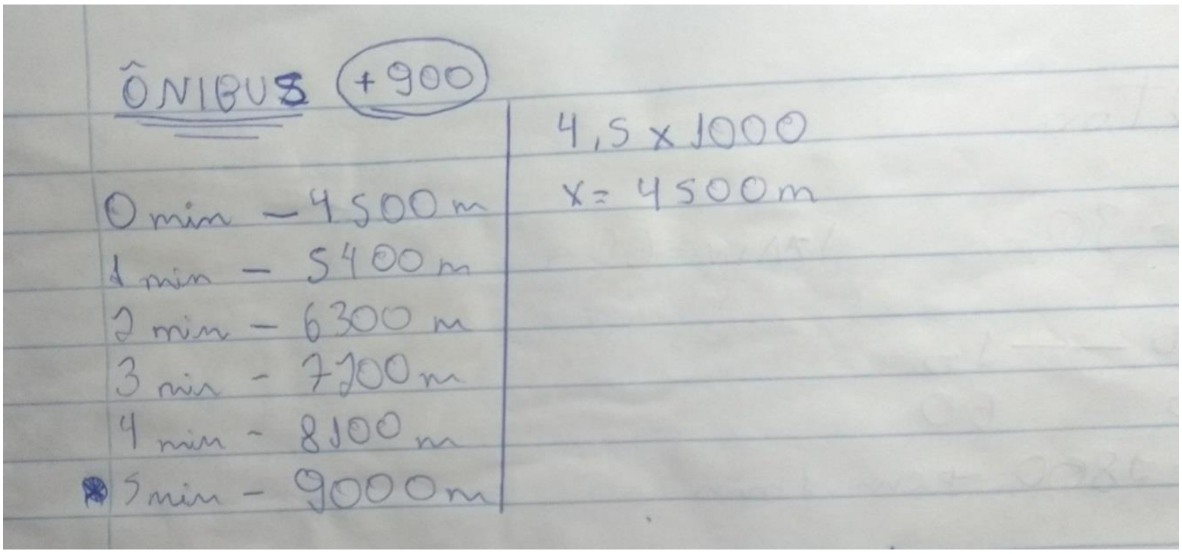
Em 1 minuto o taxi anda 1.800 m e o Ônibus anda 900 m

OBS: Como o taxi anda mais, uma hora ele vai acompanhar.

TÁXI +1800

0 min - 0 m
1 min - 1800 m
2 min - 3600 m
3 min - 5400 m
4 min - 7200 m
5 min - 9000 m
6 min - 10800 m
7 min - 12.600 m
8 min - 14400 m
9 min - 16200 m
10 min - 18000 m
11 min - 19800 m
12 min - 21600 m
13 min - 23400 m
14 min - 25200 m
15 min - 27000 m
16 min - 28800 m
17 min - 30600 m
18 min - 32400 m
19 min - 34200 m
20 min - 36000 m

Função



ÔNIBUS +900

0 min - 4500 m
1 min - 5400 m
2 min - 6300 m
3 min - 7200 m
4 min - 8100 m
5 min - 9000 m

4,5 x 1000
x = 4500 m

Fonte: alunos do grupo E

Os primeiros registros vistos na figura 60 são os valores 1.800 m e 900 m, que correspondem respectivamente às distâncias percorridas pelas velocidades $30\,{}^{m}/_{s}$ e $15\,{}^{m}/_{s}$ no tempo de 1 minuto. Nota-se, na figura 60, que o grupo fez a tabulação das distâncias percorridas para o táxi até o tempo máximo estabelecido pela questão (20 min.). É possível observar que a tabulação dos valores para o ônibus foram até os 5 minutos, pois perceberam que nesse instante as distâncias percorridas pelos veículos se igualaram. Com essa estratégia mostraram que com as velocidades citadas, os veículos percorrem a mesma distância (9.000 m) no intervalo de tempo de 5 minutos, ou seja, o táxi alcança o ônibus com a velocidade de $30\,{}^{m}/_{s}$ após percorrer 9 km. Na apresentação em grande grupo o representante de "E" disse: "*o Carlos pode dizer para o taxista que deseja acompanhar o ônibus em 5 minutos, mas daí o taxista pergunta, qual é a velocidade que vou? O passageiro diz que é a 30 m por segundos*". Essa fala gerou uma discussão em sala, porque alguns alunos perguntaram, "*como o taxista vai saber se está a* $30\,{}^{m}/_{s}$*, porque o carro marca em quilômetro por hora?*" Depois de alguns instantes, os componentes do grupo "C" perguntaram ao docente: "*Professor é só transformar para quilômetro por hora, né?* Respondi para eles: *"o que vocês acham turma"?".* A turma concordou que sim e a discussão voltou-se para os cálculos.

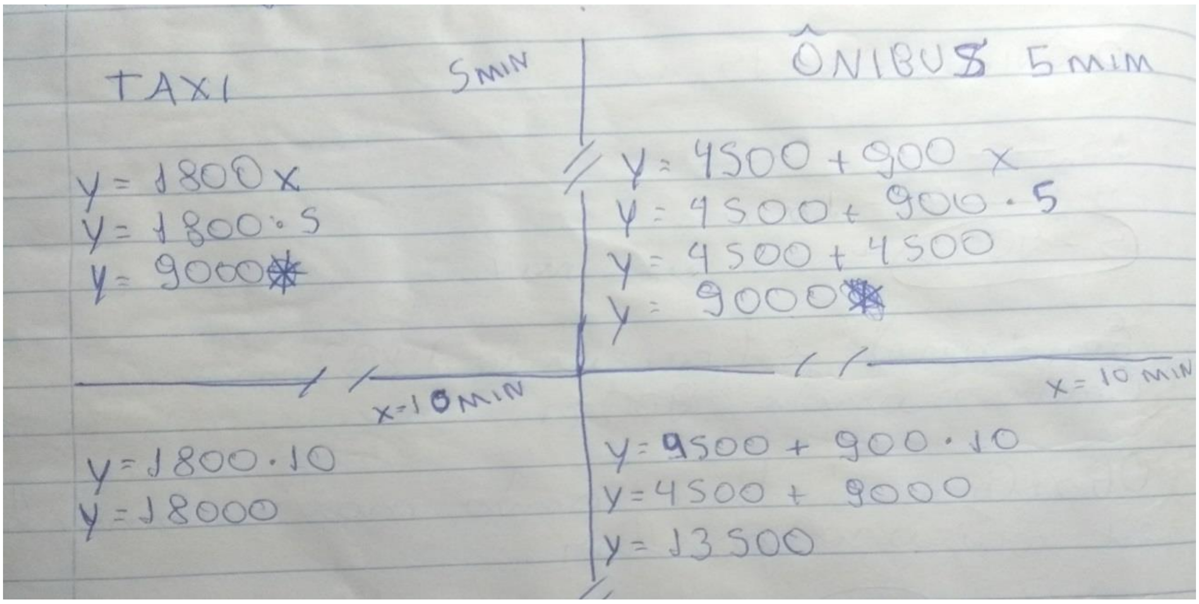
Nesse momento, foi possível notar vários alunos utilizando a calculadora do celular, à medida em que encontravam uma resposta, voltavam para o professor e perguntavam se a mesma estava certa. Alguns expressavam-se corretamente como sobre como deveriam fazer, mas cometiam equívocos com o uso da calculadora, porque não estavam fazendo o equacionamento correto. O professor solicitou que fizessem os cálculos no caderno com o auxílio da calculadora. Assim, em alguns instantes, os alunos chegaram ao valor correto. Em seguida, solicitei aos que não estavam conseguindo operar a calculadora que utilizassem o resultado para identificar seus erros. Depois dessa parte, fiz uma pergunta à turma: "*quantos quilômetros por hora correspondem* $1\,{}^{m}/_{s}$"? Os usuários da calculadora não demoraram a responder, $3{,}6\,{}^{km}/_{h}$. Segue a continuidade do diálogo.

> P: - O que isso significa?
> Discente: - Que 1 m por segundo é igual a 3,6 km por hora?
> P: - Pessoal, 1 é igual a 3,6?
> Discentes: - Não.
> Discentes: - Mas nesse caso é.
> P: - Ou é igual ou não é, o que acham?

A maioria respondeu que não, dessa forma mudei o sentido da pergunta.
P: - Então podemos dizer que esses valores são o que?
Alguns responderam que seriam correspondentes.
P: - Se são correspondentes eles podem ser usados em uma regra de três para calcular $30\,{}^{m}/_{s}$ em quilômetros por hora?
Rapidamente os alunos encontraram o valor 108.
Discentes: - É 108 quilômetros por hora. Deu a mesma coisa.
P: - Nesse caso é realmente preciso usar a regra de três ou dá para fazer sem usá-la?

Antes de terminar essa pergunta, já ouvia alguns alunos comentando que bastava multiplicar e que para fazer o processo inverso bastava dividir por 3,6. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), os resultados de uma investigação são imprevisíveis e durante a justificação das conjecturas podem surgir desafios inesperados. Nesse sentido, ao vivenciar essa situação procurei valorizar as perguntas dos alunos (“*como o taxista vai saber se está a* $30\,{}^{m}/_{s}$, *porque o carro marca em quilômetro por hora?*” “*professor é só transformar para quilômetro por hora, né”?*) para estimulá-los às novas investigações. Nessa continuidade, os discentes chegaram à regra prática de conversão entre km/h e m/s. Yomamoto e Fuke (2017) afirmam que conhecer essa relação facilita na transformação de velocidades que envolvem essas unidades, já que basta fazer uma operação de multiplicação ou de divisão. Voltando as descrições e discussões dos dados do grupo “E”, é possível notar na figura 61 as funções relativas do táxi e do ônibus para o tempo de 5 minutos.

Figura 61: expressões criadas pelo grupo E.



Fonte: alunos do grupo E

Na figura 61, nota-se que foram criadas as relações envolvendo tempo e distância. Na apresentação, o grupo explicou que a função $y = 1800x$ é válida somente para a velocidade de 30 m/s. O valor correspondente ao coeficiente angular (1800) é fixo, porque corresponde a distância percorrida a cada minuto com velocidade média adotada (30 m/s). Já a função $y = 4500 + 900x$ não sofre mutação porque a velocidade é constante. O valor 4500 é fixo (corresponde à distância que o ônibus se encontra do táxi) e o coeficiente angular (900) também não sofre alteração porque corresponde a distância percorrida a cada minuto com velocidade média de 15 m/s. Foi possível observar nos diálogos do grupo que a ideia de tabular os valores envolvendo tempo e distância facilitou na elaboração dessas funções. Isso demonstra a importância de se usar dados em quadros/tabelas, porque facilita a visualização da formulação de expressões.

Durante a investigação dessa atividade todos os grupos solicitaram a presença do professor por várias vezes, principalmente, no início. Nesse sentido Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 49) enfatizam que as visitas do docente aos grupos "podem ir desde um simples averiguar se tudo está sendo bem conduzido, dando o sinal de que podem prosseguir sem problemas, até a um apoio muito direto que interfira positivamente nos trabalhos dos alunos". De acordo com esse entendimento, os grupos "B", "C" e "D" receberam o auxílio do docente, principalmente, para compreenderem a necessidade de uniformizar as unidades de medidas para a comparação dos resultados. Outro ponto discutido com o professor foi a respeito da tomada de decisões em relação à escolha das unidades de medidas que deviam trabalhar.

