UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO DE DERIVADAS EM UMA TURMA DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Carlos José Ferreira Soares

Lajeado, dezembro de 2019

Carlos José Ferreira Soares

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO DE DERIVADAS EM UMA TURMA DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade do Vale do Taquari - Univates, como parte da exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Banca Examinadora

____

Dra. Marli Teresinha Quartieri – orientadora
Universidade do Vale do Taquari - Univates

____

Dra. Nélia Maria Pontes Amado
Universidade de Algarve - Portugal

____

Dra. Márcia Jussara Hepp Rehfeldt
Universidade do Vale do Taquari - Univates

____

Dra. Ieda Maria Giongo
Universidade do Vale do Taquari - Univates

Lajeado, dezembro de 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, Autor da vida, pela oportunidade desta conquista.

Aos meus pais, principalmente minha mãe (Francisca) pela oportunidade de abraçar a educação como uma possibilidade de vitória na vida.

À minha companheira Maria e aos meus filhos Celine, Carline, Clarine e Neemias, responsáveis pela minha inspiração de buscar novas conquistas.

À todos os meus familiares que se alegram com minhas conquistas.

Aos amigos que apoiaram e incentivaram durante esta jornada.

À minha orientadora professora Marli pela paciência e contribuição incalculável para o meu crescimento profissional durante este processo de formação.

Aos colegas de profissões pelos diálogos frequentes sobre a importância de continuar o processo de qualificação para contribuição eficaz na sala de aula.

RESUMO

O presente trabalho de cunho científico teve como objetivo analisar estratégias e conjecturas que os alunos da disciplina de Cálculo I de uma turma de licenciatura em Matemática elaboram ao utilizarem tarefas investigativas envolvendo derivadas. Como base teórica, este estudo esteve pautado em Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), Magalhães e Varizo (2016) em relação aos fundamentos da Investigação Matemática. A metodologia da pesquisa foi qualitativa, assistida pela observação participante e pela análise descritiva. Os dados foram coletados por meio das anotações dos alunos e questionário. O estudo foi realizado com 24 alunos de uma turma de 2º período de graduação em Licenciatura de Matemática da Universidade do Estado do Amazonas – UEA, localizada no município de Tefé – AM. Foram desenvolvidas atividades de cunho investigativo com o intuito de desafiar os alunos a utilizar diferentes estratégias e a formular conjecturas, em relação ao conteúdo abordado que foi derivada. Em especial, foi enfocado taxa de variação, máximos e mínimos. Os resultados enfatizam que o desenvolvimento de tarefas investigativas em sala de aula, contribui para que o aluno seja ativo na busca da construção de conhecimento matemático, assumindo o protagonismo na sua formação educacional. Especificamente, por meio deste trabalho, observou-se que os alunos construíram conhecimentos referente aos conceitos de derivadas a partir da exploração de taxa de variação, máximo e mínimo mediante simulações padronizadas envolvendo áreas de terreno, volume de caixas e perímetro. Para a formulação de conjecturas utilizaram as seguintes estratégias de representações simbólica e numérica: simulações por meio da construção de quadros, desenhos, modelagem de funções e uso do *excel*.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Derivada. Ensino Superior.

ABSTRACT

The present work of scientific nature is aimed to analyze strategies and conjectures that students of the discipline of Calculus I of a class of degree in Mathematics elaborate when using investigative tasks involving derivatives. As a theoretical basis, this study was based on Ponte, Brocardo and Oliveira (2016), Magalhães and Varizo (2016) in relation to the foundations of Mathematical Research. The methodological research was qualitative, assisted by participant observation and descriptive analysis. Data were collected through student notes and a questionnaire. The study was carried out with 24 students from a class of 2nd semester undergraduate Mathematics degree from the Amazonas State University - UEA, located in the town of Tefé - AM. Investigative activities were developed in order to challenge students to use different strategies and formulate conjectures, in relation to the content that was derived. In particular, the rate of change, maximum and minimum, was focused. The results emphasize that the development of investigative tasks in the classroom, contributes for the student to be active in the search for the construction of mathematical knowledge, assuming the protagonist in his educational formation. Specifically, through this work, it was observed that the students built knowledge regarding the concepts of derivatives from the exploration of the rate of change, maximum and minimum through standardized simulations involving areas of land, volume of boxes and perimeter. For the formulation of conjectures, the following strategies were used symbolic and numerical representations: simulations through the construction of charts, drawings, function modeling and use of Excel.

Keywords: Mathematical Investigation. Derivative. University education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os processos de ensino e de aprendizagem de matemática estão sofrendo mudanças nos últimos anos devido à preocupação dos pesquisadores em investigar novas alternativas de produção de conhecimentos matemáticos que despertem nos alunos motivação pelo estudo, e não medo. De acordo com Santos (2008, p. 3) alguns alunos olham para essa disciplina com “temor”, expressando que “[...] ‘a matemática é difícil’, ‘a matemática é chata’, ‘eu não consigo entender’, ‘tenho horror à matemática’, ‘é o bicho papão da escola’”.

Estes educandos relacionam geralmente a matemática com tarefas exaustivas e apresentam dificuldades de aprendizagem. Diante de tal contexto, professores da disciplina produzem reflexões acerca das transformações que o ensino vem passando. Entretanto, segundo Krueger (2009), apesar do otimismo desta conquista, os docentes sabem que podem enfrentar obstáculos para superar o contraste da matemática fascinante, enunciada por autores brasileiros, com os conhecimentos fundamentais para a vida e ao desenvolvimento cognitivo.

Refletindo sobre esta abordagem, considero que a Matemática mesmo diante das dificuldades, é fascinante e os relatos seguintes enfatizam a minha jornada estudantil e a motivação por esta área do conhecimento. Iniciei a jornada como discente aos quatro anos de idade na Educação Infantil em uma Creche Municipal, localizada no município de Juruá – AM. Foram três anos fundamentais para sequência da caminhada escolar, pois, neste período aprendi o significado das letras, formação de sílabas, palavras, escrita e leitura da representação simbólica dos primeiros números naturais.

Nos quatro anos seguintes, cursei os anos iniciais do ensino fundamental, na época esta etapa correspondia de 1ª à 4ª série[1]. A primeira e segunda série fiz na Escola Estadual Armando Berredo no município de Juruá, a terceira e quarta série estudei em uma Escola Estadual, no município de Fonte Boa – AM. Os momentos que mais me recordo são as tabuadas de sexta-feira. A professora arrumava as cadeiras da sala em forma de um círculo e perguntava para um aluno após o outro, expressões das quatro operações contidas na tabuada. Quando um aluno errava, a mesma pergunta era passada para o próximo, e assim por diante até alguém acertar. Me lembro dos semblantes de medo que os colegas demonstravam no momento que eram punidos pelo erro cometido na pergunta proposta.

Em contraste com esse contexto, Cerconi e Martins (2014) enfatizam que o trabalho em sala de aula, direcionado para ações pedagógicas voltadas à memorização é um significativo problema aos processos de ensino e de aprendizagem da matemática. Isto ocorre porque prioriza a repetição excessiva de resolução de exercícios em detrimento da construção de conhecimentos por meio de habilidades adquiridas.

Entre o período de 1992 a 1995, cursei os anos finais do ensino fundamental, 6ª a 8ª série, em uma escola estadual, localizada no município de Fonte Boa - AM. Nesta fase, apresentei melhores resultados na disciplina de Matemática. Mas, as aulas ministradas pelos professores foram marcadas pelo uso somente do livro didático e do quadro para apresentação de fórmulas que deveriam ser memorizadas para a explicação da resolução de exercícios. Os professores enfatizavam com frequência que deveríamos repetir várias vezes a resolução dos exercícios para consolidar as expressões que precisávamos memorizar para as provas.

Segundo os PCN’s (BRASIL, 1997) o ensino de matemática deve promover o desenvolvimento do raciocínio do aluno, mediante a exploração de metodologia que

[1] 1ª a 4ª série significa atualmente, 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental.

priorize a aplicação de estratégias dinâmicas, estimulando a reflexão crítica do pensamento matemático. Nesta mesma linha argumentativa, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) comenta que "desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo" (BRASIL, 2018, p. 265) são fundamentais para a construção autônoma de conhecimentos matemáticos.

Destaco ainda que cursei o Ensino Médio no período de 1996 a 1998, na mesma escola que estudei o Ensino Fundamental. Como este curso era magistério profissionalizante, desenvolvemos várias atividades de ensino nas escolas que trabalhavam com os anos iniciais do Ensino Fundamental. Foi durante o desenvolvimento dessas ações que comecei a analisar a possibilidade de ser um professor, e isto se concretizou durante a regência de uma aula sobre adição em uma turma da 2ª série. Nesta aula, explorei o conteúdo utilizando o jogo do dominó que foi construído pela turma e em seguida dividi a turma em grupos de dois, três e quatro alunos e explorei a operação de adição, utilizando os jogos de dominó que confeccionamos.

Durante a realização desta atividade, fiquei contagiado com o entusiasmo dos alunos e percebi que o jogo motivou a participação de todos. Proporcionou a compreensão do tema de forma reflexiva, pois durante as jogadas eles olhavam para as peças da mesa e das mãos com muita atenção antes de toda jogada. Observando aqueles alunos explorando com autonomia o tema que ministrei, brotou em mim um sentimento de satisfação e alegria que me conduziram a decidir que como professor de Matemática poderia contribuir de alguma forma para auxiliar os alunos a construírem conhecimentos.

De posse do certificado do curso profissionalizante no Ensino Médio com habilitação em magistério, comecei a trabalhar como professor em outubro de 1999 em uma turma multisseriada (tinha alunos da 3ª e 4ª série do Ensino Fundamental) de uma Escola Municipal, localizada na comunidade do Triunfo, zona rural do Município de Fonte Boa, interior do Estado do Amazonas. Esta comunidade tinha apenas dez casas e aproximadamente 110 habitantes. Não tinha água encanada e luz elétrica somente entre às 19 horas e 21 horas.

Todos os pais dos alunos eram agricultores e pescadores, sendo que a maioria deles não era alfabetizado. Nos anos anteriores, o professor que atuava era um morador da comunidade que tinha apenas concluído os anos iniciais do Ensino Fundamental. A escola tinha apenas duas salas de aula, não tinha banheiro, sala de professores e nem biblioteca. Ela assistia alunos da Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental no turno Matutino e vespertino. No período da manhã haviam duas turmas com alunos da faixa etária de 3 a 6 anos, e a tarde com duas turmas, uma com alunos de 1ª e 2ª série e outra de 3ª e 4ª série. Como a comunidade em que está localizada a escola é uma terra de várzea, e nos meses de maio e junho de cada ano as terras ficam alagadas, devido ao fenômeno natural da enchente que ocorre todos os anos durante o inverno amazonense, o ano letivo iniciava em agosto de um ano e terminava em abril do outro.

Trabalhei nesta escola durante cinco anos, e enfrentei muitas dificuldades, com alunos de 3ª e 4ª que não sabiam ler e escrever. Diante da realidade, planejei atividades voltadas para a alfabetização e exploração das quatro operações básicas. Explorei as principais dificuldades de aprendizagem dos alunos, leitura, interpretação, adição, subtração, multiplicação e divisão por meio de jogos como dominós, gincanas matemáticas e um campeonato de leitura.

A partir do desenvolvimento do trabalho explorando as atividades citadas, a maioria dos alunos que não sabia ler, começou a ler e os que liam com dificuldades melhoraram a leitura, além de demonstrarem mais habilidade na capacidade de interpretação. Fiquei feliz com os resultados obtidos e o reconhecimento da comunidade pelo trabalho desenvolvido. Após o quinto ano lecionando, aceitei o convite do secretário municipal de educação para lecionar em outra comunidade para atuar nos anos finais do Ensino Fundamental. Agradeci o apoio e o reconhecimento da comunidade e parti para um novo desafio motivado pelo convite de ministrar a disciplina Matemática em duas turmas da 5ª série.

Em 2001, com a criação da Universidade do Estado do Amazonas – UEA, percebi que chagara a oportunidade de realizar o sonho de fazer um curso superior. Então prestei o vestibular e conquistei uma vaga, mas devido a problemas familiares não fui possível realizar meu sonho. No ano seguinte, esta universidade criou o PROFORMAR – Programa de Formação e Valorização dos Profissionais de

Educação. Aproveitei o momento e por meio de um exame de seleção comecei a estudar o curso Normal Superior com habilitação para atuar como docente na Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental. Este curso foi fundamental para minha formação profissional e o desenvolvimento do pensamento crítico reflexivo.

Em 2004, ministrei Matemática em duas turmas da 5ª série do Ensino Fundamental em uma comunidade chamada Barreirinha de Baixa. Esta localidade era maior que a anterior, com uma população de aproximadamente 300 pessoas, as atividades econômicas também eram baseadas na agricultura e na pesca. Destacava-se na agricultura como produtores de farinha de mandioca, alimento típico das comunidades ribeirinhas do Amazonas. A experiência nesta comunidade como professor de Matemática instigou o sonho de fazer um Curso de Licenciatura em Matemática, já que a formação que tinha não me habilitava a trabalhar com Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

No ano seguinte, resolvi me mudar para o município de Juruá, outra região do interior do Amazonas, onde fui docente de Matemática durante oito anos. Ministrei aulas no turno matutino nos anos iniciais e no turno vespertino nos anos finais do Ensino Fundamental em uma Escola Municipal, localizada na Vila de Tamanicuá. Esta comunidade tinha mais de 100 casas e aproximadamente 600 moradores, os quais a maioria trabalha como agricultores e pescadores. A escola atendia mais de 200 alunos distribuídos na Educação Infantil, Ensino Fundamental e Educação de Jovens e Adultos – EJA.

Em 2007, a SEDUC – Secretaria de Estado de Educação e Qualidade do Ensino do Amazonas implantou o Ensino Médio mediado por tecnologia em mais de mil comunidades. Esta modalidade transmite via satélite aulas presenciais, onde os professores titulares ministravam em tempo real as aulas no Centro de Mídia de Educação localizado em Manaus, capital do estado, que eram transmitidas por meio de televisores instalados nas escolas das comunidades ribeirinhas. Estas salas de aulas eram assistidas por um professor denominado de assistente, que auxiliava os alunos, ligando os equipamentos, salvando os arquivos enviados (planos e roteiros de aula e avaliações) e promovia as discussões sobre os temas explanados.

Atualmente, este projeto está sendo desenvolvido em quase três mil comunidades, e contribui significativamente para o desenvolvimento educacional do interior do Amazonas, visto que, depois de 11 anos de sua implementação já contribuiu com a formação de vários profissionais que estão atuando nas áreas da saúde e educação como enfermeiros, dentistas, médicos, professores, etc. Trabalhei como professor assistente no Ensino Médio com mediação tecnológica no período de 2009 a 2012. Neste período, cursei a graduação de licenciatura em matemática pela Universidade Paulista – UNIP, a qual proporcionou experiências fundamentais para o aprimoramento de conhecimentos matemáticos e reflexões sobre os processos de ensino e de aprendizagem desta área. Então, inspirado com a formação em Matemática, busquei aprofundamentos sobre as tendências que enfatizam o ensino de Matemática. Assim, no ano de 2012, cursei especialização em Metodologia de Ensino de Matemática pela UNIASSELVI – Centro Universitário Leonardo da Vinci.

Motivado pelas reflexões assistidas na graduação, lembro-me com satisfação a criação do Projeto Exame Comunitário do Ensino Fundamental de Tamanicuá – ECEFT, em 2011. Escrevi o projeto e o apresentei para os demais professores da escola, os quais o aprovaram e o mesmo foi desenvolvido. O ECEFT tinha o intuito de analisar o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, em todas as áreas do conhecimento dos anos finais do Ensino Fundamental de uma Escola Municipal, localizada no interior de Juruá – AM. Ele foi desenvolvido em duas etapas, uma no primeiro semestre e outra no segundo. A primeira explorava os temas estudados no primeiro e segundo bimestre; e a segunda, os conteúdos explorados no terceiro e quarto bimestre. Os alunos que apresentavam os melhores rendimentos eram premiados com *notebook, smatphones* e *kit* de material escolar.

Esta foi uma estratégia para estimular os alunos a estudarem com mais compromisso e dedicação. Este projeto foi desenvolvido de 2011 a 2012, e de acordo com os resultados apresentados, melhorou o desempenho dos alunos. Um dos motivos da não continuidade do projeto foi a minha saída da comunidade no início de 2013, visto que além de criador do projeto, eu incentivava os demais professores a ajudarem na organização e execução do mesmo. Desta forma, analisando este contexto, concordo que a motivação é fundamental para incentivar alguém a realizar algo (ATKINSON, 2002).

Nos anos de 2013 e 2014 lecionei Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio em uma Escola Estadual localizada na sede do município de Juruá. Esta cidade tem um pouco mais de dez mil habitantes e está a 673 km em linha reta distante de Manaus. Esta escola assiste a população nos três turnos (matutino, vespertino e noturno), trabalhando com Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Neste período trabalhei algumas atividades em sala de aula em duas turmas de 7º ano, explorando a estratégia de resolução de problemas com o intuito de auxiliar os alunos que estavam com dificuldades de aprendizagem referente à interpretação de problemas matemáticos. Mediante a exploração desta tendência matemática, percebi que a maioria dos alunos apresentou desempenho satisfatório, mas alguns ainda demonstravam algumas dificuldades. Então, realizei um diagnóstico envolvendo as quatro operações com esses alunos e percebi que eles ainda não dominavam os conceitos iniciais de multiplicação e divisão.

Em 2015, comecei uma nova fase na minha vida profissional depois de prestar concurso público e ser aprovado como docente auxiliar da Universidade do Estado do Amazonas – UEA. Durante esses quatros anos que atuo como docente no ensino superior, percebi que a maioria dos alunos apresentam dificuldades na assimilação dos conceitos dos temas explorados pelas disciplinas Cálculo I, II e III, principalmente envolvendo aplicações de conteúdos como derivadas e integrais. Geralmente, o índice de reprovação nestas disciplinas é alto, em particular em Cálculo I. Um dos motivos é a falta do domínio dos fundamentos elementares da matemática básica demonstrado pelos discentes, principalmente em funções, que é um dos principais objetos de estudo do Cálculo.

Diante deste contexto, e mediante as reflexões efetivadas nas disciplinas do Curso de Mestrado em Ensino de Ciências Exatas da Univates, resolvi investigar sobre o uso da tendência Investigação Matemática. Os estudos das ideias de alguns autores e diálogos com minha orientadora me motivaram a escolha dessa tendência matemática como foco de pesquisa do trabalho de dissertação, por acreditar que pode proporcionar aprendizagem caracterizada pela construção autônoma de conhecimentos. Por isso, com o intuito de contribuir com os processos de ensino e de aprendizagem dos alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas – UEA, por meio de exploração de atividades investigativas, proponho o estudo de derivadas com o olhar voltado para a taxa de variação, máximo e mínimos de funções. Assim, o tema desta pesquisa foi "Investigação Matemática no Ensino de Derivadas em uma turma de Licenciatura em Matemática"**.**

Este tema foi escolhido pelo fato da necessidade de serem desenvolvidas em salas de aula intervenções pedagógicas que proporcionam aos alunos ferramentas que podem promover a construção autônoma do conhecimento, visto que, o estudo de derivadas é fundamental para compreensão de comportamentos relacionados com taxa de variação, máximo e mínimo de funções (ROCHA, 2010). O aluno, de acordo com Martins Junior (2013) precisa assumir o papel de ator principal neste processo, deixar a zona de conforto de apenas memorizar o que lhe é transmitido para formar suas próprias concepções, explorando as relações matemáticas existentes.

A escolha da turma e o período do curso de Licenciatura em Matemática, foi definido porque no primeiro semestre de 2019 foi ofertada a disciplina de Cálculo I para a turma do 2º período do referido curso. Além disso, vale ressaltar que fui o docente que ministrou esta disciplina para a turma. Portanto, este trabalho foi desenvolvido com os alunos do 2º período do Curso de Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tefé/CEST da Universidade do Estado do Amazonas – UEA.

A escolha da Investigação Matemática foi determinada porque, de acordo com Ponte, Brocardo, Oliveira (2016) é uma tendência que instiga o aluno a buscar, por meio da investigação, estratégias que produzam a elaboração de conjecturas com autonomia e eficácia. Diante deste contexto, o problema de pesquisa desta dissertação foi: "**Que estratégias e conjecturas os alunos da disciplina de Cálculo I, de uma turma de licenciatura em Matemática, elaboram na exploração de tarefas investigativas no estudo de derivadas?** ".

A partir deste problema de pesquisa, o presente trabalho apresentou como objetivo geral analisar estratégias e conjecturas elaboradas pelos alunos da disciplina de Cálculo I do curso de Licenciatura em Matemática, ao utilizarem tarefas investigativas envolvendo derivadas. E como objetivos específicos:

- Explorar tarefas investigativas que instiguem os alunos a formularem conjecturas sobre derivadas enfocando taxa de variação, máximos e mínimos de funções.

- Descrever as estratégias e conjecturas elaboradas pelos alunos durante o desenvolvimento das tarefas investigativas propostas.

- Identificar dificuldades e avanços dos alunos no decorrer da exploração de tarefas investigativas.

O presente trabalho está dividido nos seguintes tópicos: Introdução, Referencial Teórico, Procedimentos Metodológicos, Resultados e Discussões, Considerações Finais e Referências. Na Introdução já descrita, destaco experiências vividas como aluno e professor, enfatizando as dificuldades enfrentadas relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, bem como as motivações para a escolha do tema mediante a fundamentação dos objetivos caracterizados com as concepções da temática da investigação.

No segundo capítulo, Referencial Teórico, apresento uma reflexão sobre o ensino de cálculo diferencial e integral, a investigação matemática, o ensino de derivadas e destaco alguns trabalhos já desenvolvidos explorando tarefas investigativas. Neste tópico, portanto, descrevo o contexto da realidade do ensino de derivadas nas perspectivas dos alunos e dos professores, apresento os fundamentos da tendência Investigação Matemática como uma ferramenta metodológica para o ensino de matemática.

No capítulo três, destaco os procedimentos metodológicos que foram utilizados para o desenvolvimento deste trabalho, que foi pautado na abordagem qualitativa, observação participante, análise descritiva, e para auxilia da coleta de dados foram utilizados ferramentas como diário de campo, gravador de voz e fotografia. Também neste tópico, descrevo os procedimentos adotados para o desenvolvimento das tarefas investigativas.

No capítulo quatro, apresento os resultados e as discussões abordadas sobre as construções dos alunos, enfatizando as estratégias utilizadas pelos alunos para a formulação de conjecturas, isto é, como procederam para investigar as tarefas propostas e em seguida abordo as considerações finais deste estudo de cunho científico. Na sequência, apresento o capítulo cinco que destaca as considerações finais, enfatizando as dificuldades e avanços no decorrer do trabalho, perspectivas para trabalhos futuro envolvendo Investigação Matemática e a importância deste trabalho para minha prática profissional, pessoal e acadêmica. Também apresento as referências que legitimam cientificamente este trabalho, isto é, os autores pesquisados que serviram como âncora para esta investigação. E, por fim, os apêndices.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Descrevo na primeira seção deste capítulo alguns aspectos históricos do Cálculo Diferencial e Integral. Na segunda seção, exploro o conceito de derivação (taxa de variação), derivada e reta tangente, limites e aplicações de derivadas (máximo e mínimo). Na terceira seção, destaco ideias de autores sobre Investigação Matemática, em particular as de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), que orientaram o desenvolvimento desta dissertação. Na quarta seção, discuto alguns trabalhos já efetivados sobre investigação matemática e o ensino da derivada que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 O ensino de Cálculo Diferencial e Integral com fatos históricos

O surgimento do Cálculo Diferencial e Integral é datado de aproximadamente há 350 anos, desde então tem provado mediante diversas aplicações porque é considerado uma das grandes realizações da humanidade. O estudo do Cálculo nos últimos anos avançou, sendo explorado em vários cursos superiores das Ciências Exatas por meio de metodologias que buscam a compreensão desta teoria. Além de seus principais idealizadores (Leibniz e Newton) merece também destaque Arquimedes, já que “as mais importantes contribuições de Arquimedes são sobre questões em cuja abordagem se usa hoje o Cálculo Diferencial e Integral” (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2013, p. 53).

Santos e Bianchini (2004) destacam que o Cálculo é a principal ferramenta matemática para as aplicações científicas e tecnológicas desde o século XVII. Desta forma, a intensificação da investigação acerca do ensino desta disciplina é importante para a renovação de estratégias em prol do desenvolvimento da aprendizagem dos temas explorados pelo Cálculo. A disposição deste instrumento matemático ocorreu, segundo Bardi (2006), mediante uma guerra travada por Newton e Leibniz, que duelaram durante vários anos pela autoria da invenção do Cálculo.

Isaac Newton (1642 – 1727) nasceu na Inglaterra, é considerado o cientista que revolucionou sua época com o desenvolvimento do cálculo. De acordo com Flood e Wilson (2013, p. 102) “Ele obteve a forma geral do teorema binomial, explicou a relação entre diferenciação e integração, estudou séries de potências e analisou curvas cúbicas”. Para o referido cientista a fundamentação da criação do Cálculo está diretamente relacionada com o movimento, como por exemplo, as explicações de como as coisas mudam com o passar do tempo, ou fluxo, isto é, para Flood e Wilson (2013, p. 102) ele explorava “[...] problemas com tangentes que envolviam velocidades, [...] ele mostrou regras para calcular essas velocidades.”

Concernente a notória contribuição de Newton e ao fato que ele gostava de analisar acontecimentos relacionados com movimento, Flood e Wilson (2013, p. 103) destacam a história da descoberta da gravidade por Newton:

> Ao ver uma maçã cair, ele disse perceber que a força gravitacional que atrai a maçã para a Terra é a mesma que mantém a Lua em órbita em torno da Terra e a Terra em órbita em torno do Sol. Além disso, esse movimento planetário é governado pela lei da gravitação universal, a lei do inverso do quadrado: *A força de atração entre dois objetos varia de acordo com o produto das massas e com o inverso do quadrado da distância entre eles.*

Outro renomado cientista que dedicou sua vida em prol de descobertas matemáticas foi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Alemão contemporâneo de Newton que também escreveu sobre as possibilidades que o Cálculo Diferencial e Integral proporciona a compreensão de aplicações matemáticas. Flood e Wilson (2013, p. 106 –107) afirmam que:

> Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) foi o maior teórico da lógica e da linguagem desde Aristóteles além de ser matemático e filósofo do mais alto nível. Nas suas investigações, guiava-se pelo desejo de encontrar uma “lógica da descoberta” em uma linguagem que refletisse a estrutura do mundo. Isso ficou visível na sua obra sobre aritmética binária, lógica simbólica, no cálculo e na sua máquina de calcular.

> O cálculo de Leibniz foi, de longe, a sua obra mais ambiciosa e influente, mais uma vez, surgiu do seu desejo de encontrar métodos simbólicos gerais para descobrir a verdade. O cálculo de Leibniz se originou de maneira diferente do de Newton e se baseava em somas e subtrações em vez de velocidade e movimento.

Diante deste contexto, percebe-se que tanto Newton como Leibniz foram fundamentais para a construção de um novo universo matemático, que apresentava ferramentas de exploração impactantes para o desenvolvimento do pensamento matemático. De acordo com Rooney (2012, p. 157) "o que ambos os homens fizeram foi descobrir um método para calcular a tangente de uma curva em um ponto específico da curva, dada somente a equação que define a curva".

À luz desta reflexão, nota-se a relevância desta descoberta e o reconhecimento de que o Cálculo Diferencial e Integral está presente em diversas áreas do conhecimento, sendo essencial para a compreensão de inúmeros fenômenos naturais. Segundo Machado (2002), o Cálculo Diferencial e Integral potencializa explorar diversos temas em várias áreas do conhecimento como Matemática, Biologia, Física, Química, Engenharia, Economia, Computação e até mesmo Ciências Sociais e Ciências da Terra. Isto devido aos recursos de produção de modelagem que proporciona nas aplicações que necessitam calcular, medir, prever e analisar desempenho em setores econômicos, situações estatísticas que favorece a busca por padrões de eficiência que potencializem o desenvolvimento científico da sociedade.

Desta forma, a compreensão das definições sobre temas explorados nos estudos de Cálculo é fundamental para a pesquisa dessa área. Mas, os resultados de aproveitamento de alunos em cursos de graduação que tem disciplinas relacionadas com os temas de Cálculo, mostra que a maioria dos alunos apresenta dificuldades de aprendizagem. De acordo com Rezende (2003), alguns alunos destacam que Cálculo é um terror, é muito difícil de compreender e aplicar suas teorias demonstrativas, visto que o índice de aproveitamento é muito baixo em questões envolvendo prova de propriedades mediante demonstrações sistemáticas. Segundo a referida autora, as dificuldades de aprendizagem dos estudantes desta disciplina são de natureza epistemológica, já que para a pesquisadora essas mazelas não tem origem nas técnicas e métodos de ensino adotados pelos professores. Rezende (2003) também salienta que o desprovimento de uma fundamentação básica da matemática elementar é um dos fatores que contribui para o elevado índice de reprovação nas disciplinas relacionadas com o Cálculo.

Além desses fatores que proporcionam a reprovação em Cálculo destacado por Rezende (2003), Mello (2001) também já elencava alguns motivos que contribuem significativamente para esta estatística:

- A concepção dos discentes e docentes em defenderem que é normal este índice de reprovação e fracasso nessa disciplina;

- A deficiência de fundamentos básicos da matemática elementar que deveriam ter sido desenvolvidos na Educação Básica durante a passagem do aluno pelo Ensino Fundamental e Médio;

- O vestibular para o nível superior não mostra com eficácia as deficiências dos alunos;

- A disciplina apresenta muito conceitos por meio de uma ementa que explora diversos contextos;

- Formação inadequada de docentes;

- Alguns alunos não demonstram interesse e motivação adequada para a construção do conhecimento exigido pela disciplina.

Segundo Reis (2012), outro ponto importante que deve ser considerado é como a disciplina de Cálculo deve ser conduzida. Definir os conteúdos que devem ser ministrados e sistematicamente especificar como o trabalho será efetivado mediante a clareza dos objetivos propostos. Diante deste contexto, o autor pontua que a

> [...] elaboração de currículos e ementas, à escolha de bibliografias e livros didáticos e à opção por uma determinada metodologia ou recursos metodológicos, é que a prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver! (REIS, 2012, p. 87).

Para o desenvolvimento do ensino de Cálculo Diferencial e Integral o docente deve analisar diversas situações para produzir a aprendizagem, onde a forma de planejar a aula, o contexto que será aplicado e o nível cognitivo dos discentes devem ser considerados na execução das atividades pedagógicas.

Nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral são trabalhadas continuamente as demonstrações e nas avaliações predominam a resolução de questões envolvendo o cálculo de limites, derivadas e integrais mediante o treinamento exaustivo de intermináveis listas de exercícios. Desta maneira, de acordo com Rezende (2003), as ações pedagógicas no âmbito da disciplina de Cálculo podem ser analisadas a partir de dois momentos: as demonstrações que são evidenciadas nas aulas propriamente ditas, onde o professor explora as provas das propriedades mediante a repetição excessiva; e, o uso das técnicas nas avaliações, isto é, a aplicação dos métodos de resolução trabalhados nas aulas anteriores.

Contribuindo com este contexto, Garzella (2013) destaca que o sucesso ou o fracasso de uma disciplina depende da postura pedagógica adotada pelo professor. A autora destaca que utilizar determinada atitude sem considerar elementos como a realidade cognitiva dos alunos e o âmbito favorável ao desenvolvimento de atividades dinâmicas que fazem sentido à formação profissional do graduando, não será suficiente para garantir a aprendizagem. Diante desta realidade, é essencial considerar o papel do professor na interação dos conceitos fundamentais do Cálculo com sua aplicação no cotidiano dos alunos, visto que:

> Dessa forma, cabe ao professor de Cálculo, nos anos iniciais do curso, apresentar ao estudante a importância da disciplina no curso que este está inserido. Concebemos que uma possível forma de mostrar essa importância é desenvolvendo atividades em sala de aula em que sejam trabalhadas as aplicações (GONÇALVES; REIS, 2013, p. 420).

