CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*

MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

ABORDANDO GEOMETRIA POR MEIO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA:

UM COMPARATIVO ENTRE O 5º E 9º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Fernanda Eloisa Schmitt

Lajeado, maio de 2015

Fernanda Eloisa Schmitt

ABORDANDO GEOMETRIA POR MEIO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA:
UM COMPARATIVO ENTRE O 5º E 9º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, do Centro Universitário UNIVATES, como parte da exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Marli Teresinha Quartieri
Coorientadora: Profª. Dra. Ieda Maria Giongo

Lajeado, maio de 2015

AGRADECIMENTOS

Expresso meus sinceros agradecimentos a:

- Deus.
- Meu noivo Maicon dos Santos, pela paciência, incentivo, carinho e amor incondicional.
- Minha mãe Geni Weiss e meu pai Inácio Miguel Schmitt, pelo incentivo nos estudos, não me permitindo parar.
- Meus amigos, pelos momentos de descontração em meio ao caos.
- Minha orientadora, pelos conselhos, orientação e amizade.
- Minha coorientadora, pelas brigas e abraços.
- Meus colegas, em especial, Janaina de Ramos Ziegler e Ademir de Cassio Machado Peransoni, pelo apoio, cooperação e auxílio nos momentos em que faltava inspiração e pelas risadas nos momentos mais inesperados.
- Minhas bolsistas e companheiras de trabalho, Bruna, Nicole e Bruna, que me auxiliaram no decorrer do caminho.
- A CAPES, por permitir-me realizar o mestrado e participar como bolsista do Observatório da Educação.

RESUMO

Este estudo refere-se a atividades de geometria abordadas à luz da metodologia investigação matemática com alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental de duas escolas públicas da Educação Básica da região do Vale do Taquari. Estas escolas são parceiras do Observatório da Educação intitulado “Estratégias metodológicas visando à inovação e reorganização curricular no campo da Educação Matemática no Ensino Fundamental”. Este trabalho tem por objetivo investigar as conjecturas apresentadas pelos alunos e as diferenças e semelhanças que os alunos destas distintas turmas apresentam quando as criam. Pretendeu-se, ainda, estimular nos alunos a cultura da escrita em matemática, proporcionar-lhes momentos de autonomia no que diz respeito a sua formação discente e momentos de trabalho em grupo, promovendo a socialização de aprendizagens. Os aportes teóricos usados estão alicerçados nos escritos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) que expressam que atividades de investigação matemática instigam o aluno à descoberta de novos saberes, por meio de problemas abertos, os quais propiciam o levantamento de conjecturas possíveis de serem testadas e matematicamente registradas. A proposta com foco investigativo foi composta de cinco atividades que abordavam diferentes tópicos de geometria. A pesquisa de cunho qualitativa pode ser considerada um estudo de caso. O material de pesquisa constituiu-se de diário de campo dos alunos, diário de campo do professor e filmagens das aulas. Para análise dos dados foi utilizada a análise de conteúdo, por meio de categorias elaboradas a partir das diferenças e semelhanças que foram surgindo ao longo da intervenção. Como resultados, verificou-se a dificuldade no manuseio da régua e do transferidor, tanto por parte dos alunos do 5º como pelos do 9º ano e em relação à escrita das conjecturas e conclusões. Percebeu-se que os alunos expressavam suas ideias oralmente, mas, no momento de escrevê-las no papel, apenas o faziam de forma sintética. Como ponto positivo, os alunos trabalharam em grupo, colaborando uns com os outros e auxiliando os que apresentavam maiores dificuldades. Esta experiência possibilitou lidar com o novo e o inesperado, permitindo aos alunos participarem mais ativamente de sua própria aprendizagem, dando-lhes mais autonomia.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Geometria. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study refers to geometry activities approached in the light of the mathematical investigation tendency, with students of the 5th and 9th grades of the Elementary Education from two public schools in the area of the Taquari Valley. These schools are partners of a project from the Educational Observatory entitled “Methodological strategies aimed at innovation and curriculum reorganization in the field of Mathematical Education in Elementary School”. This work has as an objective to investigate the conjectures presented by the students, and also to analyze the differences and similarities that the students of these distinct grades show while creating them. It was intended, also, to stimulate the culture of written mathematic in the students, besides to provide them moments of autonomy in regards to their formation and moments of team work, promoting schooling socialization. The theoretical contributions employed in this study are grounded on the writings of Ponte, Brocardo and Oliveira (2009), which express that mathematical investigation activities tempt the student to discover new knowledges by means of open-ended questions, bringing conjectures that are possible to be tested and mathematically registered. The purpose, with an investigative focus, was composed by five activities that approached many geometry topics. The research, of qualitative measurement, may be considered a case study. The research material consisted in students's field diary, teachers's field diary and videotaped classes. The data analysis was based on the concept of Content Analysis, in which the categories were elaborated after the differences and similarities that were developed during the intervention. As a result, it was verified that there is a difficulty in the handling of the ruler and the protractor for part of the students of both 5th and 9th grades, and also in regards to the writing of conjectures and conclusions. It was noticed that the students expressed their ideas orally, however, in the moment of writing them in the paper, they would only do it synthetically. As a positive, the students worked in groups, colaborating with each other and helping those who showed more difficulties. This experience made possible to handle the new and unexpected, providing the students the possibility to participate more actively in their schooling, which gives them more autonomy.

Keywords: Mathematical Investigation. Geometry. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática tem um papel de destaque nas escolas, sendo valorizado tanto pelos saberes como pelas habilidades e competências que desenvolve nos alunos. Mas nem todos os conteúdos desta disciplina têm sido desenvolvidos com todo o potencial esperado, em particular, aqueles vinculados à geometria.

Pesquisadores – dentre eles Grando, Nacarato e Gonçalves (2008) e Pavanelo (2004) - comentam sobre o descaso acometido nas escolas em relação a este conteúdo, pois ainda se percebe que está sendo deixado de lado em favorecimento a outros conteúdos, tais como álgebra e funções. Entretanto, ao analisar as Diretrizes Curriculares Nacionais e as avaliações externas à escola, que servem para medir a qualidade da educação, observa-se uma vasta abordagem dos temas relacionados à geometria, o que torna evidente que a exclusão destes assuntos dos currículos escolares ou seu tratamento inadequado podem causar prejuízos à formação dos indivíduos.

Aliado a este contexto, cabe destacar que estudos e pesquisas em Educação Matemática são encontrados em relação a diferentes metodologias que inspiram resultados promissores ao serem trabalhadas com os alunos. Mas, o que se percebe é que pouco ou nada destas investigações acaba sendo inserido na prática pedagógica dos professores e muitos docentes nem tomam conhecimento de sua existência, ficando as mesmas limitadas ao acervo das bibliotecas universitárias e a pesquisas em meio acadêmico.

Tentando modificar este contexto, o Observatório da Educação, Edital 049/2012/CAPES/INEP, número do projeto 15206, intitulado “Estratégias metodológicas visando à inovação e reorganização curricular no campo da Educação Matemática no Ensino Fundamental”, vinculado ao Centro Universitário Univates, vem desenvolvendo uma pesquisa que problematiza três tendências da Educação Matemática: modelagem matemática, etnomatemática e investigação matemática. O objetivo geral da referida pesquisa é investigar estratégias que possam proporcionar inovação e reorganização curricular na matemática no Ensino Fundamental.

Esta investigação está vinculada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES, Lajeado/RS e está sendo desenvolvida em seis escolas públicas de Educação Básica do Vale do Taquari, RS. Estas escolas foram escolhidas devido à discrepância entre suas notas no IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Brasileira) relativas à 4ª série/5º ano e à 8ª série/9º ano[1].

O projeto conta com quinze bolsistas, sendo três mestrandos, incluindo a autora deste trabalho, seis professoras representantes das escolas parceiras do Observatório, seis alunos da graduação e quatro professoras da Instituição, sendo uma delas orientadora deste trabalho.

Vinculada a esta pesquisa, esta dissertação tem foco na metodologia investigação matemática, que será devidamente explicitado no capítulo do referencial teórico, no contexto de atividades de geometria. Assim, o tema deste trabalho é **o uso de investigação matemática no ensino de geometria com alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental em duas escolas públicas do Vale do Taquari.**

Entendo por investigação matemática, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), atividades que instigam o aluno à descoberta de novos saberes, por meio de problemas abertos, que propiciem o levantamento de conjecturas possíveis de serem testadas e matematicamente registradas.

[1] Irei usar 9º ano, mesmo que em algumas escolas ainda é utilizado 8ª série.

Apresenta-se, portanto, o seguinte problema de pesquisa:

Como os alunos de 5º ano e 9º ano do Ensino Fundamental, de duas escolas públicas da Educação Básica da região do Vale do Taquari, operam com atividades de investigação matemática envolvendo geometria e quais as diferenças/semelhanças nas conjecturas apresentadas entre as distintas turmas?

Neste contexto, o objetivo geral foi investigar as conjecturas apresentadas por alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental advindas de atividades de investigação matemática envolvendo geometria.

Objetivos específicos:

- Averiguar que regras matemáticas são utilizadas pelos alunos, em diferentes graus de escolaridade, quando criam e justificam conjecturas acerca de atividades envolvendo geometria.

- Disponibilizar para duas turmas de alunos atividades em consonância com a metodologia investigação matemática.

- Estimular nos alunos a cultura da escrita em matemática.

- Proporcionar momentos de trabalho em grupo, promovendo a socialização de aprendizagens.

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido em duas escolas públicas participantes do projeto Observatório da Educação que se localizam no Vale do Taquari. Em cada escola trabalhou-se com uma turma de 5º ano e uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental.

Uma das escolas é da rede municipal e conta com 297 alunos entre 1º ano e 9º ano. A turma do 5º ano onde se desenvolveu a atividade contava com 17 alunos, já o 9º ano com 19 alunos. A outra escola é da rede estadual e agrega 295 alunos entre o 1º ano do Ensino Fundamental e o 3º Ano do Ensino Médio. A turma do 5º ano constituía-se de 26 alunos e ado 9º ano de 18 alunos.

Esta proposta justifica-se por três razões. Primeiro, por receber apoio do Programa Observatório da Educação, estando em consonância com os objetivos do mesmo e sendo a pesquisadora uma das bolsistas de Mestrado que integrada o grupo de trabalho do referido projeto.

A segunda razão é a preocupação com a pouca importância dada à geometria nos currículos escolares, uma vez que a mesma só aparece no final dos planos de estudo, sendo desenvolvida em muitos casos apenas se sobrar tempo. Tal fato se comprovou ao analisar os planos de estudo das seis escolas parceiras, onde pouca ênfase é dada ao conteúdo que compõe o bloco curricular de geometria. Este bloco aparece apenas nos planos de algumas séries/anos ou no final do ano como “tópicos de geometria”, sem muito detalhamento do que deve ser abordado.

E a terceira razão é o gosto pessoal pelo conteúdo de geometria. Neste sentido, acredito que este assunto abre possibilidades promissoras para novas didáticas e possibilita um trabalho mais concreto, desenvolvendo habilidades lúdicas e lógicas nos alunos. Apesar da pouca experiência em sala de aula, percebo que o conteúdo vinculado à geometria cria um fascínio nos alunos que se sentem mais próximos da matemática ao poderem manipular objetos e visualizar situações que suscitam conceitos matemáticos.

Outro fator que contribuiu para esta pesquisa foi a análise das questões disponíveis da Prova Brasil, realizada pelos integrantes (professores e mestrandos) da pesquisa do Observatório da Educação Univates. Nesta análise procurou-se identificar os conteúdos presentes na prova, bem como os descritores[2] que compõem a mesma. Ao fazer este estudo percebeu-se que a maioria das questões da avaliação baseia-se em habilidades e competências oriundas da geometria. Diante do exposto, acredito que este estudo seja importante para a comunidade acadêmica no geral e para mim como profissional.

Após esta breve introdução, no capítulo dois discorro sobre o referencial teórico, descrevendo os pressupostos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) no que condiz a Matemática. A seguir, explicito conceitos de resolução de problemas, de exercícios e de investigação matemática. Logo após apresento uma seção específica sobre investigação matemática, utilizando teóricos e estudiosos da

[2] O PDE (2008) traz temas subdivididos em descritores, já os PCN (1997, 1998) coloca como bloco de conteúdos, mas em suma referem-se a mesma coisa.

área. Na penúltima seção deste capítulo, explicito estudos sobre a aprendizagem da geometria. Termino, na última seção deste capítulo, com o estado da arte que engloba algumas dissertações publicadas envolvendo investigação matemática.

No capítulo três enfatizo os procedimentos metodológicos utilizados, que foram centrados na pesquisa qualitativa, em particular, estudo de caso e pesquisa participante. Descrevo como se efetivou a intervenção pedagógica, quais os métodos que permitiram a geração do material de pesquisa.

No quarto capítulo apresento o desenvolvimento detalhado das atividades e as respostas presentes nos diários dos alunos, as observações da pesquisadora e as filmagens, bem como a categorização das mesmas. E, no quinto capítulo, encontram-se as minhas considerações sobre a pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

"Investigar é procurar conhecer o que não se sabe."

(PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 13)

Neste capítulo é meu propósito discorrer sobre aportes teóricos que baseiam esta pesquisa. Assim, apresento uma visão geral de alguns conceitos, procurando diferenciar problemas matemáticos, exercícios e investigação matemática, aprofundando os estudos sobre a investigação matemática e sobre Geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), em 1997, já apontavam que o ensino de Matemática deveria estar pautado na importância e iminente necessidade apresentada pela sociedade e pelo mercado de trabalho. De acordo com estes parâmetros, a

> Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares (BRASIL, 1997, p.15).

Nesta perspectiva, o ensino de Matemática pode interferir na formação intelectual, na estruturação do pensamento e no raciocínio dedutivo do aluno. Os PCNs (BRASIL, 1997) também trazem alguns objetivos para o ensino fundamental, entre eles a necessidade de que os alunos sejam capazes de questionar a realidade, formulando e resolvendo problemas, utilizando para isso o "pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação" (BRASIL, 1997, p. 9). Ainda segundo esses parâmetros (BRASIL, 1997, p. 56), o aluno também deve "demonstrar interesse para investigar, explorar e interpretar, em diferentes contextos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, os conceitos e procedimentos matemáticos”. Assim, torna-se inegável o papel da Matemática na formação de um indivíduo pensante.

Os PCNs (BRASIL, 1998) também abordam critérios de avaliação que evidenciam as expectativas de aprendizagem que o aluno deve alcançar e apontam as experiências educativas a que os mesmos devem ter acesso, considerando-as essenciais para o seu desenvolvimento. Um dos critérios diz que os alunos devem “decidir sobre os procedimentos matemáticos adequados para construir soluções num contexto de resolução de problemas” (BRASIL, 1998, p. 76). Por meio deste, pode-se verificar se o aluno é capaz de interpretar uma situação problema, distinguir as informações necessárias para resolvê-la, levantando hipóteses e escolhendo os procedimentos cabíveis a serem utilizados e, por fim, validar resultados, apresentando-os de forma organizada e clara. Destaca-se que este processo é semelhante ao proposto na metodologia investigação matemática.

A seguir, apresento algumas definições de Problemas Matemáticos, investigação matemática e Exercícios, procurando diferenciá-las e atribuindo um significado mais específico a cada uma, para que o leitor possa compreender as tarefas de investigação.

2.1 Exercícios, Problemas e Investigações

De acordo com Ponte (2003b), a Matemática tem tarefas características, sendo que o exercício é a mais conhecida delas. Entretanto, para o autor existem outros tipos, tais como os problemas e as investigações, conforme alguns exemplos do Quadro 1.

> Por vezes também se fala em tarefas de modelação e projectos. É de notar que as características de uma tarefa não são absolutas, mas relativas à pessoa que a realiza. Uma mesma questão pode ser para uma pessoa um problema e para outra um exercício, etc. (PONTE, 2003b, p. 28).

Por isso, cabe ao professor gerenciar a introdução da tarefa e a forma como a mesma vai ser conduzida ao longo da aula. É importante, para o docente, conhecer a turma e como a mesma vai reagir à determinada atividade, saber seus conhecimentos prévios e tentar sempre desafiá-los com diferentes tarefas para não deixar as aulas caírem na monotonia.

Quadro 1 - Exemplos de atividades, problemas e tarefas de investigação

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica: a) $\frac{6}{12}$ = b) $\frac{3x(10-7)}{17-2}$ = c) $\frac{\frac{20}{18-9}}{\frac{(15-10)x2}{3}}$ =	Qual o menor número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escrever a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observar os algarismos das diversas colunas e encontrar regularidades. 2. Encontrar regularidades nas tabuadas de outros números.

Fonte: Adaptado de Ponte (2003b, p. 28)

Como se pode observar no Quadro 1, as atividades de investigação matemática são mais abertas e não tão direcionadas, fazendo com que os alunos pensem não apenas na resposta, mas em meios de encontrá-la. Ao resolver questões de investigação os alunos podem encontrar diferentes resultados e seguir pelo caminho que acharem mais conveniente para descobri-los.

Para distinguir os conceitos de problemas matemáticos, exercícios e investigação matemática servirão como base ideias de alguns autores que falam sobre o assunto. Entre os autores que tratam desta temática são citados Palhares (2004), Dante (2009), Polya (1978) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2009).

Dante (2009, p. 11) expressa um problema como sendo “um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo”. Para ele, um problema é relativo ao sujeito, pois o que pode ser um problema para uma pessoa não o é para outra. O mesmo autor, no que se refere aos exercícios, explana que “*Exercícios*, como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar determinado algoritmo ou procedimento” (grifo do autor, p. 48). Já os problemas podem ser descritos como “’uma situação em que se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução” (DANTE, 2009, p. 48).

Palhares (2004, p. 14) evidencia que “a resolução de problemas e as investigações são duas actividades que envolvem processos complexos de pensamento que permitem desafiar os alunos,…”. No entanto, há alguns fatos que os diferenciam, como sugere Palhares (2004, p. 14):

> − As investigações têm um carácter mais aberto e as estratégias que utilizam são difíceis de sistematizar.
> − O problema normalmente está formulado com perguntas claras, de âmbito mais fechado, enquanto que na investigação as questões são mais abertas, menos elaboradas e até o aluno pode participar na sua formulação.
> − A resolução de problemas pressupõe uma solução, enquanto que a investigação poderá ter ou não solução, uma vez que o seu interesse reside na exploração da questão por todos os caminhos possíveis.

Em relação à investigação matemática, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 23) argumentam que “se trata de situações mais abertas - a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição”. Procurando diferenciar resolução de problemas e investigação matemática, exponho também o Quadro 2, elaborado por Trindade (2008) como uma discussão final em sua dissertação de mestrado.

Quadro 2 – Quadro comparativo

PROBLEMA MATEMÁTICO	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
Uma situação na qual um indivíduo ou um grupo é chamado a realizar uma tarefa para a qual não há algoritmo imediatamente acessível que determine completamente o método de solução. “Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado” (Pólya)	É um termo genérico que designa a atividade dos matemáticos profissionais no desenvolvimento do novo conhecimento. É a procura, a ação de investigar, o exame sistemático, a inquirição.
O verbo mais usado é “resolver”.	O verbo mais usado é “investigar”.
É uma atividade convergente.	É uma atividade divergente.
Tem objetivo conhecido.	É um problema aberto.
Procura um método.	Procura um objetivo.
Permite procurar um caminho que o leve à solução.	Permite explorar caminhos de forma criativa e independente, sem o compromisso de chegar ao fim.
Processos: • ter uma questão para resolver • querer encontrar uma resposta • não tê-la de antemão • ter como consequência a construção de uma resposta	Processos: • exploração de possibilidades • formulação de conjecturas • procura de argumentos que validem as descobertas realizadas

(Continua...)

(Continuação)

É bom trabalhar em qualquer problema desde que ele gere Matemática interessante durante o caminho, mesmo se não o resolver até o fim.	Uma investigação é como que uma viagem ao desconhecido, a estrada é o objetivo e não a chegada.

Fonte: (TRINDADE, 2008, p. 153-154)

Como conclusões as suas divagações, Trindade (2008) expressa que a Matemática não é só um conjunto de conteúdos a serem estudados e que investigar, além de ser motivador, desenvolve a capacidade intelectual, contribuindo para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilitando assim a aprendizagem. Investigar ajuda a estabelecer um ambiente vivo em que cada um pode participar ativamente na construção de seus saberes, não ficando dependente do professor, mas buscando sua própria autonomia no decorrer do processo. A autora ressalta que

> Um problema se torna uma investigação quando o aluno se confronta com questões as quais não sabe responder de imediato, quando é levado a pensar produtivamente, refletindo nos comos e porquês em busca da solução. Não basta ter uma tarefa para termos um problema e nem mesmo termos um problema para termos uma atividade investigativa. Tudo dependerá da relação que o aluno estabelece com essa atividade (TRINDADE, 2008, p. 156).

Tendo em vista todas estas discussões, passarei, a seguir, a discorrer especificamente sobre as atividades de investigação matemática, procurando especificar o que alguns autores propõem como conceitos a esta metodologia.

2.2 Investigação matemática

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), em termos gerais, a definição de investigar aplica-se a diversas palavras como, indagar, pesquisar, inquirir, averiguar. Para os matemáticos, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos, procurando identificar as propriedades inerentes aos mesmos. Para esses autores, no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem, investigar não significa resolver problemas difíceis, descobrir fórmulas novas, ou inventar novos conceitos. Significa a formulação de questões de interesse próprio, para as quais não há respostas prontas e, portanto, necessitam ser investigadas, utilizando processos fundamentados e rigorosos para que as mesmas sejam válidas e aceitáveis. Eles ainda colocam que:

> [...] uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática exista uma relação estreita entre problemas e investigação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 16).

Por ter esta característica, este tipo de atividade deve ser disponibilizado, procurando desenvolver a habilidade e a capacidade dos alunos para solucionarem dilemas e formularem conjecturas a respeito dos problemas apresentados. Nesta mesma perspectiva, Goldenberg (1999, p. 37, grifo do autor) comenta que

> se um dos objetivos da educação matemática é fazer com que os alunos aprendam como é que as pessoas descobrem factos e métodos, deveriam também, durante uma parte significativa do tempo de aprendizagem, dedicar-se a essa mesma atividade: *descobrir* os factos.

Neste sentido, não se pode explicar técnicas e fazer com que os alunos se limitem a executá-las. “O objetivo propriamente dito é que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz, e para isso tem que fazer investigação” (Ibidem, p. 37).Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) aludem que investigar em Matemática conduz à formulação de conjecturas, hipóteses, as quais necessitam ser repetidamente testadas e provadas. Uma investigação matemática envolve “conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo conjectura-teste-demonstração” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 10).

Os autores também delimitam uma investigação matemática em quatro momentos principais. O primeiro envolve o reconhecimento da situação apresentada, a sua exploração inicial e a formulação de questões, as quais servem de base para o segundo momento o qual se refere à formulação de conjecturas sobre o problema em estudo. Conjecturas são hipóteses e pressupostos que, no terceiro momento, precisam ser testadas e refinadas, procurando aperfeiçoá-las. Por fim, tem-se a argumentação, a demonstração e a avaliação do trabalho realizado. Os pesquisadores, anteriormente citados, pontuam que cada uma dessas passagens pode incluir diversas atividades como indicado no Quadro 3.

Quadro 3 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problema • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	• Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 21)

A exploração da tarefa, profere Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 30), leva tempo e é uma etapa decisiva para a formulação das conjecturas, sendo que o "trabalho em grupo potencializa o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa". As conjecturas surgem de diferentes formas, podendo ser por observação ou manipulação dos dados, sendo que o aluno tende a não verbalizar a formulação das conjecturas. "É somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 33).