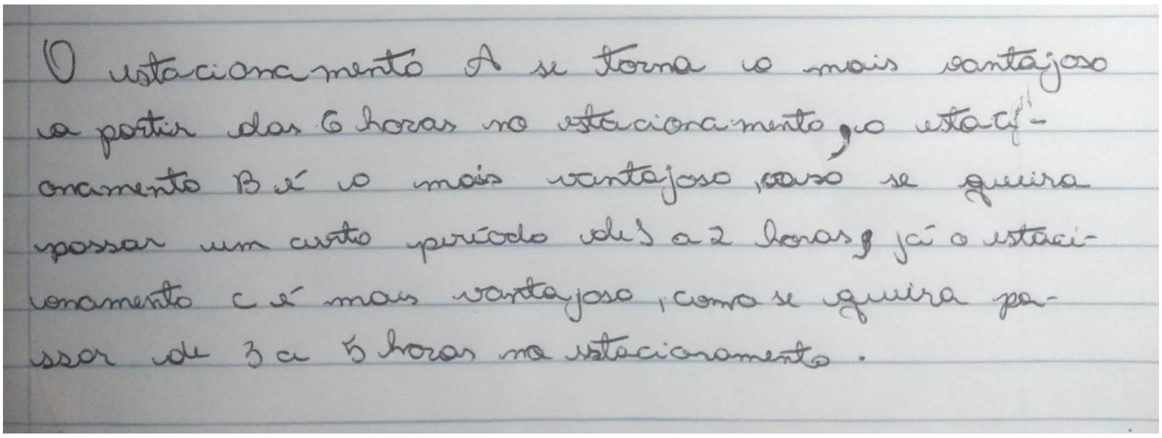
4.1.6 Atividade 6

Nessa atividade os grupos levaram 90 minutos e a presença do professor praticamente não foi solicitada pelos alunos, pois quando receberam o sinal que já podiam iniciar se voltaram para a questão e, por aproximadamente 30 minutos, o docente ficou passando pelos grupos apenas para verificar o desenrolar da investigação. Durante esse momento, percebi que havia uma tendência dos grupos em trabalhar com funções. De acordo com as informações dos áudios dos grupos a forma como os dados da atividade foram apresentados pode ter encaminhado os alunos para essa direção. A opção do estacionamento "A" expõe seu preço com a seguinte mensagem: R$ 5,00 fixo mais R$ 0,50 por hora. Nesse formato, os discentes não tiveram dificuldades em criar a função. Os componentes do grupo “E” foram os primeiros a chamar o docente informando que já haviam concluído. Eles elaboraram as funções correspondentes às três opções de estacionamento, essa ideia surgiu quando estavam fazendo a segunda leitura do enunciado. Nesse instante, um dos pares comentou: “*aqui vai ser melhor fazer uma equação para cada um, essa primeira é 5 reais mais 50 centavos por hora e a segunda e um e cinquenta por hora*”. Essa conjectura foi automaticamente aceita pelo grupo. Em seguida fizeram o registro das funções $y = 5 + 0{,}5x$ e $y = 1{,}5x$. Na elaboração da expressão para o estacionamento “C”, as discussões foram mais extensas.

> E2: - Mas aqui é só fazer $y = 2x$ e depois que calcular a pessoa tira o desconto.
> E5: - Dá na mesma se subtrair logo, o “4” é o fixo.
> E2: - Mas é o desconto das despesas com o estacionamento, entendeu?
> E5: - Entendi, tu é que não entendeu, se botar $y = 2x - 4$ dá na mesma coisa.
> E4: - Isso mesmo.
> E5: - Qualquer valor que botar dá certo, no final já sai com o desconto, não precisa fazer só com $y = 2x$, entendeu? Ai não precisa fazer os cálculos separados, a gente coloca as três funções e faz junto.
> E1: - Tá certo mesmo é assim.
> E2: - Entendi a função é esse ai mesmo, mas do jeito que eu estava falando o valor pago é o mesmo.

Todos os componentes desse grupo não tiveram contato com função no Ensino Fundamental. Provavelmente era a primeira função que eles elaboravam contendo o coeficiente linear negativo. É possível perceber no diálogo anterior que os alunos E2 e E5 discutiam a formação de um modelo matemático que nas condições propostas por E2 o valor a ser pago pelo estacionamento seria o mesmo que o proposto pelo E5, já que do total seria subtraído o valor 4. Eles tinham consciência de que as expressões eram diferentes. E2 tinha como foco o valor a ser pago pelo estacionamento, porque isso era o que interessava para identificar a melhor opção. E5 queria a função que representasse a situação por completo, ou seja, que pudesse fornecer o valor descontado. Nesse sentido, Alro e Skovsmose (2010) afirmam que em uma investigação cooperativa é possível que o aluno defenda uma ideia, mas também pode sustentar certo entendimento a partir de uma ideia. Dessa forma, o aluno E5 sustentava sua proposta porque visava ao resultado e a organização dos dados no caderno. A figura 62 expõe a conclusão a partir da manipulação das funções que construíram.

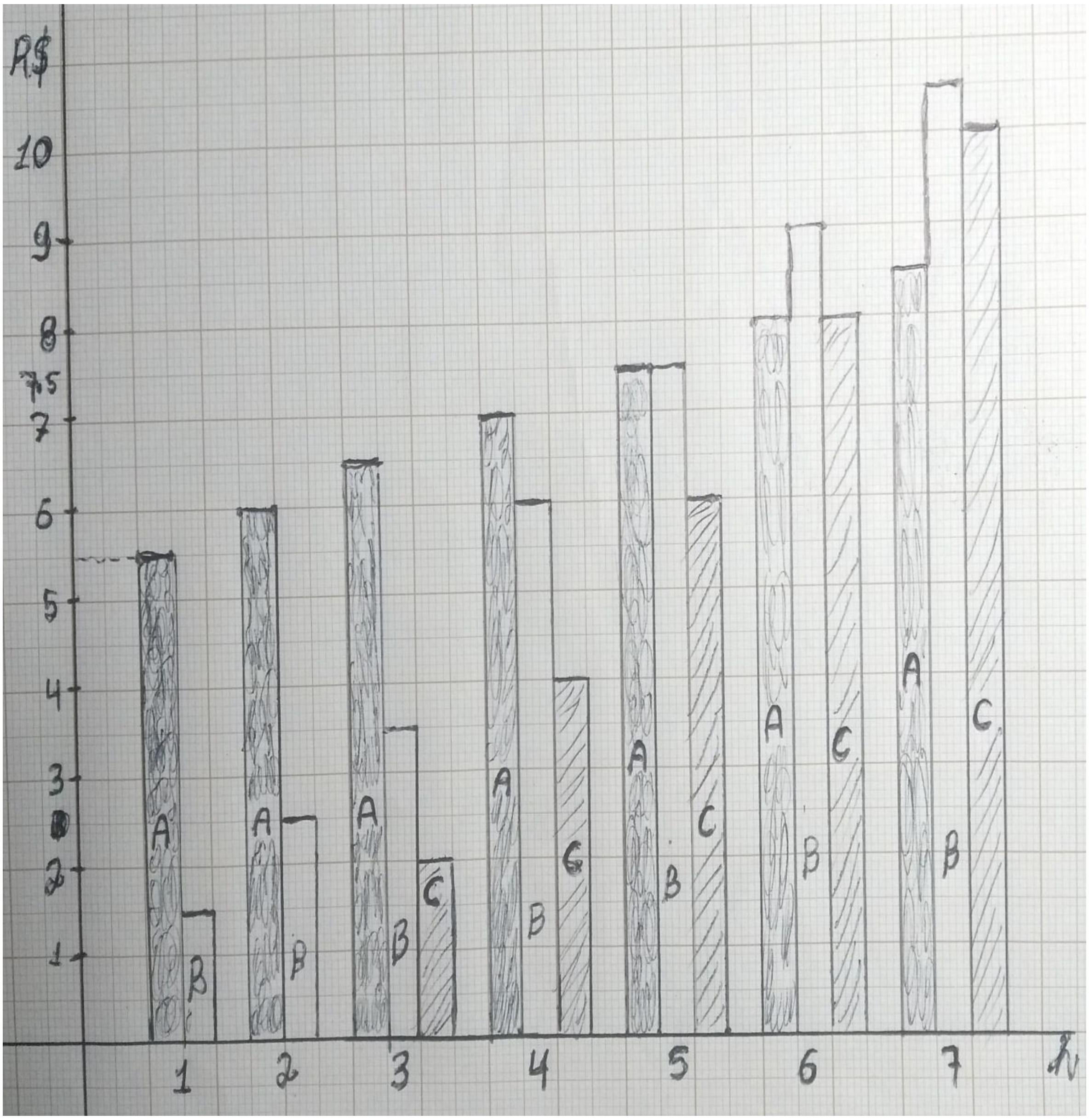
Figura 62: apresenta conclusão do grupo E.


O estacionamento A se torna o mais vantajoso
a partir das 6 horas no estacionamento, o estaci-
onamento B é o mais vantajoso, caso se queira
passar um curto período de 1 a 2 horas, já o estaci-
onamento C é mais vantajoso, como se queira pa-
ssar de 3 a 5 horas no estacionamento.

Fonte: alunos do grupo E

Foi possível observar nas anotações dos componentes de “E” que fizeram simulações com as mesmas quantidades de horas nas três funções, porque tinham em vista a comparação dos resultados. Dessa forma, verifica-se, na figura 61, a discriminação das opções mais vantajosas nos intervalos de horas. Como todos os grupos criaram funções, solicitei que demonstrassem, por meio de gráficos, o valor a ser pago com o passar das horas. Ponte, Brocado e Oliveira (2013) corroboram com essa proposta ao afirmarem que em uma investigação o docente deve garantir a evolução dos alunos, colocando questões que possibilitam refletir sobre o que estão fazendo. Nesse sentido, foi distribuído um material para que os discentes pudessem apresentar os resultados por meio de gráficos. A representação do grupo “E” não foi comum aos outros, preferiram desenhar gráficos de colunas. Durante a apresentação, os discentes perguntaram o porquê não fizeram os gráficos das funções. O grupo respondeu que em colunas os resultados ficam mais claros. O silêncio da turma confirmou o entendimento do grupo. Na figura 63, verifica-se esse feito.

Figura 63: realça o gráfico feito pelo grupo E.

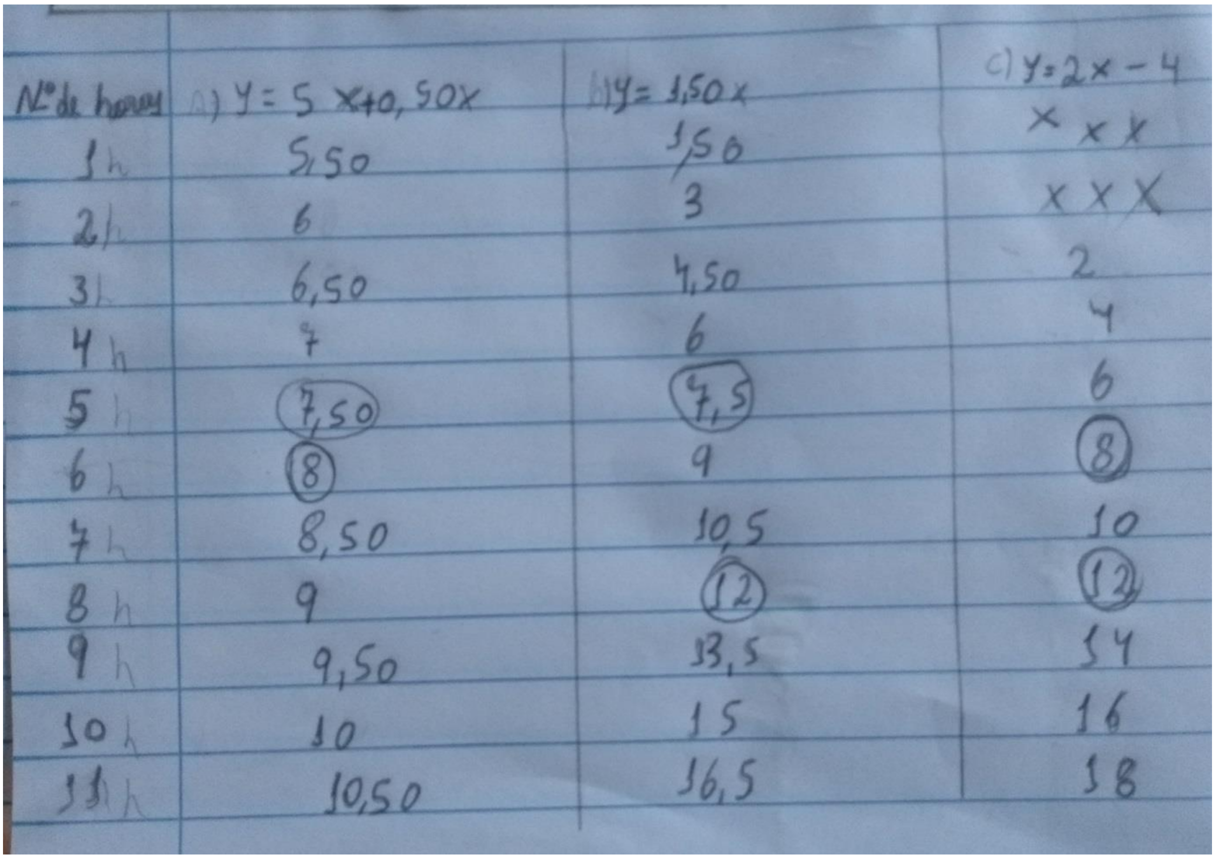


Fonte: alunos do grupo E

É possível notar que as informações na figura 63 ficaram mais explícitas do que a apresentada na figura 62. Os alunos também acharam que os gráficos apresentados na figura 63 tornaram as informações mais visíveis que os gráficos das funções construídas no plano cartesiano. É possível perceber na figura 63 qual a opção mais vantajosa, basta escolher a quantidade de horas que deseja estacionar e verificar qual é a coluna mais baixa. De acordo com as falas dos componentes do grupo “E”, a ideia de trabalharem com gráficos de colunas nasceu da necessidade de verificar qual é o valor, em reais, mais alto em três estacionamentos à medida que as horas passam. Provavelmente os conhecimentos que esses alunos possuem sobre gráficos estatísticos contribuíram para a elaboração. Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 53) enfatizam que os conceitos que os discentes possuem “podem ganhar um novo significado para os alunos quando são utilizados na abordagem de uma nova questão matemática”. Dessa forma, os estudantes puderam perceber que os conjuntos de valores relacionados com uma função afim podem dar origem a gráficos estatísticos. Destaco que a estratégia dos alunos do grupo “E” foi proativa porque não estavam interessados no comportamento dos gráficos das funções, mas nos valores que elas forneciam.