O Cálculo Diferencial e Integral está presente em vários cursos das Ciências Exatas como Engenharia, Matemática, Física, Química, etc. Geralmente, seus conteúdos são distribuídos de acordo com o período/série do curso, onde são explorados os temas de funções, limites, derivadas e integrais. Devido à extensão destes conteúdos, em alguns cursos são trabalhados em três disciplinas denominadas de Cálculo I, Cálculo II e Cálculo III. Corroborando com este contexto, é fundamental destacar que:

> É notória a importância dos conteúdos, principalmente de funções, derivadas e integrais como ferramentas matemáticas para a análise de fenômenos físicos, biológicos, econômicos, administrativos, contábeis, matemáticos, químicos, computacionais, das engenharias e de outras ciências que visam não só um avanço tecnológico, mas, sobretudo, compreender, descobrir e aumentar o conhecimento humano que serve à condução da vida ou ao gerenciamento dos negócios (ALVARENGA; DORR; VIEIRA, 2013, p. 46).

Refletindo sobre a afirmação dos autores citados, destaco na próxima seção alguns temas explorados pelo Cálculo Diferencial e Integral envolvendo funções de uma variável como: definição de derivadas, aplicações envolvendo taxa de variação, máximo e mínimo.

2.2 O estudo das derivadas

O ensino de derivadas é um tema explorado em pesquisas científicas devido suas diversas aplicações em áreas como Matemática, Física, Química, Engenharias, Economia, dentre outras. Gonçalves (2012, p. 32) afirma que:

> O conceito de derivada é considerado um dos conceitos fundamentais do Cálculo. Por isso, seu estudo está presente no currículo de diversos cursos superiores, dentro de disciplinas relacionadas ao Cálculo, por possuir aplicações em várias áreas do conhecimento.

O interesse investigativo neste tópico de Cálculo é plausível pela oportunidade que os conceitos de derivadas proporcionam para os estudantes desenvolverem habilidades matemáticas, essenciais ao sucesso na caminhada do estudo em tópicos avançados de matemática. Além disso, de acordo com Igliori (2009) as constantes pesquisas em relação a este tema buscam compreender as principais causas do baixo índice de aproveitamento da maioria dos discentes dos cursos da área de Ciências Exatas.

Os discentes dos cursos de graduação da área de Ciências Exatas apresentam dificuldades de aprendizagem nas disciplinas relacionadas a derivadas. Esta afirmação é comprovada mediante a observação durante vários anos como professor desta disciplina. Os alunos reclamam das dificuldades que enfrentam neste tema. De acordo com Reis (2009) um dos fatores que contribui para essa frustração, por parte dos alunos, é a metodologia utilizada pelo professor, isto é, as atividades são repetitivas e sempre desenvolvidas da mesma maneira: utilização do quadro para explicação e solicitação de resolução de longas listas de exercícios. Diante desta realidade, Catapani (2001) e Barbosa (2004) destacam que é fundamental incentivar as pesquisas neste tópico porque estas podem apontar causas e apresentar caminhos que contribuirão para superar as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos.

Concernente ao conceito de derivadas, Gonçalves (2012, p. 32) afirma que:

> A derivada é um conceito que pode ser explorado a partir de diversos focos: derivada como um limite, como inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado, além de situações que envolvam taxa de variação e máximos e mínimos.
> Uma das possíveis causas para as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de derivada pode estar relacionada a dificuldades na compreensão do conceito de limite, que, por sua vez, ocasionam dificuldades na aplicação do conceito de derivada, em decorrência do fato da derivada ser um limite.

Para Maor (2008) a derivada está relacionada com mudanças, isto é, sua dimensão está ligada ao estudo das variações das taxas e o comportamento de fenômenos físicos relacionados com tempo, velocidade, aceleração e corrente elétrica fluindo em um circuito. O conceito de derivada está relacionado ao estudo de funções em relação à taxa de variação instantânea que está presente em diversas situações do cotidiano por meio de diversas taxas como, o crescimento de uma determinada população, economia de um país, mortalidade infantil, variação de temperaturas, velocidade de corpos, isto é, é o estudo da variação de uma determinada função em momentos específicos.

Pesquisas relacionadas com os processos de ensino e de aprendizagem de derivadas demonstram que realmente os alunos apresentam dificuldades ao lidar com problemas de aplicações relacionados com o cálculo diferencial. D’Avoglio (2002), destaca que as dificuldades estão relacionadas com o entendimento da definição formal da derivada a partir do uso do conceito de limite. Além disso, o autor destaca que os discentes ainda não desenvolveram competências matemáticas essenciais para auxiliar na compreensão desse tema.

O referido autor investigou sobre “Derivada de uma função num ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito” e chegou a conclusão através do Teste de Sondagem[2] que os alunos confundem os seguintes conceitos:

> a) derivada com reta tangente
> b) derivada num ponto com a função derivada,
> c) derivada com regra para se achar a derivada,
> d) reta tangente com coeficiente angular da reta tangente e também, que muitos apresentam dificuldades de expressão (D’AVOGLIO, 2002, p. 27).

Partindo destes conceitos, destaco que o foco deste trabalho em relação ao ensino de Cálculo, foi apenas a exploração de derivadas envolvendo funções de uma variável, em particular, as aplicações de taxa de variação, máximo e mínimo. Concernente aos temas citados, que foram objetos de estudo desta pesquisa, no âmbito das derivadas destaca-se que:

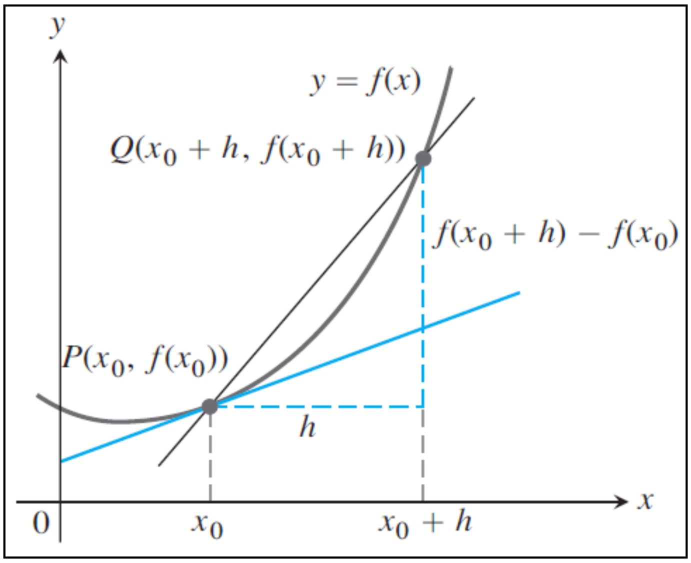
> Muitos fenômenos físicos envolvem grandezas que variam, como a velocidade de um foguete, a inflação de uma moeda, o número de bactérias em uma cultura, a intensidade do tremor de um terremoto, a voltagem de um sinal elétrico, a assim por diante... O estudo de taxas de variação está bastante relacionado com o conceito geométrico de uma reta tangente a uma curva (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 165).

Partindo da abordagem dos autores citados, entende-se que o estudo de derivadas está relacionado a exploração do conceito de reta tangente. Desta forma, é relevante destacar o significado dessa palavra para instigar a reflexão acerca de seu papel no contexto de derivadas. Sendo assim, “a palavra tangente vem do latim *tangens*, que significa tocando. Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Em outros termos, uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato” (STEWART, 2013, p. 76). A figura 1 representa esta definição.

---

[2] Teste de Sondagem se refere as atividades que D’Avoglio (2002) aplicou em seis turmas de graduação para verificar a habilidade dos alunos em trabalhar com o aspecto conceitual de derivadas e não com a capacidade de manipular fórmulas.

Figura 1 – Coeficiente angular da reta tangente em P

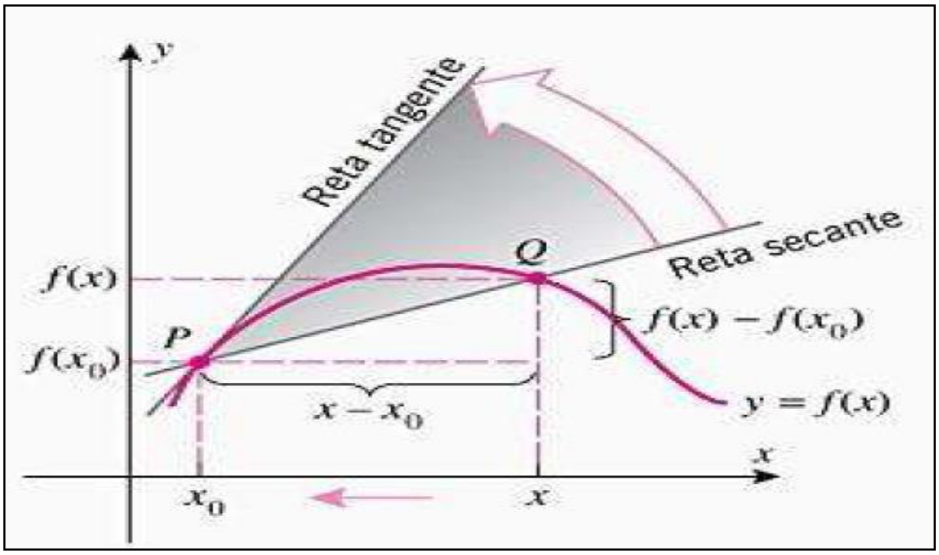


Fonte: Thomas, Weir e Hass (2012, p.117)

Thomas, Weir e Hass (2012) iniciam a discussão do capítulo sobre derivadas destacando a definição de coeficiente angular e reta tangente que os autores apresentam geometricamente na figura 1. Desta forma, para os autores o coeficiente angular da curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é o número m produzido pela existência do limite expresso por $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. A reta tangente à curva em P é a que passa por P com esse coeficiente angular.

Semelhantemente, Howard, Bivens e Davis (2007) enfatizam este conceito destacando a reta secante mediante a consideração de um ponto $Q(x, f(x))$ destacado na curva e distinto do ponto P. Desta forma, a inclinação da reta secante que passa por P e Q denominada de m_{PQ} é dada pela equação $m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ onde o x deve tender para x_0, isto determina que o ponto Q na curva se aproxima do ponto P. “Se a reta secante por P e Q atingir alguma posição limite quando $x \to x_0$, então consideraremos essa posição como a posição da reta tangente em P” (HOWARD; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 165). Os autores citados demonstram esta definição, conforme visualizado na figura 2.

Figura 2 – Interpretação geométrica da reta tangente



Fonte: Howard, Bivens e Davis (2007, p. 177).

Desta forma, uma curva qualquer $y = f(x)$ com um ponto $P(x_0, y_0)$ contido nela, expressa a inclinação da reta tangente no ponto citado que está sobre ela. Com o conhecimento da inclinação da reta tangente em relação a curva no ponto P, é possível determinar a equação da reta tangente à curva em P. Diante desse contexto, verifica-se que:

$m(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ é a inclinação da reta tangente à curva no ponto P, se o limite existir. Desta forma, é possível estabelecer a equação $y - f(x_0) = m(x - x_0)$, e verificar a reta $x = x_0$ se $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ for infinito (GONÇALVES; FLEMMING, 2006).

Gonçalves e Flemming (2006) destacam o contexto referente a concepção de reta tangente a partir do seguinte exemplo:

i) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_0, y_0).

Como $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então

$f(x_0) = {x_0}^2 - 2x_0 + 1$ e

$$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2-2(x_0+\Delta x)+1$$

$$=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-2x_0-2\Delta x+1$$

Assim, $m(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-2x_0-2\Delta x+1-x_0{}^2+2x_0-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}$$

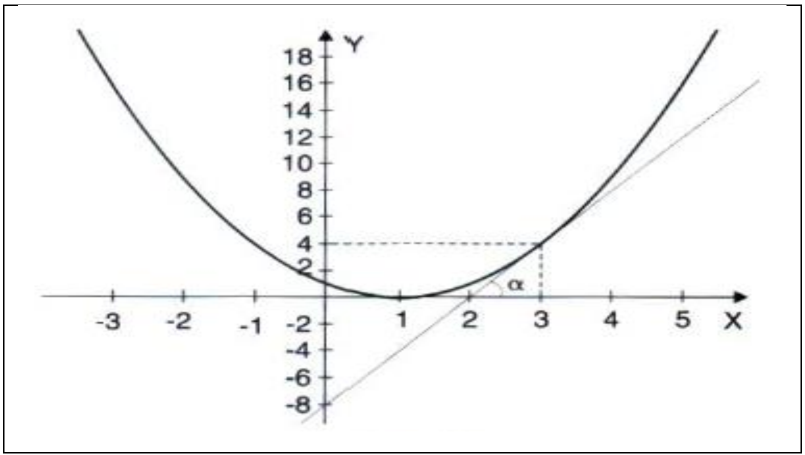
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x-2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}2x_0+\Delta x-2$$

$$=2x_0-2\,.$$

De acordo com o resultado encontrado, a inclinação da reta tangente à curva $y=x^2-2x+1$ no ponto (x_0,y_0) é $m(x_0)=2x_0-2$. A figura 3 ilustra este contexto para $x_0=3$, onde $tg\alpha=m(3)=2\cdot 3-2=4$.

Figura 3 – Inclinação da reta tangente quando $x_0=3$



Fonte: Gonçalves e Flemming (2006, p. 117).

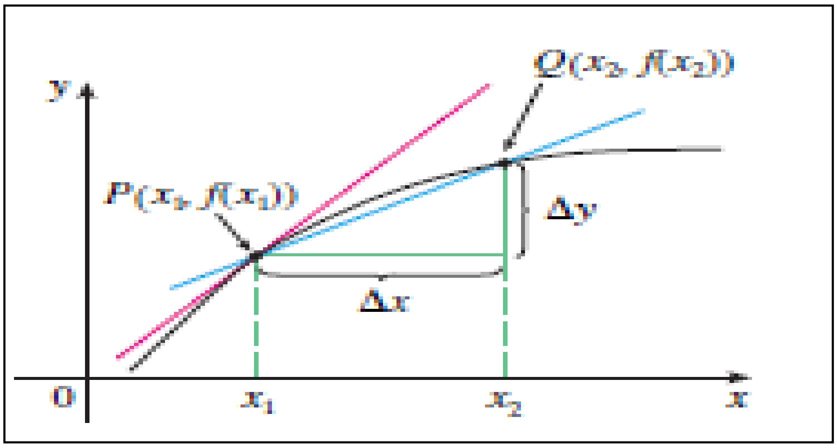
Analogamente, conclui-se que a derivada de uma função f em um número x é definida a partir da determinação do limite expresso $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ se o limite existir.

A derivada no contexto das taxas de variação pode ser analisada a partir de uma quantidade y que depende de outra quantidade x, ou seja, y é uma função de x que pode ser expressa por $y = f(x)$. De acordo com Stwart (2013, p. 134 – 135, grifo do autor),

> Se x variar de x_1 a x_2 , então a variação em x (também chamada **incremento** de x será
>
> $$\Delta x = x_2 - x_1$$
>
> e a variação correspondente em y será
>
> $$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$
>
> O quociente das diferenças
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
>
> é denominado **taxa média de variação de** y **em relação a** x no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ.

A figura 4 demonstra as características citadas nas palavras do autor, onde é realizada uma analogia com a reta secante já enfatizada anteriormente.

Figura 4 – Taxa média de variação e taxa instantânea de variação



Fonte: Stwart (2013, p. 135).

A figura 4 destaca que a taxa média de variação é a reta secante que passa por $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ e a taxa instantânea de variação é a reta tangente que tangencia a função em $P(x_1, f(x_1))$. Desta forma, Stewart (2013, p. 135) enfatiza que:

> Por analogia com a velocidade, consideramos a taxa de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, fazendo Δx tender a 0. O limite dessas taxas médias é chamado taxa (instantânea) de variação de y em relação a x em $x = x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:
>
> Taxa instantânea de variação = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
>
> Reconhecemos este limite como a derivada de $f'(x)$.

Analisando as relações das derivadas citadas, percebe-se que foram destacadas duas interpretações envolvendo este tema, sendo uma associada com a inclinação da reta tangente e a outra com a taxa instantânea de variação em relação a função $y = f(x)$. Thomas (2012, p. 140) afirma que:

> É natural pensar em uma quantidade variando em relação ao tempo, mas outras variáveis podem ser tratadas da mesma forma. Por exemplo, um economista pode querer estudar a razão pela qual o custo da produção de aço varia em relação à quantidade de toneladas produzidas, ou um engenheiro pode querer saber como a potência de um gerador varia com a sua temperatura(...). Logo, taxas instantâneas são limites de taxas médias. Convencionou-se usar o adjetivo *instantâneo* mesmo quando *x* não representa tempo. Entretanto, o adjetivo é omitido frequentemente. Quando dizemos *taxa de variação,* queremos dizer *taxa de variação instantânea.*

Algumas aplicações envolvendo as taxas de variação utilizando derivadas são destacadas por Howard, Bivens e Davis (2007) em algumas áreas como:

✓ Na Biologia é evidenciada pelo interesse da descoberta da variação da quantidade de bactérias de uma colônia em relação ao tempo;

✓ Na Engenharia a taxa é empregada para estudar o comportamento da variação do comprimento de um cano de metal mediante a mudança da temperatura;

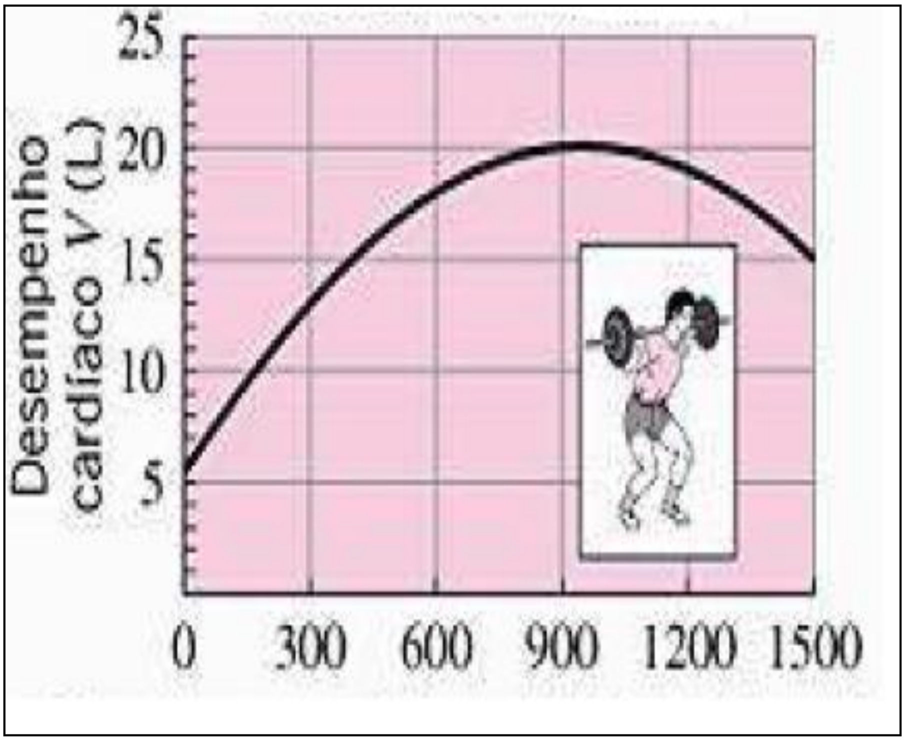
✓ Na economia a taxa é empregada para verificar como os custos de produção mudam em relação a quantidade do produto que está sendo produzido;

✓ Na medicina o interesse na utilização de taxa de variação como derivada está centrado na mudança do raio de uma artéria em relação a concentração de álcool na corrente sanguínea.

Contextualizando as afirmações citadas, destaca-se a seguir um exemplo de aplicação de taxa de variação envolvendo derivadas citados por Howard, Bivens e Davis (2007, p. 175).

O fator limitante na resistência atlética é o desempenho cardíaco, isto é, o volume de sangue que o coração pode bombear por unidade de tempo durante uma competição atlética. A figura 5 mostra um gráfico de teste de esforço de desempenho cardíaco V em litros (L) de sangue versus a quantidade de trabalho que está sendo feira W em quilogramas-metros (kg · m) durante 1 minuto de levantamento de peso. O gráfico ilustra o conhecido fato médico de que o desempenho cardíaco aumenta com a quantidade de trabalho, mas, depois de atingir um valor de pico, começa a cair.

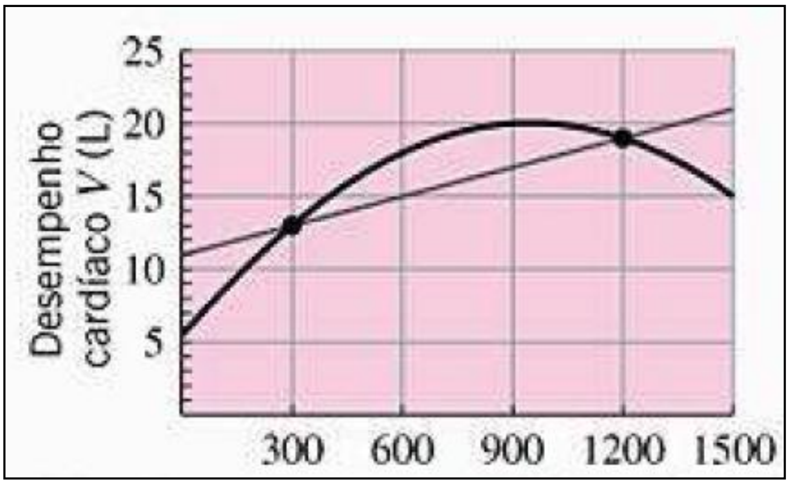
Figura 5 – Teste de esforço no levantamento de peso



Fonte: Howard et. al (2007, p. 175).

a) Usar a reta secante que aparece na figura 6 para estimar a taxa média de desempenho cardíaco em relação ao trabalho a ser executado quando este aumenta de 300 para 1200 kg $\cdot m$.

Figura 6 – Reta secante para estimar a taxa média de desempenho cardíaco em relação ao trabalho



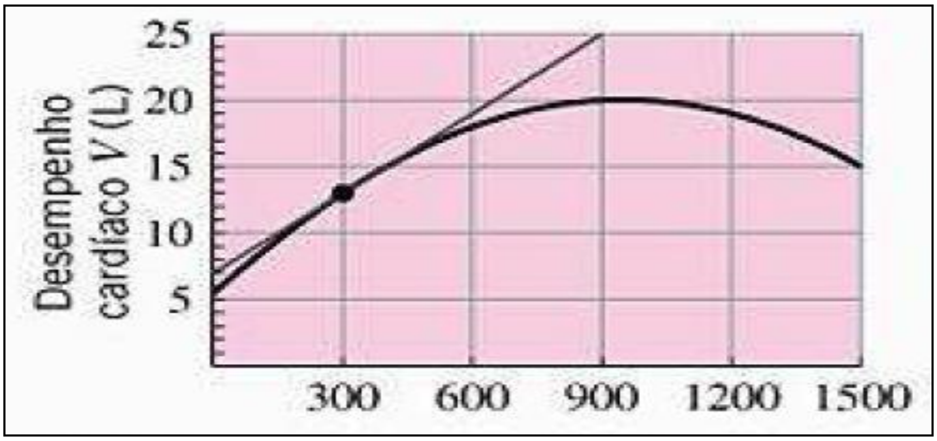
Fonte: Howard et al (2007, p. 175)

Solução: usando os pontos estimados (300, 13) e (1200, 19), a inclinação da reta secante da figura 6 é: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1200) - f(300)}{1200 - 300} = \frac{19 - 13}{1200 - 300} = \frac{6}{900} \approx 0{,}0067 \frac{L}{kg \cdot m}$.

Isso significa que em média o aumento de 1 unidade no trabalho que está sendo executado produz um aumento de 0,0067 L no desempenho cardíaco no intervalo.

b) Usar a reta tangente da figura 7 para estimar a taxa de variação instantânea do desempenho cardíaco em relação ao trabalho que está sendo executado no ponto onde ele é de 300 kg $\cdot\, m$.

Figura 7 – Reta tangente para estimar a taxa de variação instantânea do desempenho cardíaco em relação ao trabalho



Fonte: Howard et al (2007, p. 175)

Solução: Estima-se a inclinação da curva de desempenho cardíaco em W = 300 traçando uma reta que parece encontrar a curva em W = 300 com inclinação igual a da curva da figura 7 Estimando os pontos (0, 7) e (900, 25) nessa reta, obtém-se $\frac{25-7}{900-0} \approx 0{,}02 \frac{L}{kg \cdot m}$.

Outro tópico abordado, no decorrer da intervenção pedagógica desenvolvida nesta dissertação, foi a aplicação de derivadas em relação a máximos e mínimos, onde foram explorados valores extremos de funções. Esta aplicação é importante, pois são "valores extremos (máximo ou mínimo) de uma função a partir de sua derivada. Uma vez que consigamos fazer isso, poderemos resolver uma série de problemas de otimização" (THOMAS; WEIR; HASS, 2012, p. 212). Analogamente, Stewart (2013, p. 248) afirma que:

> Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os *problemas de otimização*, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa.
> A seguir, listamos alguns dos problemas de otimização ...
> ■ Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo de manufatura?
> ■ Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial? (Esta é uma questão importante para os astronautas que têm de suportar os efeitos da aceleração.)
> ■ Qual o raio de uma traqueia contraída que expele mais rapidamente o ar durante uma tosse?
> ■ Sob que ângulo os vasos sanguíneos devem se ramificar de forma que minimizem a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue?
> Esses problemas podem ser reduzidos a encontrar os valores máximo ou mínimo de uma função.

Desta forma, a exploração de máximos e mínimos com o uso de derivadas é fundamental para o entendimento de diversos temas, que são importantes para o desenvolvimento de setores relacionados com os conhecimentos científicos. Além disso, buscam a solução de problemas de otimização, como minimizar custos em empresas com o aproveitamento máximo dos recursos. Analogamente, verifica-se que a exploração de derivadas neste contexto também proporciona a compreensão do comportamento do espaço e formas, enfatizando, por exemplo, a possibilidade de minimizar o desperdício de energia do coração durante o bombeamento do sangue.

Os autores Thomas (2012); Stewart (2013); Flemming (2006) destacam que se uma determinada função **f** for contínua em um intervalo fechado finito definido em [a, b], então **f** tem ambos um máximo e um mínimo absolutos em [a, b]. Esta definição é denominada de Teorema de Valor extremo. Se **f** é contínua e tem exatamente um extremo relativo em um intervalo **I,** ou seja, em x_0.

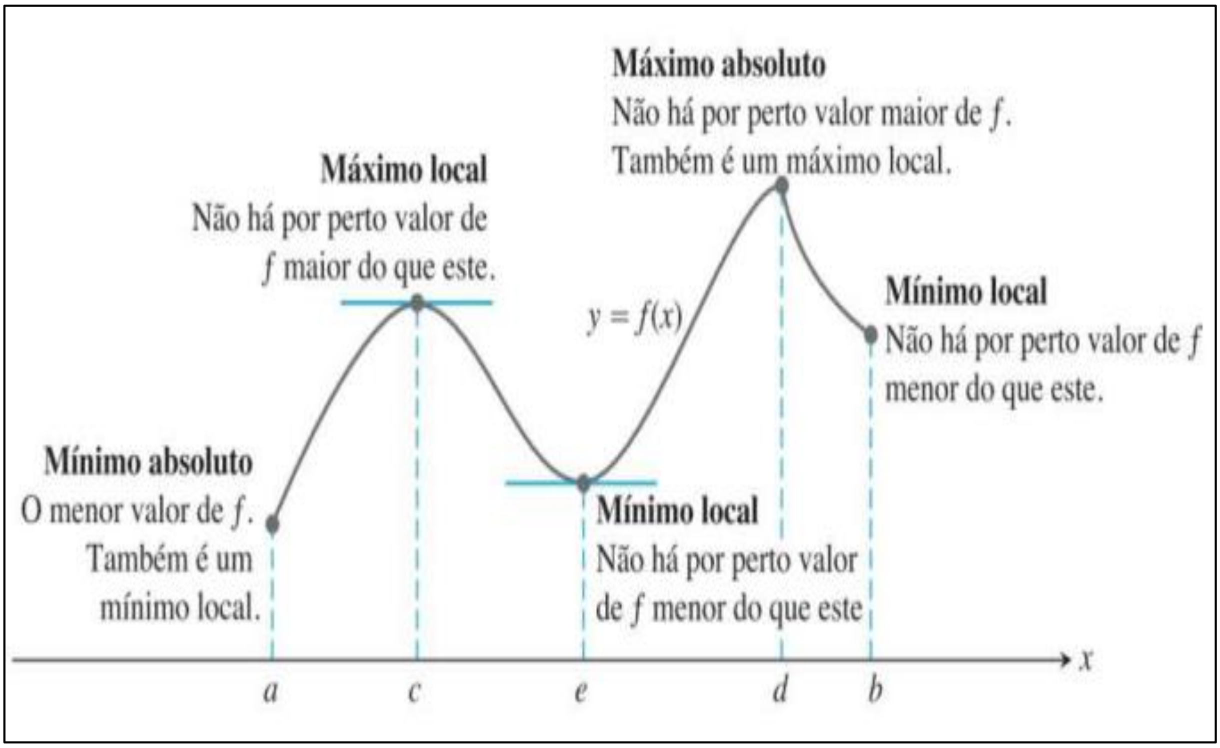
Se f tiver um mínimo relativo em x_0, então $f(x_0)$ é um o mínimo absoluto de **f** em **I**.

Se f tiver um máximo relativo em x_0, então $f(x_0)$ é o máximo absoluto de **f** em **I**.

> Um máximo absoluto também é um máximo local. Sendo o maior valor de todos, é também o maior valor em sua vizinhança imediata. Assim, *uma lista com todos os máximos locais incluirá automaticamente o máximo absoluto, se houver.* De modo análogo, *uma lista com todos os mínimos locais incluirá automaticamente o mínimo absoluto, se houver*. (THOMAS, 2012, p. 214, grifos do autor).

Desta forma, a figura 8 enfatiza as considerações do autor sobre os conceitos de máximo e mínimo.

Figura 8 – Identificação dos tipos de máximo e mínimo em uma função com domínio $a \leq x \leq b$



Fonte: Thomas, Weir e Hass (2012, p. 214).

A figura 8 destaca que os pontos de máximos e mínimos podem ser identificados em uma função em um determinado intervalo fechado, onde esses pontos dependendo de suas características podem ser denominados de Máximo local, Máximo absoluto, Mínimo local e Mínimo absoluto como ilustra a figura 8 enfatizando seus respectivos conceitos. A exploração destes conceitos de máximo e mínimo destacado por Thomas (2012) considera que o estudo de derivadas é relevante porque proporciona investigações acerca de contextos de aplicações relacionados com várias áreas de conhecimento. Dessa forma, contribui para a compreensão de fenômenos envolvendo taxa de variação e otimização.

Na próxima seção, descrevo ideias sobre a Investigação Matemática na sala de aula, destacando-se a fundamentação e os procedimentos utilizados nesta metodologia para a construção do conhecimento matemático.

2.3 Investigação matemática

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) descrevem sobre os fundamentos da Investigação Matemática, bem como sobre a ação pedagógica dos professores e alunos nas aulas de Matemática em que é utilizada esta metodologia. Analisam as contribuições do desenvolvimento de atividades envolvendo a Investigação Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem desta área de conhecimento. Nesta perspectiva os autores destacam que:

> Importa saber se está ao alcance dos alunos investigar questões matemáticas e de que forma isso pode contribuir para a sua aprendizagem. Importa também saber de que competências necessitam os professores para promover esse tipo de trabalho nas suas aulas e que condições são necessárias para que isso aconteça (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 9).

O reconhecimento das condições cognitivas dos educandos para a Investigação Matemática e as potencialidades para o desenvolvimento da aprendizagem deles são fundamentais à exploração do trabalho em sala de aula por meio de tarefas investigativas. Além disso, de acordo com os referidos autores, os professores necessitam compreender que necessitam desenvolver algumas competências e refletir sobre que condições serão necessárias para a realização deste trabalho no seu âmbito escolar.