Os autores expressam ainda que o registro escrito do aluno é um desafio porque "exige um tipo de representação que nunca utilizaram" (Ibidem, p. 35). Apesar disso ele desempenha um papel fundamental, pois a escrita "ajuda os alunos a clarificarem as suas ideias, nomeadamente a explicitar as suas conjecturas" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 36). Smole e Diniz (2001, p. 31) expressam que:

> Escrever pode ajudar os alunos a aprimorarem percepções, conhecimentos e reflexões pessoais. Além disso, ao produzir textos em matemática, tal como ocorre em outras áreas do conhecimento, o aluno tem oportunidade de usar habilidades de ler, ouvir, observar, questionar, interpretar e avaliar seus próprios caminhos, as ações que realizou, no que poderia ser melhor. É como se pudesse refletir sobre o próprio pensamento e ter, nesse momento, uma consciência maior sobre aquilo que realizou e aprendeu.

Para os autores citados, a escrita se faz necessária não apenas para registro das descobertas e resultados, mas para ajudar o aluno a construir e organizar seu pensamento.

Depois de adquirido o conhecimento sobre investigação, pode-se perguntar: como será possível realizá-la na sala de aula de matemática? E, fazendo alusão aos questionamentos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009): como organizar e desenvolver o trabalho? Qual é o papel do professor? O que esperar dos alunos?

De acordo com esses autores, uma investigação matemática em sala de aula apresenta-se em três fases, todas de suma importância para o pleno desenvolvimento e aproveitamento de uma atividade investigativa. São elas:

- introdução da tarefa à turma;

- realização da investigação;

- discussão dos resultados, quando os alunos relatam aos colegas suas descobertas.

Pode-se acrescentar ainda a importância da escolha da tarefa, conforme Skovsmose (2008). Assim, a atividade será investigativa dependendo de sua natureza, do professor e do aluno, sendo que a natureza da atividade apresenta influência da possibilidade de exploração e explicação das propriedades matemáticas envolvidas e o quanto esta é atrativa aos alunos. Para Goldenberg (1999), deve-se organizar os problemas de modo que os alunos possam trabalhar neles sem ser necessário dizer-lhes como ou o que devem fazer. Na visão do autor, os problemas devem ser concebidos para ajudar os alunos a desenvolverem ideias e métodos matemáticos sem explicações ou exemplos prévios.

Já Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) alegam que, ao introduzir a tarefa, o professor tem um papel determinante nas aulas de investigação. Por um lado, necessita proporcionar aos alunos a autonomia que é necessária para não comprometer a autoria da investigação. E, por outro, garantir que o trabalho dos alunos flua e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática.

Na mesma linha argumentativa, para Bertini e Passos (2008, p. 3), numa investigação, o professor escolhe um ponto de partida, geralmente uma situação aberta, e os estudantes definem os problemas dentro da situação e tentam resolver por seus próprios caminhos. "Desse modo, uma investigação requer a participação efetiva do estudante na própria formulação das questões a estudar, e, segundo estudos, essa dinâmica favorece o seu envolvimento na aprendizagem."

Durante a investigação, profere Skovsmose (2008), o professor tem o papel de desafiar o aluno com questões instigadoras, deixando que assumam o processo de exploração e explicação, possibilitando assim com que o cenário de investigação passe a constituir um novo ambiente de aprendizagem. "No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo" (SKOVSMOSE, 2008, p. 21). Ainda segundo o mesmo pesquisador

> [...] qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que alunos e professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora. (SKOVSMOSE, 2008, p. 37)

Para este autor, um cenário de investigação é um ambiente que dá suporte a uma investigação e é aquele que convida os alunos a formularem questões procurando explicações que lhes são adequadas e satisfaçam sua curiosidade. Para Goldenberg (1999, p. 48),

> O recurso à investigação impõe ao professor um certo número de novas exigências. Além de requerer adaptações pedagógicas no sentido de estimular o espírito de investigação entre os alunos, o recurso à investigação impõe novas exigências aos conhecimentos matemáticos do professor.

No momento final de uma atividade investigativa, a interação torna-se obrigatória tendo em vista a divulgação e a confirmação dos resultados. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), muitas vezes o que se torna mais importante, nestas atividades, não é a variedade de conjecturas propostas na investigação, mas os diversos processos de justificação e prova, sucessivamente postos em ação. E, nesta fase, torna-se necessária a escrita que necessita apresentar rigor matemático para que as justificativas sejam aceitas tanto pelos colegas como pelo professor.

Neste contexto, pode-se expressar que o desafio dos professores é articular os diferentes tipos de tarefas, como realizações de investigações e projetos e a resolução de exercícios e problemas, de modo a construir um currículo interessante e equilibrado capaz de promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho. Assim, é possível perceber que essa metodologia de investigação vai também ao encontro dos PCNs (BRASIL, 1997, p. 51), uma vez que estes afirmam que a matemática deve desenvolver no educando a capacidade

> [...] de comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre conjecturas, fazendo uso de linguagem oral e estabelecendo relações entre elas e diferentes representações matemáticas.

Tais processos – descrever, representar, argumentar – são primordiais na investigação matemática, que procura incentivar os alunos a desenvolvê-los e utilizá-los tanto nas aulas de Matemática como nas situações do cotidiano.

A seção seguinte faz referência à geometria, sua importância no estudo da Matemática e como tarefas de investigação são propícias para trabalhar a mesma, culminando nos referenciais que norteiam os currículos pedagógicos de instituições de Ensino Fundamental.

2.3 Geometria

Conforme Grando, Nacarato e Gonçalves (2008), pesquisas e produções brasileiras revelam que a geometria vem assumindo um caráter mais exploratório e investigativo, buscando subsídios teóricos em outras áreas do conhecimento, como a epistemologia, a história, a psicologia sociocultural e a linguagem. Surgem, assim, novas formas de produzir conhecimentos geométricos em sala de aula, principalmente se houver maior diálogo entre professor e aluno, numa perspectiva de negociação e produção de significados. Nesse contexto, buscam-se ressignificações para os processos de validação e verdade em Matemática.

Para os autores citados,

> [...] as tarefas exploratório-investigativas mostram-se altamente potencializadoras de processos de argumentações e provas em geometria na sala de aula. Elas podem ser realizadas a partir de uma tarefa ou um conjunto de tarefas no qual o aluno passa a identificar qual é o problema a resolver e como resolvê-lo. Trata-se de problemas abertos que possibilitam diferentes perguntas, estratégias de resolução e processos de validação. (GRANDO; NACARATO; GONÇALVES, 2008, p. 43)

De acordo com o exposto, as tarefas exploratório-investigativas apresentam fatores que direcionam pensar na potencialidade de atividades que possibilitam aos alunos tornarem-se pessoas mais autônomas em sua aprendizagem. Cabe pontuar ainda que, de acordo com os autores, os alunos, ao procurarem respostas para as próprias perguntas, sentem-se mais motivados e instigados para a realização das atividades. O que remete às ideias de Abrantes (1999) que afirma que aprender Matemática é essencialmente fazer Matemática. Tal pensamento tem contribuído para conceber a importância de atividades de natureza exploratória e investigativa, sendo as mesmas concebidas na intenção de que o aluno (re)descubra a Matemática.

Segundo Abrantes (1999, p. 155), “a geometria parece ser, dentro da Matemática escolar, uma área particularmente propícia à realização de atividades de natureza exploratória e investigativa”. Uma contribuição da prática de atividades que envolvem os alunos em problemas abertos é o fato de lidar com processos fundamentais da atividade e do pensamento matemático, como formular problemas, fazer e demonstrar conjecturas ou comunicar descobertas. Em particular o

> [...] apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares. Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem a necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grandes dificuldades, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver exercícios-tipo (ABRANTES, 1999, p. 156).

Utilizando-se de tarefas e problemas abertos, pode-se instigar o aluno a descobrir por ele mesmo as diferentes nuances e teoremas que envolvem a geometria. Não há necessidade de explicar ou demonstrar os teoremas para que os alunos os compreendam - pode-se pedir que explorem possibilidades e assim encontrem suas próprias definições e generalizações.

Em efeito, o ensino da geometria pode

> [...]contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 71).

Segundo os autores, as investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e o teste de conjecturas, procurando demonstrar generalizações. Tal contribuição se torna importante quando se depara com as palavras de Pavanelo (2004, p. 129) que argumenta:

> [...] no mundo moderno, a imagem é extremamente utilizada como instrumento de informação, o que torna indispensável a capacidade de observar o espaço tridimensional e de se elaborar modos de se comunicar a respeito do mesmo.

Esta fala potencializa ainda mais as atividades de Investigação no que diz respeito à utilização da geometria, pois a mesma possibilita a visualização e a imagem. Tais atividades podem estimular o aluno a se expressar e a defender suas descobertas.

O Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) também fazem referência aos conteúdos geométricos. Nestes são apresentados quatro grandes temas na área da matemática que servem como base aos currículos pedagógicos e as avaliações externas como Prova Brasil e Saeb (Sistema de Avaliação da Educação Básica). Cada tema apresenta descritores que indicam as habilidades e competências de Matemática a serem desenvolvidas pelos alunos em cada nível de escolaridade. Esses descritores são agrupados por temas que relacionam um conjunto de objetivos educacionais. Os temas são:

- Tema 1 - Espaço e Forma

- Tema 2 - Grandezas e Medidas

- Tema 3 - Números e Operações/Álgebra e Funções

- Tema 4 - Tratamento da Informação

Como se pode perceber, dois dos quatro temas propostos contemplam conteúdos referentes à geometria. Segundo o PDE (BRASIL, 2008), o tema “espaço e forma” expressa um elemento necessário para a formação do aluno, para a compreensão do espaço com suas dimensões e formas de constituição. Consta nos PCNs (1998) que os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática e que, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada e concisa, o mundo em que vive. O trabalho com noções geométricas também contribui para a aprendizagem de números e medidas, estimulando a criança a observar, perceber semelhanças, diferenças e identificar regularidades.

Ainda para os PCNs, o trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situação onde são necessárias construções geométricas para visualização e aplicação de propriedades de figuras.

> Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas à posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas. [...] Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 51).

Em relação ao tema “grandezas e medidas”, o PDE explicita que os alunos devem reconhecer as diferentes situações e aplicações das grandezas físicas para identificar o que significa a medida e quais são seus atributos. Na comparação de grandezas de mesma natureza e cálculos de estimativa, considera a velocidade, o tempo e a massa como exemplos de grandezas. Segundo este tema, espera-se que os alunos tenham a compreensão das medidas convencionais para cálculo de perímetro, áreas, valores monetários e trocas de moedas e cédulas.

Nos PCNs este tema tem uma forte relevância social por ser de caráter prático e pela possibilidade de variadas conexões com outras áreas do conhecimento. Assim:

> Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano.
>
> As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da idéia de proporcionalidade e um campo fértil para uma abordagem histórica (BRASIL, 1998, p. 52).

Como se pode perceber, ambos os documentos corroboram para um ensino que contenha propostas práticas e voltadas para o cotidiano, trazendo a geometria como um meio. Cada um dos temas - Espaço e Forma; Grandezas e Medidas – traz ainda descritores que detalham as habilidades e competências que os alunos devem adquirir ao longo do Ensino Fundamental, sendo estas diferentes para cada ciclo de ensino, conforme Quadro 4.

Quadro 4 – Descritores do 5º e 9º anos dos temas Espaço e Forma e Grandezas e Medidas

Descritores 5º ano	Descritores 9º ano
Espaço e forma	**Espaço e forma**
- Identificar a localização e movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas; - Identificar propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações; - Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados, pelos tipos de ângulos; - Identificar quadriláteros observando as posições relativas entre seus lados (paralelos, concorrentes, perpendiculares); - Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.	- Identificar a localização e movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas; - Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com suas planificações; - Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos; - Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades; - Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas; - Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos; - Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram; - Resolver problema utilizando a propriedade dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares); - Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas; - Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos; - Reconhecer círculo e circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

(Continua...)

(Continuação)

Grandezas e medidas	Grandezas e medidas
- Estimar a medida de grandezas utilizando unidades de medida convencionais ou não; - Resolver problemas significativos utilizando unidades de medida padronizadas como km/m/cm/mm, kg/g/mg, l/ml; - Estabelecer relações entre unidades de medida de tempo; - Estabelecer relações entre o horário de início e término e/ou o intervalo da duração de um evento ou acontecimento; - Num problema, estabelecer trocas entre cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro em função de seus valores; **-** Resolver problema envolvendo o cálculo do perímetro de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas; - Resolver problema envolvendo o cálculo ou a estimativa de áreas de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.	- Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas; - Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas; - Resolver problema envolvendo noções de volume; - Resolver problema envolvendo relações entre diferentes unidades de medida.

Fonte: http://portal.mec.gov.br/

Neste quadro podemos perceber a gama de habilidades e competências a serem trabalhadas e desenvolvidas no contexto de sala de aula com o tema geometria, sendo muitas delas de uso prático no cotidiano das pessoas. Na sequência, relato o resumo de algumas dissertações de mestrado que estão disponíveis no Brasil e que vinculam investigação matemática no Ensino Fundamental.

2.4 Alguns estudos efetivados sobre investigação matemática em dissertações

Nesta seção apresentarei a revisão bibliográfica realizada sobre alguns estudos com foco em investigação matemática. Consultaram-se dissertações e teses encontradas no portal da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) que fazem referência a pesquisas que utilizaram investigação matemática com alunos do Ensino Fundamental. Para realizar esta pesquisa, utilizei as expressões “investigação matemática” e “ensino fundamental”. Encontrei 236 registros, mas nem todos os resultados incluíam ambos os termos necessitando uma análise mais detalhada considerando-se o teor do título e, subsequentemente, a leitura do resumo. Após esta análise, selecionei cinco (QUADRO 5) que vinham ao encontro do que esta pesquisa se propunha a fazer.

Quadro 5 – Relação das dissertações escolhidas

Autor	**Ano**	**Título**
Mari Emilia dos Santos Calhau	2007	Investigação em sala de aula: uma proposta de atividades em salas de aula do ensino fundamental
Maria das Graças dos Santos Abreu	2008	Uma investigação sobre a prática pedagógica: refletindo sobre a investigação nas aulas de matemática
Luciane de Fatima Bertini	2009	Compartilhando conhecimentos no ensino de matemática nas séries iniciais: uma professora no contexto de tarefas investigativas
Marlova Elizabete Balke	2011	Investigação Matemática: Tratamento da Informação no Ensino Fundamental
Maria Gorete Nascimento Brum	2012	Atividades investigativas para o ensino de matemática para alunos de 5ª série do Ensino Fundamental

Fonte: Da autora.

Calhau (2007) realizou seu trabalho de mestrado com o tema “Investigação em sala de aula: uma proposta de atividade em salas de aula do ensino fundamental”. A autora teve o propósito de trazer contribuições à pesquisa referente à aprendizagem dos alunos, por meio da utilização de tarefas de investigação. Para tanto, construiu critérios para a elaboração e aplicação de atividades que viabilizassem o tema em sala de aula.

Em sua pesquisa buscou examinar três questões: i) Que atitudes manifestam os alunos perante tarefas de investigação? ii) Qual o papel do professor em atividades de investigação? iii) Que dificuldades de ensino e/ou aprendizagem podem encontrar em uma metodologia centrada na investigação? Para isso ela elaborou cinco tarefas centradas na investigação, as quais foram exploradas com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental. A pesquisa apoiou-se nos pressupostos referentes à investigação em sala de aula definidos por Ponte, Brocardo e Oliveira

(2009), ideias trazidas nos PCN(s), assim como as contribuições de alguns pensadores.

O percurso do trabalho foi embasado numa abordagem qualitativa, compreendendo essa como a mais compatível com a proposição a ser investida. Calhau (2007) concluiu, com sua pesquisa, que, apesar de, inicialmente, a maioria dos alunos da turma demonstrar insegurança na capacidade para explorar as tarefas de investigação, os resultados foram satisfatórios, sendo constatado o entusiasmo, o empenho e o progresso dos alunos durante a resolução das tarefas nas aulas. A pesquisa, junto com os dados coletados, mostrou a importância de trabalhar com situações em que os alunos possam elaborar estratégias, descobrir e buscar validar soluções, formular conjecturas de seu interesse. E, assim, construir aprendizagens mais significativas, além de desenvolver atitudes mais positivas frente à resolução de problemas na vida real.

Segundo Calhau (2007), outro ponto positivo que justifica a introdução das investigações na aula de Matemática diz respeito ao ambiente de aprendizagem, ou seja, as investigações ajudam a estabelecer um ambiente vivo, em que os alunos participam ativamente. Para a autora, o trabalho teve o intuito de contribuir, no sentido de mostrar um caminho alternativo para o ensino, o qual possibilita entusiasmar os alunos para o estudo da matemática, e ajudá-los na busca de uma compreensão maior e melhor no mundo em que vivem, desenvolvendo o raciocínio lógico e o modo de pensar.

Abreu (2008), com a pesquisa de mestrado "Uma investigação sobre a prática pedagógica: refletindo sobre a investigação nas aulas de matemática", realizou um trabalho com alunos do 5º ano a 8ª série do Ensino Fundamental. O estudo tratou de uma investigação que buscou compreender as transformações ocorridas na prática pedagógica, num contexto de realização de tarefas exploratório-investigativas nas aulas de matemática. Estas tarefas foram propostas de trabalho em que os alunos exploraram uma situação aberta, procurando regularidades, formulando problemas, criando conjecturas, argumentando e comunicando oralmente ou por escrito as suas conclusões.

O estudo foi realizado a partir de: registros-escritos dos alunos, colhidos em diferentes momentos da trajetória profissional; registros escritos da professora-investigadora, colhidos de forma de narrativa, que serviam como diário de campo; registros em áudio de dois grupos de trabalho e de uma aula de socialização dos resultados. De acordo com a autora, a opção foi pela metodologia qualitativa, pois teve como objetivo "conhecer em profundidade" o seu "como" e os seus "por quês".

Os resultados, segundo a investigadora, apontaram para a importância da pesquisa do professor sobre a sua própria prática, que, neste movimento de investigar a sua atuação em sala de aula, acaba por pensar o seu próprio mundo, investigando-se, conhecendo-se, colocando-se com os alunos. E, assim, refletindo e revendo os saberes já adquiridos, transformando-os em novos saberes e produzindo novos conhecimentos para si e para outros professores de matemática.

Segundo Abreu (2008), ficou evidenciado por meio da análise efetivada, que este modelo de trabalho permitiu uma nova relação com o conhecimento, entre professor e aluno, professor e o conhecimento matemático, pois a discussão, a troca e a socialização possibilitaram a produção de novos saberes tanto para professor quanto para aluno. Os alunos se sentiram mais motivados a trabalharem em grupo, sentiram menos medo de errar, passando a aprender que o erro faz parte do aprendizado.

O trabalho, para a autora, ocorreu de forma incompleta diante de todas as perspectivas iniciais, devido à insuficiência do tempo para a sua realização, a dificuldade do trabalho em sala de aula como professora e pesquisadora, a preocupação em construir a documentação para registro e ao distanciamento necessário para sua análise. Contudo, Abreu (2008) acredita que o mesmo trará contribuições aos estudos já iniciados.

Bertini (2009), em sua dissertação de mestrado "Compartilhando conhecimentos no ensino de matemática nas séries iniciais: uma professora no contexto de tarefas investigativas", procurou pesquisar quais as potencialidades e as limitações do uso de tarefas investigativas no ensino de matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental a partir das ações e das reflexões de uma professora. Analisou de que forma as ações da docente tiveram influência nessas questões e identificou mudanças ocorridas na prática pedagógica e na dinâmica de sala de aula, decorrentes do uso das tarefas investigativas.

Segundo a autora, as tarefas têm um caráter desafiador, muito diferente das questões matemáticas que usualmente são trabalhadas, pois as respostas não estão prontas, não há um resultado fechado e tudo isso possibilita que as crianças busquem respostas e sintam prazer em encontrá-las. Nesta visão, o fato das tarefas não apresentarem resultados fechados, propicia um aumento de repertório das crianças na busca das ‘soluções’, ficando mais fácil a percepção de que as respostas podem ser diferentes, além do que, também passam a notar que as variáveis são determinantes para as mudanças das respostas. A investigação matemática, de acordo com Bertini (2009), propicia uma forma ampla, complexa de pensamento que deve ser desenvolvida nos estudantes.

Os referenciais teóricos que embasaram seu trabalho dizem respeito a estudos sobre as tarefas investigativas centradas em Ernest (1996), Ponte (2005) e Skovsmose (2008). Além de que o cenário de mudança proposto ao professor, quando utiliza uma nova metodologia, envolvendo questões de medo e insegurança, apontando a reflexão e a parceria com demais envolvidos como forma de superá-las, baseada em Freire (2002) e Penteado e Skovsmose (2008).

A autora concluiu que as tarefas investigativas podem apresentar-se como potencialidades nos diferentes níveis de ensino. Para a pesquisadora, utilizar estas tarefas contribui não só para o aprendizado de matemática, mas também para o desenvolvimento de atitudes como autonomia e respeito ao outro. Já as dificuldades e limitações observadas foram superadas ou minimizadas, por meio da atitude reflexiva da professora e do trabalho em parceria e compartilhado com a pesquisadora. Segundo o estudo, se a estrutura escolar de ensino tradicional não estiver aberta a propostas inovadoras, por mais sucesso que esta proposta possa trazer, ela ficará restrita.

Balke (2011), em sua pesquisa de mestrado intitulada “Investigação matemática: tratamento da informação no ensino fundamental”, se propôs a investigar em que medida a metodologia de investigação matemática potencializa a apropriação de significado dos conceitos, que compõem o bloco de conteúdos de tratamento de informação, com uma turma de 8ª série. Ela destacou alguns estudos de Lopes (1998), Buehring (2006) e os PCNs, que indicam que esse conteúdo raramente é trabalho na escola, mas é necessário e importante para a educação básica e para a vida das pessoas.

A autora utilizou uma metodologia baseada em uma abordagem qualitativa. Segundo a pesquisadora, o desenvolvimento das atividades de investigação matemática possibilitou um ensino contextualizado, além de interações que contribuíram e potencializaram a apropriação dos conceitos de tratamento da informação, em que o aluno efetivou seu aprendizado, demonstrando interesse em sala de aula. Ademais, a investigadora pôde refletir a respeito de sua prática, para uma mudança de postura na gestão das aulas.

Brum (2012) pesquisou as contribuições da utilização de atividades de cunho investigativo, na exploração de padrões e regularidades em sequências numéricas e geométricas, procurando com isso facilitar a aprendizagem dos alunos. Sua dissertação intitulada “Atividades investigativas para o ensino de matemática de 5ª série do Ensino Fundamental” foi desenvolvida com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental. Os dados da pesquisa, de cunho qualitativo, foram obtidos da ação direta do professor na sala de aula com os alunos, por meio da observação e dos registros no seu diário de campo, além da análise dos trabalhos dos alunos e de suas apresentações ao grande grupo.

Esta, segundo a autora, teve como objetivos explorar o conceito de padrões, reconhecer e descrever padrões, continuar o desenho da sequência, generalizar, explorar a noção e propriedade dos números pares, ímpares e múltiplos, bem como a potenciação de números naturais e trabalhar o conceito de área e perímetro de figuras planas. Apenas alguns destes objetivos foram parcialmente atingidos. A autora concluiu que as atividades investigativas, trabalhadas com os alunos de 5ª série, propiciaram o aumento de interesse e motivação na realização das atividades propostas em sala de aula.

Já a autora Reginaldo (2012) procurou compreender como se desenvolve a argumentação matemática em estudantes do 9º ano, através de atividades de investigação matemática. Sua dissertação de mestrado acadêmico, “Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática”, analisou uma sequência de quatro atividades que foram realizadas com três turmas de 9º ano do Ensino Fundamental.

De acordo com a autora, as intervenções apoiaram-se nos referenciais teóricos sobre argumentação (BOAVIDA, 2005), investigações na aula de Matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009) e nas experiências vivenciadas com esse tipo de atividade, como professora de matemática. Para realizar esta pesquisa, a autora utilizou uma abordagem metodológica qualitativa. Os instrumentos de coleta de dados foram: observação participante, escritos em caderno de campo, gravações em áudio e vídeo e relatórios produzidos pelos alunos.