Os discentes do grupo “C” também foram rápidos para elaborar as funções relativas a cada caso. Após a leitura do enunciado, fizeram várias simulações com a opção de estacionamento A até perceberem que se tratava de uma função, cujo modelo é $y = 5 + 0{,}50x$, em seguida elaboraram as outras. Com essas expressões fizeram alguns cálculos, mas sem visar à apresentação final. À medida em que encontravam um resultado comparavam com as outras opções. Esse trabalho foi fundamental para o surgimento da seguinte conjectura “*acho melhor pagar uma hora e fazer para os três, ai ver qual a mais barata*”. De acordo com as falas dos alunos essa proposta foi de imediato aceita por todos. Durante as discussões posteriores que surgiram a essa ideia, uma discente defendia que os cálculos deveriam ser arrumados tendo em vista a apresentação final “*como a gente vai fazer para as três ao mesmo tempo é só colocar tudo junto porque fica melhor para a apresentação*”. A figura 64 apresenta alguns registros do grupo C.

Figura 64: anotações do grupo C.



Nº de horas	a) y = 5 x+0,50x	b) y = 1,50 x	c) y=2x − 4
1h	5,50	1,50	x x x
2h	6	3	x x x
3h	6,50	4,50	2
4h	7	6	4
5h	7,50	7,5	6
6h	8	9	8
7h	8,50	10,5	10
8h	9	12	12
9h	9,50	13,5	14
10h	10	15	16
11h	10,50	16,5	18

Fonte: alunos do grupo C

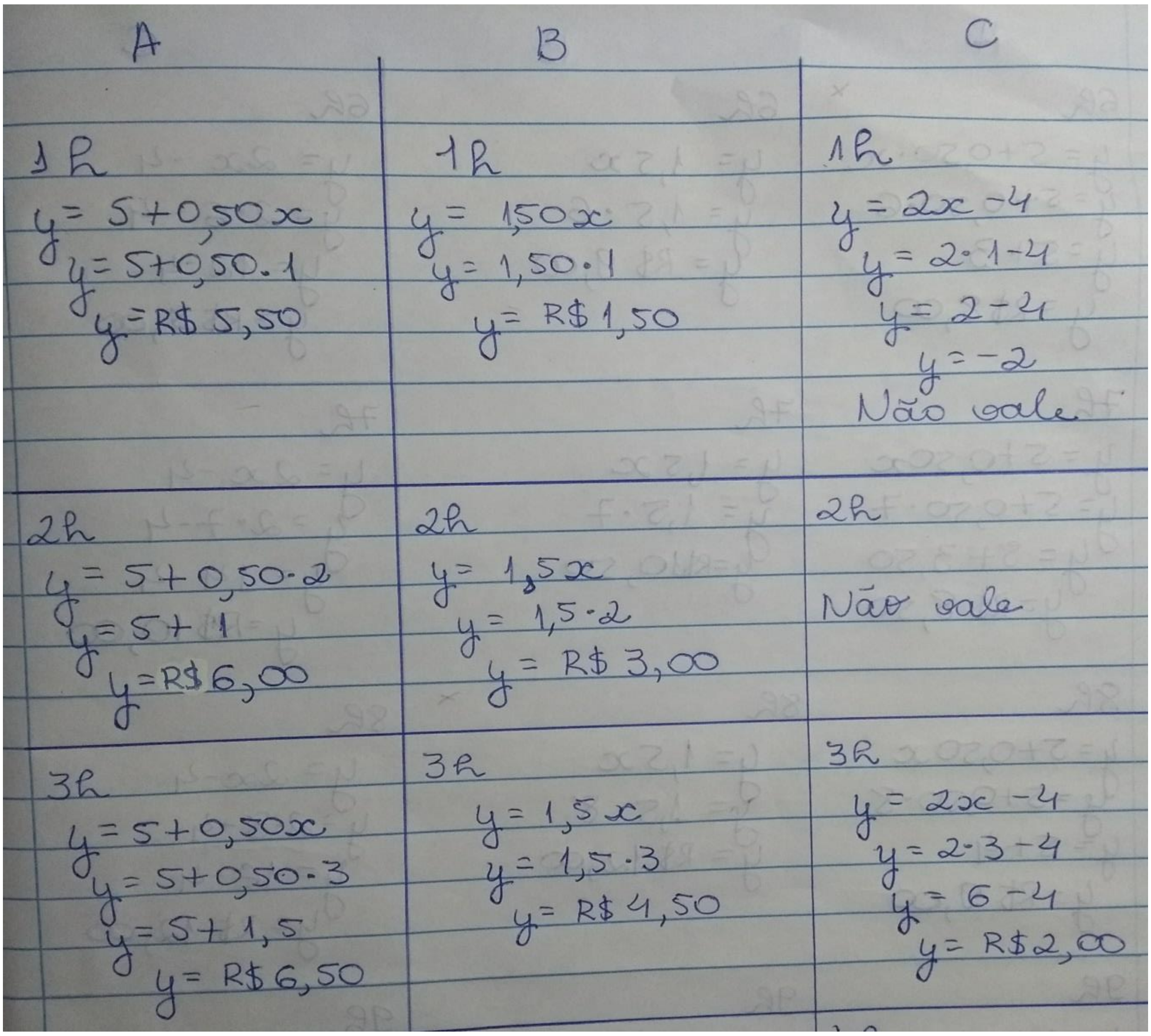
É possível perceber na figura 64 que a maioria dos dados que foram expostos visava aos resultados e a comparação entre eles. Dessa maneira puderam destacar os preços que seriam iguais para suas respectivas horas. Quando desenharam os gráficos no mesmo plano, os discentes perceberam que esses valores correspondiam às ordenadas dos pontos de intersecção das retas. Os alunos também comentaram sobre o gráfico construído pelo grupo “E”, afirmando que os valores destacados correspondiam às colunas que possuíam as mesmas alturas. Diante dos dados o grupo “C” registrou em seu caderno que “*a partir de 7 horas de duração, a opção A passa a ser sempre a mais vantajosa. Porque o valor pago por hora é menor que o dos outros*”. Eles também escreveram que “*aumentado às horas um vai sendo melhor que o outro*”.

Durante as atividades, foi perceptível o crescimento dos alunos em relação à comunicação falada e escrita. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) enfatizam que à medida em que os alunos interiorizam as características do trabalho investigativo é de se esperar que desenvolvam a capacidade de comunicar seus resultados.

Durante as apresentações dos trabalhos os grupos, eles eram questionados pelos colegas de sala quando algo não havia ficado claro. Esse comportamento também foi progressivo com o passar das atividades. Percebi que essa atitude contribuiu para estimular o hábito de comunicar, pois o grupo que estava apresentando era incitado a falar.

Como comentado, na presente atividade, os alunos preferiram trabalhar com as funções referentes a cada tipo de estacionamento. O que os diferenciou foram as formas como registraram seus resultados e justificativas. A figura 65 exemplifica como os registros do grupo “B” foram organizados.

Figura 65: exibe escrito do grupo B.



Fonte: alunos do grupo B

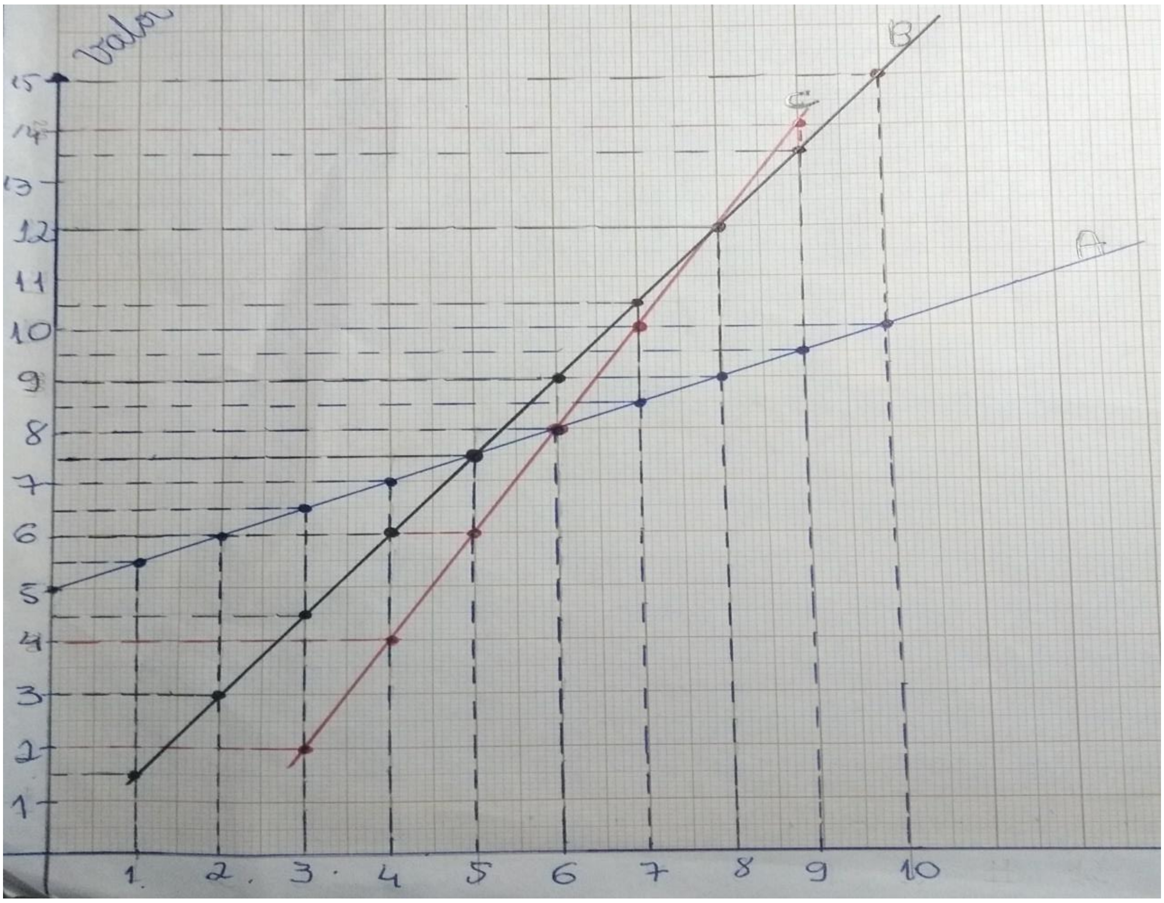
O grupo “B” decidiu trabalhar com funções porque estavam mais seguros com as expressões, mas, antes de eleger essa ideia, fizeram algumas discussões no sentido de organizar os registros em um quadro. Alguns alunos defendiam essa estratégia, separadamente, para cada opção de estacionamento e os outros queriam um modelo que envolvesse os três estacionamentos juntos. Quando começaram a colocar a primeira proposta em prática surgiu a ideia de trabalharem com função, pois podiam utilizá-las deixando os registros dos cálculos para mostrar, na apresentação final, o porquê dos resultados.