Segundo Ponte (2016), investigar não significa trabalhar com problemas complexos considerados difíceis, mas com a formulação de atividades sem respostas prontas, que instigue os alunos a formar conjecturas, construir conhecimentos com autonomia. Desta forma, Ponte (2016) destaca que a Investigação Matemática é uma metodologia que dispõe de recursos capazes de incentivar a construção do conhecimento em tópicos tais como a geometria, os números e a estatística.

Diante da potencialidade que a Investigação Matemática vem demonstrando nos últimos anos, é importante ressaltar que:

> Em numerosas experiências já empreendidas com trabalho investigativo, os alunos têm mostrado realizar aprendizagens de grande alcance e desenvolver um grande entusiasmo pela Matemática. Apesar disso, não encaramos as investigações matemáticas como a chave que permite por si só resolver todos os problemas do ensino da Matemática. Há muitas outras atividades a realizar na sala de aula (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 10 – 11).

Contribuindo com a ideia desses autores, Gonçalves (2012) enfatiza que a Investigação Matemática instiga os professores a buscarem mudanças no cotidiano da sua ação pedagógica na sala de aula em prol da construção significativa do conhecimento, mediante a promoção da aprendizagem dos educandos. “Para isso, é necessário que o professor adote uma postura diferenciada em suas aulas, propondo atividades que sejam capazes de desenvolver nos alunos, habilidades diversas de modo que ocorra uma aprendizagem efetiva” (GONÇALVES, 2012, p. 39).

Diante deste contexto, a Investigação Matemática é uma oportunidade para o ensino de matemática. Segundo Menezes (2016, p. 10), as ações com caráter investigativo exploratório mobilizam a participação dos alunos nas aulas, visto que:

> Uma tendência contemporânea no ensino de matemática é o trabalho com atividades exploratórias, atividades com investigação. Essas atividades mobilizam os estudantes a participarem da aula construindo o conhecimento. O professor deixa de ser a figura central, o “dono do conhecimento”, e passa a ser um orientador. Vantagens significativas residem nesse tipo de aula: alunos interagem com objetivos comuns, na busca de determinados resultados podem surgir outros também significativos, conjecturas são produzidas e testadas.

Desta forma, analisando o pensamento do autor, o efetivo trabalho com ações investigativas é relevante porque promove a interação dos educandos com os objetos, que são propícios na construção dos resultados, mediante a confirmação dos significados que são analisados e devem ser legitimados a partir de realizações de etapas que comprovem sua veracidade.

Para o desenvolvimento de trabalhos em sala de aula por intermédio da Investigação Matemática, é fundamental que as tarefas investigativas estejam pautadas em quatro momentos. Tais momentos, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) necessitam ser realizados para dar significado e possibilidade à construção do conhecimento com autonomia. Cada ação desses momentos está descrita no Quadro 1.

Quadro 1: Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problema ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 21).

Desta forma, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), a realização interativa desses quatro momentos é importante para a conquista de resultados satisfatórios, onde a consolidação da construção do conhecimento se concretiza mediante:

✓ reconhecimento da situação problema;

✓ exploração deste contexto para a familiarização das concepções matemáticas do problema;

✓ formulação de questões desafiadoras que instiguem os alunos a investigar e criar estratégias de solução;

✓ organização dos dados;

✓ formulação de conjecturas, confrontando a veracidade das deduções estabelecidas;

- ✓ realização de testes para verificar a eficácia das conjecturas formuladas;

- ✓ o aprimoramento da conjectura para favorecer a consolidação de habilidades matemáticas exploradas;

- ✓ justificação das prováveis deduções como construções intelectuais palpáveis em prol da aprendizagem autônoma;

- ✓ avaliação do procedimento executado que direcionou a construção do resultado, dando ênfase à concepção reflexiva do raciocínio.

Considerando que as tarefas investigativas devem apresentar desdobramento interativo, o Quadro 2 apresenta a natureza dessas ações:

Quadro 2: Natureza de tarefas investigativas

Natureza	Discussão
Aberta	Importante para o desenvolvimento de capacidades como autonomia e lidar com situação complexas.
Fechada	Importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático, que se baseia nas relações estreitas e rigorosas entre dados e resultados.
Acessível	Importante para a autoconfiança, pela probabilidade de alcance de sucesso.
Desafiante	Importante para uma efetiva experiência matemática.

Fonte: Ponte (2016); Honorato (2018, p. 27).

Concernente a natureza de tarefas investigativas, percebe-se que todas são importantes de acordo com os objetivos traçados pela prática do professor. Mediante o planejamento de trabalho e o contexto de aplicação, todas as naturezas de atividades citadas no Quadro 2 devem ser exploradas em momentos específicos, condicionadas as metas estabelecidas do trabalho pedagógico. Diante desta fundamentação é essencial a percepção de que:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na

> apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 23).

Interagindo com a argumentação de outros autores (BACCARIN, 2008; PEREIRA; SCHMITT, 2015; MENEZES, 2016; e MACCALI, 2017; MAGALHÃES; VARIZO, 2016), que realizaram trabalhos explorando as ideias citadas anteriormente, verifica-se que o desenvolvimento de tarefas investigativas nas aulas de Matemática contribui para a construção coletiva de conhecimento, a partir da interação dos alunos entre si e com o professor, onde todas as etapas realizadas devem ser discutidas e argumentadas. O diferencial do trabalho com Investigação Matemática é a conexão mútua de todas as etapas das atividades que vão deste o reconhecimento do problema até a avaliação do resultado do raciocínio. Desta forma, é importante explicitar que o aluno tem a responsabilidade de demonstrar iniciativa na busca pela descoberta justificada e os professores não devem apresentar respostas ou caminhos sobre a resolução das atividades.

Como introduzir uma aula usando Investigação Matemática? Pautado nos trabalhos realizados dos autores citados anteriormente, a aula de investigação é um desafio para o professor, é uma jornada rumo ao desconhecido, é uma tarefa de busca em que o aluno é o detetive, ele é o cientista na construção do conhecimento. Assim, o discente é o próprio matemático formando suas próprias conjecturas e responsável pela escolha dos caminhos que o conduzirá as descobertas almejadas.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) sempre é possível organizar um cronograma de como ocorre o início de uma investigação, mas é improvável definir como ela irá terminar. Não tem como prever os caminhos que os alunos usarão, os conflitos entre eles, o que irão conquistar ou se precisam recomeçar, e nem prever qual será o comportamento da turma diante das intervenções do professor, visto que:

> Em sala de aula, o professor tem papel essencial no planejamento da atividade investigativa. Além de definir a relevância dessa tarefa dentre as demais a serem realizadas pela turma, também decide com que frequência ela será recorrente. Após selecionar a situação a ser investigada, o docente deve iniciar o planejamento da aula. Na organização e gestão da aula, deve levar em conta tanto a natureza da atividade da investigação quanto os objetivos almejados. Nestas definições, deve considerar, em particular, o modo pelo qual os alunos realizarão o trabalho (PEREIRA, 2015, p. 27).

Destaca-se ainda que para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) o desenvolvimento de uma tarefa de investigação deve ser realizado a partir de três fases mediante a aplicação de uma aula ou um conjunto de aulas. Assim, o Quadro 3 destaca cada um dos estágios que os autores consideram fundamentais para a execução de uma tarefa investigativa.

Quadro 3: Fases do desenvolvimento de uma atividade de investigação

Fases	Ações
Primeira	Introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito.
Segunda	Realização da investigação, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma.
Terceira	Discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

Fonte: Ponte; Brocardo; Oliveira (2016, p. 25).

Segundo os autores, essas fases podem ser executadas de diversos modos, mas para os mesmos, a maneira mais utilizada pelos professores é: “uma pequena introdução, seguida da realização da investigação, em pequenos grupos e, finalmente, a discussão dos resultados, em grande grupo” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 26). Portanto, de acordo com os autores, o trabalho em sala de aula por meio de tarefas investigativas pode ser pautado nas concepções destas três fases. É fundamental o professor, no decorrer destas fases, assumir o papel de mediador, estimulando os alunos a construírem conhecimento de forma autônoma. De acordo com os autores, investigar é uma ação que objetiva encontrar descobertas mediante a exploração da criticidade e da capacidade de produzir conceitos.

A aula de investigação, de acordo com Ponte, Brocardo, Oliveira (2016) deve ser desenvolvida mediante a reflexão das seguintes ações: o arranque da aula, o desenvolvimento do trabalho, a discussão da investigação e os papéis do professor numa aula de investigação. Desta forma, fica evidente que para a realização de uma aula de cunho investigativo, tanto o professor quanto os alunos devem assumir o papel de investigadores para realizarem ações fundamentadas em conceitos que caracterizem a efetivação de cada etapa do processo. De acordo com os referidos autores, ao usar Investigação Matemática não apenas se realiza uma tarefa de resolução de exercício, mas um conjunto de ações interligadas capazes de gerar descobertas que estimulem a produção de conhecimentos com autonomia. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) destacam que essas ações são fundamentadas em concepções e atitudes que garantem a eficácia dos procedimentos que devem ser adotados para o desenvolvimento de uma aula de investigação, conforme apresentados a seguir:

1. O arranque da aula:

a) É o momento essencial do trabalho porque o sucesso das etapas seguintes dependerá desta fase. Apesar de ser curta, é fundamental para construção dos passos seguintes da aula de forma crítica;

b) O professor precisa garantir a compreensão da tarefa é o que se espera de cada aluno no desenvolvimento da atividade;

c) É um momento também que o professor deve ter muita atenção para conduzir os alunos a trabalharem com tarefas investigativas, visto que, provavelmente os alunos desconhecem as concepções de Investigação Matemática;

d) Nesta fase é fundamental a compreensão por parte dos educandos o significado de investigar.

2. O desenvolvimento do trabalho é executado a partir dos seguintes aspectos:

a) As situações devem ser exploradas mediante a formulação de questões;

b) As conjecturas devem ser formuladas e testadas;

c) Analisar as concepções destacadas para a justificação das conjecturas.

3. A discussão da investigação deve ser desenvolvida mediante:

a) A interação entre os grupos é o momento importante de partilha de conhecimento;

b) Os alunos devem analisar os caminhos adotados e confrontá-los, mediante reflexão das conjecturas discutidas e justificadas;

c) Neste momento é fundamental o papel adotado pelo professor como mediador para garantir que os resultados e os processos mais coerentes da investigação sejam comunicados;

d) É essencial a reflexão de como o trabalho foi realizado em sala de aula e destacar a organização das principais ideias mediante a descrição da estratégia em busca de respostas;

e) Aprofundamento de uma conjectura é relevante para a legitimação da construção de conhecimentos.

4. Os papeis de professor numa aula de investigação deve ser:

a) Estar atento a sempre desafiar os alunos;

b) Utilizar durante o processo ferramentas para avaliar os alunos;

c) Raciocinar matematicamente para desenvolver atividades que instiguem os alunos a construírem conhecimentos;

d) Apoiar o trabalho dos alunos.

Corroborando com as arguições dos autores citados, Cavalheiro (2017, p. 56) afirma que:

> Em uma investigação em sala de aula, os alunos são, portanto, o centro do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. São eles os autores da construção dos próprios conhecimentos, no momento da elaboração, verificação e resolução de questões, problemas e conjecturas. Vale ressaltar que o papel do professor é fundamental para que tudo isso se concretize de forma a atingir os objetivos propostos para a(s) aula(s).

Desta forma, o professor deve proporcionar em sala de aula um ambiente favorável ao desenvolvimento de tarefas investigativas a partir de ações que promovam a relação educador e educandos. Essa interação mútua e um ambiente de aprendizagem favorável são fundamentais e precisam ser construídos com significados transparentes para garantir o sucesso do desenvolvimento das tarefas de investigação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

Desta forma, as tarefas investigativas no âmbito da matemática são ações construtivas dotadas de potenciais estimuladores aos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. A interação contínua entre os agentes do processo (professor/aluno) é essencial para garantir as metas estabelecidas mediante a realização de um trabalho pedagógico diferenciado e desafiador, visto que, tanto o professor quanto o aluno devem estarem envolvidos nas atividades assumindo seus papeis com compromisso e responsabilidade. Além disso, o registro dos alunos durante o processo é importante à promoção da reflexão das estratégias adotadas para a formulação das conjecturas, mediante o destaque dos caminhos discutidos pelos alunos

O trabalho em sala de aula mediado por Investigação Matemática tem potencialidade para desenvolver um ensino com qualidade e promover a aprendizagem dos alunos de forma sistematizada. Além disso, a construção do conhecimento de forma crítica reflexiva, onde a capacidade interpretativa qualifica a cognição matemática, é essencial à compreensão de fenômenos que requer um olhar matemático mais apurado.

Todo trabalho pedagógico relacionado com os processos de ensino e de aprendizagem devem ser avaliados para verificar sua eficiência. Portanto, as tarefas de Investigação Matemática devem passar por este processo também, porque de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 109):

> Essa avaliação permitirá ao professor saber se os alunos estão progredindo de acordo com as suas expectativas ou se, pelo contrário, é necessário repensar a sua ação nesse campo. Além disso, permitirá ao aluno saber como o seu desempenho é visto pelo professor e se existem aspectos a que precisa dar mais atenção.

Os autores ainda enfatizam que as investigações estão pautadas no alcance de alguns objetivos curriculares essenciais ao sucesso da aprendizagem. A construção autônoma de conhecimentos, que instrumentalizarão os educandos a desenvolverem capacidades essenciais à compreensão e aperfeiçoamento de habilidades e competências matemáticas, são indispensáveis para a formação escolar, tais como:

> Em primeiro lugar, pretende-se que o aluno seja capaz de usar conhecimentos matemáticos na resolução da tarefa proposta. Em segundo lugar, pretende-se que o aluno desenvolva a capacidade de realizar investigações. E, em terceiro lugar, pretende-se promover atitudes, tais como a persistência e o gosto pelo trabalho investigativo (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p.109).

Para a avaliação desses objetivos, estão à disposição dos professores várias ferramentas tanto de natureza escrita como oral, tais como: relatórios escritos, observação informal, apresentações orais, etc. O relatório é uma produção textual sobre o desenvolvimento de um trabalho e pode ser feito individualmente ou em grupo. O segundo instrumento avaliativo se refere a uma coleta de informações durante a realização da tarefa e do compartilhamento das conclusões à turma. As apresentações orais podem ser feitas tanto de maneira individual quanto em grupo, é o momento propício onde o trabalho realizado é apresentado aos demais colegas da turma e ao professor, constituindo assim um momento de avaliação e de aprendizagem (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

A próxima seção - o estudo da arte – apresento alguns estudos já efetivados em relação a Investigação Matemática e a exploração do ensino de derivadas.

2.4 Estudo de trabalhos referentes ao ensino de Derivadas

A pesquisa de dissertações relacionadas com o tema da presente investigação no portal da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) foi fundamental para o embasamento deste trabalho. Para o desenvolvimento desta pesquisa, utilizei algumas palavras-chave como "Investigação Matemática e ensino de derivadas", mas a busca não encontrou nenhum resultado com a junção destas palavras. Então pesquisei "Investigação Matemática" e encontrei 105 trabalhos, e depois busquei "ensino de derivadas" e 5 dissertações foram encontradas. Destes trabalhos selecionei três dissertações relacionadas com o tema em estudo. Uma explora derivadas com tarefas investigativas, e as outras duas destacam a exploração de *softwares* no ensino de cálculo – conceitos relacionados às derivadas de funções reais. Os trabalhos selecionados estão destacados no quadro 4, mediante a ênfase do título e do objetivo geral.

Quadro 4: Dissertações sobre Investigação Matemática e derivada

TÍTULO	AUTOR	ANO	OBJETIVO GERAL
Diferentes abordagens do conceito de derivada: uma proposta de Investigação Matemática	Allan Silva Ferreira	2017	Elaborar um material de apoio para o professor para ser utilizado na introdução do estudo da Derivada, que auxilie na atuação didática do professor de Cálculo, com a finalidade de favorecer ao aluno uma melhor compreensão na construção do conceito de Derivada

Construção e interpretação de gráficos com o uso de *softwares* no ensino de Cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções reais	Marcio Augusto Gama Ricaldoni	2014	Identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, a partir da realização de atividades de construção e interpretação de gráficos.
Aplicações das Derivadas no Cálculo I: atividades investigativas utilizando o GeoGebra	Daniele Cristina Gonçalves	2012	Desvendar as contribuições das atividades investigativas com o uso das TICE's para os processos de ensino e aprendizagem do conceito de derivadas e suas aplicações em Cálculo Diferencial e Integral I.

Fonte: do autor.

Ferreira (2017) desenvolveu um trabalho de conclusão de curso de mestrado vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, onde explorou atividades relacionadas com derivadas através do tema "diferentes abordagens do conceito de derivada: uma proposta de Investigação Matemática com alunos de Licenciatura em Matemática". As dificuldades de aprendizagem e o alto índice de reprovação dos alunos foram determinantes para investigar alternativas que proporcionassem melhores resultados cognitivos relacionados a derivadas. Diante deste propósito, o trabalho foi direcionado a partir da abordagem da Investigação Matemática e das TICs – Tecnologias da Informação e Comunicação, mediante a utilização de *smartphones* através do aplicativo *Geogebra* e vídeos do canal do *youtube* (FERREIRA, 2017).

O autor descreve o tratamento de alguns livros didáticos referente ao conceito de derivadas, destacando que:

> Em todas as obras analisadas, o estudo de derivada é abordado inicialmente pelo aspecto geométrico "reta tangente a uma curva". Lembrando que a obra mais antiga, de Piskounov foi publicada em 1977 e, a mais recente, de Stewart, em 2014.
> Verificamos, pela análise das obras, que elas se aproximam no que diz respeito à organização e sequência na introdução de derivada, bem como suas abordagens. No entanto, as obras se distanciam bastante no que diz respeito à contextualização, posicionamento histórico e à aplicação do estudo das derivadas (FERREIRA, 2017, p. 65).

O referido autor, utilizou a abordagem qualitativa a partir da análise textual discursiva enfatizada por Moraes e Galiazzi (2007). Além disso, a pesquisa destacou um produto educacional que foi elaborado para auxiliar docentes de Cálculo Diferencial e Integral I. Diante dos resultados obtidos, o autor enfatiza que a "A investigação matemática mostrou-se uma metodologia eficaz para o ensino e aprendizagem; trata-se de um caminho, que consideramos sem volta, os resultados obtidos com uso desta metodologia são muito satisfatórios" (FERREIRA, 2017, p. 103). Os resultados referidos pelo autor, estão relacionados com a capacidade que os alunos desenvolvem de construir conhecimentos matemáticos a partir da exploração de tarefas investigativas por meio da formulação de conjecturas, tais como perceber que muitos problemas envolvendo taxa de variação, maximização e minimização podem ser resolvidos mediante a exploração de derivadas.

O estudo de Ricaldoni (2014) intitulado "Construção e interpretação de gráficos com o uso de *softwares* no ensino de cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções reais", foi uma investigação que gerou o seu trabalho de conclusão de curso do Mestrado Professional em Educação Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto. Neste trabalho, o autor buscou identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, a partir da realização de atividades de construção e interpretação de gráficos.

Esta pesquisa foi realizada com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática a partir da exploração de atividades de construção de gráficos por meio do *software* Geogebra. A pesquisa possuiu cunho qualitativo e a coleta de dados foi desenvolvida por meio da pesquisa de campo. As informações coletadas foram analisadas a partir dos registros das resoluções das atividades propostas aos alunos, arquivos das construções feitas no GeoGebra e questionário de avaliação das atividades aplicados aos discentes (RICALDONI, 2014).

O autor destaca que foram implementadas cinco atividades exploratórias relacionadas a derivadas de funções reais, mediante a utilização do GeoGebra porque é uma ferramenta tecnológica que tem funções dinâmicas que possibilita a construção de gráficos com precisão e dinamismo (RICALDONI, 2014). A utilização de atividades investigativas com recursos tecnológicos beneficiou a exploração de gráficos de funções e os problemas de maximização e minimização. Diante dos resultados, o autor concluiu que:

> Nossa pesquisa mostrou que a realização das atividades exploratórias com a utilização de um *software* contribuiu para a formação e a lapidação de várias imagens conceituais relacionadas às derivadas, com destaque para as imagens algébrica e geométrica da derivada como inclinação da reta tangente num ponto, além das suas propriedades fundamentais na construção do gráfico de uma função.
> Nossa pesquisa mostrou que a realização das atividades exploratórias com o uso do GeoGebra contribuiu para a possibilidade de construção de novos conceitos associados à derivada no laboratório de informática, sem que esses conceitos tenham sido trabalhados em sala de aula, como foi o caso da apresentação das derivadas laterais de uma função (RICALDONI, 2014, p. 88 – 89).

Em suma, de acordo com o autor, os resultados demonstraram que trabalhar os conteúdos de derivadas mediante a exploração do *software* Geogebra contribui para a compreensão eficaz dos conceitos relacionados a esses temas.

Outra dissertação de mestrado analisada foi de Gonçalves (2012). A autora explorou atividades investigativas e o GeoGebra a partir do tema "aplicações das derivadas no Cálculo I: atividades investigativas utilizando o GeoGebra". Este trabalho está vinculado ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho de Bauru – SP. Com a realização desta pesquisa, ela buscou "Desvendar as contribuições das atividades investigativas com o uso das TICE's para os processos de ensino e aprendizagem do conceito de derivadas e suas aplicações em Cálculo Diferencial e Integral I" (GONÇALVES, 2012, p. 22).

O referido trabalho apresenta e discute algumas aplicações de derivadas no contexto da Educação Matemática do Ensino Superior, com o intuito de contribuir para a formação de futuros professores de Matemática. A autora utilizou a abordagem qualitativa e coletou os dados por meio dos registros das soluções dos alunos, construções feitas no GeoGebra, questionário de avaliação das atividades, questionário de avaliação aplicada ao professor da disciplina e registros de campos dos pesquisadores.

A autora desenvolveu quatro tarefas investigativas destacando a construção de sólidos como cilindro, caixa retangulares, e explorou as dimensões mediante a investigação de áreas e volumes nos contextos das concepções de derivadas em relação a máximos e mínimos. Em todas as atividades o GeoGebra foi utilizado para a construção dos gráficos como recurso para auxiliar na elaboração de conjecturas. Mediante a aplicação dessas atividades, Gonçalves (2012, p. 105) enfatiza que:

> Nossa pesquisa apontou que a realização das atividades investigativas contribuiu para a criação de um ambiente de discussão, conjecturação e colaboração que nem sempre é possível de se ter na sala de aula tradicional, na qual o processo de aprendizagem é, quase sempre, totalmente guiado pelo professor.
> Isso foi percebido por todos os atores do cenário de pesquisa, ou seja, pelos professores pesquisadores, pelo professor responsável e, principalmente, pelos alunos participantes, que destacaram a importância para sua aprendizagem das discussões proporcionadas pela realização das atividades em grupos.
> Nossa pesquisa apontou que a realização das atividades investigativas contribuiu para formação inicial dos alunos participantes, futuros professores de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, na medida em que eles tiveram a oportunidade de refletir sobre a importância da realização de atividades com *softwares* para o futuro professor de Matemática.

Os três trabalhos citados, foram importantes para efetivação desta pesquisa, pois abordaram a exploração de derivadas, tema principal deste trabalho. Além disso, dois destes trabalhos enfatizam o estudo de derivadas por meio da Investigação Matemática, metodologia abordada na presente pesquisa. O primeiro trabalho, Ferreira (2017), destacado no Quadro 4 explora tarefas investigativas para instigar os alunos a construírem conhecimentos sobre derivada a partir da investigação de situações padrões que possibilite a formação intuitiva deste conceito, mediante a exploração dos temas velocidade média, interpretação geométrica por meio do aplicativo Geogebra e trabalha com a História da Matemática através de vídeos do *Youtub*e, enfatizando a origem do Cálculo Diferencial e Integral. O segundo e o terceiro trabalho abordam Investigação Matemática por meio do *software* Geogebra, sendo que Ricaldoni (2014) enfatiza a maioria das atividades na construção de gráficos de funções e uma atividade sobre problemas de maximização e minimização, enquanto Gonçalves (2012) utiliza somente problemas de aplicação (máximo e mínimo) para explorar o conceito de derivada.

Desta forma, os três trabalhos citados, contribuíram para o desenvolvimento desta dissertação porque abordaram o mesmo tema aqui apresentado. De acordo com esses trabalhos, o desenvolvimento das tarefas investigativas contribui para a ressignificação de conceitos matemáticos, onde o aluno assume o papel de investigador, e se lança na busca da construção de conhecimentos por meio da formulação de conjectura, teste, validação e socialização dos resultados.

Os suportes teóricos dos três trabalhos citados, contribuíram significativamente para a reflexão e construção teórica desta dissertação. Uma característica apresentada por dois desses trabalhos que diferencia do presente trabalho foi a definição do *software* Geogebra como ferramenta para explorar as questões propostas, isto ocorreu porque deixei os alunos a vontade para buscar as ferramentas que desejassem. Já em relação as tarefas investigativas utilizadas pelos autores estas auxiliaram para melhorar o entendimento sobre questões abertas e fechadas, visto que, nota-se que as tarefas exploradas por esses autores apresentavam características voltadas para exercícios e problemas e não tarefa investigativa. Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 22) afirmam que:

> Numa investigação, as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. Em uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes.

Na sequência, apresento os procedimentos metodológicos, destacando a abordagem da pesquisa, os instrumentos de coletas de dados, a descrição do objeto de estudo, a forma de análise de dados e as atividades realizadas no decorrer da intervenção pedagógica efetivada.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos de pesquisa adotados por professores em diversas áreas do conhecimento têm evoluído nos últimos anos devido principalmente as realizações de pesquisas desses profissionais em prol da compreensão dos fatores que contribuem para as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos (CAVASOTO, 2008). Pesquisas desenvolvidas explorando tendências na Educação Matemática, coletam informações que orientam os educadores a buscarem novos horizontes para a otimização das atividades desenvolvidas em sala de aula de acordo com as necessidades intelectuais dos educandos.

Desta forma, a pesquisa na Educação Matemática é um método científico refinado, pautado na sistematização de um processo contínuo que visa descobrir respostas para problemas relacionados com diversos contextos. Trata-se de um processo formal, com características específicas, fundamentadas em regras que direcionam a construção do trabalho científico em busca da obtenção de novos conhecimentos. Além disso, é o desenvolvimento de ações planejadas e orientadas para a conquista do saber almejado (GIL, 2019; LAKATOS; MARCONI, 1996). Corroborando com esta ideia, Seabra (2001) enfatiza que a pesquisa deve ser analisada como um procedimento sistemático, argumentado no controle e sujeito a críticas, e está estreitamente comprometido com a descoberta de novos saberes de qualquer área do conhecimento.

Para o desenvolvimento de um trabalho de cunho científico é fundamental compreender as noções que caracterizam a metodologia, isto é, o caminho que deve ser adotado para o alcance dos objetivos almejados. Convergentemente, Figueiredo e Souza (2011, p. 144) afirmam que “metodologia é o conjunto de métodos ou caminhos que devem ser percorridos na busca do conhecimento”. É um planejamento de passos que devem ser seguidos de forma organizada de acordo com o contexto de aplicação de determinadas tarefas em prol da conquista do resultado almejado. Assim, a presente proposta foi fundamentada na pesquisa qualitativa porque “pesquisas realizadas segundo uma abordagem qualitativa nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações” (BORBA; ARAÚJO, 2017, p. 25).

Os autores destacam que a Educação Matemática é um universo de investigação determinado globalmente, mas a utilização de abordagens qualitativas neste campo de pesquisa ainda é novo e está ganhando força nos últimos anos. Desta forma, é desafiador o professor de matemática, habituado a trabalhar com dados quantitativos, adotar procedimentos metodológicos com características qualitativas como ferramenta de produção de conhecimento (BORBA; ARAÚJO, 2017). Esta abordagem de pesquisa contribuiu para o desenvolvimento desta pesquisa com características investigativas pela sua essência de buscar a compreensão dos fatos de acordo com o processamento fiel das informações registradas. Analogamente, percebe-se que:

> As características da pesquisa qualitativa são: objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 32).

Araújo e Borba (2017) ainda contribuem com esta temática destacando que a pesquisa qualitativa deve estar pautada em uma visão de conhecimento que busque a otimização das informações a partir dos instrumentos de coleta de dados como observações, entrevistas, análises de vídeos, interpretações, etc. Assim, a presente pesquisa é de cunho qualitativo, pois a pretensão foi compreender os comportamentos de um determinado grupo ao trabalharem com tarefas investigativas explorando assuntos relacionados ao tema derivadas. Além disso, foram analisadas as estratégias e conjecturas elaboradas, por cada grupo de alunos, no decorrer do desenvolvimento das tarefas investigativas, bem como a argumentação da forma de resolução na socialização dos resultados.

À luz desta abordagem, a observação participante auxiliou o desenvolvimento dinâmico deste trabalho, visto que:

> A observação participante é uma modalidade especial de observação na qual você não é apenas um observador passivo. Em vez disso, você pode assumir uma variedade de funções dentro de um estudo de caso e pode, de fato, participar dos eventos que estão sendo estudados (YIN, 2001, p. 112).

Analisando a afirmação do autor, a observação participante proporcionou o contato constante e ativo com o grupo em estudo porque “consiste na participação real do pesquisador com a comunidade ou grupo. Ele se incorpora ao grupo, confunde-se com ele. Fica tão próximo à comunidade quanto um membro do grupo que está estudando e participa das atividades normais deste” (MARCONI; LAKATOS, p. 2019, p. 211). Esta atitude é importante porque o papel do professor pesquisador na Investigação Matemática é de mediador, ou seja, é o elemento-chave que deve auxiliar os alunos a compreenderem a essência de investigar, proporcionando o entendimento de todos os alunos acerca do sentido da tarefa proposta (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

Como as tarefas investigativas foram desenvolvidas em sala de aula, utilizei a observação participante pela importância dos registros das ações dos discentes para posterior análise. Assim, fiquei atento observando reações dos alunos, suas falas e argumentos no decorrer da resolução das atividades. Tais observações anotei em um caderno de campo, no qual registrei também reflexões no decorrer do desenvolvimento da intervenção, pois o “caderno de campo, deve conter o registro detalhado das informações, observações, bem como as reflexões que surgem durante toda a pesquisa” (SOUZA, 2013, p. 10).

Os dados foram coletados mediante os seguintes instrumentos: observação participante, questionário e recolha documental por meio dos cadernos de anotações dos discentes e do docente, tais instrumentos foram auxiliados pelas ferramentas gravador de voz e fotografia. Os alunos registraram durante as atividades informações relevantes sobre os procedimentos adotados, destacando as conjecturas e conclusões estabelecidas sobre os conteúdos explorados em um caderno de anotações. Cada grupo recebeu um caderno e elegeu um aluno, por atividade, para fazer os registros, isto é, os resultados e os procedimentos utilizados para a elaboração de conjecturas em cada atividade.

O gravador de voz foi utilizado para coletar informações que poderiam ter escapado do registro dos cadernos do professor e dos alunos. Em cada grupo foi colocado um gravador para gravar as discussões durante o desenvolvimento de todas as atividades, bem como foram gravadas as socializações que ocorreram no final das tarefas. O uso desta ferramenta corrobora significativamente para a reprodução fiel da veracidade dos resultados apresentados (MARCONI; LAKATOS, 2019).

A fotografia foi outro recurso empregado porque potencializa a captura real do contexto do local da atividade, a expressão facial dos alunos, os gestos no momento dos diálogos na busca de estratégias para a elaboração de conjecturas. Além disso, o olhar dos participantes no momento da comprovação das conclusões apresentadas é importante, pois, dialogando com Andrade (2008) percebe-se que a fotografia é uma ferramenta que assume papéis de mediação, registro e arquivamento. Em relação ao gravador de voz e a fotografia, eles foram empregados como ferramentas complementares que auxiliaram na observação, mas os instrumentos de coletas de dados utilizados foram a observação participante por meio dos gravadores e fotografias, o questionário e a recolha documental por meio dos cadernos de anotações.