Segundo Reginaldo (2012), os resultados apontam que os estudantes da escola básica são capazes de argumentar nas aulas de Matemática de diversas formas: refutar por meio de contraexemplo, provar com o uso de um recurso não discursivo, demonstrar, dentre outras. Para a autora é possível desencadear e desenvolver a argumentação matemática dos alunos por meio da realização de intervenções, como, por exemplo, apresentar a eles as formas de argumentação. A falta de tempo, de domínio da linguagem algébrica, dentre outros, se configuraram, para a pesquisadora, como obstáculos para a argumentação dos alunos, mas estes podem ser contornados.

Resumindo, pode-se perceber que as pesquisas realizadas, que utilizam a metodologia de investigação matemática, têm como base a pesquisa qualitativa. Quase todos os estudos realizados procuraram averiguar as potencialidades e limitações desta metodologia, bem como instigar nos alunos o interesse e a motivação no aprender. Para alguns autores, as tarefas de investigação trazem mais autonomia aos estudantes, fazendo com que os mesmos desenvolvam sua capacidade intelectual.

As questões de investigação matemática proporcionam a socialização das conjecturas. Os alunos devem apresentar, ao grande grupo, suas descobertas, fazendo com que desenvolvam a eloquência e percam o medo de se apresentar. Outro fator encontrado nestas pesquisas é o papel fundamental do professor, que, ao tentar novas metodologias, modifica sua prática e sua postura em sala de aula, saindo de sua área de conforto e inovando em sala de aula.

No próximo capítulo apresento os procedimentos metodológicos, o tipo de pesquisa, os sujeitos com quem foi realizada a investigação, bem como os objetivos das atividades que foram desenvolvidas durante a investigação pedagógica.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O trabalho foi desenvolvido tendo como base metodológica a pesquisa qualitativa envolvendo alunos do 5º ano e 9º ano de duas escolas públicas do Vale do Taquari que fazem parte da pesquisa do Observatório da Educação intitulado "Estratégias Metodológicas visando à Inovação e Reorganização Curricular no Campo da Educação Matemática no Ensino Fundamental".

Pesquisa qualitativa, de acordo com Moreira (2011), é aquela preocupada com os fenômenos sociais, tendo o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. Segundo Moreira (2011, p. 58), na pesquisa qualitativa "o pesquisador procura um entendimento interpretativo de uma realidade socialmente construída na qual ele está imerso." Uma das abordagens da pesquisa qualitativa é o estudo de caso, o qual foi adotado nesta pesquisa.

Segundo Ludke e André (1986), os estudos de caso enfatizam a interpretação em um contexto para compreender melhor a manifestação geral de um problema, as ações, percepções, comportamentos e interações do sujeito que devem ser relacionados à situação específica onde ocorrem, ou a problemáticas determinadas a que estão ligadas. Para Yin (2010), o método estudo de caso permite que os pesquisadores preservem características como o comportamento de pequenos grupos ao lidar com determinada situação.

Conforme Yin (2010, p. 32), "o estudo de caso é preferido no exame dos eventos contemporâneos, mas quando os comportamentos relevantes não podem ser manipulados." Nesta pesquisa optou-se por este método, pois se encaixa nas três condições relacionadas com o estudo de caso segundo Yin, que seriam: a forma de questão de pesquisa ao enfatizar o “como” acontece; por não exigir controle dos eventos comportamentais e por enfocar eventos contemporâneos. O autor expressa como técnicas de pesquisa a observação direta dos eventos que estão sendo estudados, além da observação participante, em que pode ocorrer a manipulação informal. Em efeito:

> a observação participante é uma modalidade especial de observação na qual você não é simplesmente um observador passivo. Em vez disso, você pode assumir vários papéis na situação de estudo de caso e participar realmente nos eventos sendo estudados (YIN, 2010, p. 138).

Estando de acordo com os autores citados, participei ativamente, orientando as atividades propostas para as turmas das duas escolas, as quais passarei a descrever e sintetizar no Quadro 6.

Uma das escolas é estadual e conta com 295 alunos entre o 1º ano do Ensino Fundamental e o 3º Ano do Ensino Médio. Este educandário é o único a acolher estudantes para o ensino fundamental e médio do município, recebendo também alunos de outras escolas da região, prestando atendimento em três turnos. As famílias que compõem a comunidade escolar possuem, entre seus membros, operários, trabalhadores liberais, ou agricultores (moradores da área rural do município).

A segunda escola, da rede municipal de ensino, conta com 297 alunos entre 1º ano e 9º ano. Nesta escola a maioria das famílias obtém seu sustento trabalhando na indústria ou em serviços, como o de diaristas. O nível escolar dos pais é Ensino Fundamental ou Médio, sendo que participam pouco da vida escolar de seus filhos e, geralmente, só comparecem quando chamados (convocados). A escola também participa do Projeto Mais Educação para os alunos do 1º ao 5º ano, que permanecem o dia todo na escola.

Quadro 6 – Contexto da pesquisa

Rede	Municipal	Estadual
Nº alunos 5º ano	17	26
Nº alunos 9º ano	19	18
Totalizando	80 alunos	

Fonte: Da autora.

Inicialmente, encaminhei para os responsáveis pelos alunos, de ambas as escolas, um termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice A), onde expus a pesquisa e o envolvimento dos estudantes na investigação, solicitando, também a autorização de uso de imagem e voz.

A proposta de intervenção pedagógica desenvolvida constituiu-se de cinco atividades que foram desenvolvidas em cinco encontros de dois a três períodos cada. Cada uma das atividades foi explorada nas duas turmas de 5º ano e nas duas turmas do 9º ano das escolas citadas. Cabe destacar que as atividades exploradas foram iguais em ambos os níveis de escolaridade – 5º ano e 9º ano – para averiguar que matemáticas são utilizadas pelos alunos, em diferentes graus de escolaridade, quando criam e justificam conjecturas em atividades envolvendo geometria.

Todas as tarefas de investigação, uma por encontro, foram realizadas em grupos de três a quatro alunos, numa tentativa de proporcionar momentos de socialização de aprendizagem e troca de saberes. Os alunos deviam explorar as atividades, seguindo as orientações dos enunciados e formulando suas próprias conclusões. Cada grupo formulou, em cada atividade, conjecturas, relatando as mesmas por escrito. Estas foram testadas e reformuladas, quando necessário. Por fim, os alunos escreveram e argumentaram suas hipóteses e, posteriormente, foram socializadas as descobertas em grande grupo.

As atividades selecionadas (Apêndice B) são adaptações de diferentes fontes e tinham o intuito de desenvolver habilidades de trabalho em grupo, de cooperação e da escrita matemática, pois acredito que estes também são fatores importantes no desenvolvimento dos alunos. Portanto, todas as atividades foram realizadas em pequenos grupos e socializadas em grande grupo. Cabe salientar que a escrita das conjecturas e das conclusões foi permanente durante a exploração das atividades.

O interesse central dessa pesquisa estava na interpretação atribuída pelos diferentes sujeitos – 5º ano e 9º ano - nas atividades de investigação matemática envolvendo o tema geometria. Para tanto, foram realizadas observações participativas, filmagens e diário de campo tanto da pesquisadora quanto dos próprios alunos.

Cada aluno recebeu um caderno no primeiro encontro, que serviu para realização das atividades e como diário de campo, sendo que os mesmos deveriam escrever suas percepções em relação às atividades e à metodologia empregada. Do mesmo modo, eu tinha um diário de campo em que colocava minhas percepções como professora e pesquisadora, referente à evolução e andamento da pesquisa.

As filmagens foram realizadas durante a discussão final de cada atividade, sendo posteriormente transcritas. Nelas percebi que os alunos acabam fazendo novas descobertas e apresentando explicações mais detalhadas oralmente do que ao escreverem em seus diários de campo.

Depois de desenvolvidas as atividades e recolhido o material, realizei a análise dos dados obtidos que foi efetivada seguindo os pressupostos da análise de conteúdo. Para Morais (1999, p. 9), essa forma de análise se constitui em uma metodologia de pesquisa usada para descrever e "interpretar conteúdo em textos e documentos ajudando a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além da leitura comum".

Segundo o autor, numa abordagem qualitativa, a construção dos objetivos, em parte, pode ocorrer durante o processo, assim como as categorias poderão surgir ao longo da pesquisa. Laswell (apud MORAIS, 1999) coloca historicamente seis categorias originais: 1) Quem fala? 2) Para dizer o quê? 3) A quem? 4) De que modo? 5) Com que finalidade? 6) Com que resultados? Sendo que esta pesquisa em particular se limitará a averiguar o conteúdo no que diz respeito à segunda e à quarta questão.

Segundo Morais (1999), na segunda questão o estudo se direciona aos argumentos e ideias expressas na mensagem, constituindo uma análise temática. Já a quarta questão analisa como a comunicação se processa, seus códigos, estilo e estrutura linguística. Ainda de acordo com o autor, a análise se dá em cinco etapas (MORAIS, 1999, p. 15):

- preparação das informações;
- unitarização ou transformação do conteúdo em unidades;
- categorização ou classificação das unidades em categorias;

- descrição;
- interpretação.

Inicialmente organizei as informações por ano e por atividade, fazendo um levantamento geral das conjecturas que os alunos abordaram no diário de campo e das discussões filmadas e transcritas, fazendo uma separação inicial dos pontos mais relevantes. Após, para cada atividade apontei as principais diferenças e semelhanças observadas durante a análise dos dados, comparando, em quadros, o que/como cada nível de ensino abordava determinado assunto. Por fim, criei categorias voltadas para os principais pontos emergentes da pesquisa e que eram visíveis durante a prática pedagógica desenvolvida.

No próximo capitulo encontram-se a intervenção pedagógica, as respostas dos alunos, separadas por atividade desenvolvida, bem como a análise das mesmas, imbricada com referencial teórico.

4 INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Neste capítulo será detalhada a intervenção pedagógica, separada por atividade/encontro, e será desenvolvida a análise dos resultados, expondo as ideias e colocações dos alunos ao realizarem cada atividade. As respostas não estão separadas por escolas, pois não era minha intenção compará-las, e sim, verificar as respostas por nível de escolaridade.

No primeiro encontro cada aluno recebeu um caderno, que serviu como diário de campo, onde as atividades de investigação foram desenvolvidas. Posteriormente os mesmos foram recolhidos e serviram como instrumento de coleta de dados, pois, a partir dos diários, foram analisadas as ideias e respostas dos alunos, além dos conteúdos matemáticos utilizados para testar e resolver as tarefas de investigação.

Concomitante, no primeiro encontro explicou-se oralmente para os alunos o que são atividades de investigação, como elas funcionavam e o que era esperado na resolução das questões. Em princípio, questões investigativas não deveriam ser colocadas explicitamente. Nesta visão, os alunos necessitam tomar a iniciativa para levantarem suas próprias questões. Mas, pode-se corroborar com Fonseca e Abrantes (1999, p. 3) que comentam:

> [...] na prática, o professor tem de gerir uma situação onde há uma tensão entre tarefas demasiadamente estruturadas (as quais podem impedir os alunos de fazer as suas próprias explorações) e problemas muito abertos (os quais podem levar o aluno a não fazer nada ou apenas a uma exploração muito pobre). A decisão depende de vários factores, nomeadamente, da experiência prévia dos alunos com investigações matemáticas.

Em relação ao trabalho aqui apresentado, os alunos não haviam tido contato com este tipo de tarefa, daí a opção por tarefas mais direcionadas e que trouxessem questionamentos com o propósito de instigar os alunos. Destaco que, apesar disto, as mesmas possibilitavam ainda novos questionamentos a partir dos quais o aluno poderia, a qualquer momento, levantar conjecturas que fossem do seu interesse.

Após as explicações iniciais, a primeira atividade foi apresentada. No caso do 5º ano, fez-se uma leitura conjunta da atividade, pois, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 26) "no caso de alunos mais novos, a leitura conjunta do enunciado poderá ser imprescindível para a sua compreensão, nem que seja somente para esclarecer certos termos com que não estão familiarizados".

Nas próximas sessões apresento detalhadamente a descrição do que ocorreu em cada atividade, expressando o objetivo inicial desta e a atividade em sua plenitude. Em seguida exponho apontamentos oriundos dos diários de campo e das discussões, seguido das minhas percepções a cerca das mesmas e finalizo com um quadro comparativo de semelhanças e diferenças referente a alguns pontos comuns entre o 5º e 9º anos.

4.1 Descrição dos dados emergentes da atividade 1

A atividade 1 consistiu na investigação da relação entre perímetro e área de figuras planas. O intuito foi trabalhar a relação da área de figuras planas com seu formato, evidenciando que figuras que possuem o mesmo valor para o perímetro podem ter valores diferentes de áreas. Objetivei ainda, com essa atividade, que o aluno descobrisse qual era a figura plana que tinha maior área, com a mesma medida de contorno. Assim, entreguei para os alunos o enunciado que segue:

Atividade 1: Investigando área e perímetro

Um pedreiro quer construir uma casa e tem material suficiente para construir as paredes do contorno da casa. Descubra qual deverá ser o formato da casa para que a mesma tenha a maior área possível.

Material necessário: barbante, papel quadriculado.

Procedimento: corte um pedaço de barbante com 32 unidades de comprimento. Com a ajuda do barbante, desenhe no papel quadriculado:

- 1 quadrado
- 2 retângulos com formatos diferentes
- 1 círculo
- 1 triângulo

- 1 figura diferente das anteriores

Calcule a área de cada figura construída, contando o número de quadradinhos inseridos em cada figura. O número de quadradinhos de cada figura equivale ao valor da área. Complete a tabela:

Figura	**Área**
Quadrado	
Retângulo 1	
Retângulo 2	
Triângulo	
Círculo	
Figura qualquer	

Responda:

- Que figura tem a maior área?
- Que figura tem a menor área?
- Qual o retângulo que tem a maior área?
- Observando as figuras e suas áreas, que outras conclusões você pode tirar em relação ao formato da figura necessário para se obter a maior área?
- Que figura você escolheria para a base de sua casa? Por quê?

Fonte: Adaptado de ZASLAVSK, 1989.

Na turma do 5º ano foram definidos conceitos de área e perímetro. Também foram questionados quanto ao formato das figuras apresentadas na atividade, procurando averiguar se eles conheciam as mesmas. Já no 9º ano, esta explanação inicial de conceitos foi realizada no sentido de recordá-los, tendo em vista que os mesmos já trabalharam tais conceitos de figuras geométricas planas.

A seguir apresento algumas respostas aos questionamentos, descritos no diário de campo dos alunos:

- Que figura tem a maior área?

A maioria dos alunos, tanto do 9º ano quanto do 5º ano, indicou o círculo. Observei que as respostas diferentes para esta questão ocorreram pela falta de cuidado ao construir as figuras com o barbante no papel quadriculado. O círculo foi a figura que os alunos mais tiveram dificuldades para desenhar e exigiu muita paciência dos mesmos , sendo que alguns , que queriam terminar logo, não tiveram o devido cuidado ao desenhá-lo.

- Que figura tem a menor área?

Nesta questão apareceu uma gama de respostas, pois, dependendo de como os alunos construíram os retângulos, ou seja, das dimensões usadas, surgiam imagens com áreas menores. Ao construírem retângulos com as dimensões 9x7, eles obtinham 63 unidades quadradas de área e, ao construírem 12x4, obtinham a área igual a 48, o que dava bastante diferença.

- Qual o retângulo que tem a maior área?

Nesta questão percebi que todos responderam justamente o retângulo que mais se aproximava do formato de um quadrado. Assim, o retângulo com a maior área encontrado tinha as dimensões 9 quadradinhos por 7 quadradinhos, quando este havia sido desenhado.

- Observando as figuras e suas áreas, que outras conclusões você pode tirar em relação ao formato da figura necessário para se obter a maior área?

A maioria dos alunos respondeu o círculo. Comentaram que este fato ocorria porque não tinha pontas e sua forma era arredondada. Mas houve alunos que obtiveram outras respostas, sendo que as mesmas ocorreram por erros de contagem da área ou por figuras mal desenhadas. Este fato ocorreu com mais frequência na turma do 5º ano. Algumas respostas que os alunos escreveram nos diários de campo: o aluno A17[3] "*o círculo tem a maior área porque seu formato é diferente*"; o A8 colocou "*quanto mais redondo maior vai ser [a área]*". Nestas duas colocações queriam expressar que o círculo, ao contrário das demais figuras construídas, não tinha pontas e, por isso, era uma figura diferente e sua área era maior que as demais.

- Que figura você escolheria para a base de sua casa? Por quê?

Nesta questão apareceram basicamente duas respostas: o quadrado e o retângulo. A3 escreveu "*quadrado, porque ele tem os lados iguais e dá menos trabalho*". A última parte da resposta deve-se ao trabalho de construir as paredes de uma casa de base quadrada ou de uma casa de base redonda. De acordo com as

[3] Irei utilizar A1, A2, ...para nomear os alunos do 5º ano e B1, B2... para nomear os alunos do 9º ano, quando utilizar depoimentos e respostas escritas nos diários de campo dos mesmos, com o objetivo de preservar o anonimato dos mesmos.

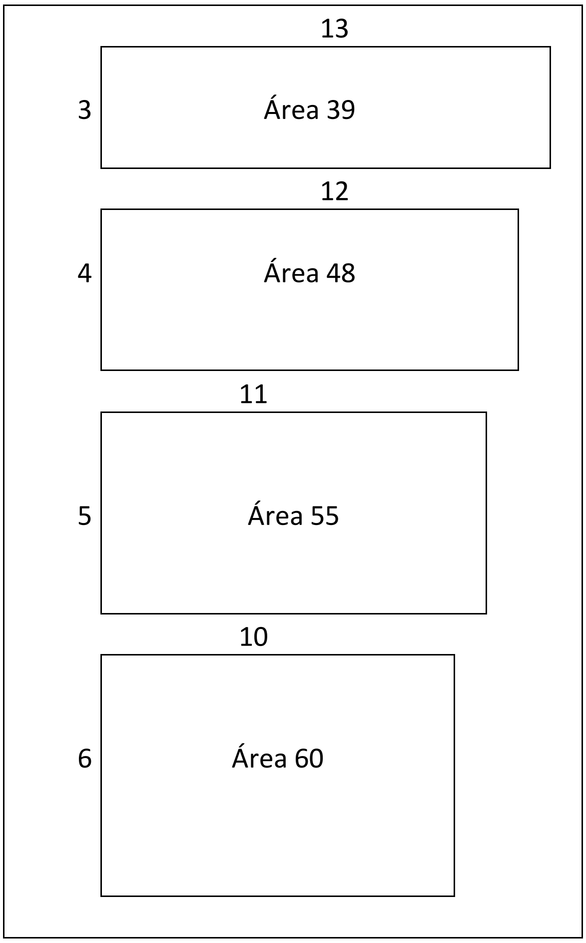
respostas, posso inferir que as justificativas para a construção de casas quadradas estavam relacionadas ao comodismo que existe atualmente. A maior parte dos projetos arquitetônicos atuais, bem como dos materiais e móveis são projetados em formatos retangulares, o que tornaria difícil e com um maior custo financeiro fazer diferente. Os alunos alegaram que na nossa volta todas as casas são quadradas ou retangulares, como coloca A16: "*escolheria o retângulo para ser a base da minha casa, por que geralmente as casas são retangulares*."

Após cada grupo desenvolver a atividade e escrever seus apontamentos e conclusões, foi iniciada a socialização destas em grande grupo. Então, os alunos colocaram suas conjecturas, explicaram como acharam as mesmas e trocaram ideias com os demais colegas da classe. Este debate, inicialmente, foi lento, pois os alunos falavam pouco e eram bastante diretos em suas justificativas. Tive que fazer vários questionamentos para que as discussões fluíssem. A partir do momento em que começaram a contribuir mais, o debate se tornou enriquecedor, com os alunos levantando diversas conjecturas que os grupos não haviam descoberto.. Ao colocar no quadro alguns dados, os discentes acabavam percebendo e apontando novas conjecturas. Seguem algumas hipóteses dos alunos que surgiram durante as discussões.

No 9º ano:

- Uma das observações realizadas pelos alunos diz respeito à área dos retângulos e sua relação com o formato. Os alunos perceberam que, quanto mais próximas forem as medidas dos lados, altura e largura de um retângulo, maior será a sua área. Esta hipótese surgiu, ao colocar, no quadro, todos os retângulos diferentes formados pelos grupos, bem como suas medidas e áreas (FIGURA 1).

Figura 1 – Retângulos diferentes encontrados pelos grupos



Fonte: Da autora.

- Os alunos chegaram à conclusão de que o círculo tinha a maior área, mas não encontraram uma explicação para isso, limitando-se a dizer que o fato ocorria porque ele era arredondado e não tinha cantos.

- Quando questionados quanto ao formato da base da casa, a maioria escolheu o quadrado ou o retângulo, justificando que as casas normalmente têm esses formatos. E quando questionados do por que não fazer a base da casa no formato de um círculo, apenas responderam que as casas não são assim e que seria estranho ter uma casa nesse formato.

No 5º ano:

- Como alguns alunos do 5º ano tiveram dificuldades em desenhar o círculo, este nem sempre foi a figura com a maior área. Este fato foi contornado, com a professora desafiando os alunos a observarem suas figuras, reparando se as mesmas eram realmente círculos, ou apenas pareciam figuras arredondadas. Ao perceberem que suas figuras não eram realmente círculo, eles aceitaram que a figura que tinha a maior área era esta e passaram a debater o porquê disto. Chegaram à conclusão de que era por que não tinha pontas.

- Quando questionados em relação ao formato da base da casa, os alunos do 5º ano tiveram respostas iguais às do 9º ano. A diferença foi no questionamento da possibilidade de uma casa com base redonda. As respostas desses alunos foram diversas. Alguns disseram que não se poderia construir uma casa com a base em formato de círculo, pois os móveis que se encontra nas lojas são basicamente em formatos retos. Uma aluna chegou a comentar que não poderia limpar a casa com o rodo, sendo que este é reto e não alcançaria as paredes. Em ambas as turmas do 5º ano, comentaram que "*a casa vai sair rolando*", pois alguns discentes tinham a ideia de que uma casa redonda seria semelhante a uma bola e não imaginavam que apenas a base da casa seria redonda. A seguir, apresento, no Quadro 7, observações por mim efetivadas durante os encontros, a partir da fala dos alunos ao realizarem as atividades, bem como das falas dos diários dos mesmos.

Quadro 7 – Semelhanças x Diferenças entre 5º ano e 9º ano na primeira atividade

	5º ano	9º ano
Quadrado	Os alunos tinham o conhecimento de que um quadrado tem os quatro lados iguais, mas, para formá-lo, usaram o método da tentativa e erro.	Os alunos tinham a noção de que o quadrado tem quatro lados iguais. Para formá-lo, com um barbante que tinha 32 unidades, bastava dividir por 4. Assim, cada lado deveria ter 8 unidades de comprimento.
Retângulo	Muitos acabaram fazendo dois retângulos iguais, apenas invertidos, sem perceber que eram idênticos. Foi necessária minha intervenção para que percebessem que a figura era a mesma. Para criar retângulos diferentes, utilizaram tentativas e erro, construindo diversas formas com a medida do barbante.	Na hora de fazer um retângulo diferente do primeiro, alguns utilizaram como estratégia o fato de que se aumentar uma unidade de medida em um lado, se deveria diminuir uma unidade para o outro lado.

(Continua...)