Nota-se na figura 65 que os cálculos foram organizados por etapas, ou seja, para cada hora simulada. Dessa forma, foi feito até a vigésima hora, porque eles não perceberam que a partir de sete horas de duração a opção A passou a ser a mais vantajosa. Logo, os discentes preferiram fazer para certa quantidade de horas e depois fizeram as análises. As anotações consumiram três páginas do caderno. Percebi que quando viravam a página perdiam o campo de visão dos registros anteriores. Provavelmente se eles tivessem utilizado a mesma estratégia mostrada na figura 65 teriam percebido que não precisavam calcular até a vigésima hora. Nesse sentido, Smole e Diniz (2001) ressaltam que a maneira como os alunos sistematizam seus apontamentos pode conduzi-los a novas ideias sobre o que estão procurando. Dessa forma, a estratégia utilizada na organização dos dados pode trazer eficiência na interpretação dos mesmos. Depois que analisaram seus registros, o grupo "B" escreveu no caderno:

> O A aumenta de 0,50 em 0,50 centavos;
> O B aumenta de 1,50 em 1,50;
> O C aumenta de 2,00 em 2,00 reais e
> Das 3 a 6 horas o estacionamento C e das 7 em diante é o A.

Essa conclusão foi confirmada quando fizeram a apresentação dos gráficos que construíram. Nesse momento, o grupo "B" foi questionado pela turma sobre os dados apresentados. Os alunos queriam identificar a explicação dos "aumentos" nos gráficos (figura 66).

Figura 66: gráficos elaborados pelo grupo B.



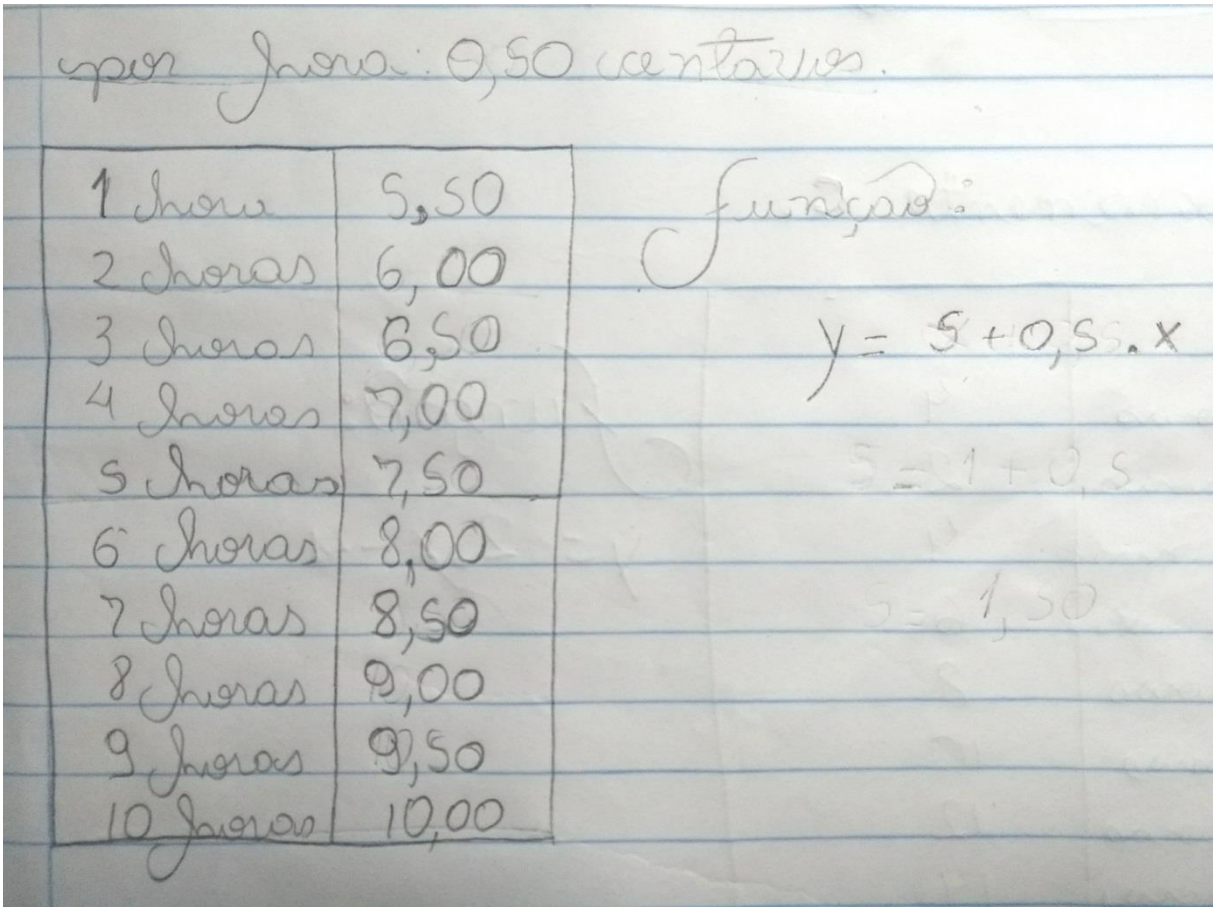
Fonte: alunos do grupo B

Ao apresentarem os feitos da figura 66 o grupo “B” explicou que se tratavam dos gráficos das funções que haviam utilizado para fazer os cálculos dos valores correspondentes às opções de estacionamento. Os alunos explicaram que nos pontos em que as retas se encontravam significavam que os valores a serem pagos aos estacionamentos eram iguais. Mas a turma já conhecia essa informação, nesse momento um aluno questionou:

> Aluno: - Isso daí nós já sabemos. Vocês disseram que os valores aumentavam e como é isso mesmo no gráfico?
> B3: - É, o A aumenta 0,50, o B aumenta 1,5 e o aumento de C é 2,00 reais.
> Aluno: - Mas o 0,50, como é que vejo esse valor ai no gráfico? Porque o gráfico está subindo né.
> B3: Quando vai aumentando aqui nas horas o resultado aumenta desse valor, entendeu? Esse é o valor que acompanha o “x”, a função cresce baseada nele, entendeu?
> Aluno: - Entendi, as outras é a mesma coisa.

O aluno que questionou o grupo já tinha conhecimento da informação. Provavelmente, ele estava querendo saber se os colegas que estavam apresentando sabiam relacionar o que haviam registrado com o crescimento dos gráficos. Contudo, essa discussão foi importante porque levou o aluno B3 a recordar para a turma conhecimentos que havia adquirido na atividade anterior. O grupo também foi questionado por outro aluno sobre o gráfico da função $y = 5 + 0{,}50x$: "*ei porque o gráfico da opção A começa em cima do eixo "y"*"? B3: - "*realmente foi um erro, depois que fizemos o gráfico não deu mais para corrigir porque estava de caneta, era para ter falado no início, mas nós esquecemos*". Percebi que o grupo estava seguro das suas criações, pois solicitei que eles deixassem mais claro o porquê de os gráficos não começarem a partir do eixo "y". Nesse momento, uma aluna do grupo expôs: "*professor o A e o B começam do 1, porque eles já podem ser contados do 1. O C só pode ser contado do 3, por isso que o gráfico do C começa no ponto 3 com 2*". Na ocasião, levantei uma discussão no sentido de despertá-los sobre as diferentes maneiras de se utilizar os conhecimentos matemáticos para representar uma mesma informação. O grupo "D" apresentou seus dados no caderno por meio de quadros, fez um para cada opção de estacionamento. A figura 67 explicita o primeiro destes quadros.

Figura 67: apresenta um registro do grupo D.



Fonte: alunos do grupo D

Nota-se na figura 67 que os alunos organizaram os valores em um quadro contendo até a décima hora. As outras opções também foram registradas dessa mesma maneira. De acordo com as falas do grupo “D”, utilizaram a função para encontrar os três primeiros valores, depois calculavam a quantia seguinte acrescentando ao valor anterior R$ 0,50 (correspondente ao coeficiente angular). A ideia do grupo em expor os valores em um quadro surgiu das seguintes falas:

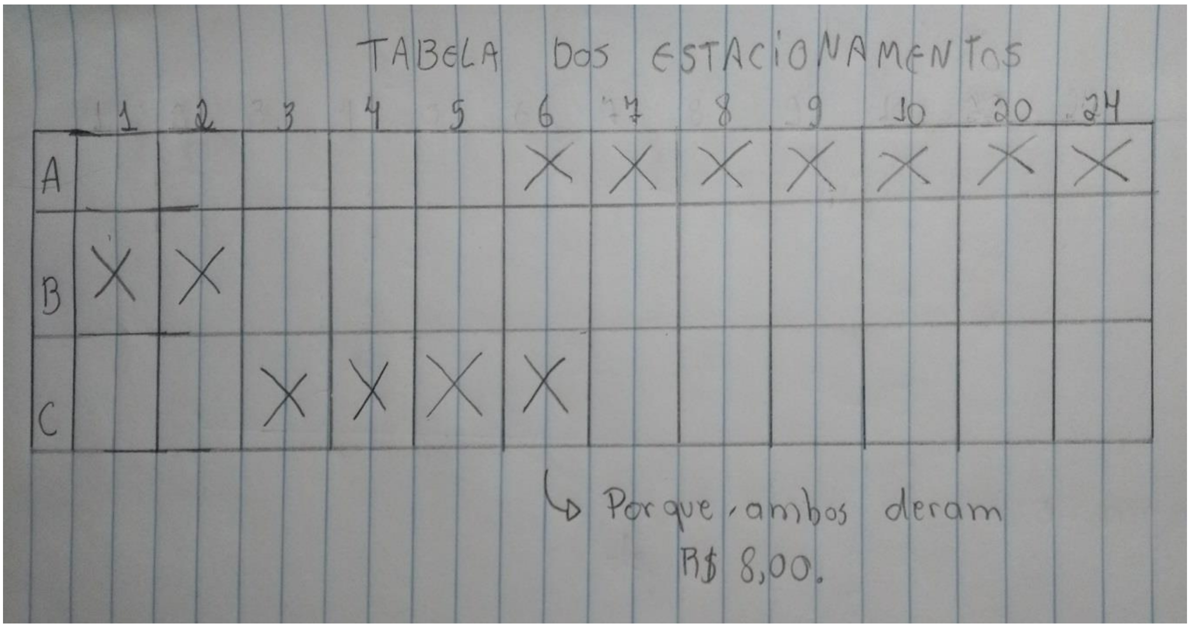
> D4: - Se colocar tudo em uma tabela fica mais organizado.
> D2: - Faz um pra cada é melhor, coloca as horas e o valor.
> D1: - É mesmo, só assim cada estacionamento recebe seu valor como uma placa.
> D2: - Como assim?
> D1: - A gente faz tipo uma placa que fica de frente os estacionamentos, entendeu?
> D2: - Ah, pode ser.
> D1: - Quando a pessoa chega para estacionar já vê o que vai gastar.
> D3: - É mesmo assim a pessoa já vê qual é o mais barato.

Com esse entendimento as funções não apareceram nos quadros e serviram apenas para introduzir as sequências de valores, porque a intenção era elaborar um quadro informando as horas com seus respectivos valores. Nesse sentido, Ponte (2003) comenta que quando os alunos ganham independência no processo investigativo, evoluem progressivamente o seu poder criativo evidenciando o seu entusiasmo. Dessa forma, o grupo elaborou para a apresentação final o quadro (figura 68), porque queriam apresentar algo diferente dos gráficos e que pudessem identificar rapidamente qual o estacionamento mais vantajoso. Eles observaram que os quadros informativos que criaram para cada opção de estacionamento tornaram a mensagem mais transparente do que as placas do enunciado da presente tarefa. Destaco que os alunos vivenciaram a investigação em um contexto prático. O grupo “D” apresentou as justificativas solicitadas pelas alternativas da atividade. Nesse sentido, os alunos registraram:

> Em uma hora o mais vantajoso é o estacionamento B.
> Em duas horas o mais vantajoso é o estacionamento B.
> Em três horas o mais vantajoso é o C.
> Em quatro horas o C.
> Em cinco horas o estacionamento C.
> Em 6 horas o estacionamento C e A.
> Em 7 horas o estacionamento A.
> Em 8 horas o estacionamento A.
> Em 9 horas o estacionamento A.
> Em 10 horas o estacionamento A.