Foi aplicado um questionário ao término das atividades para verificar a avaliação dos alunos sobre as tarefas investigativas desenvolvidas. Este instrumento se encontra no apêndice C e as questões tiveram como foco as opiniões dos alunos sobre o desenvolvimento das tarefas investigativas. De acordo com Marconi, Lakatos (2019) o questionário é um documento elaborado com várias perguntas ordenadas que fornecem informações importantes para a análise posterior dos dados coletados, ou seja, é uma técnica de coleta de dados que busca respostas sobre o objeto estudado a partir de questões produzidas de acordo com o interesse do pesquisador.

Mediante a utilização dos procedimentos de coleta de dados citados, foi possível coletar informações suficientes para a análise de dados que possibilitou a resposta ao problema de pesquisa: “Que estratégias e conjecturas os alunos da disciplina de Cálculo I, de uma turma de licenciatura em Matemática, elaboram na exploração de tarefas investigativas no estudo de derivadas?”

Os dados coletados foram analisados a partir da análise descritiva porque o foco foi descrever todos os fatos e dados de maneira mais real e verídica possível. Segundo Cervo *et al* (2007) esta análise possibilita a descrição detalhada das características e das relações existentes nos grupos, comunidades ou realidade analisada. Além disso, para esses autores este tipo de análise favorece a pesquisa de forma mais ampla e completa, pois se preocupa com a análise dos fatos, os quais devem ser descritos em detalhes, para então serem analisados à luz de referenciais teóricos consistentes.

A presente pesquisa foi efetivada na Universidade do Estado do Amazonas – UEA, no Centro de Estudos Superiores de Tefé – CEST, localizado no município de Tefé, interior do estado. Para o desenvolvimento deste trabalho, no local citado, foi encaminhado, para a direção deste centro educacional, o termo de consentimento de realização da pesquisa (APÊNDICE A).

Esta instituição de ensino superior, UEA, iniciou suas atividades em 2001 com o objetivo de "promover a educação, desenvolvendo o conhecimento científico, em particular o da região Amazônica, juntamente com valores éticos capazes de integrar o homem à sociedade e, também, aprimorar a qualidade dos recursos humanos" (ESTÁCIO, 2012, p. 1538), focada no desafio de desenvolver a Amazônia de forma sustentável. Desenvolve atuação acadêmica nas seguintes áreas: Ciências Exatas e da Terra, Ciências Biológicas, Engenharias, Ciências da Saúde, Ciências Agrárias, Ciências Sociais Aplicadas, Ciências Humanas e Linguística, Letras e Arte. Saliento que oferece os níveis de ensino de graduação, pós-graduação Lato Sensu e Stricto Sensu. Trabalha com as modalidades de ensino presencial, presencial modular e presencial mediado por tecnologia, através de oferta regular ou modular. Oferece os cursos nas modalidades de bacharelado, licenciatura e tecnólogo nas Escolas Superiores, Centros de Estudos Superiores e Núcleos de Ensino Superior. As escolas estão todas localizadas na capital do estado (Manaus), os centros e os núcleos estão localizados nos municípios do interior do Estado.

A pesquisa foi desenvolvida na disciplina de Cálculo I, em uma turma de Licenciatura em Matemática no Centro de Estudos Superiores de Tefé – CEST/UEA. As tarefas investigativas foram aplicadas no primeiro semestre de 2019, para 24 discentes, 16 homens e 8 mulheres, que cursavam o 2º período da graduação. Além disso, vale salientar que 8 desses alunos já cursaram esta disciplina anteriormente e não foram aprovados. Vale destacar também que antes da aplicação das tarefas investigativas, que gerou os resultados apresentados na próxima seção, desta dissertação, foi explorada uma tarefa investigativa para proporcionar aos alunos a percepção dos fundamentos do desenvolvimento de uma tarefa de cunho investigativo.

A disciplina de Cálculo I é oferecida no 2º período do curso porque no 1º é ministrado o componente curricular Matemática Elementar para promover uma revisão dos temas básicos de matemática, principalmente sobre funções, de modo a oferecer a reconstrução dos fundamentos matemáticos que são pré-requisitos para Cálculo I. A carga horária é de 90 horas e em sua ementa constam os seguintes temas: sequências; limites e continuidade; derivada; estudo da variação das funções; derivada das funções inversas; aplicações das derivadas; teorema do Valor Médio; integral de Riemann; teorema fundamental do Cálculo; técnicas de integração; aplicações de integrais. Mediante a ementa da referida disciplina, enfatizo que foi ministrado o ensino de derivadas explorando o conceito de derivadas como taxa de variação e a aplicação de derivadas envolvendo máximos e mínimos de funções.

A turma foi dividida em grupos de quatro a seis discentes, pois é um dos princípios da investigação matemática. Foram exploradas cinco tarefas investigativas fundamentadas nas características dos momentos e das fases do desenvolvimento do trabalho pedagógico utilizando Investigação Matemática em sala de aula. Antes do início das atividades, foi realizada uma reunião com os alunos para a explicação dos procedimentos das tarefas que, posteriormente, foram desenvolvidas, discussão sobre a Investigação Matemática, esclarecimentos dos princípios éticos e apresentação do Termo de Livre Consentimento e Esclarecido (APÊNDICE B).

As atividades foram realizadas em sete encontros e cada tarefa foi desenvolvida em três aulas de 50 minutos cada uma. Cada encontro contou com a orientação da atividade proposta pelo professor de forma escrita. Em seguida, os grupos foram motivados para a realização da investigação da tarefa, que visou a elaboração de conjecturas, depois testá-las e validá-las. A discussão dos resultados foi desenvolvida por meio dos relatos coletivos dos discentes, onde apresentaram as conclusões encontradas e os procedimentos adotados na resolução das atividades propostas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

No decorrer do desenvolvimento de cada tarefa, eu como professor e pesquisador, instiguei os discentes a explorar as tarefas, com o intuito de promover a construção de conjecturas. Estas, foram analisadas a partir de uma reflexão crítica fomentada durante todo o processo investigativo. Depois do desenvolvimento das tarefas investigativas, foi aplicado um questionário (APÊNDICE C) para coletar as opiniões dos alunos referente a utilização da Investigação Matemática.

Nos quadros 5, 6, 7, 8 e 9 são apresentadas as tarefas investigativas que foram exploradas no decorrer da prática pedagógica.

Quadro 5 - Tarefa 1: explorando aluguel de imóvel

Antônio é um pequeno empresário que trabalha com aluguel de imóvel. Atualmente ele possui 20 casas para alugar, algumas pequenas com o preço do aluguel entre R$ 200,00 e R$ 500,00 e outras maiores no valor de R$ 1000,00 à R$ 3000,00. Um médico alugou uma das casas maiores de Antônio com pagamento mensal de R$ 3000,00. No contrato de aluguel tem uma cláusula que estabelece reajuste anual de R$ 600,00. a) Investigue o que acontece com o valor do aluguel após ***t*** anos. Justifique suas conclusões. b) De acordo com suas conclusões do item **a**, qual a taxa de variação média do aluguel após t anos? c) Qual a taxa de variação do aluguel após t ano? d) Investigue o que acontecerá à porcentagem de variação após alguns anos. Justifique. e) Descreva as relações entre o item **“b”** e **“c”** de acordo com suas conclusões.

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2006).

Quadro 6 - Tarefa 2: cercando um terreno

Uma família que mora numa comunidade ribeirinha do interior do Amazonas, possui 1500 metros de cerca para cercar uma área retangular que está à margem do rio Solimões. Considere que a margem do rio é reta e não será cercado o lado ao longo do rio.

a) Investigue situações possíveis da área do terreno, explorando os 1500 metros de cerca da família. Justifique suas conclusões. b) Verifique se existe um terreno com área máxima e justifique sua resposta.

Fonte: do autor.

Quadro 7 - Tarefa 3: investigando soma, subtração e produto de números

Investigue os valores de números considerando cada item abaixo: a) Encontre dois números cuja a soma seja 25 e verifique se existe um produto máximo entre eles. Justifique suas respostas. b) Encontre dois números cuja a diferença seja 80 e verifique se existe produto mínimo entre eles. Justifique. c) Encontre dois números positivos cujo o produto seja 80 e verifique se existe soma mínima entre eles. Justifique. d) Encontre as dimensões de um retângulo com área de 100 m^2 e verifique se existe um perímetro mínimo. Justifique sua resposta.

Fonte: adaptado de Stewart (2013).

Quadro 8 - Tarefa 4: construindo caixa

Uma pequena caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 20 centímetros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. a) Explore várias situações do enunciado e descreva o que acontece com o volume. b) Se existe um volume máximo, encontre-o e justifique sua resposta.

Fonte: Adaptado de Stewart (2013).

Quadro 9 - Tarefa 5: minimizando custo

Uma empresa constrói caixa d’água de alvenaria retangulares com o comprimento de 4 metros e o volume de 9 metros cúbicos. a) Explore situações, investigando de acordo com o enunciado as dimensões que representam o volume do tanque. Justifique. b) Investigue as áreas das faces do tanque que satisfazem o enunciado e justifique sua resposta. c) Se existe dimensões que minimizam o custo para a fabricação dos tanques, encontre-as e justifique sua resposta.

Fonte: do autor.

As tarefas investigativas foram desenvolvidas no período de 18 de abril a 03 de maio de 2019, das 20h às 22h 30min na disciplina Cálculo I. No decorrer das atividades, em todo momento instiguei os alunos a elaborarem conjecturas de acordo com as tarefas propostas. Isto vai ao encontro com o trabalho de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) que enfatizam que o professor deve interagir o tempo todo com os alunos durante as etapas do processo investigativo. O Quadro 10 destaca, resumidamente, os encontros realizados e as respectivas tarefas desenvolvidas.

Quadro 10 - Encontros e tarefas desenvolvidas

ENCONTROS	TAREFAS DESENVOLVIDAS
Primeiro	Reunião com os alunos para apresentação da proposta
Segundo	Tarefa 01 – explorando aluguel de imóvel
Terceiro	Tarefa 02 – cercando um terreno
Quarto	Tarefa 03 – investigando soma, subtração e produto de números
Quinto	Tarefa 04 – construindo uma caixa
Sexto	Tarefa 05 – minimizando custo
Sétimo	Aplicação de um questionário para coletar as concepções dos alunos sobre a utilização da Investigação Matemática

Fonte: do autor.

Durante o desenvolvimento das tarefas propostas além de instigar os alunos, observei a participação dos discentes, as discussões e anotei informações relevantes. Além disso, enfatizei com os alunos a importância de usar o caderno de anotações para registrar o que aconteceu no decorrer de cada tarefa, como dificuldades de aprendizagem encontradas, dúvidas, conjecturas elaboradas, validadas ou refutadas.

Destaco que, para a organização da análise dos registros de anotações das respostas dos grupos, utilizei uma letra maiúscula mais um algarismo indicativo da tarefa explorada, como por exemplo:

Atividade 1: Grupo A1, Grupo B1, Grupo C1, ...

Atividade 2: Grupo A2, Grupo B2, Grupo C2, ...

Para os alunos, nos registros das gravações utilizei uma letra maiúscula indicando o grupo e dois algarismos, um representando o componente do grupo e o outro a tarefa explorada respectivamente, como por exemplo:

Atividade 1: Aluno A11, Aluno A21, ..., Aluno B11, Aluno B21, ...
Atividade 2: Aluno A12, ..., Aluno A22, ..., Aluno B12, Aluno B22, ...

No próximo capítulo, apresento os dados emergentes e a respectiva análise, por tarefa realizada. Saliento que a turma foi dividida em grupos de 4 a 6 alunos. Tais grupos foram constituídos previamente antes do início de cada atividade, sendo que a formação ficou a critério dos alunos. A maioria dos grupos foi constituída por componentes diferentes de uma atividade para outra.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo descrevo e analiso os resultados obtidos, isto é, destaco as estratégias e conjecturas que os alunos encontraram para resolver cada uma das tarefas investigativas propostas. Também são descritas as dificuldades e avanços dos alunos em relação aos conteúdos explorados, os quais focaram o estudo de derivadas.

1) Primeiro Encontro

O primeiro encontro foi realizado em 15 de abril de 2019, durante 50min. Neste, apresentei para os alunos os objetivos da proposta, destacando que as atividades apresentadas culminavam nas ações do cronograma da minha pesquisa de Mestrado Profissional de Ensino de Ciências Exatas da Univates. Além disso, apresentei os fundamentos da Investigação Matemática, objeto de estudo do trabalho de pesquisa apresentado. Neste momento, também enfatizei a importância da participação voluntária de todos e entreguei um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE B). Todos demonstraram entusiasmo em participar porque até o momento ainda não tinham ouvido falar sobre Investigação Matemática como metodologia. Destaquei, que poderiam adotá-la em oportunidades futuras em projetos de extensão, estágios e como professores de Matemática.

A motivação dos alunos no decorrer da apresentação da proposta de exploração de tarefas investigativas foi fundamental para o desenvolvimento das tarefas apresentadas. Isso corrobora com as ideias de Bianchi (2008, p. 21) ao afirmar que, “[...] a motivação na aprendizagem é extremamente necessária e deve ser trabalhada no contexto em que os alunos estão”.

Durante a conversa que tive com os alunos, destaquei que todas as tarefas seriam realizadas em grupos e observei que todos gostaram da ideia. Alguns enfatizaram que este tipo de trabalho é positivo para a construção de conhecimentos, visto que, os pontos de vista de cada um são compartilhados e discutidos. De acordo com Brasil (1998), o trabalho em grupo é fundamental para a construção de conhecimentos sólidos essenciais ao desenvolvimento de habilidades cognitivas, isto é, implantar na sala de aula o trabalho em grupo como uma ferramenta pedagógica pode auxiliar no processo de ensino, possibilitando a aprendizagem dos alunos.

Neste encontro também enfatizei para a turma que o tema que seria explorado mediante as tarefas investigativas era o estudo de derivadas no contexto de algumas aplicações como taxa de variação, máximo e mínimo de funções.

2) Segundo Encontro

No dia 18 de abril de 2019, iniciei o segundo encontro dividindo a turma em 6 grupos de 4 componentes cada um. Apresentei o objetivo da primeira tarefa investigativa que foi explorar a taxa de variação. Em seguida distribuí aos grupos a tarefa descrita no quadro 5, apresentada no capítulo anterior.

No início, a maioria dos grupos estava com dificuldades para explorar os itens da tarefa apresentada. Alguns alunos começaram a fazer perguntas:

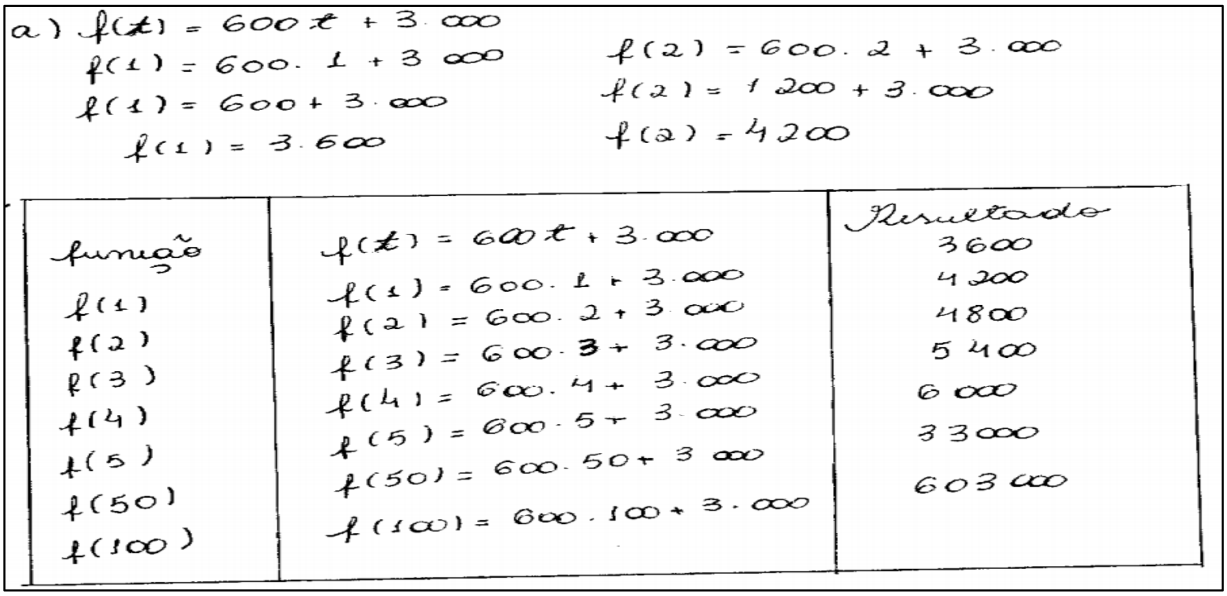
> Aluno B41: Professor, não estou entendendo nada. Como vamos descobrir o que acontece com o valor do aluguel depois de um tempo?
> Professor: Ninguém do grupo entendeu nada?
> Aluno B11: Professor, eu acho que dá para simular algumas situações atribuindo valores para t indicando os anos.
> Aluno B41: Há, é verdade! Se pegarmos o valor que deve ser pago mais o reajuste anual, e verificarmos em um ano, dois anos, três anos, e assim por diante, dá pra descobrir o que acontece depois de um determinado tempo.
> Professor: Então verifiquem para ver o que acontece.
> Aluno B21: Colegas, lembram da disciplina de Matemática Elementar que tivemos no semestre passado?
> Aluno B31: Sim, e daí?
> Aluno B21: O valor do aluguel vai aumentado de acordo com a passar do tempo, de ano em ano.
> Aluno B31: Hum, então de ano em ano vai aumentar R$ 600,00. Mas o que isso tem haver com a disciplina Matemática Elementar?
> Aluno B21: Nós estudamos função.

> Aluno B31: Certo! Então podemos simular situações e escrever uma função para representar esta situação.
> Aluno B21: Isso mesmo!
> Aluno B31: Beleza! Então vamos lá.

Como destaca o diálogo anterior, os alunos estavam com dificuldades de formular conjecturas porque não tinham entendido como proceder para formular conjecturas. Então, o professor procurou instiga-los a pensar em possibilidades a partir de perguntas que os estimulassem a buscar relações matemáticas no âmbito da tarefa proposta. Magalhães e Varizo (2016) enfatizam que o início de trabalhos envolvendo tarefas investigativas é um desafio tanto para os alunos quanto aos professores, visto que, geralmente os alunos demonstram dificuldades de iniciar a busca de estratégias para formular conjecturas. Neste sentido, neste momento a intervenção do professor por meio de perguntas é fundamental para instigar o direcionamento da reflexão dos educandos a partir dos conhecimentos prévios existentes.

Depois das discussões, este grupo concluiu que a taxa de variação de um ano para o outro é sempre constante, e a partir da modelação de uma função representativa, a situação explorada pode ser representada pela derivada da função. Para Gonçalves (2012) a definição de uma expressão matemática para representar um determinado contexto ajuda no estabelecimento de uma estratégia para a resolução do problema. A figura 9 destaca o procedimento que o grupo B1 adotou.

Figura 9 – Resposta do grupo B1 da tarefa 1 do item **a**



a) $f(t) = 600t + 3.000$

$f(1) = 600 \cdot 1 + 3\,000$

$f(1) = 600 + 3.000$

$f(1) = 3.600$

$f(2) = 600 \cdot 2 + 3.000$

$f(2) = 1\,200 + 3.000$

$f(2) = 4200$

função	$f(t) = 600t + 3.000$	Resultado
$f(1)$	$f(1) = 600 \cdot 1 + 3.000$	3600
$f(2)$	$f(2) = 600 \cdot 2 + 3.000$	4 200
$f(3)$	$f(3) = 600 \cdot 3 + 3.000$	4800
$f(4)$	$f(4) = 600 \cdot 4 + 3.000$	5 400
$f(5)$	$f(5) = 600 \cdot 5 + 3.000$	6 000
$f(50)$	$f(50) = 600 \cdot 50 + 3\,000$	33 000
$f(100)$	$f(100) = 600 \cdot 100 + 3.000$	603 000

Fonte: Grupo B1.

Mediante a discussão em relação ao item **a** da primeira tarefa, eles concluírem que:

Figura 10 – Conclusão do grupo B1 do item **a** da primeira tarefa

Ao tentarmos buscar, encontrar um resultado por ano (t), logo concluimos que podemos usar uma função, e nessa função podemos achar qualquer valor de cada ano.

Fonte: Grupo B1.

No início da atividade fiquei preocupado com o tempo gasto pelos alunos para iniciarem a busca por estratégias de respostas, mas quando isso acontece, Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 30) esclarecem que:

> A exposição inicial da situação é uma etapa na qual os alunos, muitas vezes, precisam de gastar algum tempo. Aos olhos do professor, porém, pode parecer que nada está acontecendo e que os alunos estão com dificuldades quanto a essa atividade. No entanto, essa etapa é decisiva para que depois os alunos comecem a formular questões e conjecturas. É nessa fase que vão se embrenhando na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente do sentido da tarefa.

E realmente foi isso que aconteceu, com o passar do tempo, as discussões produzidas pelo grupo, proporcionou a formulação de estratégias. Para Schmitt (2015), trabalhar em grupo proporciona a produção de conhecimentos porque é uma oportunidade para os alunos se ajudarem, isto é, trocarem ideias, aprender um com o outro. E, conforme o tempo vai passando e a discussão fluindo, a confiança vai aumentando entre os pares.

O grupo B1, após destacar as conclusões do item **a** percebeu que os itens **b** e **c** representavam a mesma resposta, isto é, a taxa de variação média após **t** anos é a mesma que a taxa de variação em relação ao mesmo tempo. Esta conclusão foi facilitada pelo fato de dois alunos do grupo já terem cursado a disciplina de Cálculo I anteriormente. A figura 11 mostra o procedimento adotado pelo grupo.

Figura 11 – Resposta do item **b** da tarefa 1 do grupo B1

$$b)\ TxVm = \frac{f(t)F - f(t)i}{t_F - t_i}$$

$$f(1) = 3.600,\quad t = 1$$
$$f(2) = 4200,\quad t = 2$$

$$TxVm = \frac{f(2) - f(1)}{t_F - t_i}$$

$$TxVm = \frac{4200 - 3600}{2 - 1} = \frac{600}{1} = 600$$

$$f(10) = 9000,\quad t = 10$$
$$f(20) = 15000,\quad t = 20$$

$$TxVm = \frac{15000 - 9000}{20 - 10} = \frac{6000}{10} = 600$$

Fonte: Grupo B1.

Mediante esta verificação o grupo concluiu que a taxa de variação média era sempre constante, independentemente do intervalo de tempo analisado. Em relação ao item **c,** o grupo B percebeu analisando o item **b**, que poderia ser resolvido por meio de derivadas. Ferreira (2017) salienta que a exploração de derivadas auxilia na solução de problemas relacionados com taxa de variação. Desta forma, a figura 12 mostra como encontraram a taxa de variação.

Figura 12 – Resposta do grupo B1 do item **c** da tarefa

$$c)\ f(t) = 600t + 3.000$$
$$f(t + \Delta t) = 600 \cdot (t + \Delta t) + 3000 = 600t + 600\Delta t + 3000$$
$$f(t) = 600t + 3000$$

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} f(t) = f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} 600t + 3000 = f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{600t} + 600\Delta t + \cancel{3000} - \cancel{600t} - \cancel{3000}}{\Delta t}$$

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{600\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} 600 = 600$$

Fonte: Grupo B1.

Desta forma, o grupo utilizando a ideia de limite, apresentou sua conclusão, conforme visualiza-se na Figura 13.

Figura 13 – Conclusão do grupo B1 em relação ao item **c** da tarefa 1

Se aplicarmos uma derivada na função $f(t)$ do item a, percebemos que essa variação sempre vai ser o mesmo resultado, 600. Logo, concluímos que a taxa de variação sempre será de R$600,00.

Fonte: Grupo B1.

Em relação ao item **d** o grupo B1 utilizou uma estratégia válida, mas na resolução cometeram alguns erros, que não prejudicou a conclusão esperada. Na figura 14 as respostas deste grupo.

Figura 14 – Respostas do grupo B1 em relação ao item **d** da tarefa 1

d) $\dfrac{f'(t)}{f(t)} \times 100$

$f(1) = 3600$
$f'(1) = 600$

$\dfrac{600}{3600} \times 100 = 18,75$

$f(50) = 33000$
$f'(50) = 600$

$\dfrac{600}{33000} \times 100 = 1,81$

$f(100) = 603000$
$f'(100) = 600$

$\dfrac{600}{603000} \times 100 = 0,09$

Fonte: Grupo B1.

Analisando as respostas dos alunos percebe-se que a estratégia para verificar o que acontece com a porcentagem de variação após **t** anos, é válida. Mas o grupo errou a resolução da primeira e terceira simulação da figura 14. Apesar do erro, a figura 15 demonstra que o Grupo B1 chegou na resposta esperada. Diante desta situação, instiguei o grupo a verificar os resultados das multiplicações e divisões apresentadas nesta figura. No momento da apresentação final, o grupo apresentou suas conclusões e destacou os erros de cálculo e enfatizaram que foi falta de atenção, mas corrigiram. Desta forma, é preciso sempre está atendo e analisar o tempo todo o que está sendo produzido para a identificação de possíveis erros, e corrigi-los. Para isto, a interação constante do professor é indispensável para garantir a participação ativa dos alunos na busca de formulação, teste e validação de conjecturas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

Figura 15 – Conclusão do grupo B1 em relação ao item **d** da tarefa 1

Quando procuramos a porcentagem após alguns anos dessa função de variação podemos dizer assim, logo ao encontrarmos esse resultado e após depois de muitos exemplos, concluímos que sempre a porcenta-gem tende a baixar, se aplicarmos um limite nessa função, concluímos que o limite tende a zero, quando o t(anos) tende ao +∞.

$$\lim_{t \to +\infty} \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \times 100 = 0$$

Fonte: Grupo B1.

Os erros destacados, provavelmente estão relacionados com as dificuldades dos alunos nos conceitos básicos de matemática. Fonseca (2016, p. 23) confirma este contexto relatando que:

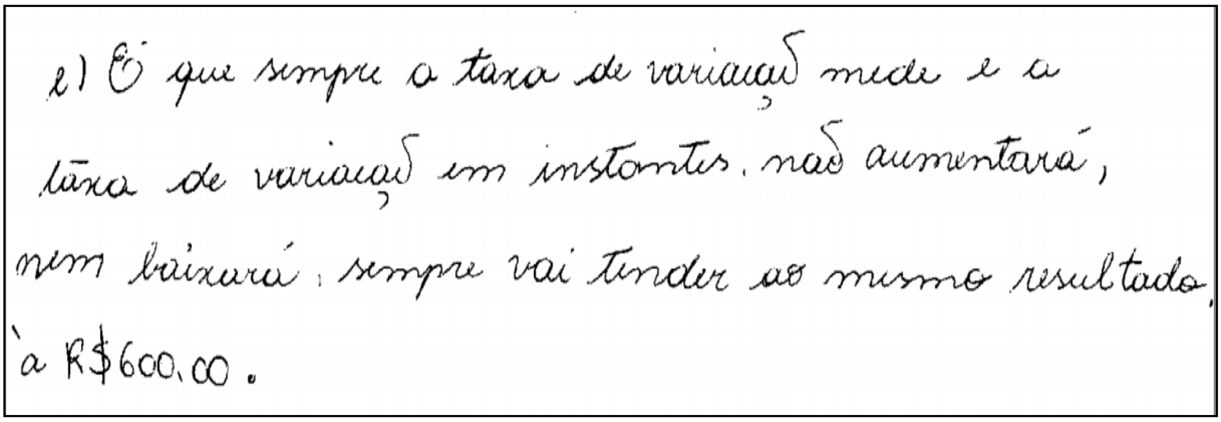
> Uma das dificuldades clássicas dos alunos ingressantes à universidade é trazerem ainda uma bagagem pobre dos conceitos básicos da matemática e como podem utilizá-la tanto na vida prática como acadêmica, principalmente quanto à integração dos princípios matemáticos em outras disciplinas.

Analisando a conclusão dos alunos do Grupo B1 sobre o item **d**, eles cometeram erros de cálculo que foram discutidos em grupo mediante a intervenção do professor, e detectaram, corrigiram e destacaram que o erro ocorreu por falta de atenção, mas a valorização da estratégia adotada é importante para estimular a confiança do grupo. Esta atitude vai ao encontro com o que Fonseca (2016, p. 22) pensa, ao concluir que:

> Logo, o professor deveria estimular não de imediato uma possível "resposta correta", mas sim descobrir o que os alunos pensam a respeito e estimular "possíveis respostas" para aquele problema, mesmo, a princípio erradas. A partir do retorno das respostas dos alunos, fica mais fácil entender como o aluno está pensando com respeito àquela temática. O professor pode conseguir dessa forma eliminar alguns bloqueios epistemológicos e descobrir mais adequadamente a fonte deles.

A Figura 16 demonstra a conclusão do Grupo B1 em relação ao item **e**, destacando a relação do item **b** com o item **c.**

Figura 16 – Resposta do grupo B1 em relação ao item **a** da tarefa 1


e) É que sempre a taxa de variação media e a taxa de variação em instantes. não aumentará, nem baixará: sempre vai tender ao mesmo resultado, à R$600,00.

Fonte: Grupo B1.

Na figura 16 observa-se pela resposta que o grupo B1 enfatiza que tanto a taxa de variação média como a taxa de variação instantânea tendem para o mesmo valor que é R$ 600,00. Para este grupo chegar as conclusões apresentadas, não foi de imediato, os alunos demoraram para expressar ideias de como resolver a tarefa proposta. Mediante o diálogo que tiveram entre o professor, já destacado anteriormente, começaram a formular conjecturas e discuti-las.

No início todos os alunos pareciam sem direção diante do desafio apresentado, falando sobre investigue, encontre, justifique. Mas, a partir das interações e participação do professor, as respostas fluíram, e os alunos começaram a compreender que “a realização de investigações matemáticas, pelo aluno, pode contribuir de modo significativo para a aprendizagem da matemática e para desenvolver o gosto por essa disciplina” (PONTE; BRACARDO; OLIVEIRA, 2019, P. 138).

O grupo A1, em relação ao item **a** da atividade 1, não destacou suas respostas por meio de uma tabela/quadro. Descreveram, em forma de texto, o comportamento do aluguel após **t** anos como mostra a figura 17.

Figura 17 – Resposta do item **a** da tarefa 1 do grupo A1

a) A CADA ANO QUE SE PASSA O ALUGUEL TERÁ UM REAJUSTE ANUAL DE R$ 600,00, A PARTIR DE UM VALOR INICIAL R$ 3000,00. APÓS O PRIMEIRO ANO O ALUGUEL SUBIU PARA R$ 3600, APÓS 2 ANOS O ALUGUEL AUMENTOU PARA R$ 4200,00, APÓS O TERCEIRO ANO O ALUGUEL SUBIU PARA R$ 4800,00, APÓS 4 ANOS O ALUGUEL SUBIU PARA R$ 5400,00, APÓS 5 ANOS O VALOR DO ALUGUEL SUBIU PARA R$ 6000,00, APÓS 10 ANOS O ALUGUEL AUMENTOU PARA R$ 9000,00, APÓS t ANOS A TENDÊNCIA DO ALUGUEL É AUMENTAR CADA VEZ MAIS, OU SEJA QUANTO MAIS O TEMPO FOR AUMENTANDO A TENDÊNCIA É QUE OS VALORES DO ALUGUEL ALCANCE VALORES CADA VEZ MAIS ALTO.

Fonte: Grupo A1.

Em relação ao item **b**, este grupo, também chegou a mesma conclusão do grupo B1, que a taxa de variação média é sempre constante e igual a R$ 600,00 como pode-se visualizar na figura 18.

Figura 18 – Resposta do grupo A1 do item **b** da tarefa 1

b) De acordo com suas conclusões do item a, qual a taxa de variação média do aluguel após t anos?