(Continuação)

Triângulo	Para desenhar o triângulo, muitos alunos, primeiro, tentaram fazer o desenho com lápis. Perceberam que o triângulo não seguiria as linhas do papel quadriculado. Observando os desenhos, foram visualizados triângulos retângulos (com um ângulo de 90º) ou triângulos cujo formato se aproximava de um triângulo equilátero (todos os lados iguais).	Para desenhar o triângulo, em muitos casos, os alunos se ajudaram mutuamente. Assim, um aluno segurava as pontas do barbante e o outro dava forma para a figura, marcando com um lápis as pontas. Apenas quatro alunos tentaram desenhar com um lápis, antes de usar o barbante. Quanto ao tipo de triângulo, apesar de predominarem os triângulos equiláteros, houve figuras que fugiram deste padrão.
Círculo	Apareceram dificuldades em construir o círculo, pois muitos fizeram figuras disformes (FIGURA 2), mas arredondadas, e diziam que era um círculo. Outros acabaram desenhando um círculo colando o barbante direto, sem testar primeiro (FIGURA 3). Isso gerou algumas figuras com sobreposição de barbante.	Para construir o círculo, alguns grupos tentaram usar o transferidor. Tiveram mais cuidado para formar a figura do que os alunos do 5º. ano, tentando se aproximar o máximo possível de um círculo.
Figura qualquer	O que chamou a atenção é que, em ambas as turmas, os alunos construíram figuras disformes como coração, gota, bota... (FIGURA 4). Poucos criaram uma nova figura geométrica conhecida.	
Área das figuras	Apenas dois alunos calcularam a área do quadrado e dos retângulos multiplicando os lados. Os demais fizeram a contagem dos quadradinhos. Tiveram dificuldades para entender o que fazer com os pedaços de quadrados que ficaram aparecendo nas figuras do círculo e do triângulo.	Para saber a área do quadrado e dos retângulos, os alunos já calculavam, fazendo lado vezes lado. No triângulo, círculo e demais figuras também contaram os quadradinhos, apesar de comentarem que sabiam a fórmula para calcular a área do triângulo.
Grupo	O trabalho em grupo em ambos os casos foi promissor. Houve cooperação entre os colegas, apesar de ainda haver alunos mais inseguros ou tímidos que acabavam colaborando pouco com ideias e opiniões. Ocorreram momentos em que os alunos, ao descobrirem algo novo ou diferente, explicavam para os demais colegas do grupo, tentando “provar” sua teoria. Um exemplo dessa situação está na Figura 5.	

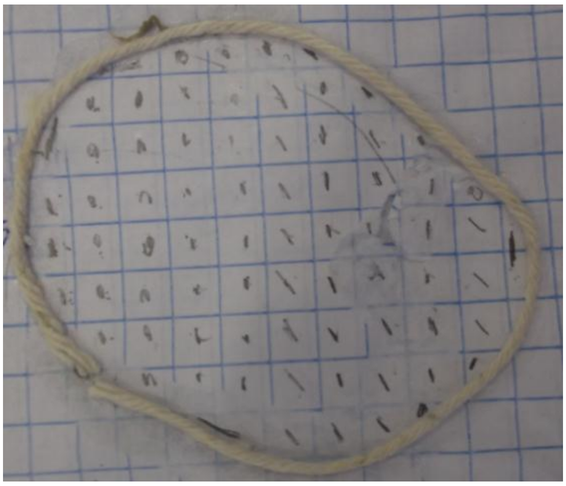
(Continua...)

(Continuação)

Escrita	Esta foi a grande dificuldade dos alunos, pois ocorreram poucos registros escritos das discussões e hipóteses levantadas pelo grupo. Os alunos se limitaram à escrita, mesmo quando incentivados a colocarem no papel suas falas e discussões, alegando que não sabiam como escrever determinada ideia.

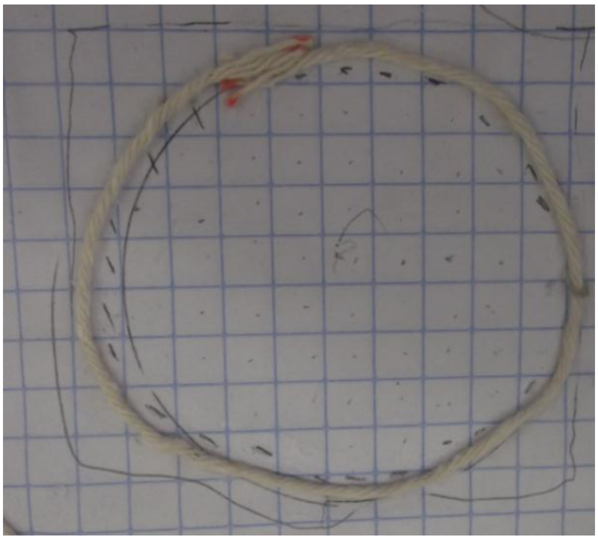
Fonte: Da autora.

Figura 2 – Exemplo de “círculo” confeccionado por alunos do 5º ano



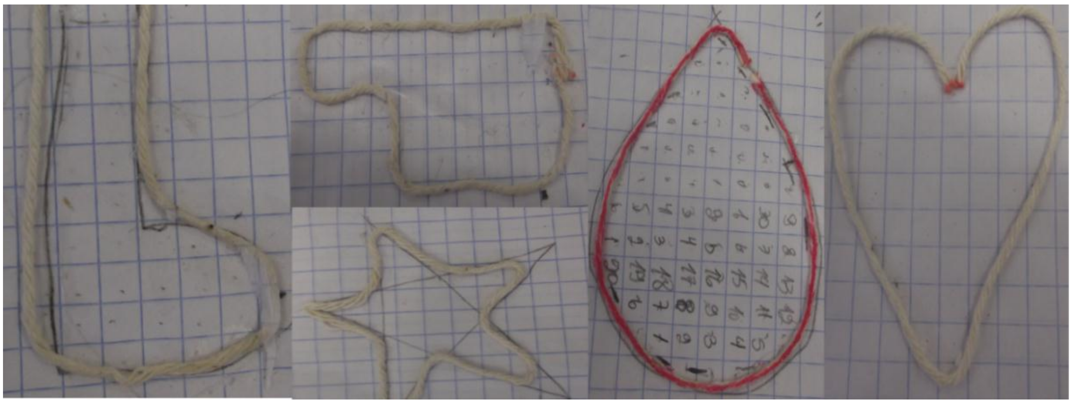
Fonte: Da autora.

Figura 3 – Círculo com barbante sobreposto



Fonte: Da autora.

Figura 4 – Exemplos de figura qualquer, turmas de 5º ano e 9º ano



Fonte: Da autora.

Figura 5 – Um aluno explicando para o colega sua conjectura

Fonte: Da autora.

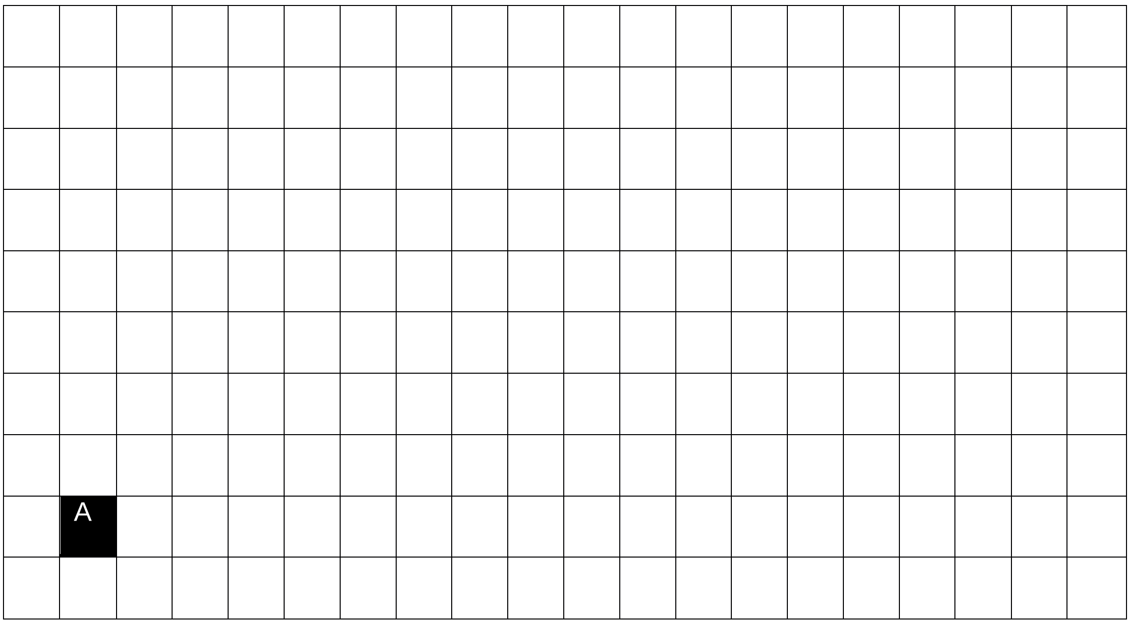
Com esta atividade inicial, os alunos tiveram um primeiro contato com esta metodologia, o que causou certo desconforto inicial. Após iniciarem o trabalho prático, percebi que os mesmos foram se soltando e conseguiram desenvolver a atividade. Nesta atividade, os alunos conseguiram explorar a relação da área de figuras planas com seu formato, percebendo que figuras que possuem o mesmo valor para o perímetro podem ter valores diferentes de áreas. E, apesar deles concordarem que o círculo era a figura com maior área, eles não conseguiam explicar a causa desta conclusão.

4.2 Descrição dos dados emergentes da atividade 2

A segunda atividade desenvolvida teve como objetivo a investigação da relação entre perímetro e área ao modificar a medida dos lados do quadrado.

Atividade 2: Relação entre área e perímetro

Utilize a grade a seguir para representar o que se pede e responda às questões, considerando o lado do quadrado A (quadrado escuro) igual a uma unidade:



Duplicando-se a medida de cada lado do quadrado "A", duplica-se o perímetro?
Duplicando-se a medida de cada lado do quadrado "A", duplica-se a área?
O que acontece com o perímetro e com a área do quadrado ao triplicarem-se as medidas dos lados?
O que acontece com o perímetro e com a área ao multiplicarmos por quatro as medidas dos lados do quadrado "A"?
E ao dividirmos pela metade a medida de seus lados, qual será a área do novo quadrado?
O que se pode concluir destas atividades?

Fonte: Adaptado de KNIJNIK, BASSO e KLÜSENER, 1996.

As dificuldades ocorreram em relação ao entendimento do que estava sendo solicitado no problema, principalmente devido à nomenclatura "duplica-se" e "triplicarem-se". Na questão em que foi solicitado o que aconteceria se dividíssemos pela metade a medida dos lados do quadrado e qual seria a área, houve muita discussão sobre como poderiam fazer esta divisão.

Ao analisar os diários de campo dos alunos foram encontradas respostas curtas e sucintas. Os alunos se limitaram, muitas vezes, a escrever o mínimo necessário para responder às questões. Ao serem questionados quanto o que acontece com o perímetro e a área, ao dividir pela metade a medida de seus lados (quadrado A inicial), apareceram diferentes respostas.

- No 5º ano muitos alunos não entenderam esta questão e oito, de um total de 43 alunos, não conseguiram fazê-la. A maioria colocou, como A12:*"o perímetro é 2 e a área 0,25".* Outros ainda colocaram, como *A19: "*A área é a metade da metade: 0,25".

- No 9º ano apareceram respostas como a do B19, mas também surgiram respostas utilizando frações como do B5 que colocou que a área *"é um quarto".*

Ao serem questionados quanto ao que eles concluíram com esta atividade, os alunos registraram em seu diário de campo escritos semelhantes aos que seguem:

5º Ano:

A12 - Que você pode achar a tabuada do 4 no perímetro.

A14 - Que os números seguem uma ordem.

A21 - Conclui que temos que determinar a área e o perímetro, posso fazer o lado vezes ele mesmo assim saberei o numero da área.

9º Ano:

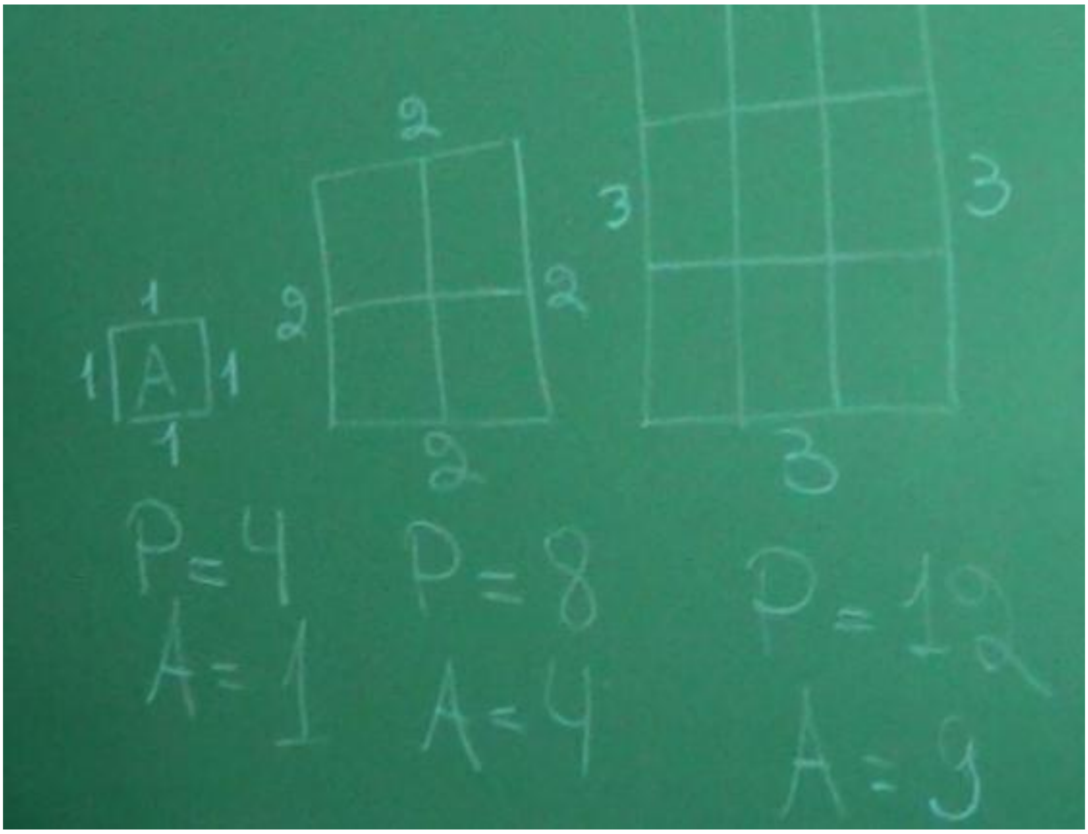
B2 - Aprendemos mais profundamente como se calcula área e perímetro.

B3 - Calcular perímetro e área, e aprendi também que perímetro e área são coisas muito diferentes, antes eu achava que era quase a mesma coisa.

Nestas falas percebi o quanto os alunos são sucintos ao escreverem suas considerações, expressando de forma direta, com parcimônia de palavras, suas conclusões. Em muitas ocasiões expressaram que, por meio desta atividade, conseguiram perceber a diferença entre área e perímetro, dando-se conta de que os dois conceitos são distintos e na atividade ao duplicarmos, triplicarmos... a medida do lado, tanto a área quanto o perímetro dão origem a uma generalização, a área e o perímetro não aumentam de forma igual.

Durante a discussão em grande grupo, também surgiram novas hipóteses, como no trecho que segue. Este foi extraído durante o questionamento se havia alguma outra conjectura possível ao observar os resultados dos valores dos perímetros e das áreas encontradas (Figura 6).

Figura 6 – Imagem do quadro com as representações dos quadrados, suas medidas, perímetro e área



Fonte: Da autora.

No 5º ano, ocorreu o seguinte diálogo[4]:

Professora: Observando os valores dos perímetros e das áreas há alguma outra conjectura que podemos observar?
Aluno: Sim, mais quatro!
Professora: Olha o que o colega falou pessoal. Mais quatro onde, na área ou no perímetro?
Aluno: No perímetro.
Professora: Quatro mais quatro?
Alunos: Oito!
Professora: Oito mais quatro?

[4] Utilizarei aluno(s) quando forem falas retiradas de diálogos, tendo em vista que não tenho como identificar todos os alunos.

> *Alunos: Doze!*
> *Professora: Doze mais quatro?*
> *Alunos: Dezesseis!*
> *Professora: E o que lembra isso quando eu estou somando o quatro?*
> *Aluno: A tabuada do quatro!*
> *Professora: Vocês também acharam a tabuada do quatro?*
> *Alunos: Sim!*
> *Professora: Por que será que é a tabuada do quatro que aparece e não a do três ou a do cinco?*
> *Aluno: Por que tem quatro lados!*
> *Professora: O que é que tem quatro lados?*
> *Aluno: O quadrado!*
> *Professora: Ah, e o perímetro não é somar os lados do quadrado? O quadrado tem quatro lados e por isso dá a tabuada do quatro! Muito bem.*

Nestas falas, notei que os alunos perceberam que os valores atribuídos ao perímetro seguiam uma sequência que aumentava de quatro em quatro. Isto se justifica pelo fato de que o quadrado é uma figura de quatro lados iguais. Depois destas conclusões, fiz um novo questionamento. Este foi quanto à área dos quadrados, perguntando se nesta também ocorria algo semelhante. Os alunos responderam:

> *Aluno: Ela multiplica por três!*
> *Professora: Por três? Uma vezes três não dá quatro! Um mais três dá quatro. Quatro mais três não dá nove.*
> *Aluno: Mais cinco!*
> *Professora: Como? Mais cinco aqui? E aqui vai ter que aumentar quanto?*
> *Aluno: Sete.*
> *Professora: Olha o que ele achou, do um para o quatro tem que aumentar três, do quatro para o nove tem que aumentar cinco, do nove para o dezesseis tem que aumentar sete. Que números são esses?*
> *Aluno: Ímpares!*
> *Professora: E qual seria o próximo então?*
> *Alunos: Nove!*
> *Professora: Muito bem. O próximo seria um quadradinho de cinco por cinco então a minha área seria vinte e cinco. Dezesseis mais nove dá vinte e cinco?*
> *Alunos: Sim!*
> *Professora: Isso ai esse é outro padrão. Está sempre aumentando números de que tipo?*
> *Alunos: Ímpares!*

Nesta discussão, os alunos observaram que o valor atribuído à área também aumenta seguindo uma determinada sequência, sendo que os números aumentavam sempre uma determinada quantidade e que esta sempre era ímpar.

No 9º ano os alunos também chegaram às mesmas conclusões que os do 5º ano, ou seja, de que o perímetro está aumentando de quatro em quatro e que este fato se deve ao quadrado ter quatro lados iguais. Ao serem questionados quanto ao que estava ocorrendo com a área, ocorreu o seguinte diálogo:

Professora: Como eu posso descobrir a área sem ficar contando de um em um.
Aluno: Elevando ao quadrado?
Professora: Elevando ao quadrado. Vou pegar o meu lado e elevar ao quadrado. O quadrado de um?
Alunos: Um.
Professora: O quadrado de dois?
Alunos: Quatro.
Professora: O quadrado de três?
Alunos: Nove.

Nestas falas percebi a noção de potência e a relação desta com a área de um quadrado. Além disso, os alunos do 9º ano também encontraram a relação de aumento de uma área para outra como sendo números ímpares em sequência.

Durante o desenvolvimento das atividades notei dificuldades em relação ao emprego da linguagem matemática. Isto pode ser notado no diálogo que segue, entre a professora e um aluno:

Professora: Qual é a metade de um?
Alunos: Dois.
Professora: Não, dois é o dobro.
Alunos: Quatro.
Professora: Não, quatro é o quádruplo.
Aluno: Três.
Professora: A metade de um dedo é quanto?
Aluno: Meio dedo.
Professora: Meio dedo, e a metade dessa medida do quadradinho vai ser o que?
Aluno: Meio quadrado.
Professora: Meio quadrado, muito bem.

Neste diálogo observei a falta de entendimento do aluno quanto ao significado do conceito de metade, sendo que o mesmo confundiu com dobro. Ao perceber o engano, o discente passa a fazer tentativas, só vindo a compreender ao se deparar com um exemplo por mim proposto.

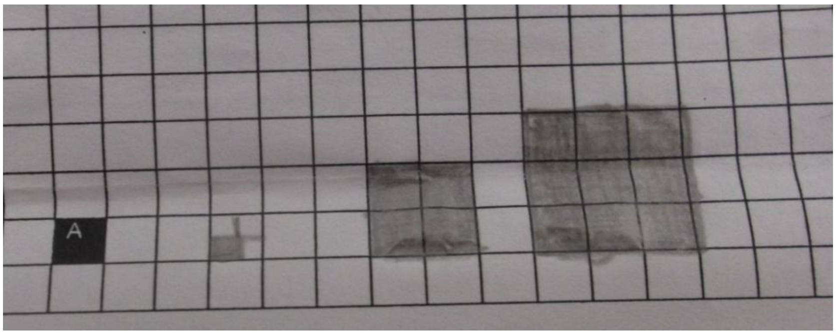
A seguir, no Quadro 8, algumas observações que realizei durante os encontros, a partir da fala dos alunos ao realizarem as atividades e dos diários dos mesmos:

Quadro 8 – Semelhanças x Diferenças entre 5º ano e 9º ano na segunda atividade

	5º ano	9º ano
Emprego da linguagem	Os alunos utilizaram palavras como “multiplicou” ou “vezes”, como coloca o aluno A19:*“a área não multiplicou, mas o perímetro sim”.* Tinham dificuldades de entendimento de palavras como metade, dobro...	Emprego de palavras como dobro, triplo... sem maiores dificuldades.
Representação numérica	Uso exclusivo de números decimais. Quando questionados porque do uso destes números, responderam que associavam ao dinheiro. O quadradinho inteiro era um real, a metade 0,50, era cinquenta centavos; e, 0,25, vinte e cinco centavos. Precisavam de 4 moedas de R$ 0,25 para fechar um real. E, ao dividirem o quadrado “A” na metade, ficaram com quatro partes.	Uso de números decimais e em alguns casos números fracionários. Este fato pode ter ocorrido provavelmente devido à relação com a divisão do quadrado “A” em quatro partes iguais. Depois pegarem apenas uma destas, para responder ao questionamento, como visualizado na figura 7.
Perímetro	Perceberam que o perímetro aumentava de quatro em quatro, representando a tabuada do quatro.	Colocaram que o perímetro aumentava de quatro em quatro e chegaram à generalização *4.l (quatro vezes a medida do lado).* (FIGURA 8)
Área	Perceberam que existia uma relação de uma área para a outra, sendo que elas aumentavam sempre em quantidades ímpares e seguindo uma sequência.	Além do aumento consecutivo de números ímpares, também perceberam que o valor da área era o valor da medida do lado elevado ao quadrado. Chegando à generalização l^2 (lado elevado ao quadrado). (FIGURA 8)

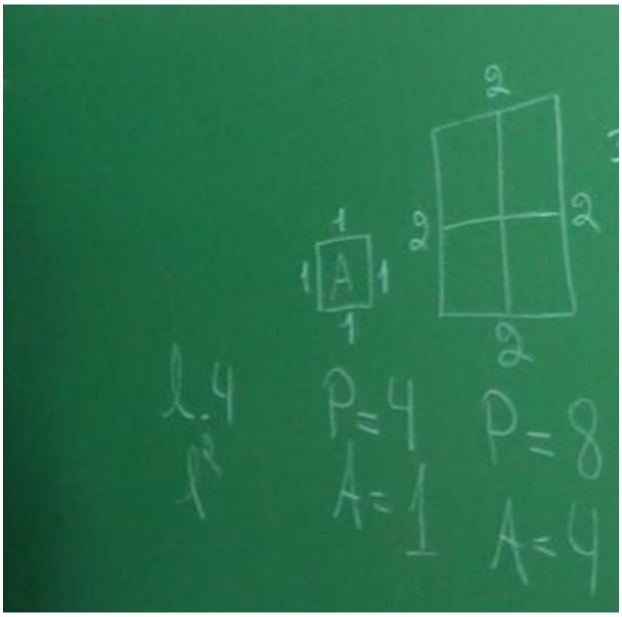
Fonte: Da autora.

Figura 7 – Quadrado repartido em quatro partes iguais, representação de ¼.



Fonte: Da autora.

Figura 8 – Generalizações que surgiram durante as discussões nas turmas de 9º ano



Fonte: Da autora.

Com esta atividade percebi a capacidade do 9º ano de generalizar e aplicar suas descobertas a outros problemas, não se limitando a determinada situação. E uma maior capacidade de explicar ao colega o que eles estavam visualizando, empregando palavras adequadas. Já o 5º ano, muitas vezes, apresentava dificuldades em se expressar com palavras, utilizando-se mais de exemplos concretos para fazê-lo.