Os componentes do grupo "D" demonstraram evolução em relação à comunicação escrita e falada. Outro ponto positivo, entre os grupos, foi o uso das estratégias para comunicar as resoluções. Essa tendência também foi verificada no grupo "A" que criou uma maneira própria de informar suas elaborações. Os componentes desse grupo, em poucos minutos de discussão, decidiram que iriam elaborar uma função para cada caso, porque depois que finalizassem as justificativas para as alternativas da tarefa iriam construir os gráficos. Foi possível verificar nas falas desse grupo que queriam algo diferente. "*Parece que tudo mundo vai fazer gráfico, nós podia pensar em outra coisa*". Eles tiveram essa percepção depois que os grupos receberam o papel milimetrado e começaram a usar. Depois de alguns minutos de discussão, os alunos chegaram a uma ideia. Em seguida, solicitaram a possibilidade de fazer outra construção diferente no gráfico: "professor nós vamos fazer outra coisa, pode? Porque parece que os outros estão fazendo gráfico". De imediato concordei, pois de acordo com Airo e Skovsmose (2010, p. 70) "quando o aluno torna-se apto a expressar-se em sua própria perspectiva, então ela pode ser reconhecida em termos matemáticos, não somente pelo professor, mas também pelo aluno". Deixei-os seguir no ritmo normal de uma investigação para que pudessem por em prática suas próprias ideias. A figura 68 mostra o feito.

Figura 68: exibe uma construção do grupo A.



Fonte: alunos do grupo A

Na figura anterior onde se encontram as marcações com “x” significa que a opção é mais vantajosa. Os alunos acharam a ideia do grupo criativa, porque comunica a melhor proposta sem precisar analisar valores. Observei, nas falas dos alunos, que o quadro exposto na figura 67 foi elaborado com o objetivo de apresentar algo que substituíssem os gráficos. Ao se referirem às discussões dos alunos, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) enfatizam que ela é fundamental para que os discentes possam refletir sobre seus trabalhos e o poder de argumentação. Os alunos elogiaram os trabalhos dos colegas, mas também exigiam novas explicações quando não estavam entendendo. Passar por esses momentos pode tornar o aluno crítico do seu trabalho e das produções de seus colegas.

Após a descrição e comentários das atividades, constatei que os objetivos presentes nas seis tarefas foram alcançados. Em todas as tarefas os alunos criaram e empreenderam conhecimentos sobre função do 1º grau. Na próxima seção, exponho as conjecturas e estratégias formuladas, as percepções do pesquisador e dos estudantes sobre as atividades investigadas.

4.2 Síntese dos resultados das atividades de investigação matemática

Quando o trabalho com as atividades iniciou, constatei dificuldades dos alunos em iniciar a investigação, mas ainda na primeira atividade foram apresentadas as primeiras expressões matemáticas. Ficou evidente, na primeira atividade, que a disposição das colunas do calendário foi facilitadora para a construção das funções do primeiro encontro. A estratégia de relacionarem as colunas com os eixos cartesianos formando coordenadas contribuiu para a elaboração das funções e dos gráficos. No primeiro encontro, a ideia de função como uma relação entre dois conjuntos de valores ficou perceptível. Também ficou evidente que o valor correspondente ao coeficiente angular estava relacionado com o grau de inclinação do gráfico. Um dos grupos contemplou a ideia de relação diretamente proporcional atribuída à função do 1º grau. A socialização desses conhecimentos entre os discentes foi fundamental para as elaborações das atividades seguintes, pois notou-se uma evolução dos alunos na elaboração de funções afins.

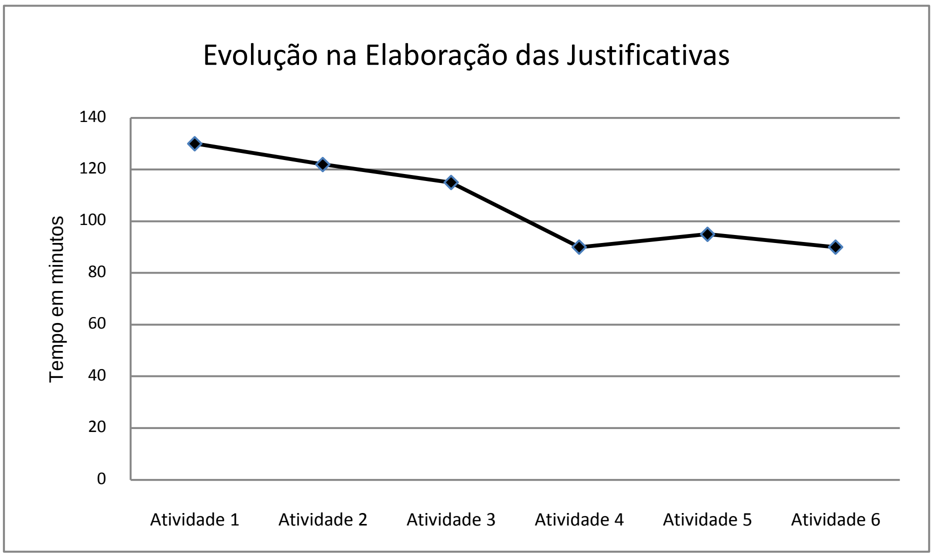
As relações apresentadas na segunda atividade tiveram, em suas elaborações, orientações observadas no primeiro encontro, pois o grupo que conseguiu elaborar funções para as três propostas de emprego teve como base a disposição de valores em colunas. A visualização dos valores que acompanham o "x" na formação dos modelos matemáticos $y = 1000 + 5x$, $y = 700 + 70x$ e $y = 800 + 51{,}60x$ reforçaram a ideia de coeficiente angular. Os alunos compreenderam que esse valor corresponde à razão de crescimento dos valores da coluna correspondente ao eixo "y". Na apresentação dos resultados do segundo encontro, as ideias sobre a relação entre dois conjuntos para a função afim e as partes que compõem essa lei, ficaram mais evidentes. Outro ponto constatado foram as justificações baseadas nas interpretações dos gráficos. Dessa forma, verifiquei que as planilhas foram facilitadoras para a comparação de valores e na elaboração de funções.

Na terceira e quarta atividade todos os grupos elaboraram funções. A ideia de função crescente foi discutida, pois os alunos observaram que a função mediada que os valores correspondentes ao eixo "x" aumentavam, os valores de "y" cresciam. Os alunos também visualizaram o crescimento do gráfico com base nos valores correspondentes ao conjunto imagem da função. Evidenciaram que como esses valores cresciam então o gráfico da função afim correspondente a eles também cresce. Verificou-se que as funções encontradas foram utilizadas na busca de soluções para a tarefa. Além disso, constatou-se que o gráfico da função também pode ser formado por uma sequência de pontos alinhados, bem como a presença de uma função elaborada por meio da comparação dos valores das coordenadas. Ficou evidente, como ocorreu na 1ª e 2ª atividades, que a manipulação dos valores dispostos em colunas facilitou a elaboração do modelo das funções na terceira tarefa, como pode ser notado por meio das conjecturas e estratégias apresentadas no quadro 6.

Na quinta tarefa o uso da regra de três simples foi praticado por todos os grupos. Isso indica que os discentes evoluíram nesse conhecimento, pois em atividades anteriores houve alunos que mostraram dificuldades nesse conteúdo. O uso do valor 3,6 (três vírgula seis) para a transformação de velocidade de m/s para km/h e vice-versa foi elaborado e interpretado pelos alunos. Constatou-se que foram elaboradas relações correspondentes à fórmula da velocidade e as funções afins envolvendo distância e tempo também foram criadas.

Na sexta atividade os alunos expuseram evolução em relação à função do 1º grau, pois todos os grupos se mostraram seguros na elaboração dessa lei. Verificou-se habilidade dos alunos tanto na construção quanto na interpretação dos gráficos. A evolução na resolução das atividades é explícita na figura 69.

Figura 69: Evolução nas elaborações dos grupos.



Fonte: Do autor

Nota-se, na figura 69, que houve uma diminuição no tempo consumido pelos grupos, para elaborarem as conclusões das atividades propostas. É possível perceber nas descrições e análise das atividades (seção 4) que o avanço nas constituições das justificativas ocorreram de forma significativa. Observei que, à medida em que os grupos avançavam nas tarefas, eles também evoluíram nas elaborações das respostas e estratégias. No quadro 6, apresenta-se resumidamente, as conjecturas e estratégias elaboradas em cada atividade.

Quadro 6: apresenta as conjecturas e estratégias.

Conjecturas	Estratégias
Atividade 1: • "x" é a primeira coluna e o resultado que é "y" é a penúltima coluna.	Atividade 1: • Estabeleceram uma relação entre as colunas para obter a função afim.

(Continuação)

• A última coluna pode ser a do lado mais 1. Desse jeito também dá certo para a primeira com a segunda linha. • A função $y = 2x$ é diretamente proporcional, porque se “x” variar de 1 em 1 o resultado “y” varia de 2 em 2. • Pegando esse com esse dá 6 e esse com esse dá 6 [se refere aos seguintes produtos: 2×3 e 1×6 dispostos em colunas]. Com essa conjectura elaboraram a função $y = 3x$.	• Envolveram colunas e linhas do calendário com os eixos cartesianos para elaborar funções e gráficos. • Identificaram a inclinação do gráfico por meio da observação do gráfico das funções $y = x$, $y = 2x$ e $y = 3x$. • A estratégia de testar os valores de uma coluna e encontrar seus correspondentes em outra coluna evidenciou a ideia de pares ordenados. • É para usar só os números do mês né? – Vamos usar soma e subtração porque é mais fácil. • Utilizaram a regra de três simples para identificar as funções que guardam uma relação diretamente proporcional entre os valores de seus pares ordenados.
Atividade 2: • Tirando a porcentagem de cada pneu vendido e somando com o seu salário. • A terceira é melhor, porque diferença de um salário para o outro é pouca, e a pessoa fica em casa. • Esse aqui vai ser o salário dele mais 5 reais por pneu vendido. • O vendedor direto no site é melhor, porque alcança lojas e pessoas. • Pois é, faz primeiro com um depois com dois e três, quando completar faz com as outras e vê a melhor.	Atividade 2: • É melhor fazer de uma proposta por vez envolvendo os três aros. • Para encontrar a melhor proposta de emprego, adotaram quantidades fixas de cada aro para os cálculos. • Utilizar quantidades variadas de pneus para representar as vendas de uma mesma condição de emprego. • Organizar os dados em planilhas, elaborando uma para cada proposta de emprego. • Utilizaram os dados dispostos em colunas para visualizarem o modelo da função.
Atividade 3: • Aqui está aumentando de 300 em 300, então a gente multiplicou 300 vezes 14 e deu os 4200, depois foi só somar com o primeiro valor e deu 4600. • Nós estávamos pensando assim, dá 200 mais a quantidade de trufas vendidas. • Procura outra coluna para o lugar de “x” e a outra vai ser o resultado, o salário. • Então fica “y” igual a 200 mais 50% do total das trufas. – “x” é os 50% do total. • O adicional é 50% do total das trufas. – 50% de 400 é 200. • É 200 mais o adicional de 50% sobre o total das trufas. • É só multiplicar o 0,5 (multiplicar por “x”) e soma com o fixo. • Vai ser $y = 200 + 50x$, 50 é 50%.	Atividade 3: • Utilização da regra de três simples. • Manipularam os valores presentes nas colunas do quadro para elaborar funções. • Utilizaram valores presentes nas colunas correspondentes ao eixo “y” para justificar o crescimento dos gráficos. • Encontrar modelos de função com base no enunciado da atividade e utilizar os valores do quadro para validar a função. • Aplicaram as expressões criadas para encontrar soluções para a questão. • Ampliaram a quantidade de linhas do quadro para identificar valores que ajudariam nas justificativas da questão. • Para chegar a uma função partiram do modelo $y = ax + b$ e foram fazendo adaptações e testando, sendo que os resultados eram comparados com os valores da coluna dos salários.
Atividade 4: • Do jeito que está aqui a função é $1 + \mathrm{x}$. • Pagar os 50 copos, porque vai sair mais caro se for cada copo por dia.	Atividade 4: • Utilizar o modelo da função encontrada na busca de justificativas para a questão. • Manipularam das coordenadas cartesianas presentes no xadrezado para