(1 ano)

$$Vm = \frac{3.600 - 3000}{1 - 0} = \frac{600}{1} = 600$$

(3 anos)

$$Vm = \frac{4.800 - 3.000}{3 - 0} = \frac{1800}{3} = 600$$

4 à 10 anos

$$Vm = \frac{9000 - 5400}{10 - 4} = \frac{3600}{6} = 600$$

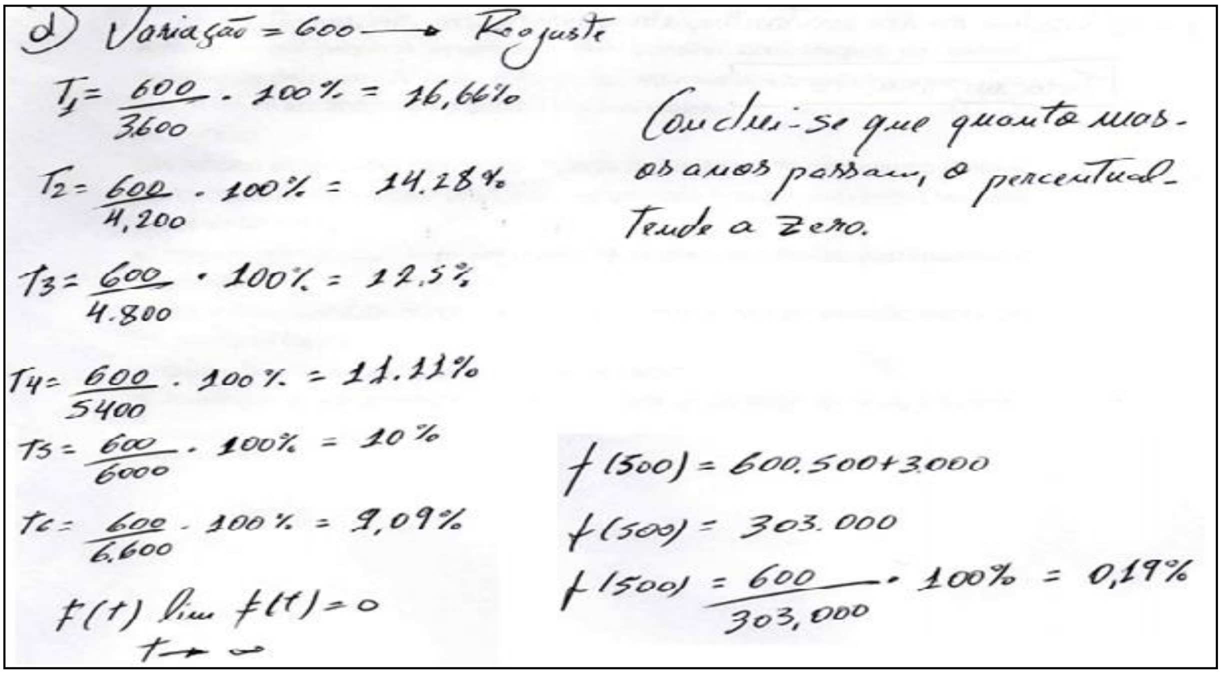
A taxa de variação média, após t anos continuará sempre a mesma, independente de quantos anos irá se passar, A TAXA DE VARIAÇÃO VAI SER SEMPRE 600.

Fonte: Grupo A1.

Analisando o item **c** da tarefa 1, o grupo A1 observou que o resultado é o mesmo do item anterior, e com isso também responderam o item **e** afirmando que a relação entre os itens **b** e **c** se refere a taxa de variação que é a mesma constante, R$ 600,00.

Na figura 19 apresenta-se a estratégia que o grupo A1 utilizou para formular a conjectura do item **d**, sobre o que acontece com a porcentagem de variação após **t** anos.

Figura 19 – Resposta do grupo A1 do item **d** da tarefa 1



d) Variação = 600 → Reajuste

$T_1 = \frac{600}{3600} \cdot 100\% = 16,66\%$

$T_2 = \frac{600}{4,200} \cdot 100\% = 14,28\%$

$T_3 = \frac{600}{4.800} \cdot 100\% = 12,5\%$

$T_4 = \frac{600}{5400} \cdot 100\% = 11,11\%$

$T_5 = \frac{600}{6000} \cdot 100\% = 10\%$

$T_6 = \frac{600}{6.600} \cdot 100\% = 9,09\%$

$f(t) \ \lim_{t \to \infty} f(t) = 0$

Conclui-se que quanto mais os anos passam, o percentual tende a zero.

$f(500) = 600.500 + 3.000$

$f(500) = 303.000$

$f(500) = \frac{600}{303,000} \cdot 100\% = 0,19\%$

Fonte: Grupo A1.

A partir das conclusões do grupo A1 em relação a primeira tarefa, percebe-se que eles procuraram alternativas, e o diálogo entre os alunos, registrados pelas gravações, foi fundamental para a tomada de decisões de escolha de estratégias como as simulações que geraram conjecturas, e posteriormente foram validadas mediante testes discutidos pelo grupo. Este tipo de tarefa (investigativa) é importante de ser adotada em sala de aula porque é apropriada para os alunos que são instigados a construir conhecimentos pelo professor e pelos colegas. Segundo Diogo (2015), é uma oportunidade de fugir do formalismo dos livros de Cálculo que passa a impressão que são produzidos não para aqueles que decidem se dedicar ao estudo da disciplina, mas para aqueles que já têm domínio da teoria formal dos limites, derivadas e integrais. Desta forma, de acordo com o referido autor, é fundamental que o professor de Cálculo I, procure alternativas de ensino para proporcionar oportunidade aos alunos entenderem a linguagem das demonstrações dos teoremas e definições mediante o despertar do instinto investigador.

O que os outros grupos produziram é semelhante aos resultados aqui apresentados pelos grupos A1 e B1 em relação a primeira tarefa explorada. Nesta tarefa, não houve surpresas, visto que, os alunos a partir da exploração em grupo, encontraram as respostas esperadas. As estratégias utilizadas foram baseadas em simulações utilizando quadros, textos descritivos e exploração da lei de formação de funções. Mas, em vários momentos foi preciso a intervenção do professor a partir de indagações com o objetivo de orientar os alunos no caminho da investigação, já que os mesmos tinham desenvolvido pouco trabalho com atividades desse tipo. A intervenção adotada pelo professor é uma postura destacada por Magalhães e Varizo (2016) ao destacarem que em tarefas investigativas o professor interage constantemente com os alunos para instigar a produção de conhecimento dos alunos em relação ao tema explorado. A seguir um diálogo do professor com os alunos do grupo C1.

> Aluno C21: Professor, não estamos entendendo o que fazer?
> Professor: Como assim?
> Aluno C21: Veja só! A questão fala de aluguel de 200,00 e 500,00 reais e também de 1000,00 e 3000,00 reais. Vamos ter que verificar em todos?
> Aluno C41: Não, só precisa verificar nos alugueis que custa 3000,00 reais.
> Aluno C21: Ah, é verdade.
> Professor: Como vocês pretendem fazer isso?
> Aluno C31: Será que dá pra fazer pegando o valor do aluguel e somando com o aumento de acordo com cada ano?
> Professor: Como assim? Você pode me explicar?
> Aluno C31: Com um ano o valor vai ser 3000,00 + 600,00; com dois anos vai ser 3000,00 + 600,00 + 600,00.
> Aluno C11: Ah, entendi. Então a cada ano vai aumentar 600,00 reais.

A partir dessa discussão, o grupo C1 continuou a investigação e encontrou as respostas para os itens da tarefa 1. A seguir alguns comentários do grupo sobre as respostas encontradas.

> Professor: E aí? Encontraram as respostas?
> Aluno C11: Sim professor.
> Aluno C41: Para o item **a,** encontramos que a cada ano que passa o valor do aluguel vai aumentando.
> Aluno C31: Professor, na letra **b** e **c**, a resposta é a mesma.
> Professor: Como assim? E por que isso acontece?
> Aluno C21: Isso acontece professor, porque tanto a taxa de variação média como a taxa de variação é o mesmo valor.
> Aluno C11: Isso mesmo professor. E esse valor é exatamente o que aumenta a cada ano. Então isso corresponde a resposta da letra **d**

> Professor: E o item **d**?
> Aluno C41: A porcentagem da variação vai diminuindo conforme os anos vão passando.
> Professor: Vocês podem me explicar como isso acontece?
> Aluno C41: Sim professor. Como o valor que aumenta é constante, e é somado com o valor anterior, significa que esse valor fica em porcentagem cada vez menor em relação ao valor total depois de cada reajuste.
> Professor: Alguém pode exemplificar isso?
> Aluno C21: Professor vou lhe mostrar dois exemplos: um com o primeiro reajuste de um ano, e outro utilizando cem anos. Veja:
> $\frac{600}{3000+600}\times 100\% = 16{,}67\%$ e $\frac{600}{3000+600\times 100}\times 100\% = 0{,}95\%$.
> Aluno C31: Professor, isso significa que quanto mais os anos passam, a porcentagem do reajuste vai ficando menor se aproximando de zero.
> Aluno C11: Ah professor, isso acontece porque o numerador sempre será o mesmo, ao contrário do denominador que vai aumentando conforme o tempo passa.

A discussão apresentada confirma que os alunos foram instigados pelo professor, pois de acordo com as orientações de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) ao abordar uma tarefa investigativa é importante orientar os alunos para a busca da construção do conhecimento. E, foi isso que tentei fazer no decorrer de todas as tarefas, ou seja, instigar os alunos para que eles encontrassem as resoluções.

Depois do diálogo com o grupo C1, observei as expressões dos outros grupos. Neste contexto, um dos alunos do grupo F1 me chamou para verificar as respostas que eles encontraram. Desta forma, o grupo apresentou conceito de derivadas/limites.

> Aluno F31: Professor, como a taxa de variação vai ser sempre a mesma e o valor do aluguel vai aumentado conforme os anos vão passando, nós percebemos que dá para escrever uma função e através da derivada fica mais fácil perceber que a taxa de variação é 600.
> Professor: Como assim? Você pode explicar isso?
> Aluno F31: Professor, depois de testarmos utilizando vários anos, percebemos que o valor do aluguel será três mil mais seiscentos, o dobro de seiscentos, o triplo, o quádruplo e assim por diante.
> Professor: Mas, qual a relação disso com derivada?
> Aluno F21: É porque derivada é uma taxa de variação, e como o três mil é constante e todo ano aumenta seiscentos, isso significa que podemos utilizar uma função.
> Professor: Como ficaria essa função?
> Aluna F41: Professor, nós fizemos assim. Utilizamos uma função do tipo $f(x) = ax + b$, com $a = 600$, $b = 3000$ e o x chamamos de tempo. Com isso formamos $f(x) = 600x + 3000$, e a derivada é 600 que é exatamente a taxa de variação.

Apesar das dificuldades apresentadas pelos alunos; como encontrar estratégias para formular conjecturas, definir relações e padrões matemáticos diante da tarefa explorada; conseguiram com o auxílio do professor explorar conceitos relacionados com o tema trabalhado. Fonseca et al (2016, p. 209) consideram que dificuldades apresentadas pelos alunos na disciplina de Cálculo é uma realidade presente nos cursos superiores ao afirmarem que:

> Dificuldades no aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral é um fato já identificado em diversos cursos superiores. Em várias leituras preliminares, analisando artigos, dissertações e teses, com foco em questões relativas ao binômio ensino-aprendizagem de Cálculo, constatamos que boa parte analisa erros e dificuldades de aprendizagem em suas pesquisas e até propõem alternativas metodológicas em concordância com a fundamentação teórica adotada no embasamento da pesquisa.

A luz deste contexto, os resultados apresentados pelos alunos confirmam a necessidade de os professores utilizarem alternativas metodológicas em sala de aula que proporcionem oportunidades aos alunos construírem conhecimentos com autonomia. Desta forma, “aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar recebendo informação sobre como o conseguem” (BRAUMANN, 2002, p. 5).

O que chamou atenção, nesta atividade, foi o comprometimento dos alunos no processo de investigação, eles demonstraram interesse na resolução da mesma. Isto vai ao encontro com as afirmações de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) ao destacarem que no processo de construção de conhecimento é imprescindível o envolvimento dos alunos para a eficácia da aprendizagem, visto que eles são convidados a agirem como matemáticos por meio da exploração de recursos cognitivos que potencialize o ato de investigar.

3) Terceiro encontro

O terceiro encontro foi realizado no dia 22 de abril de 2019 com duração de duas horas e trinta minutos. Nesta aula, faltaram 4 alunos (por motivos particulares) em relação aos que participaram da tarefa anterior. Desta forma, participaram 20 alunos que foram divididos em cinco grupos de 4 alunos. Após a organização das equipes, apresentei a segunda tarefa investigativa destacada no quadro 6.

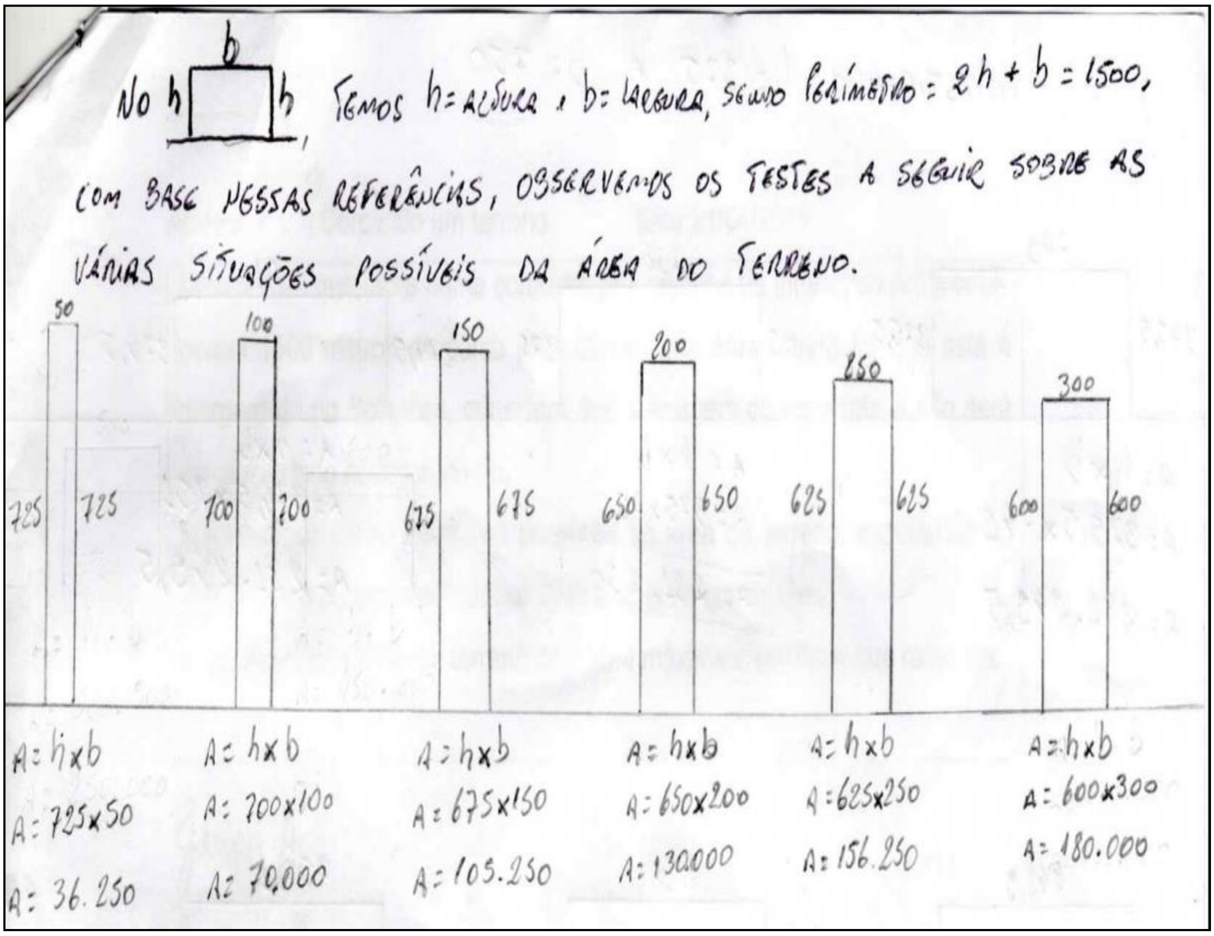
Diante da segunda tarefa investigativa, os alunos apresentaram mais autonomia e começaram a buscar situações, como enfatiza o diálogo dos componentes do grupo A2.

> Aluno A32: Eu acho que a gente pode desenhar retângulos e atribuir valores para os quatros lados e calcular a área pra ver o que acontece.

Aluno A12: Para os quatros lados? Acha que não, a questão diz que o lado ao longo do rio não vai ser cercada.
Aluno A32: Ah, é verdade. Então vamos fazer desenhos e atribuir valores aos três lados do terreno que não é o lado da margem do rio.
Aluno A42: Beleza! Vamos lá.

Partindo deste diálogo, o grupo A2 realizou algumas simulações explorando os 1500 metros através de desenhos retangulares como destaca a figura 20. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) enfatizam que esta estratégia de fazer desenhos apresentada pelo Grupo A2 enfatiza que durante o processo investigativo, na busca por formulações de conjecturas, os alunos são protagonistas e tem liberdade para utilizar representações explorando desenhos, quadros, tabelas e simulações numéricas. Com isto, percebe-se que a estratégia utilizada pelos alunos do Grupo A2 está relacionada com os fundamentos citados pelos autores.

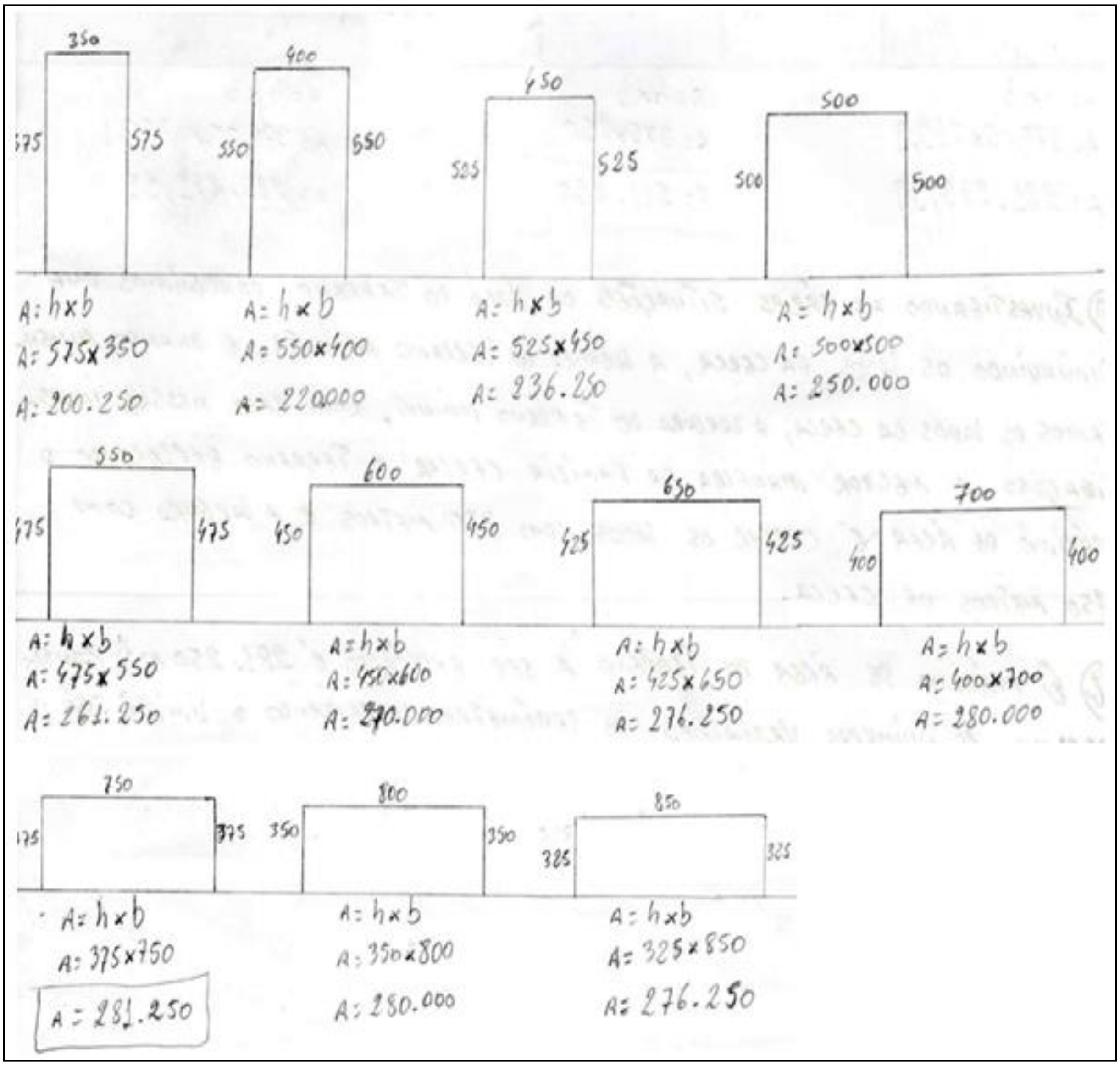
Figura 20 – Primeira simulação do grupo A2



Fonte: Grupo A2.

Este grupo simulou situações em vários retângulos, considerando apenas três lados conforme o enunciado da atividade proposta e definiram como altura **h** a medida para os lados paralelos do retângulo e chamaram de largura **b**. A partir disso definiram que **2h + b = 1500.** A figura 20 mostra que estes alunos testaram diversos retângulos, os quais tinham diferença na medida da largura de 50 metros um do outro. Assim, conforme a largura ia aumentando a altura diminuía. A Figura 21 destaca a continuação dos testes do grupo.

Figura 21 – Continuação da simulação do grupo A2 em relação a tarefa 2



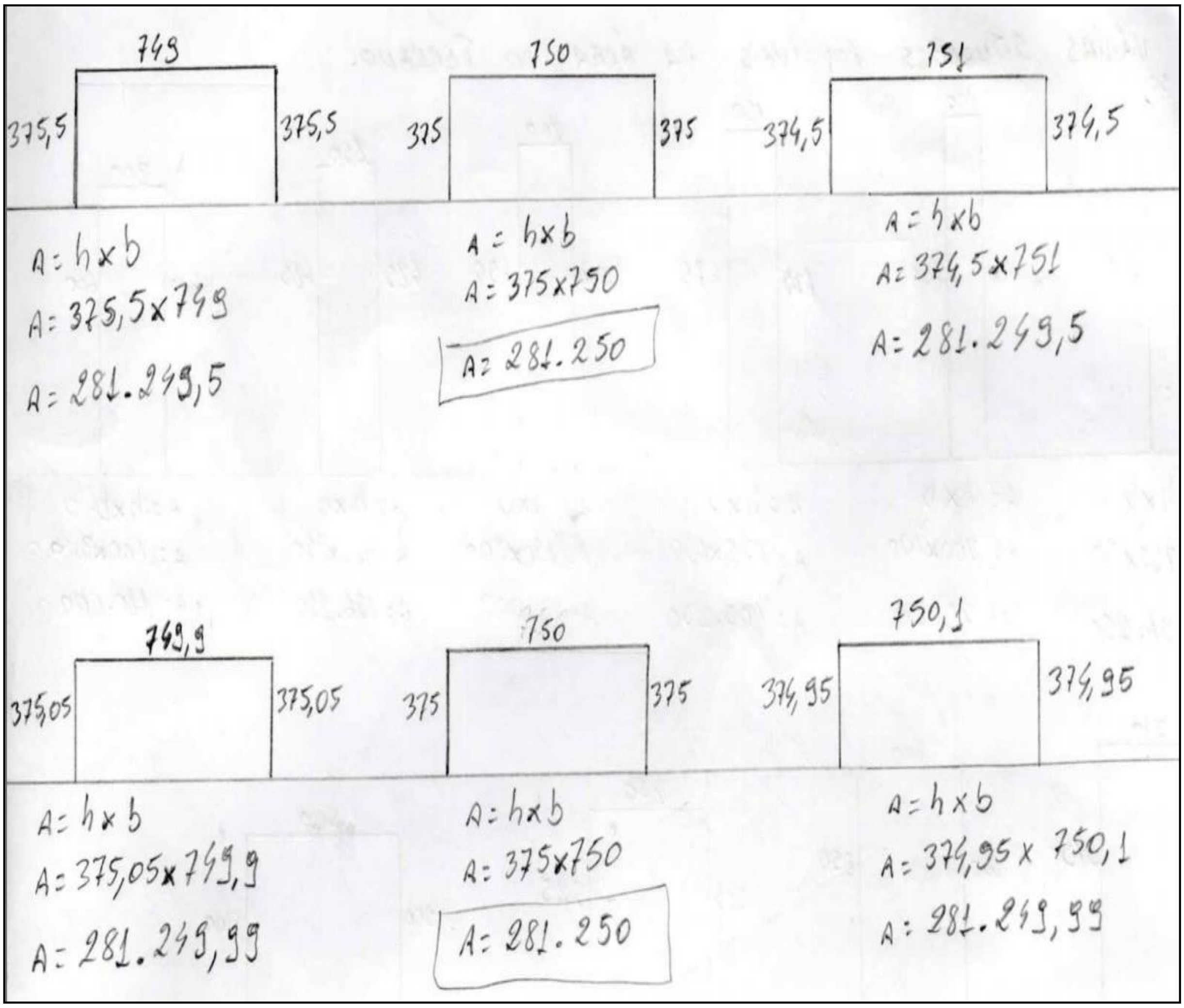
Fonte: Grupo A2.

Diante desses resultados, o grupo A2 enfatizou que é possível traçar um terreno retangular a partir dos 1500 m de cerca de modo que a família aproveite uma área máxima. A seguir, um diálogo do grupo.

Aluno A22: Olha, se a largura é maior do que 750 m a área do terreno começa a diminuir. Então se o terreno tiver as medidas 375 m de altura e 750 m de largura vai ter uma área máxima.
Aluno A42: Será? Só que nós temos que ver também o intervalo de 750 a 800.
Aluno A22: Como assim?
Aluno A42: Temos que testar as larguras de 751, 752 e assim por diante.
Aluno A32: Eu acho que devemos começar tentando 749,5 e depois 751.
Aluno A22: Certo.
Aluno A12: Vamos lá então.

Mediante esta reflexão, o grupo A2 decidiu testar as medidas da largura das regiões retangulares maior que 750m e menor que 850m. A figura 22 ilustra a estratégia utilizada pelos alunos.

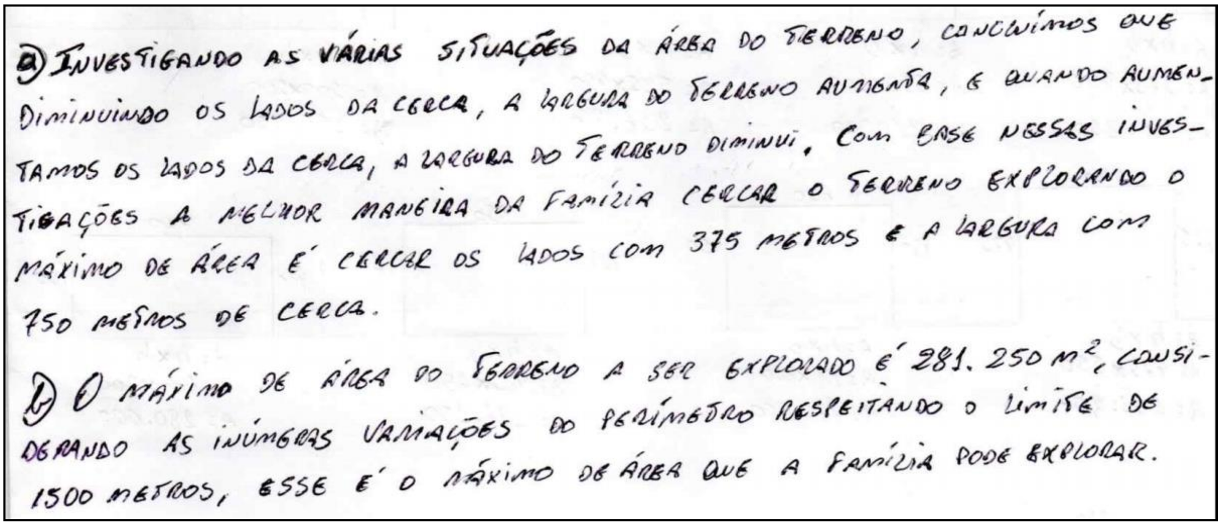
Figura 22 – Investigando valores próximos de 750 metros



Fonte: Grupo A2.

A Figura 23 ilustra a conclusão do grupo A2 depois das discussões e testes realizados.

Figura 23 – Conclusão do grupo A2



a) INVESTIGANDO AS VÁRIAS SITUAÇÕES DA ÁREA DO TERRENO, CONCLUÍMOS QUE DIMINUINDO OS LADOS DA CERCA, A LARGURA DO TERRENO AUMENTA, E QUANDO AUMENTAMOS OS LADOS DA CERCA, A LARGURA DO TERRENO DIMINUI, COM BASE NESSAS INVESTIGAÇÕES A MELHOR MANEIRA DA FAMÍLIA CERCAR O TERRENO EXPLORANDO O MÁXIMO DE ÁREA É CERCAR OS LADOS COM 375 METROS E A LARGURA COM 750 METROS DE CERCA.

b) O MÁXIMO DE ÁREA DO TERRENO A SER EXPLORADO É 281.250 M², CONSIDERANDO AS INÚMERAS VARIAÇÕES DO PERÍMETRO RESPEITANDO O LIMITE DE 1500 METROS, ESSE É O MÁXIMO DE ÁREA QUE A FAMÍLIA PODE EXPLORAR.

Fonte: Grupo A2.

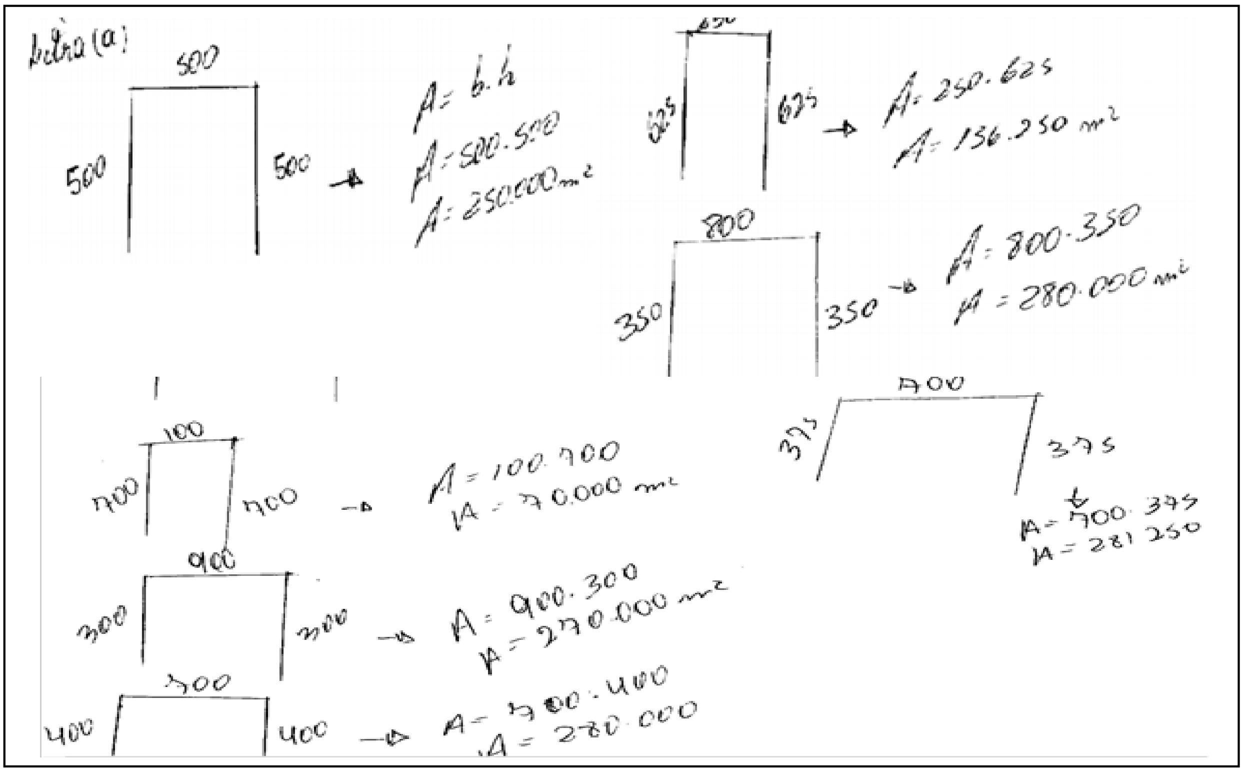
Refletindo sobre os resultados encontrados pelo grupo A2 em relação a segunda tarefa, percebe-se que a partir da intervenção do professor o grupo foi ganhando confiança e foram utilizando alguns processos que envolvem uma tarefa de investigação matemática, tais como “[...] a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIERA, 2016, p. 29).