4.3 Descrição dos dados emergentes da atividade 3

A terceira atividade tinha o intuito de realizar um estudo sobre a condição de existência dos triângulos, a soma de seus ângulos internos e o cálculo da área.

Estudando triângulos:

Corte os canudinhos de acordo com as medidas de cada item e, com auxílio de um fio, construa triângulos.

a) canudinhos medindo 8 cm, 9cm e 5cm.
b) canudinhos medindo 9 cm, 3cm e 7cm.
c) canudinhos medindo 15,4cm, 12,3cm e 9,1cm.
d) canudinhos medindo 2 cm, 5cm e 3cm.

e) canudinhos medindo 6 cm, 6 cm e 7 cm.
f) canudinhos medindo 4 cm, 4 cm e 4 cm.
g) canudinhos medindo 10 cm, 6 cm e 2 cm.
h) canudinhos medindo 10 cm, 6 cm e 4 cm.

1- Quando acontece a possibilidade de construir um triângulo? Quando não é possível?

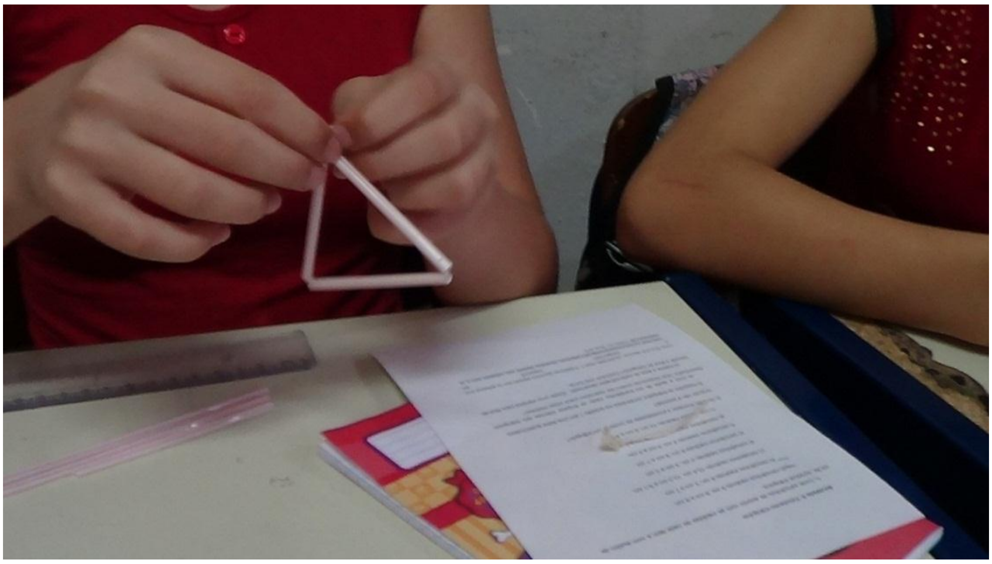
2- Com a ajuda de um transferidor, medir os ângulos internos dos triângulos. Que conjecturas pode-se fazer sobre estas medidas?

3- Trace o contorno dos triângulos construídos em uma folha milimetrada e estime sua área. Existe uma maneira mais fácil de calcular a área de triângulos? Tente descobrir um jeito.

Fonte: adaptada de Dullius e Quartieri (2010).

Primeiramente os alunos recortaram os canudos com as medidas solicitadas para, em seguida, utilizando um barbante, montarem os triângulos (FIGURA 9). Ao realizarem as atividades, a maioria dos alunos do 5º ano apresentou dificuldades para medir os canudinhos. Ao utilizarem a régua, começavam a medição a partir da marcação do 1cm ao invés de começar da marcação zero. Poucos alunos do 9º ano tiveram esta dificuldade.

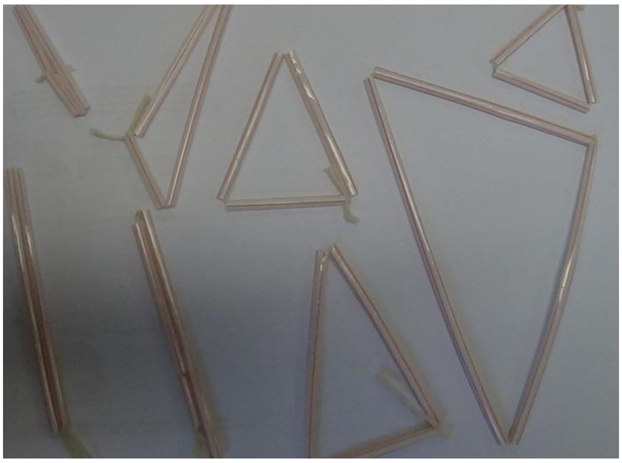
Figura 9 – Alunos montando os triângulos



Fonte: Da autora.

Ao conseguirem montar os triângulos com as medidas solicitadas (FIGURA 10) e concluírem esta etapa, passaram a responder aos questionamentos em seus diários de campo.

Figura 10 – Triângulos construídos com canudinhos pelos alunos



Fonte: Da autora.

Quando acontece a possibilidade de construir um triângulo? Quando não é possível?

Os alunos do 5º ano responderam que apenas o triângulo que possuía canudinhos medindo 4 cm, 4 cm e 4 cm era um triângulo, pois, segundo os mesmos, as medidas dos lados (arestas) eram quase iguais. Já os triângulos “a”, “b”, “c” e “e”, pareciam triângulos, mas não eram. O que se pode perceber é que os alunos consideraram triângulos apenas aqueles que têm medidas de lados iguais.

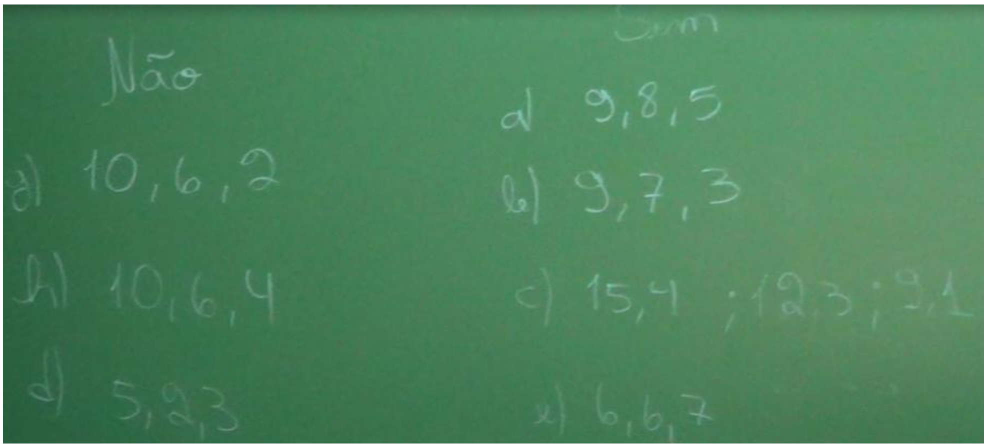
A9 escreveu que acontece a possibilidade de construir um triângulo *“quando as três partes são do mesmo tamanho”* e não é possível construir um triângulo *“quando as partes não são iguais”*. Alguns alunos ainda expressaram que o triângulo “e” poderia ser um triângulo, pois suas medidas são bem parecidas. A3 colocou que é um triângulo quando *“os lados têm mais ou menos o mesmo comprimento ou são iguais”.* Já as medidas das letras “h”, “g” e “d” não formaram triângulos, gerando dúvidas entre os alunos, que refizeram as medidas diversas vezes, pensando que as mesmas não estavam corretas.

Alunos do 9º ano também tiveram, inicialmente, esta percepção errônea sobre as medidas dos lados dos triângulos. Questionei-os então sobre o conceito de triângulo. Alguns responderam que um triângulo é uma figura com três lados, sendo assim as medidas dos lados indiferentes. Para estes alunos, com exceção das medidas das letras “h”, “g” e “d”, todas as demais formavam triângulos. Alguns alunos até os classificaram em triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Então os questionei quanto ao que havia de semelhante entre os triângulos que eles conseguiram construir. A seguir o diálogo que ocorreu após este questionamento, sendo que no quadro havia colocado as medidas que possibilitavam a construção de triângulos e aquelas que não permitiam (FIGURA 11).

> *Aluno: as medidas.*
> *Professora: mas aqui também tem medidas diferentes. [se referindo as medidas dos triângulos que deram certo]*
> *Aluno: só que elas são mais próximas.*
> *Professora: mas esse aqui também não é tão próximo assim. [referindo-se as medidas 9 cm, 7 cm e 3 cm]*
> *Aluno: será porque o número do meio é par?*
> *Aluno: sim ali o número do meio é par. [todos os que não deram certo tinham sido colocados no quadro com número par localizado no meio]*
> *Aluna: não é porque duas sempre tem a medida nos dois lados, a medida maior e a medida menor?*
> *Professora: como assim?*
> *Aluna: tem ali o nove e o oito que são parecidos e são maiores que cinco e daí eles tem os lados menores que o um e o um sempre tem a medida menor. [se referindo ao triângulo com medidas 9 cm, 8 cm e 5 cm]*
> *Professora: será que é por isso?*
> *Professora: vamos fazer todos esses que não deram certo.*
> *[...]*
> *Professora: dois, um, seis.[medida de canudos]*
> *Professora: monta um triângulo.*
> *Aluna: não, esse daí não dá.*
> *Professora: agora tira o de um e pega o de quatro.*
> *Aluna: ainda não, tinha que ser outro de seis.*
> *Professora: vai se aproximando e olha o que acontece.*
> *Aluna: Dá a mesma medida.*
> *Professora: E esse aqui? [se referindo as medidas dois, um e seis]*
> *Aluna: então os troço que dá a mesma medida não tem como, somando todos.*
> *Professora: mas esse aqui também não dá a mesma medida [se referindo as medidas dois, um e seis]. Mas o que acontece?*
> *Professora: o que aconteceu? Porque vocês acham? Qual a conclusão. Porque que não deu certo? A gente precisa dizer, que medidas irão dar certo e que medidas não darão certo? Por que essas ali não estão dando certo?*
> *Aluno: porque, que nem aí, seis mais quatro dá dez, né?*
> *Professora: esse aqui mais esse que dá esse resultado aqui.*
> *Aluno: aí não fecha porque são dois números iguais.*
> *Professora: e aqui?*
> *Aluno: ali também, dois mais dois dá menos que cinco.*
> *Professora: mas seis mais dois dá menos do que dez.*
> *Aluno: sim.*
> *Professora: por isso você acha que não fecha?*
> *Aluno: certo.*

Professora: nesses aqui não acontece isso? Se eu pegar as duas menores como ele está fazendo, vai me dar valor maior.

Figura 11 – Quadro com as medidas que formavam triângulos e que não formavam



Fonte: Da autora.

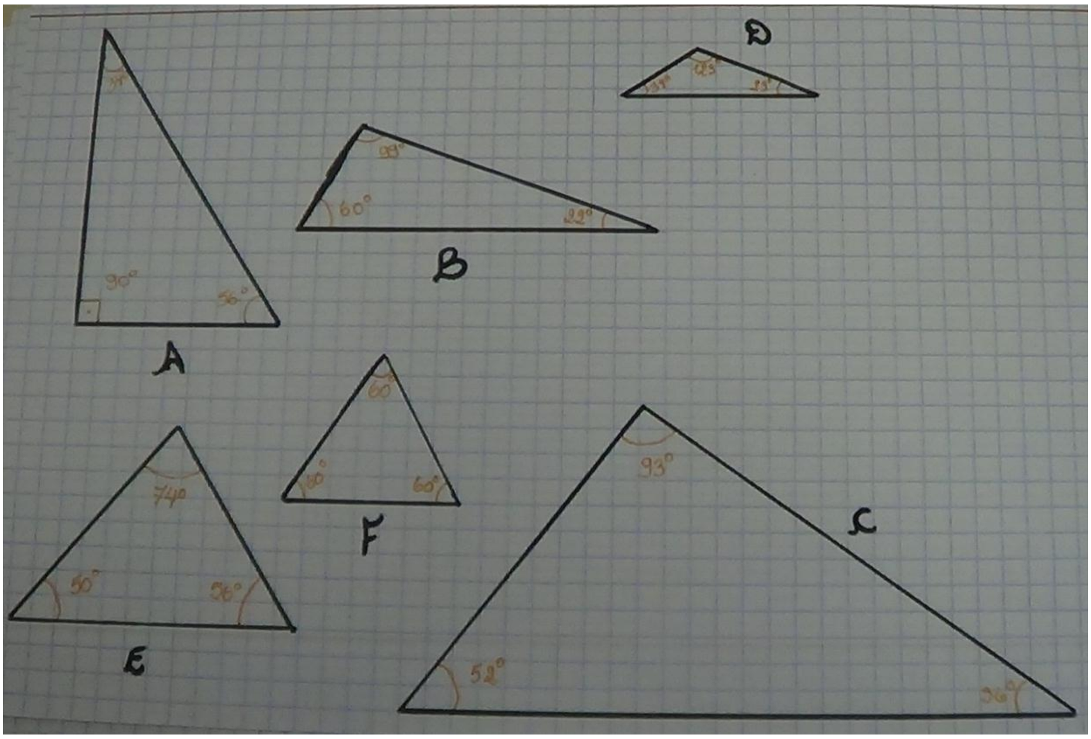
Neste diálogo percebi que foram necessários vários questionamentos para os alunos perceberem que havia uma relação com a soma dos lados menores e o tamanho do lado maior para que se formasse um triângulo.

Após este primeiro questionamento, os alunos passaram à segunda questão:

Com a ajuda de um transferidor, medir os ângulos internos dos triângulos. Que conjecturas podem fazer sobre estas medidas?

Para responderem a esta questão, os alunos foram orientados a desenhar os triângulos formados em uma folha quadriculada para tornar a tarefa mais fácil (FIGURA 12). Os alunos do 5º ano não sabiam usar o transferidor, por isso necessitaram de ajuda. Assim, as primeiras medidas foram realizadas com o meu auxílio. Ao entenderem como essas medidas eram realizadas com o transferidor, continuaram a fazer as medidas seguintes, sozinhos. Alguns alunos do 9º ano também tiveram dificuldades no momento de manusear o transferidor, necessitando de auxílio.

Figura 12 – Triângulos desenhados em papel quadriculado e com os ângulos medidos



Fonte: Da autora.

Realizadas as medidas dos ângulos internos, foi solicitado que os alunos procurassem alguma regularidade. Ao serem instigados nesse sentido, os alunos do 5º ano começaram a observar os números e a citar os triângulos que tinham ângulos semelhantes, apesar dos triângulos apresentarem tamanhos diferentes. Então concluíram que o tamanho do triângulo não interfere no tamanho do ângulo. A9 explicou que *“as medidas (dos ângulos) são parecidas e não importa o tamanho (do triângulo)”*.

Foi solicitado, também que somassem os ângulos de cada triângulo. A partir disso, foi feita uma lista com os resultados no quadro negro. Depois de todos os valores estarem expostos no quadro, solicitei que os mesmos observassem os números e escrevessem suas conclusões. A1 escreveu: *“somamos os ângulos e todos deram quase o mesmo resultado”.* Os valores apresentados no quadro se aproximavam do valor 180º, fazendo com que as conclusões fossem nesta direção.

Os alunos do 9º ano já conheciam o valor da soma dos ângulos internos dos triângulos, sendo que apenas alguns não se lembravam desta relação e necessitaram da ajuda dos colegas para escrever a definição. O grupo da aluna B14 escreveu *"que em todos os triângulos a soma dos ângulos dá 180º independente do seu tamanho".* Eles evidenciaram isso ao escrever uma das suas observações num dos triângulos que tinha um ângulo reto, *"em um triângulo reto, um lado tinha 90º e 34º, e para descobrir o ângulo que falta, diminui os dois ângulos (de 180º), achando o que faltava que era 56º".*

Em seguida, passaram a estimar a área dos triângulos construídos e tentaram descobrir se existia uma maneira mais fácil de calcular a área. Os estudantes do 5º ano basearam-se na primeira atividade. Assim, contaram os quadradinhos do interior da figura para descobrir a área, sendo que não sabiam outra maneira de chegar ao valor. Já os alunos do 9º ano, apesar de saberem as fórmulas para calcular a área dos triângulos e citarem as mesmas em seus diários, acabaram também contando os quadradinhos na folha quadriculada.

Após realizarem as atividades, em pequenos grupos, iniciei a discussão em grande grupo, onde todas as conjecturas foram expostas e justificadas. A seguir, as observações que realizei durante os encontros (QUADRO 9), a partir da fala dos alunos ao realizarem as atividades e dos diários dos mesmos:

Quadro 9 – Semelhanças x Diferenças entre 5º ano e 9º ano na terceira atividade

	5º ano	9º ano
Construção de triângulo	Apenas a figura que tinha todos os três lados iguais era considerada um triângulo; os outros só pareciam com triângulos.	Inicialmente disseram que apenas os que tinham os três lados iguais eram triângulos.
Possibilidade de formar triângulo	Achavam que apenas medidas iguais formavam triângulos.	Pensavam que quaisquer três medidas podiam formar triângulos.
Definição de triângulo	Não conheciam a definição de triângulo.	Sabiam que um triângulo era uma figura com três lados, o que os fez repensar suas respostas iniciais.
Uso de régua e transferidor	Tinham dificuldade para usar régua. Não sabiam utilizar o transferidor.	Sabiam usar a régua e apenas alguns alunos tinham dificuldades no manuseio do transferidor.

(Continua...)

(Continuação)

Soma dos ângulos internos	Logo perceberam que o tamanho do triângulo não interferia no valor dos ângulos. Com questionamentos acabaram chegando à soma dos ângulos internos num valor aproximado a 180 graus.	Já conheciam a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo e que a mesma resultava em 180 graus.
Área	Contaram os quadradinhos um por um, baseados nas atividades feitas anteriormente.	Apesar de conhecerem a fórmula da área dos triângulos e de a citarem em seus diários, acabaram contando os quadradinhos.

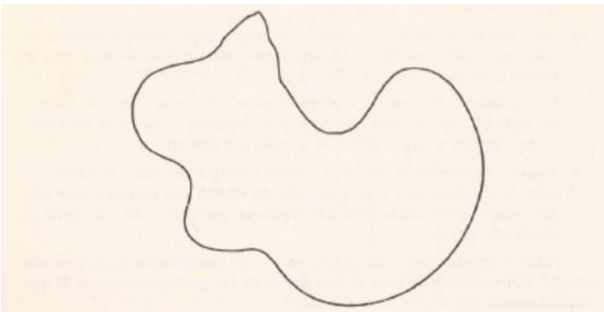
Fonte: Da autora.

Esta atividade é a que mais causou alvoroço e disparidade de opiniões entre os alunos, tendo em vista as discussões sobre por que algumas medidas formavam triângulos e outras não. Além de ter possibilitado perceber a dificuldade no manuseio da régua e do transferidor, tanto por parte dos alunos do 5º ano como pelos do 9º ano. Apesar das dificuldades, os alunos conseguiram compreender a condição de existência de um triângulo a partir da medida dos lados e se inteiraram, no caso do 5º ano, do postulado sobre a soma dos ângulos internos de um polígono de três lados.

4.4 Descrição dos dados emergentes da atividade 4

A quarta atividade proporcionou um problema aberto, que exigiu dos alunos criatividade para encontrar a área e o perímetro de uma figura disforme. O enunciado foi o seguinte:

Determine a área e o perímetro de um município cuja planta tem o formato da figura que segue e que foi obtida por meio de um levantamento topográfico.



Crie estratégias diferentes para determinar a área e o perímetro desta região.

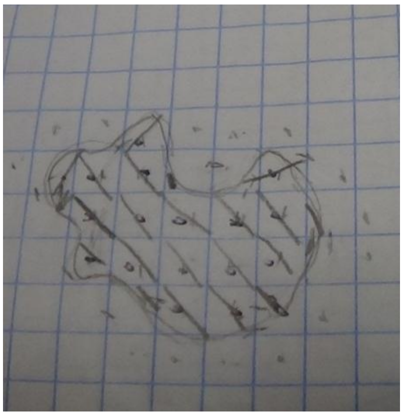
Fonte: adaptado de TROTTA; IMENES; JAKUBOVIC (1979).

A seguir, apresento dados em relação às estratégias utilizadas para o cálculo da área e, posteriormente, para o cálculo do perímetro.

Área

No 9º ano, primeiramente, os alunos ficaram confusos e não sabiam como começar a resolver o problema. Entretanto, alguns, baseando-se nas atividades anteriores, resolveram quadricular o desenho da planta do município, para poder descobrir a área do mesmo. A maioria dos alunos desenhou o quadriculado na própria atividade, mas alguns preferiram contornar o desenho em uma folha quadriculada, como mostra a Figura 13.

Figura 13 – Figura que foi contornada em uma folha quadriculada



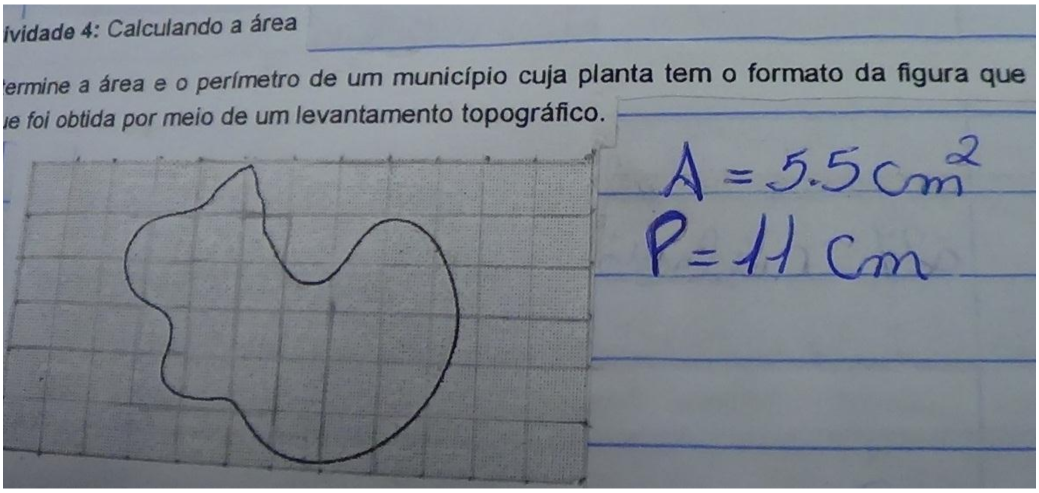
Fonte: Da autora.

Dois grupos tiveram o cuidado de, ao desenhar os quadradinhos, utilizarem medidas de 0,5 cm de lado, para descobrirem a área em centímetros quadrados (FIGURA 14). Isto pode ser percebido no escrito de uma aluna em seu diário:

> *Para calcular a área desenhei uma folha quadriculada sobre o desenho e após contei os quadradinhos de dentro, que deu 22 e depois dividi por 4 por que de 4 em 4 dá 1 centímetro quadrado, que deu 5,5 cm^2.*

Nesta passagem percebo que a aluna dividiu o número total de quadradinhos por 4, pois, como ela mesma explica, precisa-se de 4 quadradinhos de medidas 0,5 x 0,5 para termos um centímetro quadrado. A maioria apenas contou o número aproximado de quadradinhos e colocou a área como sendo este valor.

Figura 14 – Quadriculado de 0,5 x 0,5 cm desenhado sobre a figura



Fonte: Da autora.

Ainda teve um grupo com uma percepção errônea que mediu o perímetro com um barbante e depois, com a mesma medida de barbante, desenhou um retângulo numa folha quadriculada, pensando que, com uma mesma medida de perímetro, poderiam transformar em outra figura sem alterar a área, como um aluno do grupo descreve:

B17 - Pegamos o barbante e medimos o perímetro e depois cortamos o barbante na medida certa com 11,5 [centímetros] depois formamos um retângulo numa folha quadriculada e depois contamos os quadrados totalizando 18 quadrados.

Este grupo não se lembrou da Atividade 1 realizada, ou seja, que com um mesmo perímetro pode-se ter áreas diferentes. Na discussão final do grande grupo foram questionados quanto a isso e apenas neste momento relembraram deste detalhe.