(Continuação)

• Eu tô achando que ela vai ser $y = \frac{x+1}{50}$. • Dois copos por dia, no primeiro dia vai ser 3 reais e no segundo mais 3, até acabar os 10 dias. • $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$ e $1 + 3 = 4$. O “1” vai ser o fixo (conjectura que os levou à função $y = 1 + x$).	• elaborar a função $y = 1 + x$. • Organizaram os cálculos em um quadro para facilitar na visualização das justificativas. • Utilizaram a regra de três simples para auxiliar nos cálculos dos itens “c” e “d”.
Atividade 5: • Pois é, esses 20 minutos da 1200 segundos, aí é só saber quantos metros percorre nesses 20 minutos. • O ônibus roda 18.000 metros e o táxi é 18.000 mais os 4.500 metros que ficou para trás. • Só se fizer com um tempo menor que 20, se o tempo é menor a velocidade é maior. • Se em 5 min. o ônibus chega em 4500 m em 10 ele irá percorrer 9000 m. • Nós podíamos fazer para a velocidade de 30, porque é o dobro da do ônibus ai acompanha.	Atividade 5: • Trabalharam com a regra de três simples para encontrar valores envolvendo as grandezas de comprimento e tempo. • Para calcular a velocidade utilizaram a relação distância pelo tempo. • Esboçou um desenho para a situação problemática que tornou mais fácil a investigação. • Fizeram uma síntese dos dados da atividade para facilitar na visualização das ações. • Relacionaram distância e velocidade para determinar a velocidade que o táxi deveria desenvolver. • Tabularam as distâncias percorridas pelo táxi e pelo ônibus para velocidades predeterminadas e depois identificaram os instantes em que essas distâncias são iguais.
Atividade 6: • Aqui vai ser melhor fazer uma equação para cada um, essa primeira é 5 reais mais 50 centavos por hora e a segunda e um e cinquenta por hora. • Aqui é só fazer $y = 2x$ e depois que calcular a pessoa tira o desconto. • Acho melhor pagar uma hora e fazer para os três, ai ver qual a mais barata. • Aumentado às horas um vai sendo melhor que o outro. • O A e o B começam do 1, porque eles já podem ser contados do 1. • O C só pode ser contado do 3, por isso que o gráfico do C começa no ponto 3 com 2. • Se colocar tudo em uma tabela fica mais organizado.	Atividade 6: • Elaborar uma função para cada caso e utilizar essas expressões para encontrar as justificativas. • Para comparar dos resultados, fizeram simulações com as mesmas quantidades de horas nas três funções. • Para verificar qual é o valor, em reais, mais alto em três estacionamentos à medida que as horas passam utilizaram gráficos das funções, de colunas e um quadro. • Organizaram os cálculos dos três casos em um quadro visava à comparação entre os resultados.

Fonte: do autor

O quadro 6 descreve as conjecturas e estratégias geradas nas discussões dos estudantes com as seis atividades investigativas. Esses resultados são significativos, pois representam as vivências de um trabalho usando a metodologia da Investigação Matemática com o grupo de discentes que não estavam acostumados com essa metodologia. Entretanto, Smole e Diniz (2001) destacam que quando os alunos têm oportunidade de colocar em prática o que sabem, modificam seus conhecimentos prévios e constroem novos significados matemáticos. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) corroboram com essa ideia ao enfatizarem que para atingir o processo de formação de conjecturas, os alunos precisam se sentir à vontade e que lhe sejam dado tempo para promover questionamentos a respeito do que estão investigando. Nesse sentido, os discentes foram incentivados e provocados a expor ideias que os levassem às conjecturas e estratégias proativas às justificativas das atividades.

É possível notar, no quadro 6, que os grupos utilizaram ideias nas conjecturas e estratégias que os levaram a construção do conceito de funções afins crescentes. No entanto, poderiam ter estabelecido conjecturas voltadas às funções decrescentes, embora as tarefas não tenham questionado situações que os levassem a essas funções. Por outro lado, os estudantes elaboraram conjecturas e estratégias que os levaram a funções e gráficos, quando as atividades não solicitaram. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) as concepções que compõe o quadro 6 ilustra o processo investigativo como uma metodologia produtiva em que os estudantes, de maneira espontânea, podem desenvolver ideias significativas em relação aos conceitos envolvidos nas atividades.

Observei que os discentes foram evoluindo nas justificativas das questões. Á medida que foram se familiarizando com a metodologia vivenciada nas investigações, apresentaram estratégias mais criativas para justificar e comunicar os resultados das discussões. Dessa maneira, após a investigação das seis atividades, percebi os discentes otimistas em relação às elaborações e ao conteúdo abordado, pois tinham certeza que a aprendizagem obtida era fruto de suas discussões nas investigações e apresentações finais.

Na socialização dos resultados, os grupos menos proativos nas investigações foram os primeiro a apresentar. Desse modo, foi possível estabelecer uma sequência crescente de exposição de conhecimentos, pois à medida que os alunos mostravam seus feitos o conteúdo ganhava uma abordagem mais ampla. Nesse contexto, incentivava os discentes a expor perguntas e tirar suas dúvidas caso não estivessem compreendendo o que o colega exibia. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) corroboram com esse entendimento ao salientarem que o mediador deve garantir que os resultados sejam comunicados e que os discentes devem ser estimulados a questionarem-se mutuamente. Nesse episódio, ocorreram circunstâncias em que tive que efetuar interposições para explicitar o que estava sendo discutido pelo apresentador do grupo. As minhas intervenções possibilitaram segurança aos alunos para discutirem os resultados. Quando o apresentador não sabia ou não se sentia seguro para responder as perguntas de seus pares, era comum, com um olhar, sinalizar para mim que estava precisando de apoio. Posso inferir que o *feedback* proporcionou autoconfiança aos representantes dos grupos. Dessa maneira, as socializações dos resultados se destacaram como momentos de aprendizagem e empreendedorismo de conhecimentos dos saberes investigado. No próximo capítulo apresento as conclusões obtidas para com este trabalho.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciando este capítulo, apresento novamente a questão de pesquisa do presente trabalho: que conjecturas e estratégias os alunos Do 1º ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio elaboram ao trabalharem com atividades envolvendo Investigação Matemática com foco na função do 1º grau, de forma colaborativa? Quando a pesquisa iniciou, fiquei preocupado se realmente os alunos conseguiriam produzir dados que fossem suficientes para responder a essa pergunta. Essa dúvida surgiu porque os discentes tinham costume apenas com a cultura do paradigma dos exercícios e não conheciam a investigação matemática. Nesse contexto, tive o desafio de adequar a sala de aula a uma metodologia que colocou o aluno para raciocinar como sujeito do ensino e aprendizagem. Dessa forma, que conjecturas matemáticas seriam capazes de elaborar se nunca foram submetidos a condições de protagonistas do processo de ensino? Quais estratégias conseguiriam colocar em prática diante de atividades investigativas, se ainda não haviam sido colocados a essas condições? Entretanto, as conjecturas e estratégias presentes no quadro 6 respondem a essas perguntas, como também contempla ao terceiro objetivo específico (identificar as conjecturas e estratégias apresentadas pelos alunos durante os desdobramentos das tarefas de investigações propostas). A realização das tarefas à luz da investigação matemática foi enriquecedora, porque os estudantes conseguiram realizar as investigações as quais possibilitaram novos horizontes para a aprendizagem em sala de aula. Esse processo possibilitou transformações às minhas futuras práticas docentes. Ao finalizar a pesquisa percebi que as ações dirigidas pelo paradigma do exercício poderiam ser substituídas pela metodologia empregada nas intervenções. Essa conclusão foi plausível, pois estive, todo o tempo, motivado a identificar meios que superassem meus métodos tradicionais de ensinar.

Diante do que foi estabelecido, destaco que fazer investigação matemática em sala exige uma dinâmica criativa e participativa do mediador, pois é preciso ficar atento aos desafios que podem surgir. Ao iniciar as intervenções das seis atividades tive que orientar e incentivar os alunos a participarem das investigações, embora eles já tivessem sido estimulados em uma reunião de véspera às atividades. Outra ocorrência comum que exige eficiência do docente está nos atendimentos aos discentes. Isso ocorria quando mais de um grupo me convidava para orientá-los nas investigações. Dessa forma, tinha que estar atento aos questionamentos dos grupos tendo em vista o atendimento a todos.

Quando os discentes estavam focados nas discussões, também era preciso observar o que os grupos estavam produzindo sem tirar a atenção dos mesmos. Embora tivesse me preparado para esse desafio, este momento foi difícil, pois como professor sempre procuro responder logo as questões do aluno. E, na Investigação Matemática o professor precisa ser questionador. Ressalto ainda que outra dificuldade encontrada foi no momento das elaborações das atividades investigativas. Quais atividades utilizar? Como elaborar? Encontrar respostas para esses questionamentos foi um desafio. Para um professor acostumado com questões cujos enunciados eram fechados, formular tarefas abertas não foi imediato, pois algumas vezes desenvolvi atividades fechadas pensando ser abertas. Entretanto, procurei observar a constituição de várias tarefas investigativas já utilizadas em pesquisas. Dessa forma, obtive experiência para elaborar questões e, escolher, quais utilizar. Assim, a pesquisa contou com atividades adaptadas e outras inéditas.

No primeiro encontro, os alunos tiveram dificuldades em iniciar suas atividades porque não compreendiam como deveriam investigar, ou seja, não estavam elaborando as relações esperadas porque não compreendiam a questão. Essa dificuldade provocou desânimos nos alunos e conversas paralelas entre componentes de grupos distintos. Mas, quando percebi essa situação, efetivei um diálogo com os grupos que aceitaram compor um cenário investigativo. Neste sentido, pontuo que é imprescindível o professor estar preparado com conhecimentos sobre a metodologia que está trabalhando para orientar os alunos sobre o que devem fazer e como fazer. Diante da necessidade dos discentes serem colocados como sujeitos do ensino, o docente precisa orientá-los no sentido de compreenderem suas atribuições dentro do grupo.

Apesar das dificuldades vivenciadas no início, os alunos ganharam confiança para investigar em grupos colaborativos. Nos encontros, percebi um acontecimento que foi comum em todas as atividades. Mesmo os alunos se envolvendo com a tarefa desde o início da aula, o professor precisa entender que cada grupo tem o seu tempo para iniciar as primeiras conjecturas e estratégias de investigação. No presente trabalho, testemunhei que grupos que, aparentemente, não estavam conseguindo produzir resoluções, começaram a elaborá-las com ideias proativas. Destaco que, com o passar do tempo da aula, as anotações foram surgindo nos cadernos dos grupos, seja por meio do auxílio do docente ou pelos resultados das discussões entre os alunos. Até o momento investigativo encerrar, os discentes haviam elaborado suas conclusões e justificativas para a atividade proposta. Diante dessa realidade, posso inferir que quando os discentes estão envolvidos em uma investigação, os resultados podem surgir nas primeiras discussões ou podem demorar um pouco para fluírem, mas os discentes acabam resolvendo as situações.

No decorrer das atividades, a evolução dos alunos em relação à escrita e organização dos dados evoluiu quando perceberam que as suas elaborações seriam divulgadas na apresentação final. Percebi que os estudantes começaram a se preocupar com a escrita e a disposição de seus dados quando observaram que poderiam fotografar seus feitos no caderno e utilizar a lousa digital para mostrar. Penso que essa maneira de divulgar as elaborações dos alunos contribui para que os grupos registrem suas ideias com mais cuidado. Também notei que os elogios dados pelo docente às elaborações dos grupos passaram confiança e autoestima para que os alunos produzissem sem medo de errar. Diante do exposto, no presente parágrafo, posso inferir que o segundo objetivo específico (incentivar o gosto pela escrita e a socialização dos conhecimentos a partir das conjecturas validadas) foi alcançado.