Seguindo a orientação dos autores citados, durante a realização da tarefa, passei pelos grupos estimulando os alunos a investigarem situações correspondentes a tarefa solicitada. Tal atitude contribuiu significativamente para instigar os alunos a procurar conjecturas, as quais foram testadas, discutidas e validadas. Esta postura adotada pelo professor, vai ao encontro da abordagem destacada por Gonçalves (2012, p. 39) ao afirmar que “para isso, é necessário que o professor adote uma postura diferenciada em suas aulas, propondo atividades que sejam capazes de desenvolver nos alunos, habilidades diversas de modo que ocorra uma aprendizagem efetiva”. Mediante este contexto, o aluno A12 apresentou a conclusão do grupo em relação a tarefa investigada.

> Aluno A12: Para a família aproveitar o máximo da área do terreno, ela precisa cercar uma região na forma de um retângulo com 750 metros de largura e 375 metros de comprimento que multiplicado dá uma área de 281.250 metros quadrados. Então valores diferentes, sempre vai dá uma área menor.

O grupo B2, utilizou estratégias parecidas com as do grupo A2. Mas os cálculos explorados a partir das medidas dos lados atribuídos mediante o perímetro de 1500 metros apresentam alguns erros como pode ser observado na figura 24.

Figura 24 – Resposta do grupo B2 da segunda tarefa

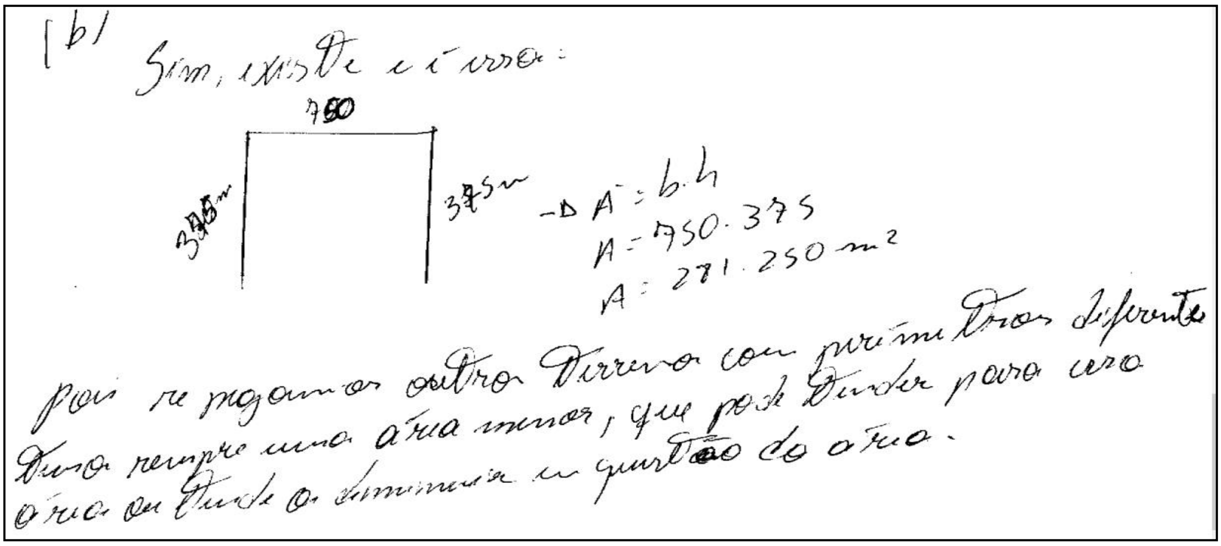


Fonte: Grupo B2.

O grupo B2 começou explorando a medida da cerca disponível para verificar o comportamento da área a partir da atribuição de valores para os três lados do terreno que deveriam ser cercados. Diferente do grupo anterior, os alunos deste grupo começaram com quadrado com 500 metros de lados (sem considerar a medida do lado correspondente a margem do rio) e foram diminuindo a largura e distribuindo o restante para os dois lados do comprimento do terreno retangular. Chegaram em uma área máxima de 281.250 metros quadrados com as medidas de 700 metros de largura e 375 metros de comprimento, que não traduz o produto desses valores, visto que, o resultado desta multiplicação 700 por 375 equivale a 262.500 metros quadrados. Este erro deve ter ocorrido por falta de atenção, já que na resposta do item b desta tarefa, a resolução está correta, como ilustra a figura 25.

Diante deste contexto, Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) e Magalhães e Varizo (2016) contribuem ao enfatizarem o quanto é fundamental o professor supervisionar todo trabalho com bastante atenção, instigando o tempo todo os alunos a analisarem suas respostas em grupo, discutindo sobre a validação de cada uma delas, visto que, esta atitude contribuirá para a construção de conhecimentos e perceber eventuais erros.

Figura 25 – Conclusão do item **b** do grupo B2



Fonte: Grupo B2.

Diante do ato de investigação, vale destacar que a construção do conhecimento é continua e inacabada, para tal, D'Ambrósio (2012, p. 16) afirma que "o processo, extremamente dinâmico e jamais finalizado, está obviamente sujeito a condições muito específicas de estímulos e de subordinação ao contexto natural, cultural e social". Isto significa, que o processo de aquisição de conhecimento depende das interações conduzidas em todos os momentos como o registro das conversas em destaque:

> Professor: Mediante a reflexão de vocês a partir das conclusões que encontraram, o que este contexto pode ser relacionado com o estudo de Cálculo?
> Aluno B32: Professor, estávamos discutindo, conversamos sobre a utilização de relações matemáticas para definir o perímetro e a área do terreno. Então, percebemos que a área máxima pode ser encontrada utilizando a derivada da função formada pela relação do perímetro com a área do terreno.
> Professor: Como assim, vocês podem exemplificar esta ideia?
> Aluno B12: Sim professor. Nós definimos que o perímetro é o dobro do comprimento que é a altura, mais a largura que é a base, ou seja, 2h + b = 1500. E a área é base multiplicada pela altura (b x h).
> Professor: Tá, mas onde está a derivada?
> Aluno B12: Pegamos b = 1500 – 2h e substituímos em f(h) = 1500h – 2h². A derivada desta função é f'(h) = 1500 – 4h. Igualando a zero encontramos a altura de 375 metros e a partir dela encontramos a base de 750 metros.

> Aluno B22: Olha só, isto mostra que a utilização de derivada ajuda bastante para encontrar valores que tendem para um número máximo.
> Aluno B42: É verdade! Também ajuda a encontrar as medidas das dimensões do terreno a partir do perímetro que deve ser explorado e assim encontrar a área máxima.

A possibilidade de verificar diversas situações em tarefas investigativas, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) só é possível porque o professor entra em cena como provocador da pesquisa, visto que deve instigar os alunos a buscarem conjecturas. Além disso, conhecimentos prévios sobre relações matemáticas básicas é fundamental para o desenvolvimento do trabalho, tais como o comportamento de funções, que é um pré-requisito para o estudo da disciplina de Cálculo. Esta provocação desafia os alunos a se lançarem no campo investigativo e procurar relações matemáticas que deverão ser discutidas com o propósito de validação, quando verdadeira, ou refutadas, quando falsas.

Os outros grupos (C2, D2 e E2) apresentaram a mesma estratégia para verificar o comportamento da área do terreno a partir da exploração do perímetro citado no enunciado da segunda tarefa. Desta forma, não são apresentados os resultados desses grupos, visto que se tornaria repetitivo, já que eles também utilizarem desenhos de pequenos retângulos e atribuíram valores aos lados de acordo com a perímetro disponível.

Portanto, durante o desenvolvimento desta tarefa investigativa, vale destacar o entusiasmo dos alunos no momento da investigação. Os grupos discutindo, buscando alternativas para encontrar relações matemáticas de acordo com a tarefa proposta, formulando conjecturas e debatendo o significado das mesmas, traduz que trabalhar com tarefas investigativas pode contribuir com o desenvolvimento da aprendizagem matemática de forma dinâmica e eficaz.

4) Quarto encontro

O quarto encontro foi realizado no dia 29 de abril de 2019 com duração de duas horas e trinta minutos. Desta aula, participaram 21 alunos que foram divididos em quatro grupos com 4 alunos em cada e um grupo com 5 alunos. A partir da organização das equipes, apresentei a terceira tarefa investigativa destacada no Quadro 7.

A figura 26 ilustra um dos modos utilizados pelos alunos do grupo B3 para formalizar conclusões em relação ao item **a** da tarefa 3.

Figura 26 – Respostas do grupo B3 em relação ao item **a**

Soma		Produto
$1 + 24 = 25$	$\rightarrow$	$1 \cdot 24 = 24$
$2 + 23 = 25$	$\rightarrow$	$2 \cdot 23 = 46$
$3 + 22 = 25$	$\rightarrow$	$3 \cdot 22 = 66$
$4 + 21 = 25$	$\rightarrow$	$4 \cdot 21 = 84$
$5 + 20 = 25$	$\rightarrow$	$5 \cdot 20 = 100$
$6 + 19 = 25$	$\rightarrow$	$6 \cdot 19 = 114$
$7 + 18 = 25$	$\rightarrow$	$7 \cdot 18 = 126$
$8 + 17 = 25$	$\rightarrow$	$8 \cdot 17 = 136$
$9 + 16 = 25$	$\rightarrow$	$9 \cdot 16 = 144$
$10 + 15 = 25$	$\rightarrow$	$10 \cdot 15 = 150$
$11 + 14 = 25$	$\rightarrow$	$11 \cdot 14 = 154$
$12 + 13 = 25$	$\rightarrow$	$12 \cdot 13 = 156$
$12,5 + 12,5 = 25$	$\rightarrow$	$12,5 \cdot 12,5 = 156,25$

$f(x) = x \cdot y$

$x + y = 25$

$y = 25 - x$

$= x \cdot (25 - x)$

$= -x^2 + 25x$

$f'(x) = -2x + 25$

$0 = -2x + 25$

$x = \frac{25}{2}$

$x = 12,5$

Fonte: Grupo B3.

De acordo com a simulação produzida pelo grupo B3 correspondente ao item **a** da tarefa 3, percebe-se que a conclusão do grupo, conforme os valores dos números que correspondem a soma de 25 se aproximam, esses fatores tendem a um produto máximo. Desta forma, a figura 27 destaca a conclusão dos alunos desta equipe.

Figura 27 – Conclusão do grupo B3 do item **a**

Quanto mais o número se aproxima dele mesmo, o produto tende para o valor máximo, que é 156,25.

Fonte: Grupo B3.

A gravação das conversas do grupo B3 em relação ao item **a** da terceira tarefa investigativa pontua o que os alunos debateram para chegarem a conclusão destacada na figura 27.

> Aluno B23: Alguém entendeu o enunciado da letra **a** dessa terceira questão?
> Aluno B13: Entendi que é pra verificar o que acontece com o produto de dois números que somados dá 25.
> Aluno B33: Como assim?
> Aluno B13: Por exemplo, 10 +15 = 25 e 10 x 15 = 150.

> Aluno B33: Ah sim! Entendi.
> Aluno B43: Então vamos fazer várias simulações pra ver o que acontece.
> Aluno B23: É tem um número máximo para as multiplicações. Vamos chamar o professor. Professor por favor?
> Professor: Pois não, o que descobriram?
> Aluno B23: Achamos um número máximo.
> Professor: Como chegaram nessa conclusão?
> Aluno B43: Fizemos algumas multiplicações com fatores que somadas dão 25 e percebemos que conforme esses fatores se aproximam o valor do produto vai aumentando e esse produto é máximo quando eles são iguais, ou seja, 12,5.
> Aluno B13: Além disso professor, nós comprovamos esse resultado utilizando a derivada através da modelagem da relação da função da soma com a função do produto.
> Professor: Como?
> Aluno B13: Utilizamos a multiplicação da letra x pela letra y pra representar o produto e a soma dessas letras igual a 25 e escrevemos uma função relacionando a soma e produto e ficamos com uma função com apenas uma variável, então derivamos e comprovamos o valor de 12,5.

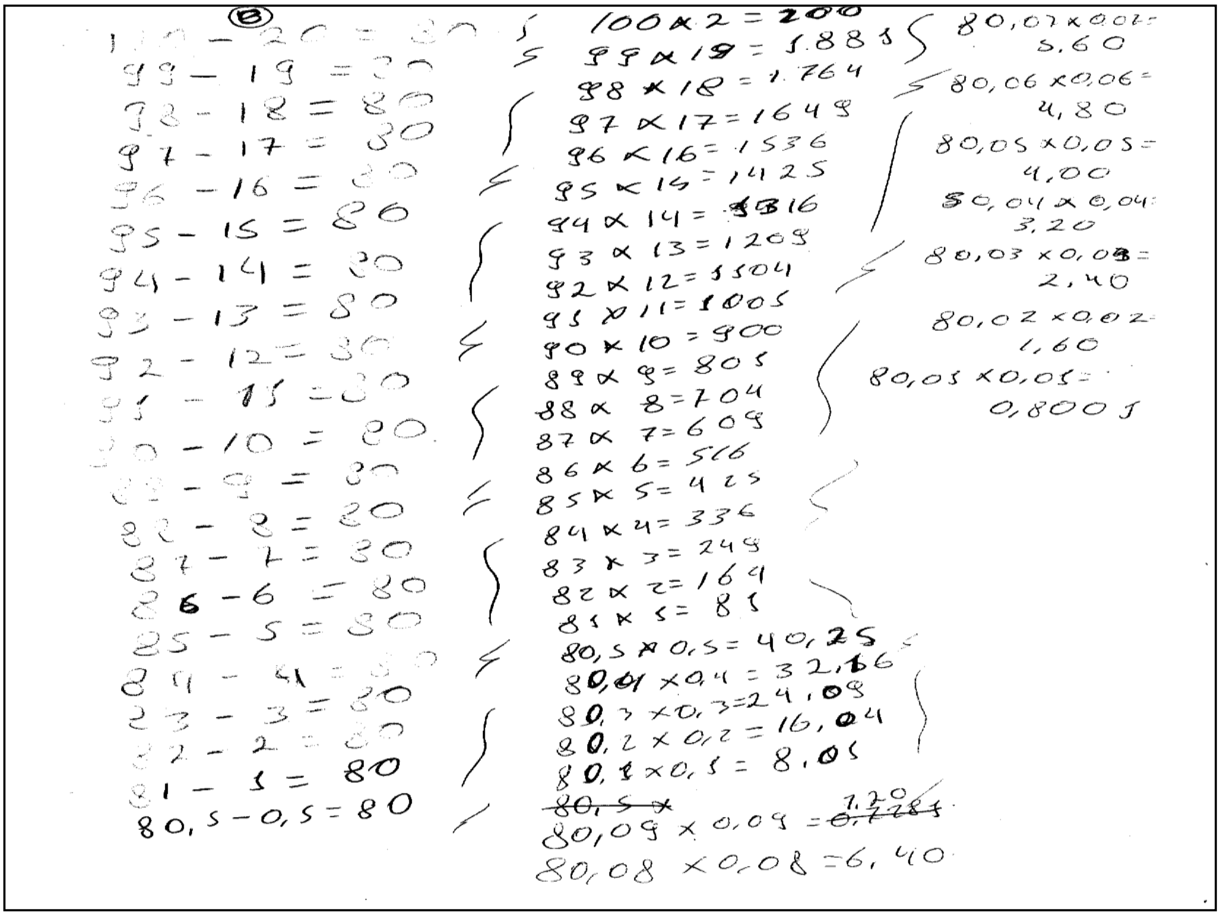
O diálogo apresentado é um indicativo de que “a estratégia de investigação na sala de aula envolve um processo de observação, exploração e argumentação justificada de uma situação matemática, que são características do pensamento indutivo e analógico” (MAGALHÃES; VARIZO, 2016, p. 25). Desta forma, a discussão em busca de formulação de conjectura é fundamental para a construção de conhecimentos matemáticos. Além disso, os alunos perceberam a ideia de máximo de uma função estar relacionada com a derivada igual a zero.

Analisando as respostas dos outros grupos em relação ao item **a** da tarefa 3, os grupos não apresentaram dificuldades para chegarem a conclusão que existem um produto máximo, e todos utilizaram a estratégias de simular vários produtos a partir da variação de dois números cuja a soma seja sempre igual a 25. Desta forma, não há necessidade de expressá-las, visto que são análogas em relação a já apresentada na figura 27. Mas vale destacar que, apenas o grupo B3 modelou as funções e derivou a função formada pela relação das funções da soma e do produto para confirmar o produto máximo que encontraram conforme as figuras 26 e 27. E tal achado foi socializado na apresentação final dos resultados desta tarefa por todos os grupos.

Partindo do pressuposto que os alunos desenvolveram várias simulações para formular conjecturas, entende-se que este processo é fundamental para a garantia da credibilidade, estimulação de argumentos com significados e provados com formalidade para a conquista da validade matemática (PONTE, 2007).

Em relação ao item **b** da terceira tarefa, nenhum grupo conseguiu desenvolver uma resposta aproximada da esperada. Todos os grupos fizeram simulações mediante subtrações de dois números igual a 80 e depois encontraram os produtos desses números, mas apenas o grupo B3 conseguiu explorar a ideia de derivadas para analisar o comportamento dos produtos dos fatores relacionados com a subtração de acordo com o enunciado da questão. Por exemplo, a figura 28 destaca o que o grupo D3 construiu.

Figura 28 – Construção do grupo D3 em relação ao item **b** da terceira tarefa


100 − 20 = 80
99 − 19 = 80
98 − 18 = 80
97 − 17 = 80
96 − 16 = 80
95 − 15 = 80
94 − 14 = 80
93 − 13 = 80
92 − 12 = 80
91 − 11 = 80
90 − 10 = 80
89 − 9 = 80
88 − 8 = 80
87 − 7 = 80
86 − 6 = 80
85 − 5 = 80
84 − 4 = 80
83 − 3 = 80
82 − 2 = 80
81 − 1 = 80
80,5 − 0,5 = 80

100 x 2 = 200
99 x 19 = 1.881
98 x 18 = 1.764
97 x 17 = 1649
96 x 16 = 1536
95 x 15 = 1425
94 x 14 = 1316
93 x 13 = 1209
92 x 12 = 1104
91 x 11 = 1001
90 x 10 = 900
89 x 9 = 801
88 x 8 = 704
87 x 7 = 609
86 x 6 = 516
85 x 5 = 425
84 x 4 = 336
83 x 3 = 249
82 x 2 = 164
81 x 1 = 81
80,5 x 0,5 = 40,25
80,4 x 0,4 = 32,16
80,3 x 0,3 = 24,09
80,2 x 0,2 = 16,04
80,1 x 0,1 = 8,01
~~80,5 x~~
80,09 x 0,09 = 7,20
80,08 x 0,08 = 6,40

80,07 x 0,07 = 5,60
80,06 x 0,06 = 4,80
80,05 x 0,05 = 4,00
80,04 x 0,04 = 3,20
80,03 x 0,03 = 2,40
80,02 x 0,02 = 1,60
80,01 x 0,01 = 0,8001

Fonte: Grupo D3.

Mediante as simulações destacadas por esse grupo na figura 28, percebe-se que chegaram a conclusão que o produto mínimo existe e tende a zero. Um dos motivos para tal conclusão foi que este grupo considerou apenas valores positivos, e partir disso a interpretação dos alunos ficou limitada e então o resultado não foi o esperado. Este fato condiz com a abordagem de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) sobre o desenvolvimento do trabalho ao relatarem que a compreensão dos alunos devem ser asseguras e o professor tem o papel fundamenta de buscar compreender como está sendo desenvolvido o trabalho pelos alunos para a partir da necessidade apresentada, auxiliar no que for necessário. Os grupos B3, C3 e E3 também chegaram a mesma conclusão do grupo D3. Para os alunos da equipe A3, o produto mínimo não tende a zero, mas tende a 81. A resposta do grupo A3 também não condiz com a esperada. A figura 29 ilustra a conclusão deste grupo. Desta forma, diante dos resultados apresentados pelos grupos A3, B3, C3, D3 e E3 em relação ao item b da tarefa 3, o professor deve estar atento, compreender o contexto e instigar os alunos a compreenderem a situação proposta para contribuir com a construção de conhecimentos.

Figura 29 – Resposta do grupo A3 em relação ao item **b** da terceira tarefa

b, Encontre dois números, cuja a diferença seja 80 e verifique se existe, produto mínimo entre eles. Justifique.

Diferença	Produto
81 - 1 = 80	81 . 1 = 81
81,5 - 1,5 = 80	81,5 . 1,5 = 122,25
82 - 2 = 80	82 . 2 = 164
83 - 3 = 80	83 . 3 = 249
84 - 4 = 80	84 . 4 = 336
85 - 5 = 80	85 . 5 = 425
86 - 6 = 80	86 . 6 = 516
87 - 7 = 80	87 . 7 = 609
88 - 8 = 80	88 . 8 = 704
89 - 9 = 80	89 . 9 = 801
81,1 - 1,1 = 80	81,1 . 1,1 = 89,21
81,2 - 1,2 = 80	81,2 . 1,2 = 97,44
81,3 - 1,3 = 80	81,3 . 1,3 = 105,69
81,4 - 1,4 = 80	81,4 . 1,4 = 113,96
81,5 - 1,5 = 80	81,5 . 1,5 = 122,25
81,6 - 1,6 = 80	81,6 . 1,6 = 130,56
81,7 - 1,7 = 80	81,7 . 1,7 = 138,89
81,8 - 1,8 = 80	81,8 . 1,8 = 147,24
81,9 - 1,9 = 80	81,9 . 1,9 = 155,61

• Os dois números cuja diferença é 80 e que possuem um produto mínimo são:

* 81 - 1 = 80	81 . 1 = 80
* 81,1 - 1,1 = 80	81,1 . 1,1 = 89,21
Diferença	Produto

• Pois por mais que a diferença dos outros números testados, sejam igual a 80, o produto deles aumentará.

Fonte: Grupo A3.

Observa-se na produção do grupo A3 destacada na figura 29, que por falta de concentração, o produto de 81 por 1 é igual a 81 e no quadro no final da figura o produto desses fatores é igual a 80. A partir deste contexto, o professor pesquisador instigou alguns grupos para refletirem sobre a possibilidade de ampliação da exploração desse contexto. Alguns momentos dessa ação são destacados a seguir:

> Professor: Será que não existe outras possibilidades além dessas que vocês exploraram?
> Aluno A23: Como assim professor, não entendi?
> Professor: Observando as conclusões de vocês, nota-se que utilizaram bastante números na casa de oitenta, por exemplo, 81; 82, 87, 80.05, 81.01 e assim por diante.
> Professor: Será que o produto mínimo tende a zero? Será que não existe outros produtos menores que zero dentro do contexto explorado?
> Aluno B33: Professor, pensando na sua pergunta, acho que tem outras possibilidades, por exemplo, se pegarmos um número positivo e multiplicarmos por um negativo, o produto será menor que zero.
> Professor: Exemplifica essa tua ideia.
> Aluno B33: Ok professor. Veja só, 20 - (-60), o resultado é 80 e o produto é -1200, que é menor que zero. Então realmente a conclusão que destacamos como o produto mínimo tendendo para zero foi errada.
> Aluno D43: Professor, observando a discussão e colocação do colega, cheguei à conclusão que o produto mínimo é -1600.
> Professor: Como assim? Você pode explicar melhor como chegou nessa conclusão?
> Aluno D43: Sim professor! Se multiplicarmos um número positivo por um negativo que a diferença entre eles seja oitenta, esse produto é mínimo quando esses fatores são opostos, por exemplo, 40 multiplicado por -40.

Como todos os grupos não apresentaram respostas satisfatórias em relação ao item b da tarefa 3, o professor promoveu discussão com os grupos explorando perguntas destacadas no diálogo anteriormente citado. A partir desta interação, os alunos enfatizaram outras possibilidades e construíram a conclusão de que para a diferença de dois números igual a 80 possuir produto mínimo, eles devem se aproximar dos seus opostos, ou seja, um tende para 40 e o outro tende a – 40. Assim, a intervenção do professor foi fundamental para os alunos compreenderem a tarefa proposta e mediante reflexão coletiva descobriram a existência do produto mínimo, destacado pelo aluno D43.

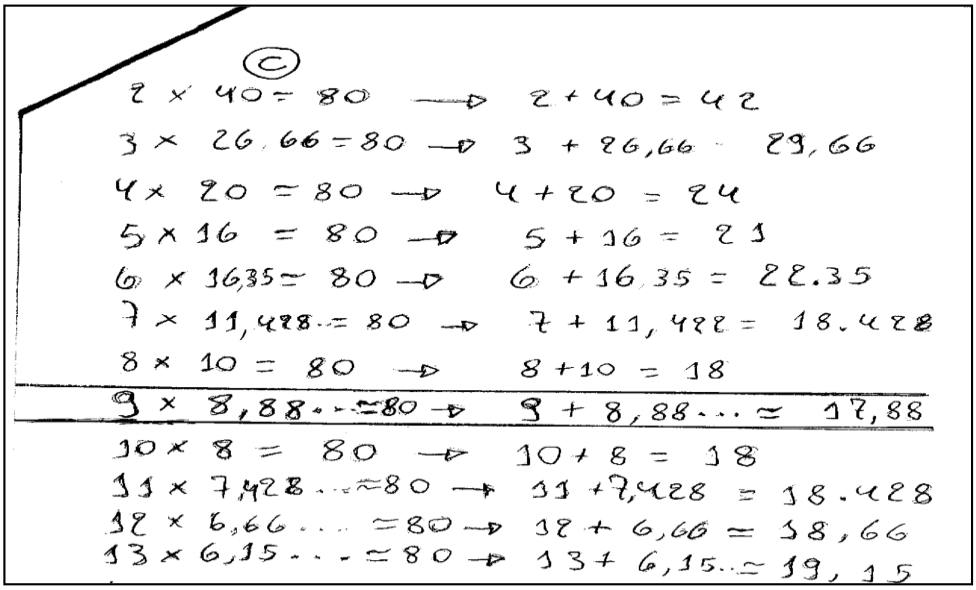
Este momento, validação das conjecturas, “exige uma mediação maior por parte do professor, levando-os a perceberem a necessidade de pensar nas possibilidades para outros casos, podendo ser estimulados a procurar contraexemplos” (MAGALHÃES; VARIZO, 2016, p. 41). Desta forma, instiguei os alunos a pensar em outras possibilidades e buscar padrões com situações anteriores.

> Professor: Analisando as conclusões, e comparando com o que já formularam em questões anteriores, será que é possível modelar esta situação?
> Aluno C13: Professor, analisando nossas respostas e a letra **a** desta questão chegamos à conclusão de explorar derivadas, e fizemos.
> Professor: Compartilhe a estratégia que utilizaram.
> Aluno C13: Utilizamos $x - y = 80$ e o produto $x \cdot y$, isolamos o y na diferença e substituímos no produto e chegamos a função $f(x) = x^2 - 80x$, como a questão fala de mínimo, usamos a derivada da função ($f(x) = 2x - 80$) igualando a zero chegamos em $x = 40$ e daí que para a diferença ser igual a 80 o $y = -40$. Por isso que existe o produto mínimo e é igual a – 1600.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) o momento da discussão dos grupos instigados pelo professor é fundamental para a apresentação e análise das conjecturas formuladas, e a partir da reflexão dos resultados ocorre o processo de validação ou negação.

O item **c** da terceira tarefa investigativa, enfatiza sobre o produto de dois números positivos igual a 80, e instiga os alunos sobre a existência de uma soma mínima. Para a realização desta tarefa os grupos apresentaram dificuldades porque os números que se aproximavam do contexto solicitado no enunciado se apresentava como um número irracional e não como um inteiro.

Figura 30 – Resposta do grupo D3 em relação ao item **c** da tarefa 3



Fonte: Grupo D3.

A figura 30 ilustra que este grupo testou vários números inteiros e também usou aproximações e concluíram que existe uma soma mínima entre dois números cujo o produto é 80. Segundo os componentes deste grupo, eles encontraram dificuldades porque tiveram que testar vários números decimais com mais de um dígito após a vírgula. O diálogo registrado entre o professor e o grupo D3 destaca o desconforto do grupo.

> Aluno D13: Professor, nós testamos vários números e percebemos que um produto igual a 80 entre dois números, quando somados se aproxima de 18 e depois começa a aumentar novamente. Então se existe uma soma mínima seria 8 + 10 =18.
> Professor: Mas como vocês fizeram para chegar nessa conclusão?
> Aluno D13: Professor, nós pegamos dois números que o produto é 80 ou bem próximo de oitenta, então as vezes multiplicamos dois números inteiros e as vezes utilizamos um inteiro e outro decimal.
> Professor: Esses números decimais tem algum padrão depois da vírgula?
> Aluno D23: Alguns sim outros não.
> Aluno D43: Professor, os números inteiros mais próximos entre si que encontramos que o produto é 80 foi 8 e 10. A soma é 18, mas quando aproximamos mais ainda, essa soma fica bem próxima de 18.
> Professor: Mas que relação tem essa situação com o enunciado?
> Aluno D23: É porque percebemos que a soma mínima que buscamos deve ser de dois números iguais ou muito próximos entre si.
> Professor: Como assim?
> Aluno D23: veja bem, nós testamos 9 e 8,88... e sua soma é aproximadamente 17,88..., então os dois números são menores que 9, visto que o produto de 9 por 9 é 81. Mas não estamos conseguindo encontrar esses números.
> Aluno D13: Provavelmente esses números são irracionais. Dessa forma fica difícil descobrir. Nós já sabemos que existe e é menor que 9 e a soma deles é próximo de 18.
> Aluno D43: Ah professor, já sei, se a gente usar funções para o produto e a soma, podemos usar a derivada para encontrar esses números por que é um contexto de variação.
> Professor: discutem e analisem os resultados que encontrarem.
> Aluno D43: Ok professor, vamos já verificar.

Os alunos do Grupo A3 apresentaram dificuldades de trabalhar com números aproximados, números com casas decimais, visto que, segundo os mesmos, os cálculos ficam mais trabalhosos e o risco de errar a resolução aumenta. Em relação a esse contexto, Grando e Viera (2006) enfatizam que é comum encontrarmos na sala de aula alunos que ainda apresentam dificuldades ao trabalharem com o sistema de numeração decimal, sendo um dos motivos a não exploração deste tema a partir de várias representações.

O grupo A3 também fez algumas simulações utilizando dois números cujo produto é 80 e verificou a soma desses números. Este grupo trabalhou com apenas números inteiros positivos como ilustra a figura 31:

Figura 31 – Respostas do grupo A3 do item **c** da tarefa 3

(c) Encontre dois numeros positivos cujo o produto seja 80 e verifique se existe soma minima entre eles. Justifique.

1×80 = 80	1+8 = 81
2 × 40 = 80	2+40 = 42
4 × 20 = 80	4+20 = 24
5 × 16 = 80	5+16 = 21
8 × 10 = 80	8+10 = 18 Soma mínima
10 × 8 = 80	10+8 = 18
16 × 5 = 80	16+5 = 21
20 × 4 = 80	20+4 = 24
40 × 2 = 80	40+2 = 42
80 × 1 80	80+1 = 81
Produto	Soma

Os dois numeros positivos cujo o produto seja 80 se exista a soma mínima entre eles são: 8.10 = 80 / 10.8 = 80 e 8+10 = 18 / 10+8 = 18, e mesmo que os produtos dos outros numeros testados seja 80, a soma entre eles será maior que 18.