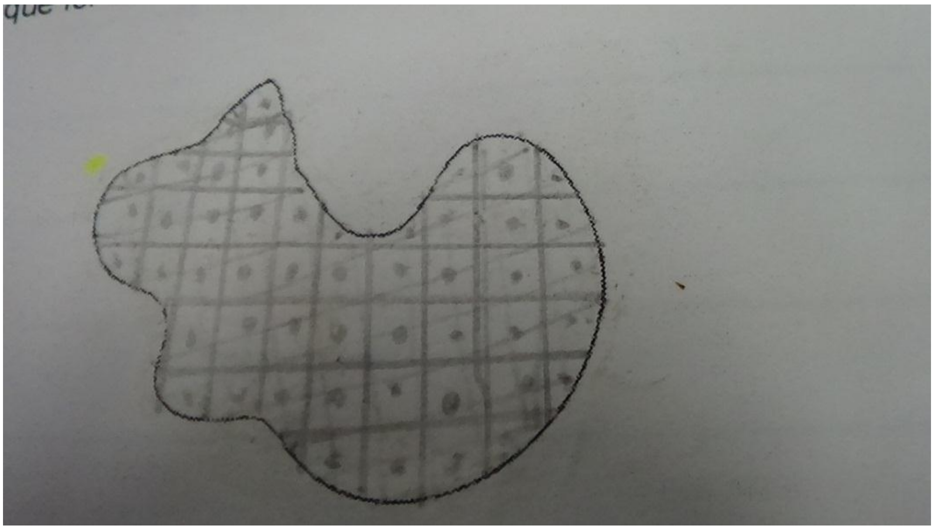
No 5º ano ocorreram situações semelhantes às do 9º ano. Alguns alunos transladaram a figura para uma folha quadriculada e contaram os quadradinhos; e outros desenharam quadradinhos na própria imagem dada no problema. Seguem algumas passagens escritas nos diários de dois alunos:

A4 – Nós deduzimos que se fossem feitos quadradinhos seria mais fácil para contar a área.
A9 – Nós pegamos os desenhos, botamos em baixo da folha quadriculada, desenhamos e contamos a área até ai tava fácil. Mais quando fomos contar o

perímetro foi horrível, demorei uma meia hora para contar, mas consegui.

O aluno 9 escreve que a área foi fácil de contar, mas que teve dificuldades com o perímetro, pois, como era uma figura irregular, diferente das figuras vistas na atividade 1, eles não conseguiam contar os quadradinhos do contorno. Já para descobrir a área era só contar os quadradinhos e ter o cuidado de juntar os quadradinhos incompletos com outros até formar mais ou menos um inteiro. Entre os que desenharam uma malha quadriculada sobre a figura, alguns alunos não tiveram o cuidado com o tamanho do quadrado desenhado, como mostrado na Figura 15, onde se percebe que alguns quadradinhos são maiores que os outros.

Figura 15 – Figura com quadradinhos disformes



Fonte: Da autora.

Este fato originou várias medidas diferentes dentro da turma. Assim, foi efetivada uma discussão em relação ao cuidado que se precisa ter ao fazer as medições, utilizando medidas padrões.

Cálculo do Perímetro

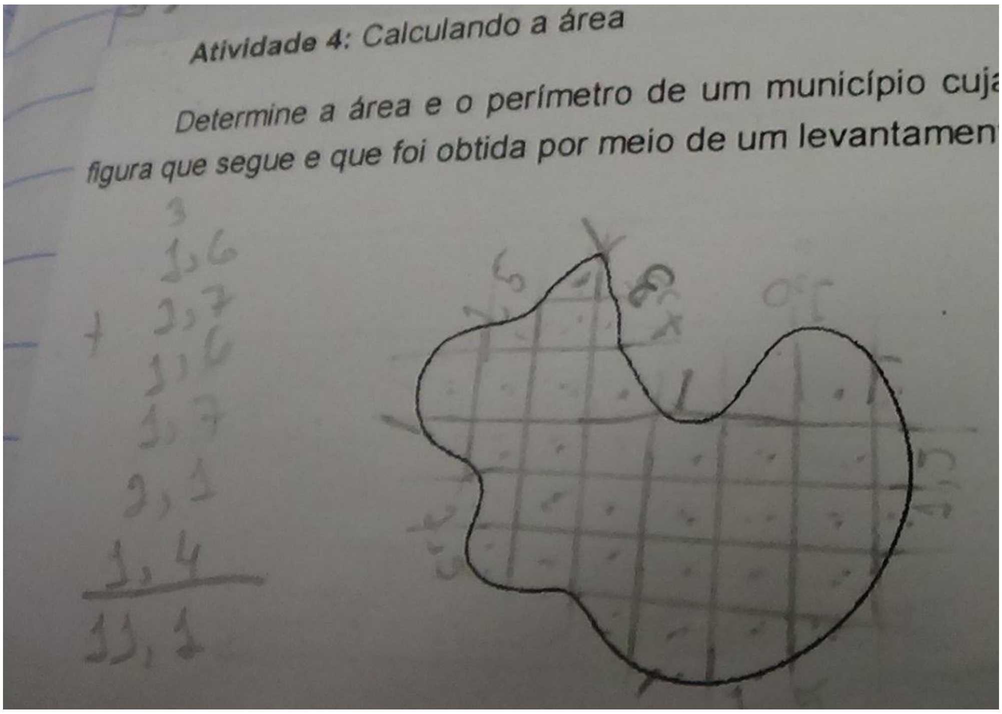
No 9º ano, a maioria dos grupos pegou um barbante, contornou a figura, marcando o final e cortando o fio. Após, mediram seu comprimento com uma régua, encontrando 11,5 cm. Mas alguns alunos utilizaram outras estratégias como:

B1 - Para calcular o perímetro contei os quadradinhos que havia do lado da planta do município que deu 11 quadrados, contamos de 2 em 2.

B12 – O perímetro nós calculamos cada milímetro que tinha em volta da figura.

O aluno 1 foi o mesmo que dividiu a figura em quadradinhos de 0,5 cm. Ele contou os quadradinhos do contorno de 2 em 2, pois assim tinha sempre um centímetro. Já o aluno 12 utilizou uma régua e mediu de pouquinho em pouquinho o contorno da figura. Depois somou as medidas encontradas, como visualizado na Figura 16.

Figura 16 – Figura cujo contorno foi medido com régua e somado



Fonte: Da autora.

No 5º ano, a maioria dos alunos logo percebeu que podia utilizar o barbante para transpor o contorno e depois medi-lo com uma régua. Mas, como no 9º ano, houve um aluno que preferiu medir de pouco em pouco com a régua e somar os valores para descobrir o perímetro. Novamente houve dificuldade no uso da régua, sendo que alguns poucos alunos ainda insistiam em começar a medir o barbante a partir da marcação do 1 cm na régua.

A seguir, no Quadro 10, observações realizadas durante esta atividade, a partir da fala dos alunos e dos diários dos mesmos:

Quadro 10 – Semelhanças x Diferenças entre 5º ano e 9º ano na quarta atividade

	5º ano	9º ano
Área	Quadricularam a figura e contaram os quadradinhos. Não houve, na maioria dos casos, um cuidado com o tamanho do quadriculado.	Quadricularam a figura e contaram os quadradinhos. Houve um cuidado com as medidas utilizadas.
Perímetro	A maioria utilizou um barbante para realizar a medição. Dificuldade no uso da régua.	A maioria utilizou um barbante para utilizar a medição. Um grupo de alunos tentou encontrar a área através da medida do perímetro.

Fonte: Da autora.

Esta atividade foi a mais aberta de todas e desafiou os alunos a encontrarem seus próprios métodos e estratégias para resolvê-la. Alguns alunos, inicialmente, ficaram confusos, não sabendo como começar e esperando mais instrução. Eles estavam tão acostumados a receberem ordens de como deveriam fazer e resolver os problemas, que demoraram um pouco para se ambientar em novos cenários. Apesar disso, os alunos atingiram o objetivo e encontraram maneiras diversas de descobrir a área e o perímetro da figura.

4.5 Descrição dos dados emergentes da atividade 5

A quinta e última atividade tinha o propósito de trabalhar com volume de cubos e percepção de espaço. Segue a atividade:

Cubos e cubinhos 1) Pense e responda: a) Ao construirmos um cubo de aresta “3 cubinhos”, quantos “cubinhos” serão necessários? b) Quantos “cubinhos” serão necessários para construir um cubo de aresta “4 cubinhos”? c) E de “5 cubinhos”? 2) Imagine agora que, depois de construído o cubo de aresta 3 com os cubinhos, decidiu-se pintá-lo exteriormente de vermelho. a) Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada? b) E com duas faces pintadas? c) E com três faces pintadas? d) E com nenhuma? 3) Investigue o que aconteceria se pintássemos um cubo de aresta “4 cubinhos”. a) Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada? b) E com duas faces pintadas? c) E com três faces pintadas?

d) E com nenhuma?
4) E se pintássemos um cubo de aresta 5?
a) Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada?
b) E com duas faces pintadas?
c) E com três faces pintadas?
d) E com nenhuma?
5) Escreva que conclusões podem ser tiradas destas atividades. Para facilitar o trabalho, organize numa tabela as suas descobertas sobre o número de cubinhos com 0, 1, 2, 3,... faces pintadas num cubo de 3x3x3, 4x4x4, 5x5x5, 6x6x6. Observe a tabela e escreva algumas conclusões gerais.

Fonte: adaptado de http://pt.scribd.com/doc/97764348/lista-de-questoes-para-estudos-para-2a-avaliacao

Em relação à primeira parte deste enunciado:

1) Pense e responda:
a) Ao construirmos um cubo de aresta "3 cubinhos", quantos "cubinhos" serão necessários?
b) Quantos "cubinhos" serão necessários para construir um cubo de aresta "4 cubinhos"?
c) E de "5 cubinhos"?

Neste primeiro questionamento observei algumas dificuldades iniciais dos alunos do 5º ano. Estes não sabiam a definição de cubo, nem o que era aresta. Então, expliquei mostrando com o material dourado que um cubo é um sólido geométrico cujos lados têm sempre as mesmas medidas. Utilizei, como exemplo, o cubo formado por mil cubinhos do referido material. Também expliquei que a aresta era a junção de duas faces. Notei que alguns alunos ainda associavam o cubo com o quadrado, trocando, por vezes, a nomenclatura. Para auxiliá-los na interpretação e resolução dos questionamentos, disponibilizei os cubinhos do material dourado que foram usados para montar os cubos solicitados pela atividade.

Para saber o total de cubinhos, e responder a questão 1, a maioria dos alunos desmontou os cubos formados e contou de um em um. Outros, já pensaram que, se na primeira camada havia 9 cubinhos e tendo três camadas, eles podiam calcular 9 + 9+ 9 e chegar ao total de 27 cubinhos e assim por diante.

No 9º ano houve dúvidas com relação ao que era aresta, sendo que precisei relembrá-los sobre este conceito, pois os mesmos já haviam visto esta palavra em outros anos de escolaridade. Para estas turmas também disponibilizei o material dourado para quem quisesse utilizá-lo. Não houve dificuldades na hora de montar os cubos com as arestas solicitadas e, para responder ao primeiro questionamento, eles multiplicaram 3x3 para calcular a base e novamente vezes 3 que era o valor da altura, encontrando assim o total. Este processo os alunos repetiram com os cubos de quatro e cinco cubinhos de aresta. Nenhum grupo desmontou os cubos para contar a quantidade de cubinhos que os compunha.

Em relação à segunda parte da atividade:

2) Imagine agora que, depois de construído o cubo de aresta 3 com os cubinhos, decidiu-se pintá-lo exteriormente de vermelho.
a) Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada?
b) E com duas faces pintadas?
c) E com três faces pintadas?
d) E com nenhuma?

Inicialmente os alunos do 5º ano tiveram dificuldades de entender o que a atividade estava propondo e precisaram de explicações e exemplos para conseguir responder a esta questão. Alguns alunos tiveram uma boa percepção na hora de contar, fazendo associações do tipo: se tem um cubinho com uma face pintada na face superior, também haverá um do lado de baixo; ou, se tem um cubinho em cada lado com uma face pintada e tendo seis lados, então haverá seis cubinhos com uma face pintada ao todo.

Os alunos também apresentaram dificuldade para imaginar o cubo "por dentro", para poderem responder quantos cubinhos ficaram com nenhuma face pintada. Assim, como eles haviam construído os cubos, questionei-os porque não desmontavam as primeiras camadas para poderem visualizar por dentro.

No 9º ano também houve dificuldades de entender a proposta, mas no sentido de saber quais eram os cubinhos que ficavam apenas com uma face pintada, com duas, três e nenhuma. Assim que superaram esta dificuldade, começaram a responder a questão. A maioria dos alunos observava apenas um dos lados e depois multiplicava por 6 (número de lados do cubo). Um grupo percebeu que, subtraindo o número de cubinhos pintados do total de cubos, encontravam o número de cubinhos que ficavam com nenhuma face pintada.

Em relação à terceira parte da atividade:

3) Investigue o que aconteceria se pintássemos um cubo de aresta "4 cubinhos".

a) Quantos cubinhos ficariam com uma única face pintada?
b) E com duas faces pintadas?
c) E com três faces pintadas?
d) E com nenhuma?
4) E se pintássemos um cubo de aresta 5?
a) Quantos cubinhos ficariam com uma única face pintada?

b) E com duas faces pintadas?
c) E com três faces pintadas?
d) E com nenhuma?

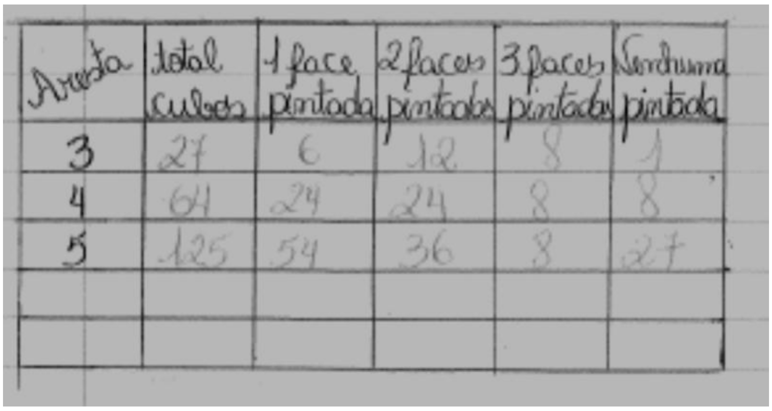
Após responderem as questões1 e 2, os alunos do 5º ano não tiveram problemas para responder as demais. Houve um grupo de quatro alunos que surpreendeu ao responder os questionamentos em relação ao cubo de aresta 5 cubinhos sem ao menos construí-lo. Eles se limitaram a desenhar a base do cubo e, a partir disso, conseguiram pensar nos valores, tendo como base o que tinha sido feito com os cubos de aresta 3 e 4. O 9º ano não teve dificuldades para responder aos questionamentos.

Em relação à última parte da atividade:

5) Escreva que conclusões podem ser tiradas destas atividades. Para facilitar o trabalho organize numa tabela as suas descobertas sobre o número de cubinhos com 0, 1, 2, 3,... faces pintadas num cubo de 3x3x3, 4x4x4, 5x5x5, 6x6x6. Observe a tabela e escreva algumas conclusões gerais.

Para construir a tabela, os alunos de ambos os níveis de escolaridade precisaram de ajuda na organização da mesma. Na Figura 17, visualiza-se a tabela construída em um diário de campo de uma aluna do 9º ano, com as respostas dos questionamentos.

Figura 17 – Tabela construída por uma aluna do 9º ano



Aresta	total cubos	1 face pintada	2 faces pintadas	3 faces pintadas	Nenhuma pintada
3	27	6	12	8	1
4	64	24	24	8	8
5	125	54	36	8	27

Fonte: Da autora.

E quanto às conclusões gerais houve apenas algumas observações que foram escritas nos diários de campo. Tais como:

B2 – Percebi que a terceira face [três faces pintadas] todas deram 8 cubinhos. Na segunda face [duas faces pintadas] os números aumentam de 12 em 12.

B6 – o total tem de fazer 3x3x3 todos são elevados ao cubo.

A7 – todos os que têm três faces pintadas tem 8 [total] por que sempre vai ter 4 em cima e em baixo. [se refere aos vértices do cubo]

Durante as discussões finais, estas conclusões apareceram por parte dos alunos. Com a tabela posta no quadro, os alunos acabaram percebendo novas conclusões referentes aos resultados encontrados em cada questionamento. Estas novas conclusões foram debatidas oralmente. Em uma das turmas do 9º ano, após completar a tabela no quadro, questionei-os quanto ao que podiam perceber olhando para a tabela. Seguiu-se o seguinte diálogo:

Aluno - Na terceira face os três são oito.
Professora – Aqui sempre é oito, ok.
Aluno - E na segunda é de 12 em 12.
Professora – De doze em doze?
Aluno – 12, 24, 36.
Professora – 12, 12 mais 12 é 24. E 24 mais 12 é 36. Beleza e o que mais? E nos outros?
[Silêncio]
Professora – Como vocês acharam o 27? Vocês contaram de um em um?
Aluno – Sim
Professora – De um em um cubinho? Todo mundo contou, desmontou ele e contou de um em um cubinho? Ou será que eu posso fazer diferente para achar o 27, para achar o 64, para achar o 125?
Aluno – Faz vezes.
Professora – Vezes o que?
Aluno – Lado vezes lado.
Aluno – A quantia de cubinhos vezes as filas.
Professora – A quantia de cubinhos de uma camada vezes a quantia de fileiras?
Aluno – Sim.
Professora - Quanto tinha em cima?
Aluno – Nove
Professora - Nove?
Aluno – Três assim e três assim. Era três por três.
Professora - Tinha três por três, então eu posso botar assim, três vezes três que dá o teu nove e quantas pilhas eu tinha?
Aluno – Três.
Professora - Então vezes três. Isso dá 27?
Aluno – Sim.
Professora - E para achar o 64?
Aluno – Quatro vezes....
Aluno – Quatro vezes oito dá...
Aluno – Quatro vezes oito é trinta e dois.
Aluno – Dá para fazer a mesma coisa que fez lá no 27 só que por 4 vezes 4 vezes 4.
Professora – Quatro vezes quatro, vezes quatro, dá 64?
Aluno – Eu acho.
Aluno – Dá.

Professora – Quatro vezes quatro, dá...?
Aluno – 16
Professora – 16 vezes quatro?
Aluno – 64
Professora – 64.
Aluno – E no cinco é a mesma coisa.
Professora – E no cinco é a mesma coisa? Cinco vezes cinco.
Aluno – 25
Professora – 25 vezes cinco?
Aluno – 125
Professora – Isso não é uma regularidade?
Aluno – É.
Professora – Por exemplo, se eu quiser o cubo de sete, quantos cubinhos eu iria precisar?
Aluno – 7 vezes 7 vezes 7.
Professora - 7 vezes 7 vezes 7. Que dá quanto?
Aluno – 49 vezes 7... 343 cubinhos.
[...]
Professora – Como é que eu posso calcular o volume de um cubo, sem precisar ficar contando os cubinhos no total?
Aluno – Lado vezes lado, vezes lado.
Professora – Lado vezes lado, vezes lado. E como os lados são sempre iguais, por que é um cubo, o que é 3x3x3 em forma de potência?
Aluno – 3 na terceira.
Professora – Três ao cubo. E aqui é 4 ao...
Alunos - cubo.
Professora – E aqui é?
Alunos – Cinco ao cubo.

Até este momento os alunos haviam conseguido perceber que, para descobrir o total de cubinhos, apenas precisavam multiplicar as três dimensões do cubo. E como as três dimensões são iguais, questionei-os qual era a relação que se podia fazer com potência. Eles relacionaram com a terceira potência. Em todas as turmas houve colocações semelhantes. A única diferença foi a ideia sobre potência que só chegou a ocorrer nas turmas de 9º ano, o que era previsível, tendo em vista que o 5º ano ainda não tinha visto este conteúdo.

Outro diálogo que ocorreu também na turma de 9º ano referiu-se aos questionamentos sobre os resultados com apenas uma face pintada. :

Professora – Muito bom. E agora como é que eu ia descobrir com uma face pintada? Será que existe uma regra? A gente viu que dá para fazer uma conta aqui [referindo-se ao total], aqui também dá para fazer uma conta [referindo-se a coluna das duas faces pintadas], aqui é sempre a mesma coisa. Será que não existe uma regra aqui também e no último?
Aluno – Vai aumentando...

Aluno – Seis, seis vezes quatro é 24.
Professora – Seis vezes quatro é 24.
Aluno – Aí é 24 vezes 6 de novo.
Professora – 24 vezes 6 da 64?
Aluno – Não.
Aluno – 24 vezes 4.
Professora – 24 vezes 4, dá 64?
Aluno – Não. Dá 96.
Professora – Quando vocês contaram os cubinhos com uma face pintada, vocês contavam no meio de cada lado? Quantas faces tem um cubo?
Aluno – 6.
Professora – Tem a ver com o número de faces do cubo [referente aos resultados do número de cubinhos que ficaram com uma face pintada].
Aluno – 6 vezes 4 dá 24, seis vezes 1...
Aluno – Vai aumentando, tipo tem seis, daí faz seis vezes 4, que daí da 24. Aí depois, faz seis vezes 9, que dá 54.
Professora – Aqui tu acha que é seis vezes quatro, aqui é seis vezes nove. E aqui?
Aluno – Ali é seis vezes um, né.

Nesta fala notei que os alunos perceberam que, com uma face pintada, os resultados dependiam de uma multiplicação por seis. Sendo as multiplicações:

1 X 6 = 6

4 X 6 = 24

9 X 6 = 54

16 X 6 = 96

No 5º ano os alunos chegaram também a achar a relação com a tabuada do 6. Mas foi só no 9º ano que um aluno percebeu que os números que multiplicavam pelo seis aumentavam numa sequência de números ímpares. Como podemos perceber em sua fala:

Aluno – Do um ao quatro é três, do quatro ao nove é cinco... vai subindo números ímpares. Do nove ao dezesseis foi sete.
Ao que outro aluno numerou completando:
Aluno – Três, cinco, sete...

A partir desta fala instiguei os alunos a descobrirem se havia alguma regra para os resultados da quantidade de cubinhos com nenhuma face pintada. Este questionamento gerou muitas discussões, tanto no 5º ano quanto no 9º ano. Alguns alunos tentaram somar valores, outros multiplicavam valores que davam os resultados da tabela. A seguir, algumas considerações de uma turma do 9º ano:

Aluno – Eles estão aumentando, ímpar, par, ímpar, par...
Aluno – Tá aumentando número impar.
Professora – Pensem um pouquinho. O que tem dentro com nenhum cubinho pintado não tem o formato de um cubo? Pensem que no meio também forma um cubinho. Eu posso formar que cubo com 8 cubinhos?
Aluno – 2 por 2 por 2.
Professora – E com 27, se eu tiver um cubo com 27 cubinhos de quanto vai ser os lados?
Alunos – 3 vezes 3 vezes 3.
Professora – E agora se eu tiver 64 cubinhos?
Alunos – 4 vezes 4 vezes 4.
Professora – O que está acontecendo? Quanto vai ser o próximo?
Alunos - 5 vezes 5 vezes 5. 125.

Neste diálogo observei que os alunos do 9º ano chegaram à multiplicação dos lados do cubo e à regra para encontrar os próximos valores. Na Figura 18, imagem do quadro com algumas colocações que foram sendo realizadas durante as discussões.

Figura 18 – Quadro com colocações referentes às discussões da atividade 5

Fonte: Da autora.