Outro momento positivo percebido e que provocou preocupação dos discentes foi em relação à elaboração e registros dos dados, pois os mesmos provocavam, muitas vezes, discussões no decorrer da apresentação em grande grupo. Quando os alunos vivenciaram os colegas questionando e discutindo sobre o que eles haviam concluído e justificado, a preocupação com a elaboração dos conhecimentos matemáticos passou a ser constante. Diante desse fato, enfatizo o quanto é importante o professor incentivar as discussões durante as apresentações em grande grupo, pois dessa forma, esse momento pode oportunizar criações significativas a investigações futuras.

Observei que os modos colaborativos como os alunos se comportavam provocava o envolvimento de todos os componentes do grupo. A maneira respeitosa como os alunos recebiam o posicionamento dos colegas, certamente tornou o ambiente mais propício às discussões. Notei que, quando uma questão colocada era refutada, o aluno proponente não se sentia rejeitado, porque a sua ideia era discutida com os pares e o não aceite era o resultado de uma discussão de todos. Esse comportamento tem relação com as informações que os alunos tomaram na reunião de véspera dos encontros e a atitude do professor no primeiro encontro quando percebeu que os estudantes deviam ser relembrados do seu papel na investigação e no grupo colaborativo. Portanto, a diversidade de discussões foi significativa, porque criou oportunidade de conexões de ideias, troca de conhecimentos e a abordagem de outros assuntos da Matemática.

Dessa forma, o empreendedorismo de conhecimentos proporcionados pela participação dos alunos condicionou a elaboração de conjecturas e estratégias relevantes para as justificações apresentadas. Percebi que a variedade de conclusões que surgiam nas apresentações em grande grupo enriquecia os conhecimentos dos alunos sobre função do 1º grau. As discussões sobre o modelo dessa função estiveram presentes em todas as atividades. Dessa forma, o primeiro objetivo específico (propor aos alunos atividades investigativas com foco em função do 1º grau, para que sejam exploradas em grupos colaborativos) foi contemplado. Com as investigações das atividades, os grupos criaram uma maneira própria de perceber a função afim como uma relação entre dois conjuntos de valores. As partes que compõem o modelo da função do primeiro grau e a elaboração do gráfico foram compreendidas pelos alunos. Esta constatação foi perceptível no momento em que fiz uma explanação sobre função do 1º grau depois que os grupos finalizaram a apresentação referente à última atividade. Aproveitei as elaborações dos grupos para auxiliar nas explicações em relação aos termos como coeficiente angular e linear, discutindo o significado desses valores na função.

As manifestações dos alunos às perguntas do questionário que foi aplicado após a realização de todas as atividades confirmam a aprendizagem comentada. Após verificar as respostas dos 26 sujeitos, afirmo que os registros a seguir representam a sensação comum dos estudantes da turma. Então, ao questioná-los (3º pergunta do questionário, APÊNDICE 1): Você acha que a investigação facilitou a aprendizagem do tema funções?

- *Sim, pois a atividade nos proporcionou um jeito mais fácil de aprender funções.*

- *Sim, pois tivemos maior facilidade de aprender esse conteúdo.*
- *Sim, pois aprendemos a fazer do nosso jeito, chegando assim a um resultado correto. Com a ajuda do grupo nós aprendemos muitas coisas de função.*

Dessa maneira, as declarações imprimidas enfatizam que a metodologia vivenciada pelos estudantes possibilitou uma forma diferente de aprender Matemática em sala de aula. Foi a primeira vez que a turma participou de momentos envolvendo atividades investigativas. Portanto, o envolvimento dos discentes com as tarefas, lhes condicionou uma maneira própria de aprenderem.

Em relação a segunda e quarta perguntas do questionário (APÊNDICE 1), responderam que as dificuldades ocorreram mais no início, porque as tarefas abordavam um conteúdo novo, mas com a participação ativa dos componentes do grupo, os obstáculos foram sendo superados. Dessa forma, salientaram que as discussões em grupos colaborativos facilitou a elaboração das justificativas. Os apontamentos seguintes (de três alunos) representam o posicionamento dos discentes da turma, pois os demais discentes se manifestaram de acordo com esse entendimento. Então, ao serem questionados (4º pergunta do questionário, APÊNDICE 1): Como você avalia as discussões em grupo colaborativo para produção dos conhecimentos e aprendizagem? Justifique.

- *Foi ótima, pois descobrimos nosso potencial juntos para aprender e responder as questões. Todos pensando juntos e se ajudando foi melhor para aprender o conteúdo de função.*
- *Todos os participantes do meu grupo colaboraram pois eles estavam dispostos a aprender e questionamentos em grupo facilitou a aprendizagem.*
- *Foi muito bom. O que eu não sabia meu colega sabia. Foi mais fácil responder a questão e aprender com os grupos porque a participação e ajuda de todos foi melhor para aprender o assunto.*

Já em relação aos registros escritos, apontaram que a principal dificuldade estava em concluir o que registrar. Entretanto, ao definirem a ideia a ser utilizada, a escrita no caderno se tornou mais fácil. Diante dessas percepções, os alunos participantes classificaram, no questionário, o método utilizado na resolução das atividades como ótimo ou bom.

Observei que ao condicionar aos estudantes a oportunidade de expor e empreender conhecimentos, as discussões nos pequenos e grandes grupos, evoluíram de maneira que até os alunos mais tímidos passaram a se posicionar e contribuir nas elaborações do grupo. À medida que a participação dos alunos crescia, eles conduziam a investigação e o professor assumiu o papel de auxiliá-los quando era convidado ou quando percebia que era necessário. Assim, os alunos foram compreendendo como investigar e expor os conhecimentos adquiridos.

Diante dessas considerações, não coloco o trabalho com atividades investigativas como o único método capaz de superar a cultura do paradigma do exercício, mas uma alternativa que pode ser inserida na escola para envolver os estudantes no ensino e torná-los mais autônomos no processo de aprendizagem. Nesse sentido, percebi que por meio das atividades investigadas os discentes puderam utilizar os conhecimentos que já tinham para aprender um novo conteúdo. Dividir a turma em grupos colaborativos foi fundamental para que os alunos elaborassem estratégias e conjecturas diferenciadas. As discussões que levaram a essas elaborações e a apresentação no final dos encontros deslumbraram um jeito novo de aprender e ensinar o conteúdo abordado.

Dessa maneira, destaco que a realização do presente trabalho agregou uma proposta inovadora à prática docente do pesquisador. Do primeiro ao último encontro, assumi a função de mediador, porque os alunos mostraram que são capazes de elaborar os conhecimentos e transmitirem entre si os resultados. Portanto, vejo a Investigação Matemática como uma metodologia que deve/pode ser implementada em sala de aula, pois possibilita autonomia ao aluno em sua aprendizagem.

Entretanto, finalizo esse trabalho com a seguinte pergunta: Como tornar mais fácil o ensino de função afim por meio de atividades investigativas que condicionam estratégias proativas? Essa questão foi construída ao constatar, durante as investigações das atividades, que os discentes sinalizaram certa facilidade em elaborar funções do 1º grau e interpretá-las por meio da manipulação de valores organizados em linhas ou colunas. Essa percepção abriu um novo horizonte a ser pesquisado utilizando investigação matemática. Nesse sentido, pretendo ir à busca de resposta para essa inquietação no doutorado, pois os conhecimentos adquiridos no Mestrado me trouxeram saberes suficientes para alcançar novos conhecimentos e consequentemente melhorias na formação profissional.

REFERÊNCIAS

ALVES, Cicero dos Santos. **As funções exponencial e logarítmica: uma abordagem para o professor do ensino básico**. 2014. 65 f. TCC (Mestrado) – Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: BIBLIOTECA SETORIAL DA MATEMÁTICA-UFC. Disponível em: < http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/ >. Acesso em: 14 set. 2017.

AURO, H. SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução de Orlando Figueiredo. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BANCHI, H.; BELL, R. The many levels of inquiry. *Science and Children*, v.46, n.2, p.26-29, 2008.

BICUDO, Maria A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**. Pro-posições, Campinas (SP), v. 4, n. 1[10], p. 18-23, 1993. Disponível em: < http://mariabicudo.com.br/artigos-em-peri%C3%B3dicos.php > Acesso em: 12 fev. 2017.

Boavida, A., e Ponte, J. (2002). **Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas**. Em GTI (Org), Reflectir e investigar sobre a prática profissional. Lisboa: APM. [online] 180 [consultado em: 06/01/2009]. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ jponte/docs-pt%5C02-Boavida-Ponte(GTI).pdf >. Acesso em: 15 out. 2017.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BONALS, J. **O trabalho em pequenos grupos em sala de aula.** Porto Alegre: Artmed, 2003.

BONOTTO, Aline Kempa. **Ensino e aprendizagem da função exponencial por meio de atividades inv estigativas e do uso de objeto de aprendizagem**. 2015 125 f. Dissertação: Mestrado Profissional. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática Instituição de Ensino: Centro Universitário Franciscano. Santa Maria, 2015. Disponível em: < http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/ >. Acesso em: 02 nov. 2017.

BORBA, Marcelo de Carvalho. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Org. Marcelo de Carvalho Borba e Jussara de Loiola Araújo; autores Dario Fiorentini, Antonio Vicente Marafioti Garnica, Maria Aparecida Viggiani Bicudo. 5 ed. Belo Horizonte. Autêntica Editora, 2013.

BRASIL, Ministério da Educação. PNLD 2018: **Matemática – Guia de livros didáticos** – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: MEC/ SEB,

2017. 122 p. Disponível em: < http://www.fnde.gov.br/pnld-2018/ >. Acesso em 28 jul. 2017.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf > Acesso em 22 jan. 2017.

______. Secretaria de Educação Básica: **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14_24.pdf > Acesso em: 22 jan. 2017.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. vol. 2. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2006. 140 p. disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf >. Acesso em: 19 mar. 2017.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf > . Acesso em: 27 nov. 2018.

______, **Base Nacional Comum Curricular**. 2ª Versão Revista, Ministério da Educação. Brasília, 2016. p. 559 – 581. Disponível em: < http://historiadabncc.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf.> . Acesso em: 15 nov. 2017.

BRUNHEIRA, L.; FONSECA, H. **Investigar na aula de Matemática**. Educação e Matemática, Lisboa, n. 35, p. 16-18, 1995. Disponível em: < http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/677/298 >. Acesso em: 23 mai. 2017.

Brum, Maria Gorete Nascimento. **Atividades Investigativas para o Ensino de Matemática para alunos de 5º série do Ensino Fundamental**. 2012 127 f. Dissertação Mestrado: Curso Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática. Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2012. Disponível em: < http://tede.unifra.br/tde_busca/index.php >. Acesso em: 07 out. 2017.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A. ; SILVA, R da. **Metodologia científica** – 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: **contexto & aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.

FERREIRA, Adriana Assis. **a produção de significados matemáticos em um contexto de aulas exploratório-investigativas**. 2012 298 f. Doutorado em EDUCAÇÃO. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012. Disponível em: < http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/BUOS-96CGHT/tese_adriana_18_12_12.pdf?sequence=1>. Acesso em: 02 ago. 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. da. **As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática**. Actas do ProfMat 99, 1999. Lisboa: APM.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** Saberes Necessários à Pratica Educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 59. ed. rev. e atual. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2015.

FREITAS, E. Fonseca. **Um estudo sobre funções afim e quadrática e métodos algébricos e geométricos para solução de equações do primeiro e segundo graus** 2016 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal do Ceará, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Disponível em < http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>. Acesso em: 03 set. 2017.

GADOTTI, Moacir. **Boniteza de um Sonho ensinar-e-aprender com sentido**. Novo Hamburgo, RS: editora Feevale. 2003.

GASPARIN, João Luiz. **Uma Didática para a Pedagogia Histórico-Crítica**. 5. ed. rev., 1. Campinas, SP: Autores Associados, 2011.

GIL, A. C. **Estudo de caso** – São Paulo: Atlas, 2009.

GIOVANNI, J. Ruy; BONJORNO, J. Robreto. Matemática: **uma nova abordagem**. vol. 1. São Paulo: FTD, 2000.