Fonte: Grupo A3.

Para esse grupo, conforme visualizado na Figura 31, os dois números cujo o produto é 80 e apresenta uma soma mínima é 8 e 10, pois para eles a soma de outros dois números que a multiplicação entre eles seja 80 vai ser sempre maior que 18. De acordo com as respostas da figura 31, os alunos do grupo A3 não ampliaram sua investigação em outros números além dos naturais, não perceberam a necessidade de ampliar o olhar para conjunto dos números reais. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), no momento da investigação por busca de conjecturas é fundamental que o aluno tenha domínio de noções básicas de matemática para tornar o contexto propício a formulação de situações que favoreçam a descoberta de conjecturas. Caso contrário a criatividade dos alunos poderá ficar limitada, não conseguindo se aprofundar e verificar várias situações em prol de novas descobertas.

O grupo E apresentou a mesma conclusão do grupo A, desta forma não há necessidade de apresentá-la. Da mesma forma, os grupos B3 e C3 também apresentaram a mesma ideia, ou seja, simularam várias somas de dois números cujo o produto corresponde a 80, mas o que chamou atenção foi no momento da apresentação dos resultados. Apesar de todos os cinco grupos apresentarem a mesma estratégia para encontrar situações correspondentes ao enunciado do item **c** da tarefa 3, vale ressaltar que dois grupos investigaram não olhando somente para os números naturais, mas também para os reais positivos.

O grupo D3 foi o único grupo que, a partir da observação dos resultados que encontraram ilustrados na figura 30, perceberam que os números procurados poderiam ser encontrados a partir de derivadas. Assim, utilizando funções fizeram a modelação, concluindo que a soma mínima é produzido por dois números irracionais iguais que são $4\sqrt{5}$, e $4\sqrt{5}$ cujo o produto é 80; e a soma é aproximadamente 17,8885438, isto é, um número próximo de 18. Sobre esta conclusão, os alunos do grupo D3 destacaram:

> Aluno D13: Utilizamos para o produto a função $xy = 80$ e substituímos na soma, e gerou a função $f(x) = x + \frac{80}{x}$. Depois igualamos a zero, derivamos e ficou $f'(x) = 1 - \frac{80}{x^2}$. Depois calculamos e encontramos $x = 4\sqrt{5}$, substituímos na função do produto e encontramos o mesmo valor para o y.
> Aluno D43: Por isso professor, que a soma é próximo de 18 porque $4\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$ é aproximadamente 17,9.
> Professor: Como chegaram nesta estratégia?
> Aluno D13: Há professor, surgiu conforme as simulações que fizemos em buscar dois números que dessem uma soma mínima. Mas chegamos a essa estratégia porque todo mundo participou buscando alternativa.
> Aluno D33: Isso mesmo, esse o ponto chave, fizemos o que o senhor sugeriu, trabalhamos de forma coletiva, todos envolvidos na investigação.

Os alunos do grupo D3, adotaram a postura do trabalho coletivo, todos se envolveram no processo de forma participativa respeitando as diferenças de cada um, com isso, compartilharam situações vivenciadas que culminou na formulação de conjecturas que foram validadas e confirmadas como conhecimentos construídos de forma autônoma. Para ilustrar essa conquista, Magalhães e Varizo (2016, p. 39) afirmam que:

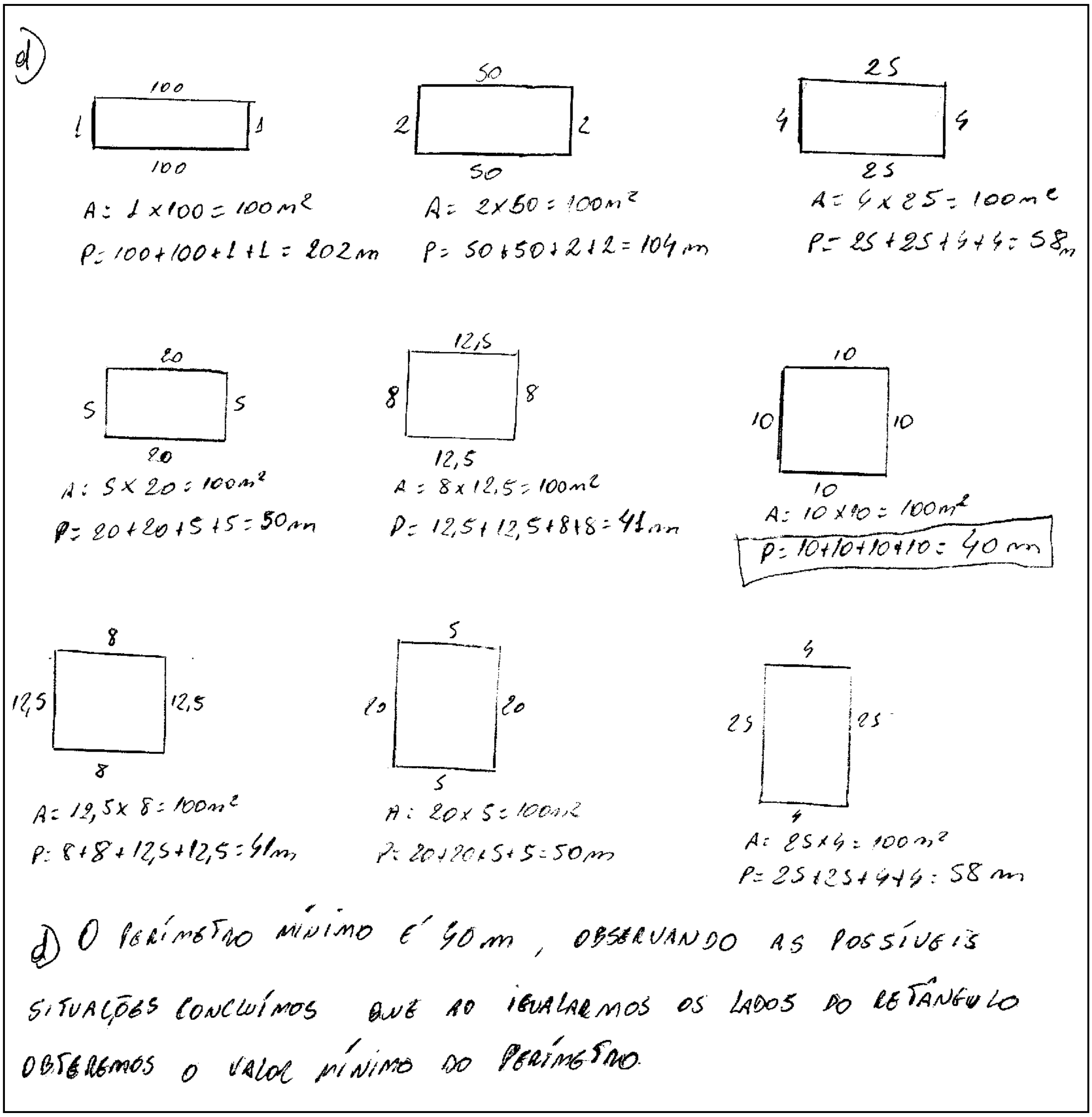
> A dinâmica do trabalho colaborativo exige que todos trabalhem de conformidade com um propósito comum e não haja hierarquia entre os participantes do grupo. As decisões devem ser tomadas coletivamente, e a produção da equipe consista no resultado da dialética entre experiências vivenciadas e os saberes daqueles que as constituem. Convém destacar que, em grupos de natureza colaborativa, os indivíduos compartilham ideias, conhecimentos, perspectivas e concepções em um ambiente de reciprocidade.

O último item da terceira tarefa investigativa, é o **d.** Nele foi solicitado para verificar a existência de um perímetro mínimo a partir da exploração das dimensões de um retângulo com área de 100 m². Os grupos desenvolveram essa tarefa com mais facilidade porque a sequência de tarefas exploradas com características investigativas proporcionou ritmo e adaptação com questões desse tipo, com isso, a busca por estratégias em prol de formulação de conjecturas foi sendo construída com mais autonomia.

Esta observação corrobora com as ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) que pontuam a importância do aluno ter vivido experiências com tarefas investigativas para interagir e contribuir com o grupo de forma participativa em busca da construção de conhecimentos. Para esses autores, o ato pedagógico de trabalhar com Investigação Matemática, é desafiador porque instiga o educando a ser o autor da sua aprendizagem. Para isso, o professor deve proporcionar a turma várias tarefas desse tipo para ambientar os alunos com os fundamentos desta tendência que desafia o indivíduo a agir como um investigador e construtor de conhecimentos matemáticos. Desta forma, “[...] as investigações matemáticas são um tipo de atividade que todos os alunos devem experimentar [...]” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2019, p. 25).

A figura 32 ilustra como o grupo A3 organizou as ideias discutidas sobre a existência de um perímetro mínimo de uma região retangular com área de 100 m².

Figura 32 – Estratégia utilizada pelo grupo A3 para investigar o item **d** da tarefa 3



Fonte: Grupo A3.

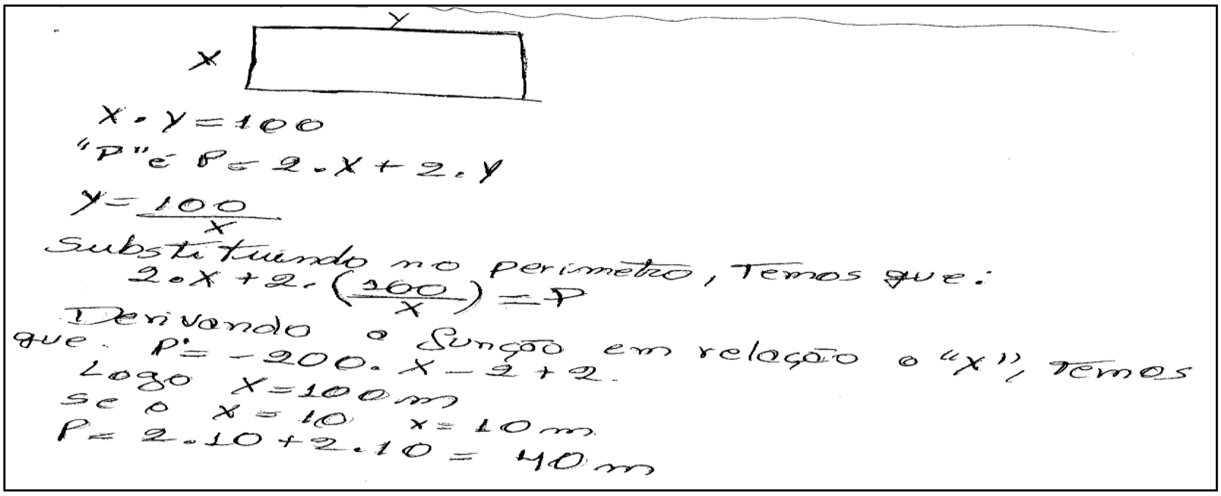
A figura 32 mostra que de acordo com as simulações feitas pelo grupo A3, existe um perímetro mínimo de um retângulo que tem área de 100 m² e é exatamente 40 m. Para os componentes desse grupo, as variações das dimensões do retângulo de acordo com a área estabelecida demonstrou que quando as medidas dos lados se aproximam de 10 m, também o perímetro do retângulo se aproxima de 40 m. Desta forma, eles concluíram que existe um perímetro mínimo e é igual a 40 metros.

Estava observando o trabalho dos grupos, e a equipe C3 me chamou. Comentaram sobre a conclusão que chegaram.

> Aluno C23: Professor, observamos que essa questão é parecida com os itens anteriores desta atividade 3. Então nós discutimos e resolvemos desenhar um retângulo e chamar suas dimensões de x e y.
> Professor: Por que vocês acham que essa questão tem relação com os itens anteriores?
> Aluno C33: É porque elas falam ou de máximo ou mínimo, e para encontrar as respostas nós atribuímos valores e com isso os resultados iam variando de acordo com os valores, e variação tem relação com derivadas. Por isso, que em vez de ficar testando valores para as dimensões nós desenhamos o retângulo e exploramos a área e o perímetro dele.
> Aluno C13: É professor, mas só chegamos a essa conclusão porque comparamos com os itens a, b e c. Por isso, entendemos que situações que envolvem variação podem ser estudas por derivadas de funções.

De acordo com estes relatos, percebe-se que os alunos do Grupo C3 a partir das simulações que fizeram, utilizando um desenho de um retângulo, relacionaram a variação das medidas da área e do perímetro com derivadas, bem como perceberam a existência de valores que tendem para a ideia de máximo ou de mínimo. Em relação a esses aspectos, Stewart (2013) confirma que as derivadas podem ser aplicadas ao estudo de taxas de variações, valores máximos e mínimos de funções. A figura 33 ilustra as conclusões do grupo C3.

Figura 33 – Conclusão do grupo C3 em relação ao item **d** da tarefa 3



Fonte: Grupo C3.

Esta atitude de observação que o grupo C3 destacou e a partir disso adotou a estratégia de estabelecer as funções destacadas pelo contexto e utilizar os fundamentos de derivadas para investigar a situação, corrobora com o enunciado de Mondini, Mocrosky e Paulo (2018, p. 152), ao salientarem que "ensinar CDI I[3] no curso

[3] Cálculo Diferencial e Integral I.

de Licenciatura em Matemática é investigar modos de o aluno produzir conhecimento matemático". Destaco que, este trabalho desenvolvido em uma turma de Licenciatura de Matemática, foi de empenho e motivação dos alunos com as atividades investigativas. Ademais, foi uma oportunidade para esses alunos ter uma experiência sobre a forma de uso desta metodologia, o que pode contribuir com a formação profissional desses futuros professores.

5) Quinto encontro

O quinto encontro teve duração de duas horas e trinta minutos. Desta tarefa participaram 21 alunos, divididos em 4 grupos com 4 discentes em cada um e um grupo com 5 discentes. Diante da organização das cinco equipes, iniciei o desenvolvimento da tarefa que se encontra no quadro 8.

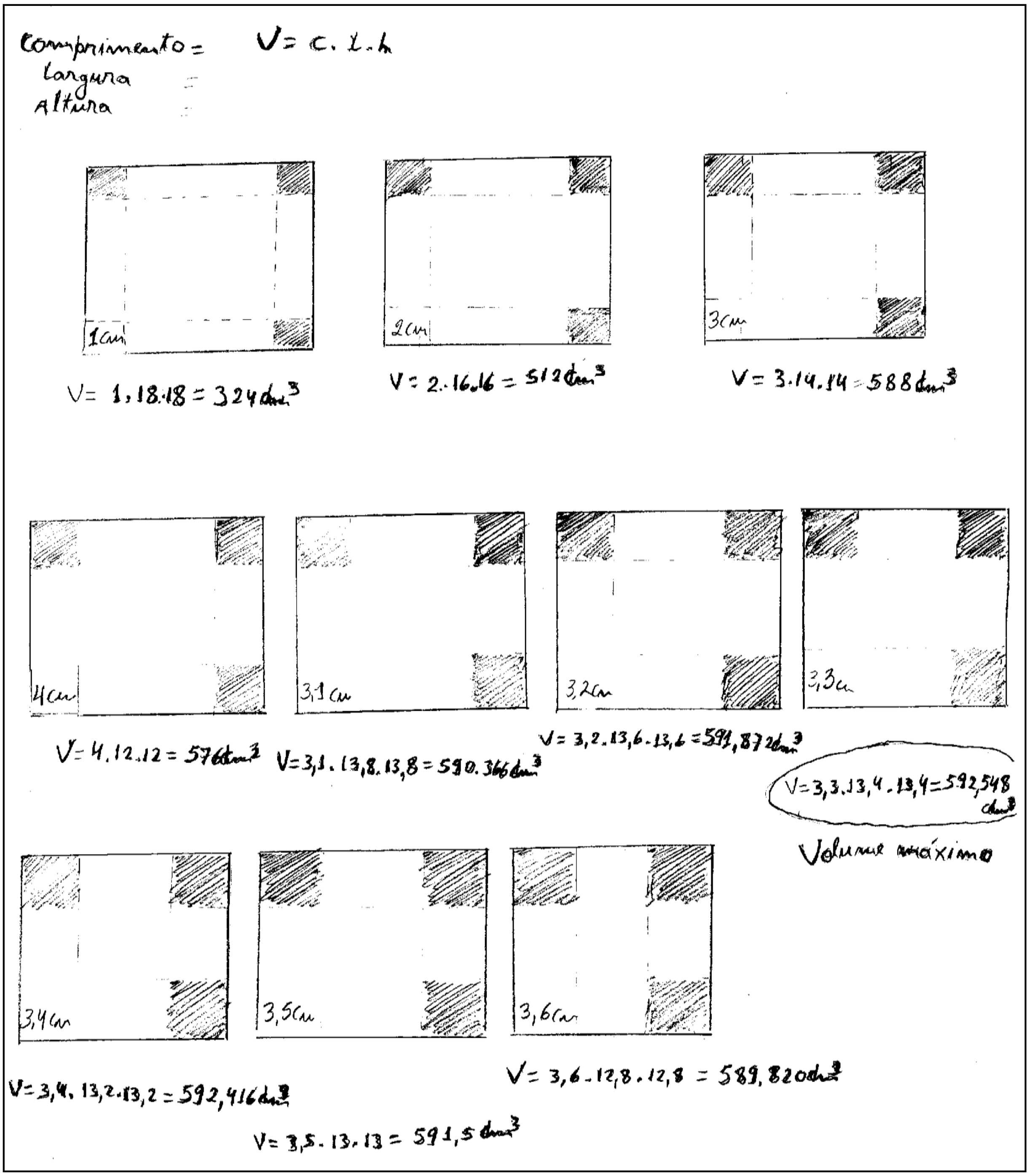
Depois da apresentação da tarefa 4, os grupos começaram a investigação em busca de formulação de conjecturas. Observando a conversa intensa de um dos grupos, me aproximei e interagi com o grupo.

> Professor: Sobre o que estão conversando?
> Aluno E24: Professor, estamos muito confusos sobre esta atividade. Comentei com meus colegas que eu acho que temos que testar algumas situações com as medidas diferentes dos quadrados que temos que cortar.
> Professor: Como assim, você pode me explicar melhor essa sua ideia?
> Aluno E24: Posso sim professor, por exemplo, tirar deste papelão um quadrado de cada canto medindo um centímetro de lado e verificar o volume, depois testamos os quadrados tirados com dois centímetros de lado e novamente calculamos o volume, e assim por diante.
> Professor: E o que vocês acham que vai acontecer utilizando este procedimento?
> Aluno E24: Acreditamos que vai ajudar a entender o que acontece com o volume da caixa conforme mudamos as medidas dos quadrados cortados.
> Aluno E34: Professor, eu acho que fica melhor de entender e fazer isso, se a gente fizer desenhos representando o papelão quadrado, e destacando os quadrados cortados em cada ponto.
> Professor: Então vamos lá, apliquem essas ideias que vocês apresentaram e depois discutem os resultados.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) essa atitude de buscar e testar situações diversas por meio de simulações e construções de desenhos são ações fundamentais para formulação de conjecturas em tarefas investigativas, visto que oferecem padrões que auxiliam na construção de conhecimentos mediante a validação das conjecturas. Além disso, a intervenção do professor é fundamental para proporcionar aos alunos vivências sobre que escolhas realizar para a solução dos problemas (D'AMBRÓSIO; ROSE, 2016).

Desta forma, a partir do diálogo entre professor e alunos do grupo E4, estes construíram desenhos de vários quadrados, como ilustra a figura 34.

Figura 34 – Construção das respostas do grupo E4 da tarefa 4



Fonte: Grupo E4.

De acordo com a figura 34, o grupo E4 ilustra que existe um volume máximo quando a medida do lado do quadrado retirado está entre 3,3 cm e 3,4 cm, visto que, de acordo com as simulações que fizeram, o volume vai aumentando conforme os testes com as medidas dos lados do quadrado retirado valendo 1 cm, 2 cm, 3 cm e 3,3 cm. Mas a partir do teste de 3,4 cm, 3,6 cm o volume da caixa vai diminuindo, por isso, existe um volume máximo quando a medida do lado do quadrado retirado das pontas do papelão está entre 3,3 cm e 3,4 cm.

Em relação aos questionamentos que o professor fez que instigou os alunos a formarem as conjecturas ilustradas na figura 34, Silva e Siqueira Filho (2011, p. 32) afirmam que:

> O professor deve fazer questionamentos que os levem a refletir sobre os seus conhecimentos de matemática e sobre os seus comportamentos e maneiras de pensar, analisá-los e utilizá-los (...) ajudar os alunos a avaliar e regular seus comportamentos e ações.

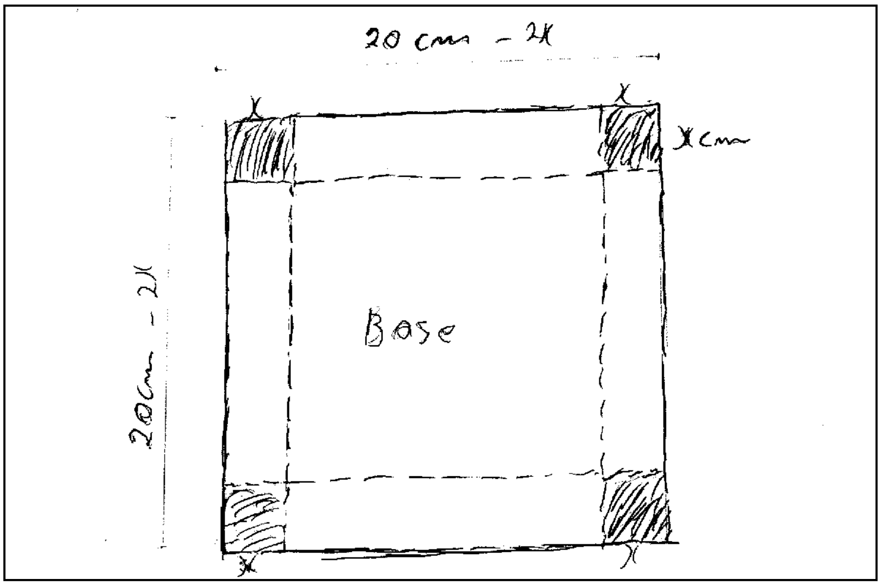
Além disso, segundo Mondini, Mockosky e Paulo (2018) a aplicação de tarefas investigativas permite a possibilidade da avaliação do professor em relação ao entendimento intuitivo da noção de derivada. A afirmação desses autores pode também ser observada no diálogo dos alunos do Grupo E4, registrados nas gravações.

> Aluno E44: Professor, como para descobrirmos a existência de um volume máximo da caixa, fizemos vários testes mudando a medida do lado do quadrado retirado do papelão, por isso a atividade 4 pode ser explorada utilizando derivada.
> Professor: Por que?
> Aluno E14: É porque está relacionada com variação, e a medida do lado do quadrado cortado vai variando, por isso dá pra utilizar derivada.
> Professor: Como essa ideia pode ser exemplificada?
> Aluno E34: Professor, nós fizemos um desenho e chamamos a medida do lado do quadrado retirado de x e derivamos a função criada em relação ao volume da caixa e chegamos a conclusão que os testes que fizemos estão corretos, a medida do lado do quadrado retirado das pontas do papelão quadrado está entre 3,3 cm e 3,4 cm.

A discussão apresentada pelos alunos do Grupo E4 destaca que a tarefa de investigação explorada, auxiliou os educandos a construírem conceitos de derivadas com autonomia. Este fato vai ao encontro dos fundamentos da Investigação Matemática defendida por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) ao enfatizarem que quando o professor trabalha em sala de aula com tarefas investigativas, promove um ambiente favorável a aprendizagem do aluno, porque instiga a participação do mesmo como personagem ativo que se lança na buscar de relações e padrões matemáticos.

A figura 35 ilustra a ideia apresentada pelo grupo E4, onde o desenho destaca a medida x dos lados dos quadrados que devem ser retirados dos quatro cantos do papelão quadrado. Segundo o grupo, foi usada a fórmula do cálculo do volume da caixa formada que gerou uma função do terceiro grau. Depois foi calculada a derivada e o valor igualado a zero, encontrando o valor de x igual a 3,3333.... Este valor confirmou os testes que eles fizeram, onde destacaram que a caixa possui volume máximo quando a medida do lado dos quadrados retirados do papelão quadrado se encontra entre 3,3 cm e 3,4 cm. Assim, perceberam que o valor encontrado com a utilização de derivadas está exatamente entre esse intervalo, pois corresponde a dízima periódica 3,333..., maior que 3,3 e menor que 3,4.

Figura 35 – Desenho do grupo E4 representando a construção da caixa



Fonte: Grupo E4.

As gravações das conversas desse grupo destacam o diálogo dos alunos durante o desenvolvimento da tarefa 4, e enfatiza a estratégia expressa na figura 35 utilizada pelo grupo E4.

> Aluno E14: E se a gente atribuir valores para a medida dos quadrados que devem ser cortados do pedaço de papelão, daí vamos fazer um desenho que represente a caixa e vamos chamar a medida do lado dos quadrados que devem ser cortados de x.
> Aluno E34: É verdade, e depois calcular o valor de x e verificar se corresponde aos testes que fizemos.
> Aluno E24: Como dá pra fazer isso?
> Aluno E44: De acordo com desenho que fizemos, o volume da caixa deve ser (20 – 2x).(20 – 2x).x.
> Aluno E14: É assim mesmo! A medida do lado é 20 – 2x porque como em cada quanto do quadrado de papelão tem que cortar o quadradinho de lado de medida x, no lado do quadrado do papelão tem 2x.
> Aluno E14: Você está certo, multiplicando a área da base do quadrado do papelão ($4x^2$ - 80x +400) pela altura x, o volume é 400x – $80x^2$ + $4x^3$. Depois

> igualamos a derivada desta função do volume a zero, o valor de $x = \frac{10}{3}$ produz o volume máximo correspondente a $\frac{16000}{27} cm^3$.

Para formular conjecturas da tarefa investigativa 4, o Grupo E4 desenhou um quadrado de lado 20 cm, destacou quatro quadrados pequenos nos cantos deste desenho denominado de lado x e dessa forma, idealizaram uma caixa de base quadrada com medida de lado (20 – 2x) e altura x. Usaram a ideia de volume e encontraram a equação destacada na conversa citada, e igualando a derivada desta função a zero, encontraram um valor para x que reproduz o valor máximo do volume. Diante deste resultado, os alunos demonstraram habilidade ao utilizarem derivadas para investigar a existência de um volume máximo e este desempenho, é destacado por Magalhães e Varizo (2016, p. 36) ao afirmarem que:

> O desempenho dos discentes nas atividades investigativas depende de fatores, como: subjetividade de cada aluno em relação aos seus conhecimentos prévios, capacidade de concentração, perseverança e motivação que a atividade matemática sucinta. É importante conhecer como se caracterizam os alunos em relação a essas questões e, desse modo, desenvolver um trabalho prévio que os leve a reformular suas concepções, se necessário.

Desta forma, o grupo E4 apresentou um bom desempenho na tarefa 4, mostrando criatividade, concentração, motivação e perseverança, enfatizando também que tarefas investigativas contribuem para a construção autônoma de conhecimentos e ao desenvolvimento de habilidades matemáticas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

O grupo D4, formado com quatro alunos, desenvolveu uma estratégia sem recorrer a desenhos para representar o quadrado do papelão destacado no enunciado da atividade 4. A figura 36 ilustra a estratégia utilizada pelo grupo D4 para encontrar respostas e destacar as conclusões referente a tarefa investigativa proposta.

Figura 36 – Respostas do grupo D4 da tarefa 4

X	Y	Volume $= (y)^2 \cdot X$		
1	18	$V=(18)^2 \cdot 1$	$V=324 \cdot 1$	$V=324$
1,5	17	$V=(17)^2 \cdot 1,5$	$V=289 \cdot 1,5$	$V=433,5$
2,5	15	$V=(15)^2 \cdot 2,5$	$V=225 \times 2,5$	$V=562,5$
3	14	$V=(14)^2 \cdot 3$	$V=196 \times 3$	$\boxed{V=588}$
3,5	13	$V=(13)^2 \times 3,5$	$V=169 \times 3,5$	$\boxed{V=591,5}$
4	12	$V=(12)^2 \times 4$	$V=144 \times 4$	$\boxed{V=576}$
5,5	9	$V=(9)^2 \times 5,5$	$V=81 \times 5,5$	$V=484$
4,5	11	$V=(11)^2 \times 4,5$	$V=121 \times 5,5$	$\boxed{V=544,5}$
3,33	13,34	$V=(13,34)^2 \times 3,33$	$V=177,9556 \times 3,33$	máximo $V=592,592148$
3,34	13,32	$V=(13,32)^2 \times 3,34$	$V=177,4224 \times 3,34$	$V=592,5908.16$

Fonte: Grupo D4.

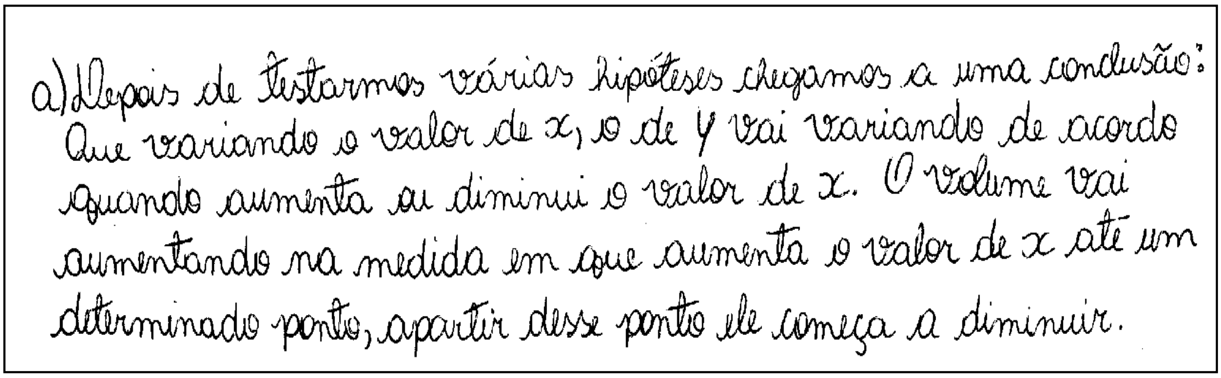
A figura 36 destaca que o grupo D4 aplicou algumas simulações atribuindo valores para as medidas dos quadrados que devem ser retirados das pontas do quadrado do papelão que tem como medida 20 cm de lado, e de acordo com as respostas encontradas, percebe-se que o volume da caixa vai aumentando conforme aumenta o valor da altura denominado de x aumenta até atingir 3,33 cm. A partir deste valor o volume começa a diminuir. Diante desses cálculos, o grupo enfatizou que existe um volume máximo quando a medida dos lados dos quadrados retirados dos quatro cantos do quadrado do papelão que a caixa deve ser construída se aproxima da dízima periódica 3,33....

As gravações registradas a seguir destacam a discussão dos alunos do grupo D4 em relação as conclusões que tiraram na resolução da tarefa 4.

> Aluno D24: Vamos atribuir valores para a medida dos lados dos quadrados que vão ser retirados?
> Aluno D44: Sim, é uma boa ideia.
> Aluno D34: É verdade, vamos testar e verificar o que acontece.
> Aluno D14: Para aí! Deixa eu ver se entendi! Vocês querem atribuir valores diferentes para a medida dos lados dos quadrados que vamos retirar dos quatro cantos do quadrado do papelão?
> Aluno D24: Exatamente.
> Aluno D44: Se a gente chamar a medida do lado do quadrado do papelão de y e a altura de x, o volume da caixa vai ser y^2 multiplicado por x.
> Aluno D34: Isso mesmo! Assim conforme a gente aumenta o valor de x, diminui o valor de y.
> Aluno D14: Eu testei o valor de x e o volume foi aumentando até 3. Quando testei o x valendo 4 o volume é menor que o x valendo 3.
> Aluno D44: Então existe um volume máximo.
> Aluno D24: vamos verificar esse intervalo de 3 e 4 pra ver o que acontece.
> Aluno D34: Testei turma!
> Aluno D14: O que acontece?
> Aluno D34: Testei o valor de x de 3,3 e o volume da caixa é maior que quando o x é 3. Mas quando testei 3,4 o volume é menor.
> Aluno D24: Moçada! Testei o valor de x de 3,33 e o volume da caixa é maior que quando o x é 3,3.
> Aluno D14: Olha só, verifiquei e descobri que a caixa vai ter volume máximo quando o valar de x se aproxima da dizima periódica 3,333...
> Aluno D44: É isso mesmo, existe o volume máximo.