Em todas as quatro turmas em que foi realizada esta atividade, os alunos chegaram às mesmas conclusões, com exceção do conteúdo de potência que não foi mencionado nas turmas de 5º ano. Mas, os alunos do 5º ano chegaram à conclusão da multiplicação de fatores iguais para encontrar o volume de um cubo. No Quadro 11, algumas observações realizadas durante os encontros, a partir da fala dos alunos ao realizarem as atividades e dos diários dos mesmos:

Quadro 11 – Semelhanças x Diferenças entre 5º ano e 9º ano na quinta atividade

	5º ano	9º ano
Potência	Não conheciam este conceito.	Com incentivo chegaram a citar este conceito para representar o volume do cubo.
Definições de cubo e aresta	Não tinham conhecimento referente à definição de cubo e aresta.	Sabiam o que era um cubo, mas não lembravam a definição de aresta.
Total de cubinhos	Contaram de um em um para descobrir o total.	Usaram a multiplicação para descobrir o total de cubinhos.

Fonte: Da autora.

Esta atividade foi a mais trabalhosa para os alunos, por ser a mais extensa e por suscitar mais conjecturas a serem descobertas pelos alunos. Os discentes do 5º ano tiveram mais dificuldades em organizar os dados e precisaram de ajuda para encontrar os padrões. Já os do 9º ano, apesar de terem uma maior organização com os dados, também tiveram dificuldades e necessitaram ser instigados para descobrir generalizações.

Apesar disso, posso inferir que a atividade contribuiu para um estudo mais efetivo do cubo e possibilitou a construção da percepção de espaço dos alunos. Ademais, instigou os discentes a encontrarem estratégias para responder a todos os questionamentos utilizando ideias já conhecidas sobre o assunto.

Na próxima seção farei apontamentos sobre as principais percepções e conclusões advindas do desenvolvimento das cinco atividades, em ambas as turmas.

4.6 Apontamentos e percepções

Nesta seção apresento categorias oriundas da análise do material coletado ao longo da pesquisa. Tais categorias abrangem os principais pontos observados no 5º e 9º anos durante a intervenção pedagógica desenvolvida.

4.6.1 Concepções sobre triângulos

Durante a realização das atividades houve diversos momentos em que se trabalhou com triângulos, especialmente durante a atividade 3 em que os alunos receberam diversas medidas e com o auxílio de canudinhos e barbante precisavam montar triângulos. No primeiro questionamento que se referia a possibilidade de formar um triângulo com as medidas dadas observou-se um fator que chamou a atenção. Muitos alunos colocaram que, para ser um triângulo, dever-se-ia ter três lados iguais, sendo que as demais figuras apenas pareciam triângulos.

Um aluno do 5º ano escreveu em seu diário que só é um triângulo "*quando as três partes são do mesmo tamanho".* Esta fala não foi apenas dos alunos do 5º ano, chegando a perpassar os dizeres de alguns alunos do 9º ano. Um grupo do 9º ano escreveu que só é possível formar triângulos "*quando existe três lados com medidas aproximadas e não é possível quando as medidas são distintas".* Esta ideia conceitual equivocada é comum no ensino de geometria, segundo Gravina (1996, p. 3):

> Na formação da imagem mental, o desenho associado ao objeto geométrico desempenha papel fundamental. Para o aluno nem sempre é de todo claro que o desenho é apenas uma instância física de representação do objeto. Se por um lado o desenho é um suporte concreto de expressão e entendimento do objeto geométrico - o que fica transparente na nossa atitude frente a um problema: a primeira coisa que fazemos é desenhar a situação, quer numa folha de papel ou quer na tela de um computador - por outro lado, pode ser um obstáculo a este entendimento. E isto porque guarda características particulares que não pertencem ao conjunto das condições geométricas que definem o objeto. É interessante observar que, dependendo do estágio de desenvolvimento mental, os alunos trabalham meticulosamente buscando a "perfeição" do desenho, como se este fosse "o objeto geométrico", deixando as propriedades abstratas, que dão existência ao objeto, em segundo plano.

Ao observar a fala dos alunos, de que o triângulo precisa ter lados semelhantes, questionei-me sobre qual seria a fonte deste conceito errôneo. Silva (2012, p. 3), ao analisar os livros didáticos de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, com o objetivo de identificar qual o tratamento dado às representações de triângulos, aponta que:

> Em relação aos desenhos de triângulos, temos observado na revisão de literatura que prevalecem alguns valores e variáveis, e que isso poderia constituir uma dificuldade para a identificação de triângulos e de suas propriedades. Mais do que quantidade estamos investigando a qualidade das representações de triângulos, pois assumimos que a representação tem papel fundamental na aprendizagem dos conceitos geométricos, em especial nos anos iniciais, quando os alunos ainda estão iniciando processo de formalização do seu conhecimento.

Segundo a autora, predominam “os desenhos tidos como protótipos, isto é, com as características usualmente apresentadas nas representações de triângulos (Ibidem, 2011, p. 9)”. Será este um dos fatores que contribui para o conceito pré-adquirido pelos alunos?

Seguindo esta atividade os alunos tiveram a necessidade de utilizar o transferidor para medir os ângulos internos dos triângulos e escrever conjecturas a cerca destas. Os alunos do 5º ano surpreenderam ao citar, como uma de suas conclusões, que o tamanho dos ângulos internos dos triângulos não se relacionava com o tamanho do triângulo. Essa conclusão surgiu a partir da observação de que havia ângulos com medidas semelhantes, em triângulos de tamanhos diferentes. Um aluno escreveu em seu diário que “*as medidas são parecidas e não importa o tamanho”* se referindo as medidas dos ângulos e ao tamanho dos triângulos.

> O estudo da geometria exige pensar e fazer. Enquanto os alunos classificam, criam, desenham, modelam, traçam, medem e constroem, a sua capacidade de visualização das relações geométricas desenvolvem-se. Assim, estão a aprender a raciocinar e a formular, testar e justificar conjecturas. Para haver sucesso nas explorações geométricas é necessário haver uma multiplicidade de ferramentas, tais como papel, réguas, transferidores, compasso e geoplanos [...] (TEIXEIRA, 2011, p. 11).

Corroboro com a autora quando explicita que os alunos desenvolvem a capacidade de visualização ao manipular, de diferentes maneiras, as figuras geométricas. Neste contexto, o estudo da geometria não pode estar desvinculado do fazer, construir e testar hipóteses, pois é construindo e testando os conceitos que os alunos podem se apropriar significativamente dos mesmos.

4.6.2 Confusão entre área e perímetro por parte dos alunos

Houve durante o desenvolvimento das atividades algumas dificuldades com relação à concepção de área e perímetro. Tal evento chamou minha atenção e, ao estudar um pouco mais a questão, cheguei a diversos estudos – Bellemain e Bittar (2002), Ferreira (2010) – que abordam as concepções dos alunos e dificuldades dos mesmos com relação ao conceito de área e perímetro.

Bellemain e Bittar (2002, p. 2) perceberam, por meio de um levantamento de avaliações de desempenho dos alunos e de resultados de pesquisas anteriores sobre o tema, que as dificuldades conceituais apresentadas pelos alunos eram variadas e resistentes à aprendizagem, tais como a tendência de resolver os problemas apenas observando o ponto de vista numérico ou geométrico. Ferreira (2010) alude a pesquisas francesas de Doaudy e Perrin-Glorian e Baltar que observam que alguns alunos desenvolvem duas concepções associadas ao conceito de área: uma geométrica e outra numérica.

> Quando a área está sempre representada por um número, o aluno mobiliza uma concepção numérica e considera apenas os aspectos relacionados aos cálculos. Os alunos “criam” fórmulas para determinar a área ou o perímetro de uma figura ou, ao expressar a medida de uma área ou de um perímetro, consideram apenas o número ou associam a uma unidade inadequada (FERREIRA, 2010, p. 16).

Segundo essa autora, várias pesquisas apontam entraves relacionados ao aprendizado de grandezas geométricas como, por exemplo, a confusão entre área e perímetro. Neste sentido, pontua que muito se tem pesquisado e sugerido para superar as dificuldades por parte dos alunos e, para Ferreira (2010), talvez trabalhar de forma concreta e visual otimize esse trabalho.

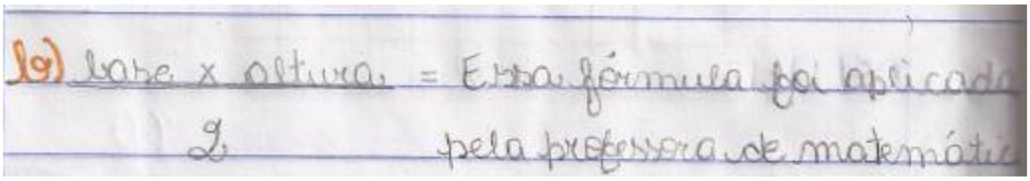
Durante a realização das atividades 1, 2, 3 e 4 trabalhou-se com a ideia de perímetro e área de diferentes figuras geométricas, sendo que em alguns momentos apareceram ideias errôneas com relação a estes conceitos. Muitos alunos se confundiam, alguns achavam que era a mesma coisa ou que um dependia do outro, mantendo uma relação estreita e aumentando/diminuindo na mesma proporção.

Um fato que chamou a atenção foi na atividade 4, em que para tentar descobrir a área de uma figura disforme um grupo de alunos do 9º ano colocou em seu diário: “*Pegamos o barbante e medimos o perímetro e depois cortamos o barbante na medida certa com 11,5 depois formamos um retângulo numa folha quadriculada e depois contamos os quadrados totalizando 18 quadrados”*. Nesta fala pode-se perceber que o aluno associava o tamanho do perímetro com o tamanho da área, ou seja, com um determinado perímetro poderia ser formado diferentes figuras, com uma mesma área.

Já no 5º ano os alunos não tiveram o cuidado de desenhar a malha quadriculada sobre o desenho para descobrir a área, alguns desenhos eram bem disformes. Para eles qualquer quadrado deveria servir. Este fato pode ser justificado, pois os mesmos não conheciam ainda o conceito de área, tendo contato com este termo apenas durante o desenvolvimento destas atividades.

Outro fator observado foi o desuso de fórmulas por parte dos alunos do 9º ano, que mesmo citando-as em seus diários, conforme mostra a Figura 19, não a utilizaram para calcular a área dos triângulos na atividade 3.

Figura 19 – Fórmula para calcular área de triângulos



Fonte: Da autora.

Assim, pode-se perceber que os alunos preferem utilizar maneiras diferentes para encontrar a resposta, não necessariamente utilizando as fórmulas prontas. Criam estratégias próprias que lhes permitem maior visualização do problema e um maior entendimento dos conceitos.

4.6.3 Uso de material manipulável

Abrantes (1999) afirma que o uso da intuição e da visualização, bem como da manipulação de materiais, propicia a realização de descobertas, em particular no ensino da geometria. Essas atividades podem ser desenvolvidas, sem, necessariamente, utilizarem de pré-requisitos e “evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver exercícios-tipo (ABRANTES, 1999, p.156)”.

Todas as atividades aqui apresentadas foram pensadas a partir do uso de algum material concreto e manipulável, tendo em vista a disparidade das turmas em níveis de ensino. As atividades 1, 2, 3 sugeriam o uso do papel quadriculado para facilitar a visualização da área das figuras geométricas. E, na atividade 4, o uso do papel quadriculado partiu dos próprios alunos. Um aluno colocou em seu diário de campo “*nós pegamos os desenhos, botamos em baixo da folha quadriculada, desenhamos e contamos a área...”.*

Na atividade 3 foram utilizados canudinhos e barbantes para verificar quais medidas formavam triângulos. Isto facilitou a visualização dos alunos no sentido que percebessem que não são três medidas quaisquer que formam triângulos, mas que havia uma relação entre estas. Eles puderam visualizar isso ao tentar construir triângulos com as medidas: 2 cm x 5cm x 3cm, 10 cm x 6 cm x 2 cm e 10 cm x 6 cm x 4 cm, que aparecem na Figura 20, sendo que os mesmos não fecharam triângulos, pois os dois lados menores juntos eram de igual tamanho ou menores que a medida do lado maior.

Figura 20 – Medidas que não fecharam triângulos

Fonte: Da autora.

Durante a atividade 5, o uso de material dourado possibilitou um maior entendimento do problema e facilitou a visualização do mesmo, auxiliando na interpretação das questões e na generalização. Ao construírem os cubos com o auxílio dos cubinhos conseguiram visualizar a quantidade de cubinhos que compunha os cubos maiores. Para isso muitos acabaram desmontando os sólidos e contando um a um, como aparece na Figura 21. E para responder aos demais questionamentos desta atividade eles acabaram utilizando-se do material concreto.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 83), expressam sobre “a importância de estudar conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo”, sem, obrigatoriamente, sempre ligá-los a fórmulas e à memorização das mesmas. Desta forma, acredito que os alunos entenderam o elo entre a geometria e situações da vida real, criando seus próprios modelos e maneiras de resolver determinado problema.

Figura 21 – Aluno montando o cubo com auxílio do material dourado

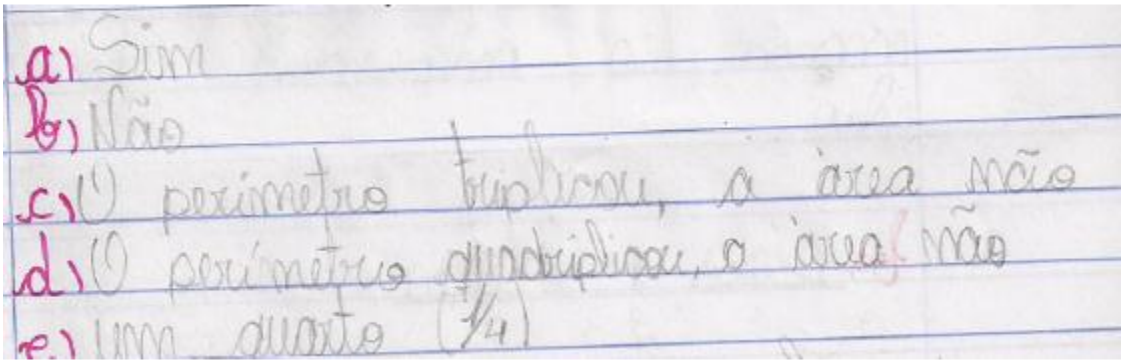
Fonte: Da autora.

No decorrer deste trabalho notei a dificuldade no manuseio da régua e do transferidor, tanto por parte dos alunos do 5º ano, como pelos alunos do 9º ano. Os alunos do 5º ano ao usarem a régua começavam as medições a partir do um, em vez do zero e não conheciam o transferidor. Já os do 9º ano sabiam utilizar a régua, mas tinham dificuldades de posicionar o transferidor de forma correta. Isto ficou evidenciado nos comentários dos alunos que diziam que pouco usava esses instrumentos. Os PCNs (BRASIL, 1998, p. 68-69) pontuam que um aspecto que merece atenção é “o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes”. Portanto, é importante proporcionar atividades que necessitam do uso da régua, compasso, transferidor, bem como outros instrumentos de medida.

4.6.4 Escrever em matemática

Um dos maiores desafios encontrados pelos alunos no decorrer da resolução das atividades desenvolvidas foi escrever suas conjecturas e conclusões. Eles expressavam suas ideias oralmente, mas, no momento de colocá-las no papel, de forma escrita, apenas apareciam alguns dizeres de forma sintética, sem maiores explicações e com o uso de linguagem coloquial, como pode-se perceber na Figura 22. Nesta figura observam-se as poucas palavras escritas da aluna e como ela se limitou a responder aos questionamentos que estavam sendo feitos de maneira direta, sem apresentar nem mesmo uma resposta completa que fizesse referência ao enunciado. Já na Figura 23 observa-se as respostas de um aluno para a atividade 1. Este aluno respondeu as perguntas diretamente na folha da questão e nem utilizou o diário. Este fato se repetiu em muitos outros casos, sendo que tive que conversar com os discentes para que respondessem aos questionamentos em seus diários e tentassem escrever mais do que apenas uma ou duas palavras.

Figura 22 – Resposta de uma aluna do 9º ano para a atividade 2



Fonte: Da autora.

Segundo Altrichteret et al (apud FREITAS, 2006, p. 44), é difícil colocar nossas ideias no papel mesmo quando essas sejam coerentes na fala e no pensamento. Para eles

> Existem lacunas em nossos argumentos e achamos que alguns conceitos são muito vagos, quando novas conexões e implicações surgem na mente. Essas dificuldades aparecem pelo fato que a escrita não é apenas sobre a comunicação de um resultado definitivo de uma análise, mas é propriamente uma forma de análise. Ela é a continuação de um processo de análise sobre uma restrição mais estreita, porque nossos pensamentos interiores têm que receber aparência e forma.

Entretanto, este foi o primeiro contato que os alunos tiveram com este tipo de atividade e, pelo que foi observado, não era comum para os discentes escrever nas aulas de Matemática. Assim, no decorrer dos encontros procurei incentivar os alunos para que escrevessem cada vez mais e com maior rigor matemático. A dificuldade com a escrita permaneceu até o fim, mas, apesar desta, procurei motivá-los a escreverem e reescreverem suas conjecturas e conclusões, pois acredito que a escrita também é uma parte importante das aulas de Matemática e auxilia o aluno a rever sua aprendizagem.

Figura 23 – Respostas de um aluno para a atividade 1

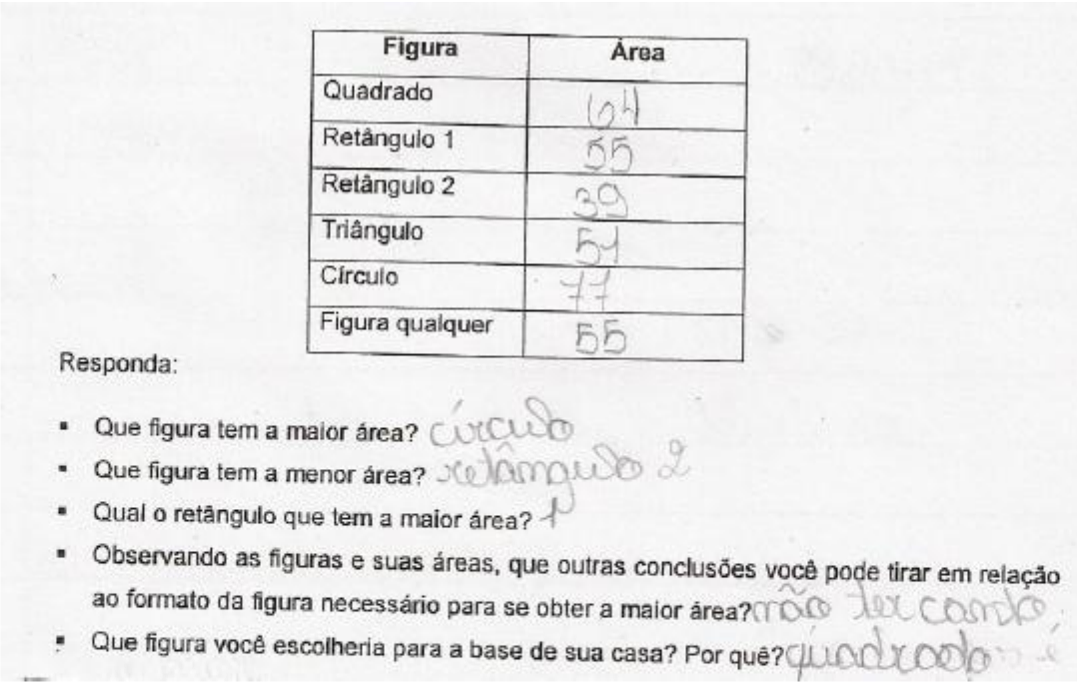


Figura	Área
Quadrado	64
Retângulo 1	55
Retângulo 2	39
Triângulo	54
Círculo	77
Figura qualquer	55

Responda:

- Que figura tem a maior área? círculo
- Que figura tem a menor área? retângulo 2
- Qual o retângulo que tem a maior área? 1
- Observando as figuras e suas áreas, que outras conclusões você pode tirar em relação ao formato da figura necessário para se obter a maior área? não ter canto,
- Que figura você escolheria para a base de sua casa? Por quê? quadrado

Fonte: Da autora.

Além da dificuldade com a escrita em alguns momentos, durante a realização das atividades, os alunos apresentaram dificuldades para entender e utilizar alguns termos matemáticos. Entre as situações mais visíveis percebi a confusão com os termos dobro, triplo, quadruplicar... Observei que, às vezes, os alunos não tinham certeza absoluta do significado desses termos e acabavam me questionando quanto ao significado dos mesmos ou então fazendo errado e tendo que corrigir depois. Autores como Viali e Silva (2007, p. 4) defendem que o professor precisa

> levar o aluno a desenvolver a linguagem matemática de forma que ela se torne tão natural quanto a linguagem cotidiana. Para tanto precisa perceber que o contexto em que atua necessita ser modificado, pois a Matemática tal qual qualquer outro conhecimento sofre a influência do meio onde está inserido e da época em que está sendo trabalhada e apresentada.

Esses autores acrescentam que introduzir a linguagem simbólica é algo recente e é preciso empenho para a sua compreensão. Segundo eles, “é ponto prioritário desenvolver capacidades e habilidades para lidar com a linguagem dessa disciplina (2007, p. 6)”.

No próximo capítulo apresento considerações finais a respeito desta pesquisa de mestrado, tentando responder ao questionamento inicial e trazendo colocações em relação aos objetivos propostos e alcançados. Além disso, faço referência sobre o que modificou e/ou acresceu esta pesquisa em minha própria prática como professora de matemática da Educação Básica.

CONSIDERAÇÕES SOBRE A PESQUISA

O presente trabalho procurou problematizar como os alunos de 5º e 9º anos do Ensino Fundamental, de duas escolas públicas da Educação Básica da região do Vale do Taquari, operam com atividades de investigação matemática envolvendo geometria e quais as diferenças/semelhanças nas conjecturas apresentadas entre as distintas turmas. Neste contexto, percebi que os alunos, de ambas as turmas, tiveram dificuldades iniciais em lidar com essa metodologia, principalmente com as atividades mais abertas e que exigiam a criação de estratégias.

As atividades oriundas da metodologia investigação matemática proporcionaram momentos de autonomia aos alunos no que diz respeito a sua formação discente. Os mesmos recebiam o mínimo de instruções da professora e eram constantemente questionados para irem além das suas percepções iniciais, não se contentando apenas com a resposta mais simples. Esta prática, com certeza, foi a mais difícil para mim enquanto docente, pois estava acostumada com aulas em que planejava alguma atividade e instruía os alunos ao longo do processo, sabendo exatamente aonde ela ia levar e que objetivos alcançaria. Mas a Investigação Matemática, sendo uma metodologia mais aberta, possibilita aos discentes maior liberdade para seguirem seus próprios caminhos a fim de encontrarem soluções para as situações propostas.

Passo agora a retomar meus objetivos específicos e a sistematizar os principais pontos encontrados a partir da análise do material de pesquisa.

a) Averiguar que regras matemáticas são utilizadas pelos alunos, em *diferentes graus de escolaridade, quando criam e justificam conjecturas acerca de atividades envolvendo geometria.*

Percebi que existem algumas noções de conceitos e fórmulas que foram mais predominantes no 9º ano do que no 5º ano, tais como fórmulas da área e perímetro de figuras geométricas. Apesar de os alunos do 9º ano relutarem em utilizar fórmulas, eles demonstravam sabê-las. Eles também pensavam em estratégias ou fórmulas para tentar resolver as questões, tais como para calcular a área de quadrados e retângulos, e o volume dos cubos. Os alunos do 5º ano limitavam-se a contar quadradinhos e cubinhos, sendo que poucos alunos tentavam alguma estratégia diferente.

Em algumas atividades houve confusão entre as noções de perímetro e área de figuras geométricas planas. Alguns alunos confundiam esses conceitos, trocando-os. Além disso, percebeu-se ideias errôneas com relação à definição de triângulos, mais fortemente no 5º ano, em que eles diziam que apenas figuras com três lados semelhantes caracterizavam-se como triângulos.

b) Disponibilizar para duas turmas de alunos atividades em consonância com a metodologia investigação matemática.

Pretendi trabalhar com atividades oriundas da metodologia de investigação matemática pensando em possibilitar aos alunos uma maneira diferente de aprender. Nesse sentido, meu objetivo era levar algo novo para a sala de aula com o intuito de proporcionar com que os alunos se sentissem mais motivados.