GOLDENBERG, E. P. **Quatro funções da na aula de Matemática**. In: ABRANTES, P. et. al (Orgs.). Investigações matemáticas na aula e no currículo. Portugal, AAM, 1999, p. 35-49.

HERRIQUES, Ana; PONTE, J. P. **As Representações como Suporte do Raciocínio Matemático dos Alunos quando Exploram Atividades de Investigação**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 276-298, abr. 2014. Disponível em: < file:///C:/Users/DDE53/Desktop/UNIVATES%202017.1/ORIENTA%C3%87%C3%95ES/ARTIGOS%20INV/HERRIQUES%20E%20PONTE%20racioc%C3%ADnio.pdf >. Acesso em: 23 ago. 2017.

HENRIQUES, A.; PONTE, J. P. **As Representações como Suporte do Raciocínio Matemático dos Alunos quando Exploram Atividades de Investigação.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 276-298, abr. 2014. Disponível em: < www.redalyc.org/pdf/2912/291231123015.pdf> Acesso em: 05 fev. 2017.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática**: Ciência e Aplicações. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2017. v. 1.

LIMA, R. P. M. SOARES. **Estudo em grupo como ferramenta pedagógica:** uma pesquisa-ação da aprendizagem de Química no ensino médio. 2013 80 f. Dissertação: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Instituição de Ensino: Universidade Federal do Ceará, Fortaleza 2013. Disponível em: < http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/ >. Acesso em: 12 set. 2017.

LIMA, T. C. S. de; MIOTO, R. C. T.; PRÁ, Keli Regina D. **A documentação no cotidiano da intervenção dos assistentes sociais: algumas condições a cerca do diário de campo**. Revista Textos & Contextos. Porto Alegre v. 6 n. 1 p. 93-104. Jan/jun. 2007. Disponível em: < http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/fass/article/viewFile/1048/3234>. Acesso em: 13 nov. 2017.

LUDKE M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação:** Abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2012.

MARCONI, M. de Andrade; LAKATOS, E. M.; **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MINISINI, E. G. **A evolução do sentido para a noção de função afim para um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática**. 2016. 254 f. Doutorado em Educação Matemática: Universidade Anhanguera. São Paulo, 2016. Disponível em: < http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>. Acesso em: 03 set. 2027.

MORAIS, R. **Análise de conteúdo**. Revista Educação, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999. Disponível em: < http://cliente.argo.com.br/~mgos/analise_de_conteudo_moraes.html_>. Acesso em 15 dez. 2017.

OLIVEIRA, H. M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P. **Tarefas de investigação em Matemática: Histórias de sala de aula**. Acta: VI Encontro de Investigação e Educação Matemática, Portalegre: SPCE-SEM, 1998 (p. 107 -125). Disponível em: < http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto10.PDF&gws_rd=cr&dcr=0&ei=uHxFWuCiFYSUwgTjm5LwBg >. Acesso em: 12 set. 2017.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. v. 1.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

______. **Investigar, ensinar e aprender.** Actas do ProfMat 2003 (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM, 2003.

______. Gestão curricular em Matemática. In: **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: GTI/APM, 2005. P. 11-34.

PROJETO Político Institucional do Instituto Federal, Ciências e Tecnologia do Maranhão. **Uma construção de todos**. São Luís, 2016. Disponível em: < https://portal.ifma.edu.br/home/>. Acesso em: Out/17.

RAMOS, Rose Mary dos S. F. **A Investigação Matemática como suporte para o estudo de sequências e regularidades: uma experiência com alunos do 1º ano do ensino médio**. 2015. 119 f. Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2015. Disponível em: < http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/ >. Acesso em: 15 set. 2017.

REDLING, J. P.; JUNIOR, J. L. **Trilhas pedagógicas**, v. 1, n. 1. ago. 2011.

REGINALDO, Bruna Karla Silva. **Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática**. 2012. 185 f. Universidade Federal de Minas Gerais (FAE/UFMG): Belo Horizonte, 22 de agosto de 2012. Disponível em: < http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/BUOS-8ZLPQB/dissertacaofinal_bruna.pdf?sequence=1 > Acesso em: 15 mar. 2017.

RODRIGUES, Márcio Urel. **Narrativas no ensino de funções por meio de investigações matemáticas**. 2007. 305 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91066>. Acesse em: 12 abr. 2017.

ROMANELLO, Lais Aparecida. **Potencialidades do uso do celular na sala de aula: atividades investigativas para o ensino de função**. 2016. 135 f. Mestrado em Educação Matemática. Universidade E. Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, 2016. Disponível em: < http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/ >. Acesso em: 23 nov. 2017.

SADOVSKY, P. **O ensino de Matemática de Hoje:** Enfoques, sentidos e desafios**.** São Paulo: Ática, 2010. 111p.

SADOVSKY, Patrícia. Falta fundamentação teórica no ensino de Matemática. **Revista Nova Escola**. São Paulo, p. 16, jan./fev. 2007. Disponível em: < https://novaescola.org.br/conteudo/925/falta-fundamentação-no-ensino-da-matematica >. Acesso em: abr. 2017.

SARAIVA, Lucilene Oenning. **Atividades Investigativas para o Ensino e Aprendizagem dos Cenceitos e Propriedades de Sucessões** Numéricas. 2012 93 f. Dissertação Mestrado: Curso Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática. Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2012. Disponível em: <http://maisunifra.com.br/wpcontent/uploads/mestrado_fisica_matematica/2012/prod_lucilene.pdf >. Acesso em: 14 jun. 2017.

SCHMITT, Fernanda E. **Abordando Geometria por meio da investigação matemática**: um comparativo entre o 5º e 9º anos do ensino fundamental. 2015. 105 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2015. Disponível em: < ttps://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/view

TrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2365965 > Acesso em: 08 fev. 2017.

SILVA, Rodrigo Felipe da. **Função exponencial e logarítmica**. 2016 118 f. Dissertação (Mestrado) – Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE EST.PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO/SJR. PRETO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: UNESP/Campus de São José do Rio Preto. Disponível em: < http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/ >. Acesso em: 12 set. 2017.

SKOVSMOSE, O. **Cenário para investigação**. BOLEMA, Rio Claro, v. 13, n.14, p. 66-91, 2000. Disponível em: <http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20103/2015-II/slides/Cenarios%20para%20investigacao%20-%20MAT%20103%20-%202015-II.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2017.

SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática: ensino médio 1**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

SMOLE, K. C. Stocco; CENTURIÓN, M. Ramos e DINIZ, M. Ignez de S. Vieira. In: DRUCK, Suely (Org.). **A interpretação gráfica e o ensino de funções**. Brasília: MEC, 2004. p. 84.

SOUSA, Joamir Roberto de. **Coleção novo olhar matemática**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.

SVINICKI, Marilla; MCKEACHIE, Wlbert J. **Dicas de Ensino – estratégias, pesquisa e teoria para professores universitários**. Tradução Ez2translate; revisão técnica Luiz Guilherme Brom. 13. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

YIN, Robert K. Estudo de caso: **Planejamento e Métodos**; tradução: Cristhian M. Herrera. – 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

YOMAMOTO, Kazuhito; FUKE, L. Felipe. **Física para o ensino médio**, vol. 1: mecânica. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

WICHNOSKI**,** Paulo; KLÜBER, Tiago Emanuel. **Uma revisão crítica da tendência1 investigação matemática no Brasil**. XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, Chiapas, México, 2015.

ZACARIAS, Sandra M. Zen. **A Matemática e o Fracasso Escolar**: Medo, Mito ou Dificuldade. 2008. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Oeste Paulista – UNOESTE: Presidente Prudente –SP, 2008. Disponível em: < http://bdtd.unoeste.br:8080/jspui/bitstream/tede/830/1/Dissertacao.pdf > Acesso em: 10 fev. 2017.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – Questionário que será respondido pelos alunos após o término das atividades.

Questionário

1. Como você classifica a metodologia utilizada para resolução das atividades propostas?

(   ) Ótimo (   ) Bom (   ) Regular (   ) Ruim

2. Que dificuldades você encontrou durante o processo de investigação?

____

____

____

3. Você acha que a investigação facilitou a aprendizagem do tema funções? Justifique.

____

____

4. Como você avalia as discussões em grupo colaborativo para produção dos conhecimentos e aprendizagem? Justifique.

____

____

5) O grupo encontrou alguma dificuldade em efetuar o registro escrito das conjecturas e conclusões? Justifique.

____

____

____

APÊNDICE 2 - Termo de concordância da direção da instituição de ensino.

Ao senhor Diretor Geral do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, campus São Raimundo das Mangabeiras:

Eu, Rosimiro Araújo do Nascimento, aluno regularmente matriculado no Curso de Pós-graduação *Stricto Sensu,* Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari (UNIVATES) de Lajeado, RS, venho solicitar a autorização para coletar dados neste estabelecimento de ensino, para a realização de uma atividade referente à minha pesquisa de mestrado intitulada: "**Explorando função do 1º grau com alunos do 1º ano do Ensino do Médio utilizando investigação matemática**", tendo como objetivo geral: Analisar as conjecturas e estratégias elaboradas pelos alunos, da 1ª série do curso técnico em informática integrado ao ensino médio, a partir de atividades investigativas com foco na função do 1º grau.

A coleta de dados será realizada por meio de observações que serão registradas por escrito pelo pesquisador e pelos alunos, gravação das falas dos alunos, fotografias e questionário aplicado aos alunos de uma turma do primeiro ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino médio que estudam nesta instituição.

Desde já, agradeço a disponibilidade, visto que a prática poderá contribuir na busca de estratégias para melhoria do ensino de Matemática. Pelo presente termo de concordância peço que autorize a realização da pesquisa e o uso do nome do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão Campus São Raimundo das Mangabeiras em publicações na área de Ensino e Educação.

São Raimundo das Mangabeiras, ______ de ______________________de 2017.

____

Direção de Ensino – IFMA – São Raimundo das Mangabeiras

____

Rosimiro Araújo do Nascimento

APÊNDICE 3 – Termo de consentimento livre esclarecido.

Fui convidado(a) a consentir que meu(minha) filho(a) participe como voluntário(a) da pesquisa: "**Explorando função do 1º grau com alunos do 1º ano do Ensino do Médio utilizando investigação matemática",** sob a responsabilidade do pesquisador Rosimiro Araújo do Nascimento e sob orientação da professora Dra. Marli Teresinha Quartieri. Os objetivos deste trabalho são: Propor aos alunos atividades investigativas com foco em função do 1º grau, para que sejam exploradas em grupos colaborativos; Incentivar o gosto pela escrita e a socialização dos conhecimentos a partir das conjecturas validadas; e Identificar as conjecturas e estratégias apresentadas pelos alunos durante os desdobramentos das tarefas de investigações propostas.

Os dados da pesquisa advindos das imagens, falas, materiais escritos e registros fotográficos serão utilizados para atingir os objetivos do presente trabalho e serão guardados em local seguro na Universidade do Vale do Taquari. O acesso ao material coletado será de uso exclusivo da equipe de pesquisa (orientadora e orientando), sob hipótese alguma será feito uso comercial ou indevido das imagens e materiais escritos.

As informações provenientes da análise das gravações de áudio, das imagens e do material produzidos pelos participantes poderão ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações em eventos e periódicos científicos de cunho regional, nacional e internacional e ficarão disponíveis aos sujeitos e à instituição em qualquer tempo.

Desta forma, este documento que hora lhe é entregue, representa o compromisso ético dos pesquisadores citados abaixo, de garantir, no limite de nossas possibilidades, que todo o material registrado seja tratado dentro do mais estrito rigor de conduta ética na pesquisa. Também serei esclarecido (a) sobre a pesquisa em qualquer aspecto que desejar. A participação de meu(minha) filho(a) é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou perda de auxílio estudantil.

Nessas condições declaro que me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer minhas dúvidas e que concordo em autorizar a participação de meu (minha) filho(a) nesta pesquisa.

________________________________ _____/______/______

Assinatura do(a) Estudante Participante Data

________________________________ _____/______/______

Assinatura do responsável Data

________________________________ _____/______/______

Rosimiro Araújo do Nascimento – Mestrando Data

________________________________ _____/______/_______

Marli Teresinha Quartieri - orientadora Data