A metodologia Investigação Matemática corrobora com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997, p. 51), uma vez que neles consta que a Matemática deve desenvolver no educando a capacidade de “[...] comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre conjecturas”. Neste sentido, ao final percebi que os alunos ficaram motivados ao desenvolverem as atividades, principalmente depois da estranheza inicial causada pelo fato de as atividades serem diferentes das que conheciam.

A realização de atividades investigativas pode possibilitar o desenvolvimento do espírito investigativo do aluno e, consequentemente, de sua aprendizagem em relação à matemática. Em ambientes de investigação, o aluno tem a oportunidade de levantar estratégias, estabelecer relações e tomar decisões através de resultados obtidos, estabelecendo relações e significando relações matemáticas. Utilizar a metodologia de investigação matemática, na prática pedagógica, pode ser um potencial, pois disponibiliza ambiente de interação e troca, favorecendo maior interesse e entusiasmo aos alunos pela atividade matemática.

Como professora, procurei me desafiar a tentar desenvolver atividades novas que exigissem uma postura diferente da habitual em sala de aula, além de problematizar e disseminar uma metodologia que é pouco difundida na região. Acredito que cada vez mais os professores precisam desenvolver, em suas aulas, metodologias diferenciadas para que seus alunos se sintam motivados a aprender. Percebi que a investigação matemática é uma metodologia promissora para essa função, visto que estimula os estudantes a investigarem, inquirirem, testarem e justificarem suas respostas. E, como pontua Redling e Junior (2011, p. 138), as atividades investigativas constituem-se em uma experiência fundamental para os discentes, sendo “um poderoso meio de aprendizagem”.

c) Estimular nos alunos a cultura da escrita em matemática.

Uma semelhança entre as duas turmas envolveu a escrita, ou a falta dela, pois em ambas as turmas os alunos pouco escreviam sobre suas conjecturas e resultados alcançados, limitando-se ao mínimo possível para expressar uma resposta. Apesar disso, observei que esta metodologia possibilitou estimular nos alunos a cultura da escrita em matemática, um fator pouco convencional e ao qual os alunos não estão acostumados. Enfim, escrever nas aulas de matemática foi um desafio para os alunos que, muitas vezes, não conseguiam expressar, através da escrita, suas ideias e pensamentos. Este aspecto foi, sem dúvida, meu maior desafio enquanto docente e pesquisadora, o qual penso que ainda deixou a desejar.

d) Proporcionar momentos de trabalho em grupo, promovendo a socialização de aprendizagens.

Outra semelhança entre as turmas foi o bom andamento do trabalho em grupos, sendo que em ambas as turmas os alunos cooperavam com os demais colegas e se ajudavam mutuamente. Percebi, durante os encontros, que o fato das atividades serem em grupos, os estimulou na realização das atividades e na elaboração de novas ideias e estratégias para a resolução dos problemas, promovendo a socialização de aprendizagens. Segundo relatos dos estudantes, as atividades investigativas foram mais produtivas, justamente por serem realizadas em pequenos grupos, visto que, assim, tinham a oportunidade de debater e pôr à prova suas conjecturas.

Segundo Brulheira e Fonseca (1995, p. 17), “Ao analisar várias situações, ao construir estratégias e ao descobrir soluções, o aluno poderá melhorar a capacidade de resolver problemas quer na matemática, quer na vida real.” Estes autores também salientam o trabalho em grupo ao colocarem que

> As atividades de investigação constituem uma boa oportunidade para os alunos **trabalharem em grupo**. Deste modo, mais facilmente se conjugam ideias e se ultrapassam dificuldades. O grupo aumenta também a confiança em enfrentar novos problemas e promove a discussão entre alunos (BRULHEIRA; FONSECA, 1995, p. 17, grifo do autor).

O trabalho em grupo ocorreu de forma eficaz, sendo que os alunos colaboraram uns com os outros, auxiliando aqueles que apresentavam maiores dificuldades. Saliento que este foi um dos pontos positivos encontrados, em ambos os anos de escolaridade em que as atividades foram desenvolvidas. Ficaram evidentes algumas explicações que os alunos faziam para seus colegas de grupo, tentando exemplificar suas conjecturas de forma que entendessem e concordassem ou não com as mesmas.

Após discorrer sobre os objetivos de minha pesquisa, passo a relatar um pouco sobre minha percepção quanto ao ser pesquisadora e desenvolver este trabalho com os alunos.

Como pesquisadora, participante do Observatório da Educação, esta pesquisa abriu novos horizontes e me fez enxergar o potencial de novas metodologias. Ademais, proporcionou verificar a diversidade de práticas que podem ser desenvolvidas em sala de aula, promovendo assim a motivação do aluno para a realização de atividades e o seu aprendizado.

Esta pesquisa movimentou as escolas e os professores que fazem parte do seu corpo docente, o que considero um ponto positivo encontrado. A partir do momento em que surgem novas propostas e que estas são compartilhadas com os colegas professores, observa-se o interesse destes em conhecer diferentes formas de trabalhar em sala de aula.

Em síntese, acredito que houve uma mudança significativa em mim, enquanto professora. Espero continuar pesquisando e desenvolvendo novas práticas e pesquisas em minha própria sala de aula, procurando encontrar o equilíbrio entre as diferentes tendências e metodologias e fazer sempre o meu melhor. Afinal, como disse Alexandre, o Grande, “nada é impossível para aquele que persiste”.

E respondendo a questão principal de pesquisa “como os alunos de 5º ano e 9º ano do Ensino Fundamental, de duas escolas públicas da Educação Básica da região do Vale do Taquari, operam com atividades de investigação matemática envolvendo geometria e quais as diferenças/semelhanças nas conjecturas apresentadas entre as distintas turmas” posso expor que os alunos gostaram bastante das atividades de investigação. Através de atividades simples eles conseguiram trabalhar e desenvolver conteúdos de geometria de forma fácil e manipulável. Apesar das pequenas diferenças observadas entre o 5º e 9º anos não podemos dizer que estas foram prejudiciais ao desenvolvimento do trabalho. Tanto o 5º ano quanto o 9º ano conseguiram realizar as atividades propostas e encontraram nestas um desafio a ser superado. Ambas as turmas foram verdadeiros investigadores matemáticos.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Investigações em geometria na sala de aula. In: ______ et al. (Org.) **Investigações matemáticas na aula e no currículo.** Lisboa: APM, 1999. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos_arquivos/p_153-167.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2013.

ABREU, M. G. S. **Uma investigação sobre a prática pedagógica:** refletindo sobre a investigação nas aulas de matemática. 2008. 193f. Dissertação (Mestrado) –Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2008. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=132469>. Acesso em: 25 jul. 2013.

BALKE, M. E. **Investigação Matemática: Tratamento da Informação no Ensino Fundamental.** 2011. 132f. Dissertação (Mestrado) - Pós-Graduação em Educação, Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2011. Disponível em: <www.ppgedu.upf.br/index>. Acesso em: 25 jul. 2013.

BELLEMAIN, P. M. B.; BITTAR, M. O ensino da geometria e a teoria do campos conceituais. In:25ª reunião anual da ANPEd, 2002, Caxambu-MG. **Anais...** Caxambu- MG, 2002. Disponível em: <http://www.cefetes.br/gwadocpub/Pos-Graduacao/Especializa%C3%A7%C3%A3o%20em%20educa%C3%A7%C3%A3o%20EJA/Publica%C3%A7%C3%B5es/anped2002/bellemainminicurso19.pdf > Acesso em: 18 fev. 2015.

BERTINI, L. F. **Compartilhando conhecimentos no ensino de matemática nas séries iniciais: uma professora no contexto de tarefas investigativas**. 2009. 135f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009. Disponível em: <http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=2249> Acesso em: 25 jul. 2013.

______;PASSOS, C. L. B. Uso da investigação matemática no processo de ensino e aprendizagem nas séries iniciais do ensino fundamental. In: XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2008, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro, 2008. p. 1-17.

BOAVIDA, A. M. R.**A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor.** Setúbal, 2005. Disponível em: <http://fordis.ese.ips.pt/docs/siem/texto57.doc>. Acesso em: 05 jan. 2015.

BRASIL, Secretaria de educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

______. Ministério da Educação. **PDE**: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008. p. 200.

BRUM, M. G. N. **Atividades investigativas para o ensino de matemática para alunos de 5ª série do Ensino Fundamental.** 2012. 127f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física e de Matemática Instituição de Ensino: Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, 2012. Disponível em :<http://sites.unifra.br/Portals/13/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2012/dissertacao%20-%20maria%20gorete.pdf> Acesso em: 03 nov. 2014.

BRUNHEIRA, L.; FONSECA, H. Investigar na aula de Matemática. **Educação e Matemática,** Lisboa, n. 35, p. 16-18, 1995.

BUEHRING, R. S. **Análise de dados no início da escolaridade: uma realização de ensino por meio de registros de representação semiótica.** 2006. 134 p. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, RS, 2006.

CALHAU, M. E. S. **Investigação em sala de aula:** uma proposta de atividades em salas de aula do ensino fundamental.2007. 120f. Dissertação (Mestrado profissional) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/CALHAU_mari_emilia_santos.html> Acesso em: 25 jul. 2013.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2009.

DULLIUS, M. M.; QUARTIERI, M. T. **Trabalhando geometria espacial com os softwares Poly e Wingeometric.** 2010. Disponível em: <http://www.univates.br/ppgece/media/pdf/Trabalhando_Geometria_espacial_com_softwares_poly_e_wingeometric.pdf> Acesso em: 28 jul 2013.

ERNEST, P. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (org**.). Investigar para aprender matemática: Textos selecionados.** Lisboa: Projecto Matemática para todos e Associação de Professores de Matemática, 1996. P. 25-47

FERREIRA, L. F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental:** estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2010. 191f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010. Disponível em: < http://repositorio.ufpe.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/3972/arquivo206_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acesso em: 18 fev. 2015.

FONSECA, H.; ABRANTES, P. **Investigações em Geometria Realizadas pelos Alunos**, 1999. Disponível em:

<http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto5.PDF>. Acesso em: 04 ago. 2014.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários á prática educativa. 24. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

FREITAS, M. T. M. **A escrita no processo de formação contínua do professor de matemática.** 2006. 299 f. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 23 fev. 2006.

GRANDO, R. C.; NACARATO, A. M.; GONÇALVES, L. M. G. **Compartilhando saberes em Geometria:** investigando e aprendendo com nossos alunos. Caderno Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 39-56, jan/abr. 2008. Disponível em: <http://www.cedes.unicamp.br>. Acesso em: 25 de jul. 2013.

GOLDENBERG, E. P. Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In p. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, L. Brulheira (Eds.), **Investigações matemáticas na aula e no currículo.** Lisboa: APM e Projecto MPT.1999. pp. 35-49.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 6., 1996, Belo Horizonte, **Anais eletrônicos...** Belo Horizonte, nov. 1996, p.1-13.

KNIJNIK, G.; BASSO, M. V.; KLÜSENER, R. **Aprendendo e ensinando matemática com o Geoplano.** UNIJUÍ, 1996.

LUDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

LOPES, C. A. E. **O ensino da estatística no ensino fundamental: uma análise curricular.** 1998. 127 p. Dissertação (mestrado) Programa de Pós-Graduação em Educação - Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, Campinas 1998.

MORAIS, R. **Análise de conteúdo**. Revista Educação, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de pesquisa em ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

PALHARES, P. **Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico.** Lisboa: LIDEL, 2004.

PAVANELLO, R. M. **Por que ensinar/aprender Geometria?** Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004.

PENTEADO, M. G.; SKOVSMOSE, O. Riscos trazem possibilidades. In: SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica.** Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo e Jornei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008. (Coleção perspectivas em educação matemática).

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

______. **Investigar, ensinar e aprender.** Actas do ProfMat 2003 (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM, 2003b.

______. Gestão curricular em Matemática. In: **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: GTI/APM, 2005. P. 11-34.

REDLING, J. P.; JUNIOR, J. L. **Trilhas pedagógicas**. v. 1, n. 1, p. 122-139, 2011.

REGINALDO, B. K. S. **Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática.**2012 185 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação) Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, Minas Gerais. 2012. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/handle/1843/BUOS-8ZLPQB> Acesso em: 03 nov. 2014.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica.** Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo e Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008.

SMOLE, K. S. Textos em matemática: por que não? In: SMOLE, K.S., DINIZ, M.I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.** Porto Alegre: ARTMED, 2001. p. 29-68.

TEIXEIRA, C. A. B. C. **Resolução de Problemas em Contexto Geométrico.** 2011. 160 p. Relatório da Prática de Ensino Supervisionada (Mestrado) - Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade de Lisboa. Lisboa, 2011. Disponível em:<http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/5189/1/ulfpie039751_tm.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2014.

TRINDADE, Â. F. P. **Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas - Que fronteiras?**. 2008. 174f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2008. Disponível em: <http://www.ppge.ufpr.br/teses/M08_trindade.PDF>. Acesso em: 25 jul. 2013.

TROTTA, F.; IMENES, L. M. P.; JAKUBOVIC, J. **Matemática aplicada**. São Paulo: Ed. Moderna, 1979.

VIALI, L.; SILVA, M. M. A linguagem matemática como dificuldade para alunos do ensino médio. In: IX ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), 2007, Belo Horizonte. **Anais...** 2007, Belo Horizonte.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: Planejamento e Métodos. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZASLAVSK, C. **Pessoas que vivem em casas redondas.** Arithmeticteacher, 1989.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Os integrantes do grupo de Pesquisa de Observatório de Educação intitulado "Estratégias metodológicas visando à inovação e reorganização curricular no campo da Educação Matemática no Ensino Fundamental", do Centro Universitário Univates, investigam o uso de atividades de investigação matemática com alunos e o uso da mesma como metodologia no ensino de Matemática. Dentro deste projeto encontra-se a pesquisa de mestrado intitulada "Abordando geometria por meio da investigação matemática: um comparativo entre o 5º e 9º anos do ensino fundamental" que desenvolve cinco atividades, uma por encontro, sendo que cada encontro será gravado em vídeo, visando obter informações a respeito dessa temática na perspectiva dos integrantes. E cada aluno receberá um caderno para ser utilizado como diário de campo, onde as atividades serão realizadas e as dúvidas explicitadas.

O conteúdo dos diários de campo, as fotos e as gravações somente serão utilizados pela pesquisadora e ficarão sob guarda da mesma, dando-se garantia de manutenção do caráter confidencial e anônimo das informações que, juntamente com os resultados, estarão sempre sob sigilo ético, não sendo mencionados os nomes dos participantes em nenhuma apresentação oral ou trabalho escrito que venha a ser publicado. Além disso, a participação não representará nenhum custo para os sujeitos envolvidos.

A autorização para seu dependente participar da pesquisa dá garantia de receber, a qualquer momento, resposta a toda pergunta ou esclarecimento de qualquer dúvida acerca da pesquisa e de seus procedimentos; liberdade de retirar o consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo, sem que isso traga qualquer prejuízo ao participante.

Pelo presente Termo de Consentimento, o responsável pelo participante da pesquisa declara que foi esclarecido, de forma clara e detalhada, livre de qualquer forma de constrangimento ou coerção, dos objetivos, da justificativa e dos procedimentos a que seu dependente será submetido e autoriza a participação por meio deste questionário.

A pesquisadora responsável é a professora Fernanda Eloisa Schmitt, bolsista do Centro Universitário Univates de Lajeado, RS, orientada pela professora Dra. Marli Teresinha Quartieri que poderá ser contatada pelo e-mail mtquartieri@univates.br ou pelo telefone (51) 3714-7000 ramal 5517.

APÊNDICE B – Atividades de Investigação Matemática a serem desenvolvidas com os alunos do 5º e 9º anos.

Atividade 1: Investigando área e perímetro

Um pedreiro quer construir uma casa e tem material suficiente para construir as paredes do contorno da casa. Descubra qual deverá ser o formato da casa para que a mesma tenha a maior área possível.

Material necessário: barbante, papel quadriculado.

Procedimento: corte um pedaço de barbante com 32 unidades de comprimento. Com a ajuda do barbante, desenhe no papel quadriculado:

- 1 quadrado

- 2 retângulos com formatos diferentes

- 1 círculo

- 1 triângulo

- 1 figura diferente das anteriores

Calcule a área de cada figura construída, contando o número de quadradinhos inseridos em cada figura. O número de quadradinhos de cada figura equivale ao valor da área. Complete a tabela:

Figura	**Área**
Quadrado	
Retângulo 1	
Retângulo 2	
Triângulo	
Círculo	
Figura qualquer	

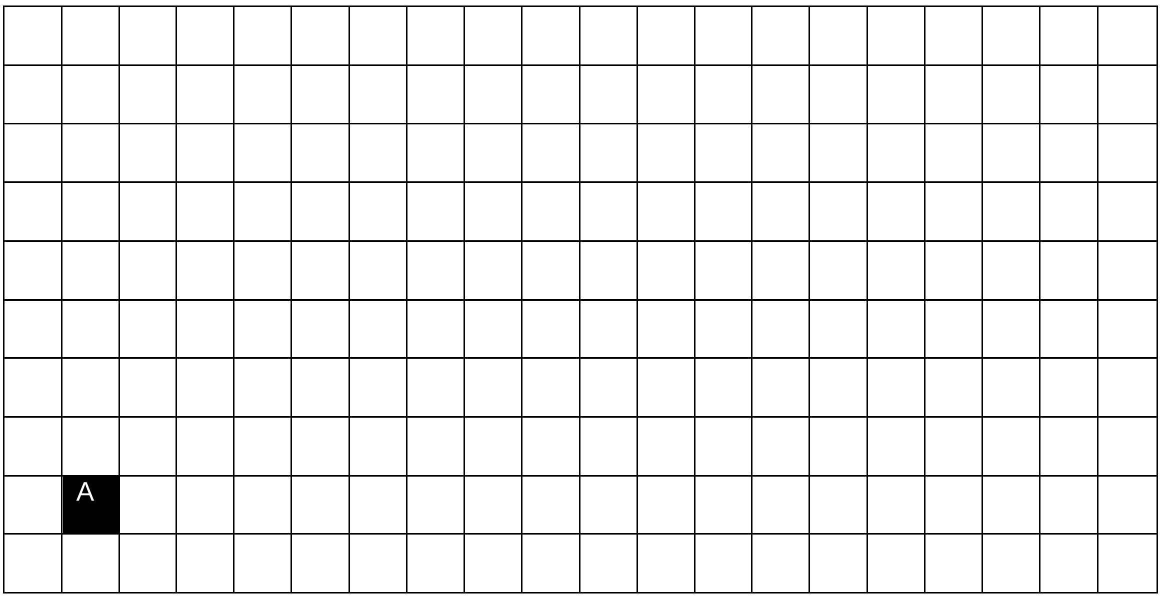
Responda:

- Que figura tem a maior área?
- Que figura tem a menor área?
- Qual o retângulo que tem a maior área?
- Observando as figuras e suas áreas, que outras conclusões você pode tirar em relação ao formato da figura necessário para se obter a maior área?
- Que figura você escolheria para a base de sua casa? Por quê?

Fonte: Adaptado de ZASLAVSK, Claudia. Pessoas que vivem em casas redondas. Arithmeticteacher, 1989.

Atividade 2: Relação entre área e perímetro

Utilize a grade a seguir para representar o que se pede e responda às questões, considerando o lado do quadrado A (quadrado escuro) igual a uma unidade:



- Duplicando-se a medida de cada lado do quadrado “A”, duplica-se o perímetro?
- Duplicando-se a medida de cada lado do quadrado “A”, duplica-se a área?
- O que acontece com o perímetro e com a área do quadrado ao triplicarem-se as medidas dos lados?

- O que acontece com o perímetro e com a área ao multiplicarmos por quatro as medidas dos lados do quadrado “A”?
- E ao dividirmos pela metade a medida de seus lados, qual será a área do novo quadrado?
- O que se pode concluir destas atividades?

Fonte: Adaptado de KNIJNIK, Gelsa; BASSO, Marcus Vinicius e KLÜSENER, Renita. Aprendendo e ensinando matemática com o Geoplano. UNIJUÍ, 1996.

Atividade 3: Estudando triângulos:

1) Corte canudinhos de acordo com as medidas de cada item e com auxílio de um fio, construa triângulos:

a) canudinhos medindo 8 cm, 9cm e 5cm.

b) canudinhos medindo 9 cm, 3cm e 7cm.

c) canudinhos medindo 15,4cm, 12,3cm e 9,1cm.

d) canudinhos medindo 2 cm, 5cm e 3cm.

e) canudinhos medindo 6 cm, 6 cm e 7 cm.

f) canudinhos medindo 4 cm, 4 cm e 4 cm.

g) canudinhos medindo 10 cm, 6 cm e 2 cm.

h) canudinhos medindo 10 cm, 6 cm e 4 cm.

2) Quando acontece a possibilidade de construir um triângulo?

Quando não é possível?

3) Desenhe os triângulos construídos na questão 1 em uma folha quadriculada.

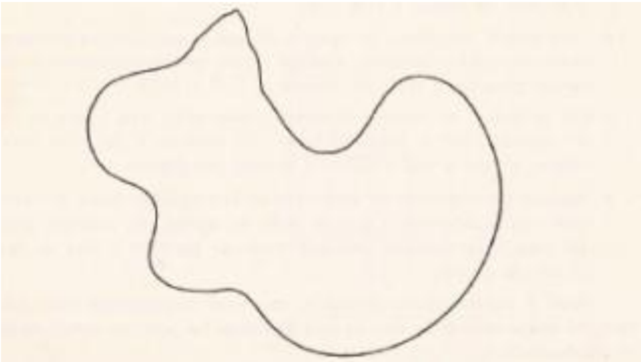
a) Com a ajuda de um transferidor medir os ângulos internos dos triângulos desenhados. Que conjecturas podem ser realizadas sobre estas medidas?

b) Estime a área de cada triângulo desenhado. Existe uma maneira mais fácil de calcular a área de triângulos? Descreva uma forma.

Fonte: DULLIUS, Maria M.; QUARTIERI, Marli T. Trabalhando geometria espacial com os softwares Poly e Wingeometric. Disponível em: <http://www.univates.br/ppgece/media/pdf/Trabalhando_Geometria_espacial_com_softwares_poly_e_wingeometric.pdf> Acesso em: 28 jul 2013.

Atividade 4: Calculando a área

Determine a área e o perímetro de um município cuja planta tem o formato da figura que segue e que foi obtida por meio de um levantamento topográfico.



Crie estratégias diferentes para determinar a área desta região.

Fonte: adaptado de TROTTA, Fernando; IMENES, Luiz Márcio Pereira e JAKUBOVIC, José. Matemática aplicada. São Paulo. Ed. Moderna, 1979.

Atividade 5: Cubos e cubinhos

1) Pense e responda:

a) Ao construirmos um cubo de aresta “3 cubinhos”, quantos “cubinhos” serão necessários?

b) Quantos “cubinhos” serão necessários para construir um cubo de aresta “4 cubinhos”?

c) E de “5 cubinhos”?

2) Imagine agora que, depois de construído o cubo de aresta 3 com os cubinhos, decidiu-se pintá-lo exteriormente de vermelho.

a) Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada?

b) E com duas faces pintadas?

c) E com três faces pintadas?

d) E com nenhuma?

3) Investigue o que aconteceria se pintássemos um cubo de aresta “4 cubinhos”.

a) Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada?

b) E com duas faces pintadas?

c) E com três faces pintadas?

d) E com nenhuma?

4) E se pintássemos um cubo de aresta 5?

a) Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada?

b) E com duas faces pintadas?

c) E com três faces pintadas?

d) E com nenhuma?

5) Escreva que conclusões podem ser tiradas destas atividades. Para facilitar o trabalho organize numa tabela as suas descobertas sobre o número de cubinhos

com 0, 1, 2, 3,... faces pintadas num cubo de 3x3x3, 4x4x4, 5x5x5, 6x6x6. Observe a tabela e escreva algumas conclusões gerais.

Fonte: adaptado de http://pt.scribd.com/doc/97764348/lista-de-questoes-para-estudos-para-2a-avaliacao