Desta forma, a figura 37 ilustra a conclusão do grupo D4 em relação ao item **a** da atividade 4 conforme as conversas dos componentes do grupo destacadas anteriormente.

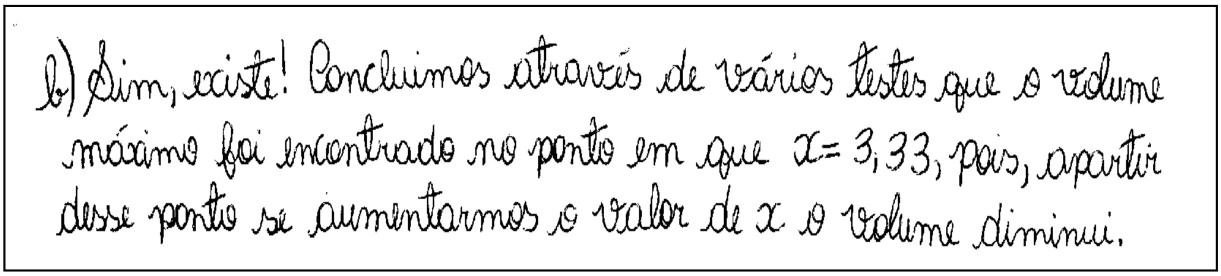
Figura 37 – Conclusão do grupo D4 referente ao item **a** da tarefa 4


a) Depois de testarmos várias hipóteses chegamos a uma conclusão: Que variando o valor de x, o de y vai variando de acordo quando aumenta ou diminui o valor de x. O volume vai aumentando na medida em que aumenta o valor de x até um determinado ponto, apartir desse ponto ele começa a diminuir.

Fonte: Grupo D4.

A partir desta conclusão do item **a**, o Grupo D4 destacou a resposta do item **b**, conforme ilustra a figura 38. Assim, a estratégia utilizada pelos alunos desta equipe determinou existência de um volume máximo da caixa de acordo com a variação do valor da altura caracterizada como medida x, isto é, este contexto pode ser relacionado com os conceitos de derivada, visto que enfatiza a ideia de limite. Este grupo, a partir de simular várias situações do cálculo do volume estabelecido pela expressão $y^2 \cdot x$ como destaca a figura 36, conseguiram encontrar aproximação para os valores de y e x que demonstram a existência de um volume máximo tendendo para aproximadamente 592,6 cm³. Justificando este resultado, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) destacam que as tarefas investigativas aguaça a curiosidade dos alunos a buscarem por várias estratégias que favoreçam a formulação de conjecturas.

Figura 38 - Conclusão do grupo D4 sobre o item **b** da tarefa 4



b) Sim, existe! Concluimos através de vários testes que o volume máximo foi encontrado no ponto em que x= 3,33, pois, apartir desse ponto se aumentarmos o valor de x o volume diminui.

Fonte: Grupo D4.

Concernente a tarefa 4 proposta, o grupo D4 explorou algumas ideias que foram discutidas em grupos, analisadas e validadas. Tais ideias estão registradas nas figuras 36, 37 e 38. Assim, esta equipe compreendeu que para a questão apresentada, a caixa se aproxima do seu volume máximo a medida que o valor de x se aproxima de $\frac{10}{3}$. Para Ponte Brocardo e Oliveira (2016) a interação dos alunos no momento das discussões, formulação e validação de conjectura é fundamental para a valorização e consolidação do conhecimento construído.

O grupo B4 também utilizou a estratégia de verificar o que acontece com o volume da caixa quadrada de papelão a partir de simulações, atribuindo valores para a medida da altura que também está relacionada com as medidas dos lados da base da caixa que deve ser construída. A figura 39 mostra a ação adotada pelos alunos deste grupo.

Figura 39 – Simulação de respostas do grupo B4 da tarefa 4

R: $y \cdot y \cdot x$

1cm $\Rightarrow y^2 \cdot x = V = 324$ cm³

2cm $\Rightarrow 16 \cdot 16 \cdot 2 = 512$ cm³

3cm $\Rightarrow 14 \cdot 14 \cdot 3 = 588$ cm³

3,6cm $\Rightarrow 12,8 \cdot 12,8 \cdot 3,6 = 589,82$ cm³

3,5cm $\Rightarrow 13 \cdot 13 \cdot 3,5 = 591,50$ cm³

3,4cm $\Rightarrow 13,1 \cdot 13,1 \cdot 3,4 = 583,50$ cm³

3,3cm $\Rightarrow 13,4 \cdot 13,4 \cdot 3,3 = 592,548$ cm³

3,2cm $\Rightarrow 13,6 \cdot 13,6 \cdot 3,2 = 591,872$ cm³

4cm $\Rightarrow 12 \cdot 12 \cdot 4 = 576$ cm³

5cm $\Rightarrow 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$ cm³

APROXIMADAMENTE VOLUME MAXIMO

Fonte: Grupo B4.

O grupo B4, de acordo com a figura 39, explorou valores para a medida x de 1 cm a 5 cm, e usaram apenas uma casa decimal após a vírgula. Como pode ser visualizado na figura 39, o volume vai aumentando até o cálculo do volume com o x medindo 3,3 cm e as medidas dos lados da base da caixa quadrada medindo 13,4 cm que produz um volume de 592,548 cm³. Para valores maiores assumido por x, o volume vai diminuindo, e este acontecimento conduz a conclusão do grupo B4 em relação ao item **a** da tarefa 4 como ilustra a figura 40.

Figura 40 – Conclusão do grupo B4 em relação ao item **a** da tarefa 4

1º) A) Portanto, concluimos que ao fazer varios cortes quadrados na folha a área da folha vai deminuindo e o volume aumentando ate um certo ponto onde ele ~~atinge~~ atinge seu volume maximo, depois começou a diminuir, notamos também que quanto maior a altura ficara menor o volume da caixa.

Fonte: Grupo B4.

O grupo B4 ilustra na figura 39 que o volume da caixa começa a diminuir quando o valor da altura é menor ou maior que 3,3 cm (eles consideraram apenas uma casa decimal após a vírgula). Na figura 40 não destacaram especificamente a partir de que valor o volume da caixa começa a diminuir. Apenas descrevem que perceberam que quanto maior a medida da altura, menor o volume da caixa. Mas vale ressaltar também que as simulações deste grupo ilustradas na figura 39 deixa explícito que a caixa atinge o volume máximo quando x se aproxima de 3,3 cm, e para valores maiores ou menores, o volume diminui. Por exemplo, de acordo com a figura 40 quando o x vale 1 cm o volume é 324 cm³, e para o x medindo 5 cm o volume é igual a 500 cm³. A figura 41 ilustra a conclusão do item **b** da tarefa 4 construída pelo grupo B4.

Figura 41 - Conclusão do grupo B4 em relação ao item **b** da tarefa 4

b°) Sim existe um Volume maximo nos cortes que fizemos Verificamos no Corte 3,3cm um Volume maximo, e testamos na formas pois fomos atribuindo Valores a y e encontramos o Valor do Ponto do Volume Maximo.

$y + 2x = 20$

$2x + 13,4 = 20$

$2x = 20 - 13,4$

$2x = 6,6$

$x = \frac{6,6}{2}$

$x = 3,3$

O Volume maximo está no intervalo [3,3, 3,5]

Fonte: Grupo B4.

A figura 41 confirma que o grupo B4 explorou apenas números com uma casa decimal e descobriu que a caixa de papelão proposta pela tarefa 4 atinge um volume máximo quando a medida de x está entre o intervalo ilustrado na figura. No item **b,** este grupo montou uma equação ($y+2x=20$) para representar a medida do lado do quadrado do papelão que a caixa deve ser formada (y representa a medida do lado do quadrado do papelão depois do recorte dos quadradinhos dos quatro cantos do papelão) e de acordo com a conclusão apresentada na figura 39, chamaram y = 13,4cm e encontram para x a medida de 3,3 cm.

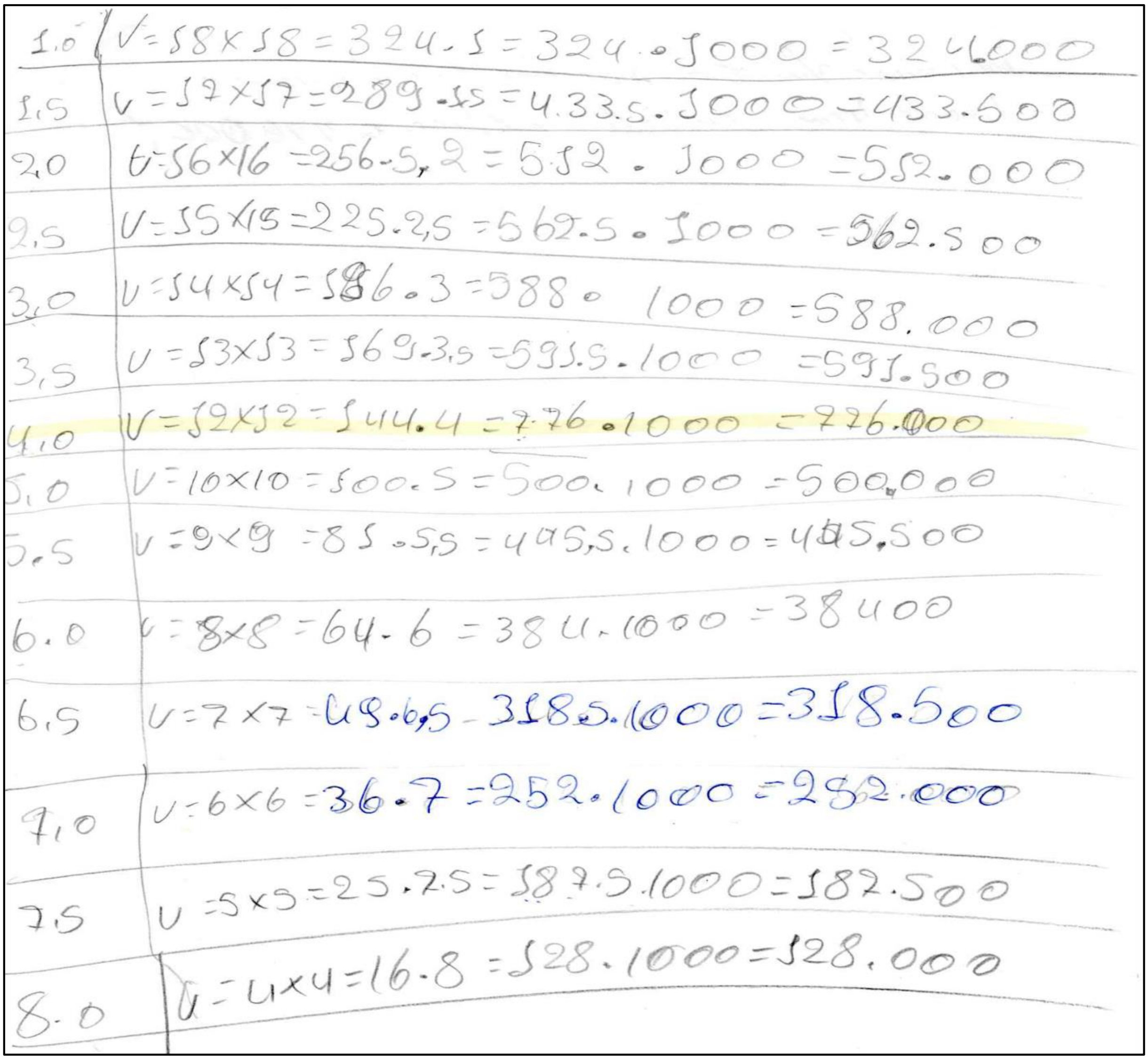
O grupo C4, por sua vez, apresentou alguns erros no desenvolvimento desta tarefa que foram registrados a partir das gravações dos diálogos dos alunos durante o desenvolvimento da tarefa 4.

> Aluno C24: Como fazer essa questão pra verificar se existe volume máximo da caixa que deve ser construída pelo papelão?
> Aluno C44: Mudando a medida do lado do quadradinho que vamos recortar de cada canto do papelão.
> Aluno C14: Isso mesma cara! Como o lado do papelão é 20 cm, se a gente chamar o lado desse quadradinho de 1 cm, a medida do quadrado do papelão vai ser 18 cm?
> Aluno C34: Por quê 18 cm? Não é pra ser 19 cm.
> Aluno C14: Não é 19 cm, porque tem que tirar 2 cm, um de cada lado.
> Aluno C34: Ah, ok! Entendi.
> Aluno C44: Então vamos testar.
> Aluno C24: Isso mesmo vamos verificar os quadrados que serão cortados das pontas do papelão com tamanhos diferentes.
> Aluno C44: Eu verifiquei o volume da caixa com as medidas dos lados do quadrado que será cortado das pontas de 1 cm até 5 cm, para 4 cm o volume chegou no máximo. E depois vamos multiplicar por 1000 para transformar em litros.

O que observa-se neste diálogo é que um aluno está auxiliando o outro, compartilhando suas ideias como possíveis conjecturas e, desta forma, favorece a interação coletiva dos membros da equipe. Este momento, reflete ao argumento de Ponte, Brocado e Oliveira (2016) sobre a importância do trabalho em grupo para a construção de conhecimentos a partir da discussão das ideias apresentadas em todos os momentos de uma tarefa investigativa.

A figura 42 ilustra as respostas do grupo C4 e alguns erros de multiplicação e também em relação a transformação de cm³ para litros, visto que em vez de dividir, eles multiplicaram por 1000.

Figura 42 – Simulação do grupo C4 da tarefa 4



1.0	V=18x18=324.1=324.1000=324.000
1.5	V=17x17=289.1,5=433,5.1000=433.500
2.0	V=16x16=256.2=512.1000=512.000
2.5	V=15x15=225.2,5=562.5.1000=562.500
3.0	V=14x14=196.3=588.1000=588.000
3.5	V=13x13=169.3,5=591.5.1000=591.500
4.0	V=12x12=144.4=776.1000=776.000
5.0	V=10x10=100.5=500.1000=500.000
5.5	V=9x9=81.5,5=445,5.1000=445.500
6.0	V=8x8=64.6=384.1000=38400
6.5	V=7x7=49.6,5=318.5.1000=318.500
7.0	V=6x6=36.7=252.1000=252.000
7.5	V=5x5=25.7,5=187.5.1000=182.500
8.0	V=4x4=16.8=128.1000=128.000

Fonte: Grupo C4.

A figura 42 destaca o procedimento adotado pelo grupo C4 para verificar a existência de um volume máximo da caixa de papelão proposta pela atividade 4. Entretanto, a conclusão apresentou um erro por causa da falta de atenção em verificar a cálculo do volume da caixa quando a altura é 4 cm e a medida dos lados da base quadrada é 12 cm. Além disso, o grupo também se confundiu quando tentou transformar o volume de cm³ para litros, multiplicando os resultados por 1000.

Magalhães e Varizo (2016, p. 42) ao falarem sobre à importância da discussão em grupo para percepção de erros, explicam:

> No momento de discussão sobre as conclusões e validações, é hora de perceber os erros entendidos como incoerências do desenvolvimento do

raciocínio do aluno. Assim, o erro na abordagem investigativa expressa que a contradição com algum fato já estabelecido com verdadeiro indica a inadequação ou a falsidade de resultados.

O grupo A4 também apresentou conclusões em relação a tarefa 4. A figura 43 apresenta a estratégia que os alunos deste grupo utilizaram para tirarem suas conclusões.

Figura 43 – Simulação do grupo A4 da tarefa 4

$y + 2x = 20\ cm$
$y = 20 - 2x$
$y \cdot y \cdot x = ?$

$x = 2\ cm$
$y = 20 - 2 \cdot 2$
$y = 20 - 4$
$y = 16$
$V = 16 \cdot 16 \cdot 2 = 512\ cm^3$

$x = 3\ cm$
$y = 20 - 2 \cdot 3$
$y = 20 - 6$
$y = 14\ cm$
$y \cdot y \cdot x$
$V = 14 \cdot 14 \cdot 3 = 588\ cm^3$

$x = 4\ cm$
$y = 20 - 2 \cdot 4$
$y = 20 - 8$
$y = 12\ cm$
$V = 12 \cdot 12 \cdot 4 = 576\ cm^3$

$x = 5\ cm$
$y = 20 - 2 \cdot 5$
$y = 20 - 10$
$y = 10\ cm$
$V = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500\ cm^3$

$x = 6\ cm$
$y = 20 - 2 \cdot 6$
$y = 20 - 12$
$y = 8\ cm$
$V = 8 \cdot 8 \cdot 6 = 384\ cm^3$

$x = 7\ cm$
$y = 20 - 2 \cdot 7$
$y = 20 - 14$
$y = 6\ cm$
$V = 6 \cdot 6 \cdot 7 = 294\ cm^3$

$x = 8\ cm$
$y = 20 - 2 \cdot 8$
$y = 20 - 16$
$y = 4\ cm$
$V = 4 \cdot 4 \cdot 8 = 128\ cm^3$

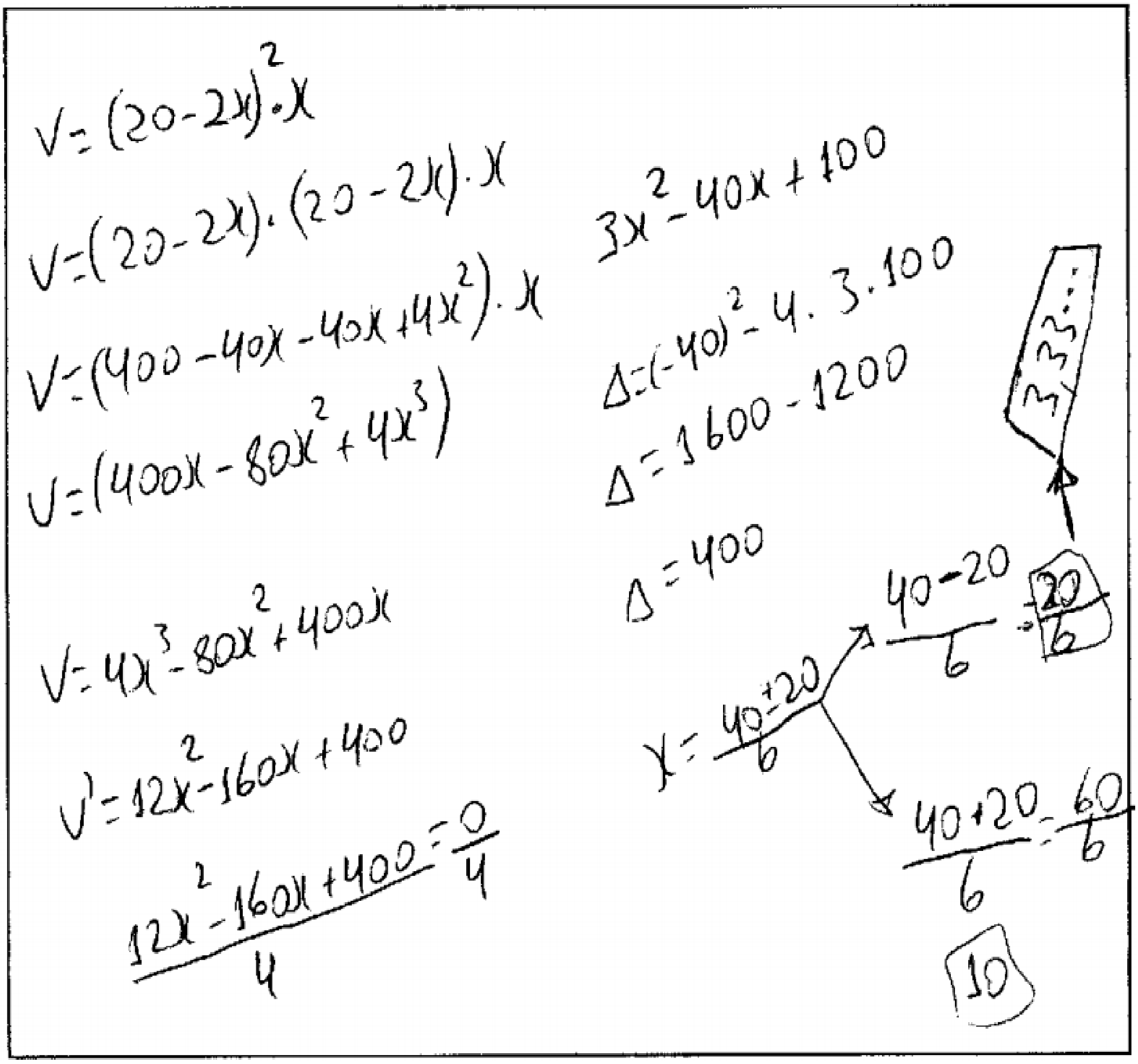
$x = 9\ cm$
$y = 20 - 2 \cdot 9$
$y = 20 - 18$
$y = 2\ cm$
$V = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 36\ cm^3$

$x = 10\ cm$
$y = 20 - 2 \cdot 10$
$y = 20 - 20$
$y = 0$
$V = 0 \cdot 0 \cdot 10 = 0\ cm^3$

Fonte: Grupo A4.

Na figura 43, observa-se que para verificar o comportamento do volume da caixa que deve ser construída pelo papelão quadrado com medida de lado 20 cm, os alunos do grupo A4 utilizaram apenas números inteiros e destacaram a existência de um volume máximo da caixa. A figura 44 ilustra a estratégia que o grupo utilizou para descobrir a medida do lado dos quadrados que devem ser cortados das quatro pontas do papelão.

Figura 44 – Estratégia do grupo A4 utilizada pra o cálculo do volume máximo



Fonte: Grupo A4.

A figura 44 ilustra que o grupo A4 modelou o volume em função da medida do lado dos quadrados que devem ser cortados dos quatro cantos do papelão quadrado medindo 20 cm de lado, e a partir deste modelo os alunos utilizaram derivadas e encontraram a medido do x de $\frac{20}{6}$. Desta forma, as conclusões foram discutidas, testadas, validadas e apresentadas no momento reservado para socialização dos resultados. Na figura 45 a conclusão final do referido grupo.

Figura 45 – Conclusão do grupo A4 sobre o item **a** da tarefa 4

a) Chegamos a conclusão que, quanto mais cortamos os quadrados em centímetros maiores, descobrimos que até um certo ponto seu volume aumenta, e continuando aumentando esse recorte quadrado, vimos que seu volume tende a zero, aumentando até um certo ponto e diminui totalmente até ficar nenhum volume. Quanto maior o valor do quadrado menor o seu volume.

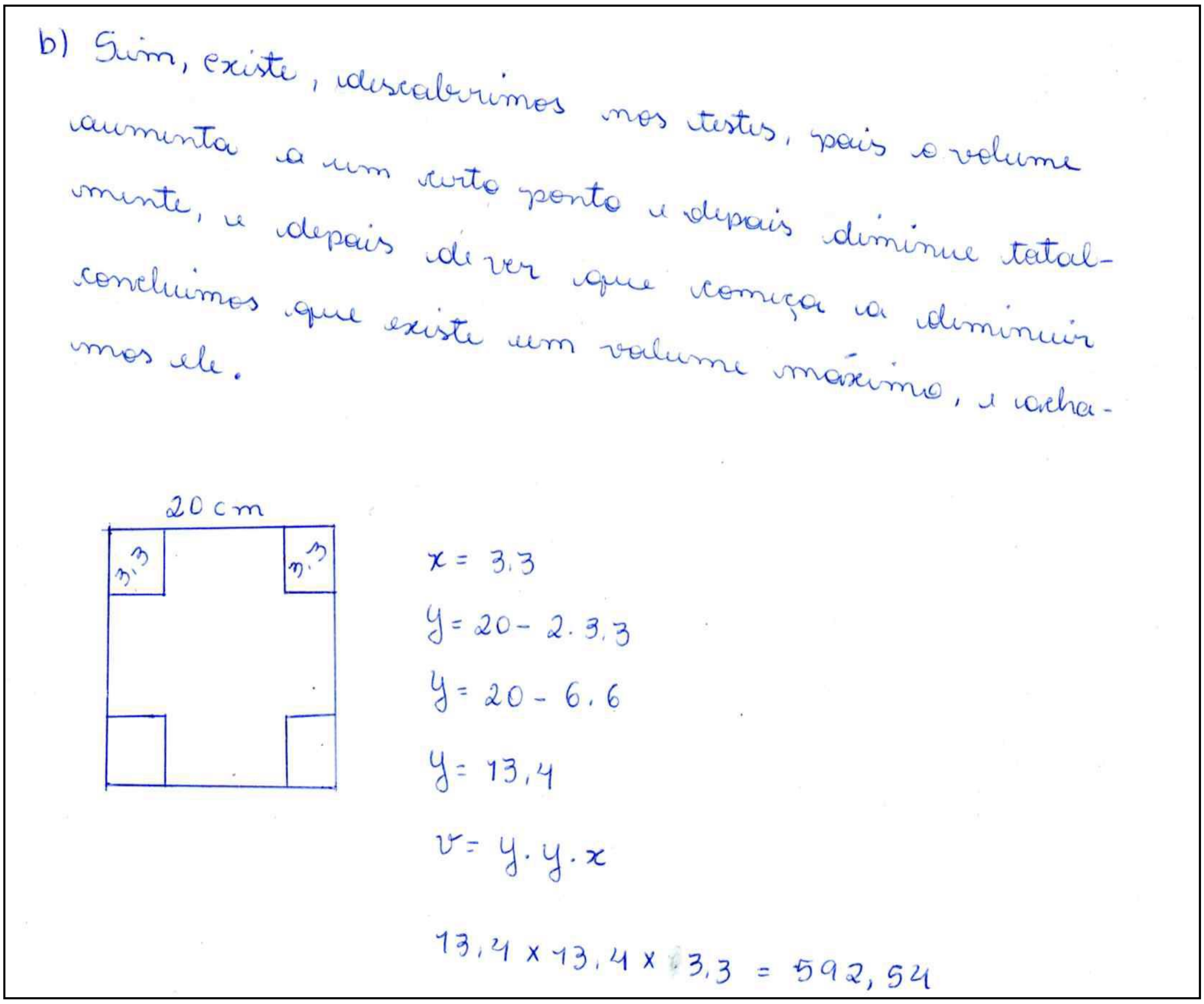
Fonte: Grupo A4.

A figura 45 demonstra que o grupo A4 encontrou um volume máximo destacando que quando os valores dos lados dos quadrados que devem ser retirados do pedaço de papelão se aproximam tanto pela direita quanto pela esquerda do valor $\frac{20}{6}$ o volume da caixa atinge o máximo possível. Este grupo afirma que "quanto maior é o valor do quadrado menor o seu volume", isto é, para os alunos desta equipe, este valor se refere as medidas dos lados dos quadrados que são retirados das pontas do papelão, visto que, se as medidas dos lados desses quadradinhos forem superiores a $\frac{10}{3}$, o volume tende a diminuir. Este resultado ressalta a atitude que os alunos devem adotar,

> Utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em Matemática. Como referimos, alguns desses processos são: a exploração e formulações de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, p. 29).

Para estes autores a exploração desse tipo de tarefa em sala de aula permite que os alunos explorem naturalmente, mediante diálogos abertos e ideias, pensamentos matemáticos fundamentais para a construção de conhecimento. Além disso, segundo Gonçalves (2012), este tipo de atividade motiva o aluno a desempenhar uma postura mais ativa diante da tarefa com confiança e demonstração de que quer participar. E esta confiança é reproduzida na construção das respostas (figura 46) que são testadas no grupo e apresentadas para a turma no momento em que são confrontadas por todos os grupos para serem validadas ou refutadas.

Figura 46 – Resposta do grupo A4 em relação ao item **b** da tarefa 4


b) Sim, existe, descobrimos nos testes, pois o volume aumenta a um certo ponto e depois diminue total-mente, e depois de ver que começa a diminuir concluimos que existe um volume máximo, e acha-mos ele.

$x = 3,3$

$y = 20 - 2 . 3,3$

$y = 20 - 6,6$

$y = 13,4$

$v = y . y . x$

$13,4 \times 13,4 \times 3,3 = 592,54$

Fonte: Grupo A4.

Durante a discussão dos resultados da tarefa 4, terceira fase da Investigação Matemática segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), os representantes escolhidos pelos grupos destacaram que a caixa construída com um papelão quadrado tende para o volume máximo quando a medida dos quadrados que devem ser retidos dos quatro cantos do pedação de papelão se aproximam de uma medida específica tanto pelo lado esquerdo quanto pelo direito. Desta forma, a discussão foi pautada em ideias relacionadas com aproximações, limites e variações que estão relacionadas com derivadas. Com isto a penúltima tarefa foi finalizada, e percebeu-se que os alunos estavam ganhando confiança e ficando mais criativos na busca de estratégias e na formulação de conjecturas. E, este sucesso, de acordo com Ponte, Brocardo, Oliveira (2016) é fruto do ambiente de aprendizagem proporcionado pelo professor.

6) Sexto encontro

A última tarefa foi realizada no sexto encontro durante 2h30min. Deste, participaram 20 alunos e, iniciei os trabalhos dividindo a turma em cinco grupos de 4 componentes e em seguida apresentei a tarefa 5 intitulada “Minimizando custo” que se encontra no Quadro 9.

Diante da tarefa apresentada do Quadro 9, os cinco grupos começaram a investigar em busca de formular conjecturas de acordo com os itens propostos na tarefa. Analisando as respostas apresentadas pelos grupos, quatro utilizaram a mesma estratégia para responder os três itens solicitadas na tarefa 5, isto é, atribuíram valores para a altura ou a largura de acordo com o volume de 9 m³ que deveria ter cada tanque retangular. Mas uma das equipes, o grupo E5, me questionou se poderiam utilizar o *notebook* para explorar essa atividade no *Excel*, como destaca o diálogo abaixo:

> Aluno E35: Professor, para esta atividade podemos utilizar o *notebook* para explorar as dimensões do tanque?
> Professor: Por que vocês resolveram utilizar o notebook?
> Aluno E35: É porque nós queremos utilizar o *Excel* para investigar as dimensões do tanque que deve ter o volume de 9 m³.
> Aluno E15: É professor, com o Excel os cálculos são mais rápidos.
> Aluno E25: No Excel professor, dá também pra gente organizar em linhas e colunas as medidas das dimensões, o volume e a área total das faces do tanque.
> Professor: Tudo bem.

A figura 47 destaca a construção produzida no *Excel* pelo grupo E5, onde são visualizadas as medidas da largura e da altura de acordo com o volume do tanque. E, de acordo com a produção do grupo, percebe-se que existem dimensões que minimizam o custo da produção de tanques, visto que o resultado destaca que existe uma área total mínima do tanque.

Figura 47 – Construção de resposta do grupo E5 no Excel

Largura	Altura	Comprimento	Volume	Área total do tanque	Área das faces do tanque		
x	y	z	V	2xy + 8x + 8y	2xy	8x	8y
0,5	4,5	4	9	44,5	4,5	4	36
1	2,25	4	9	30,5	4,5	8	18
1,5	1,5	4	9	28,5	4,5	12	12
2	1,125	4	9	29,5	4,5	16	9
2,5	0,9	4	9	31,7	4,5	20	7,2
3	0,75	4	9	34,5	4,5	24	6
3,5	0,6429	4	9	37,64285714	4,5	28	5,1429
4	0,5625	4	9	41	4,5	32	4,5
4,5	0,5	4	9	44,5	4,5	36	4
5	0,45	4	9	48,1	4,5	40	3,6

Fonte: Grupo E5.

Mediante a utilização da ferramenta tecnológica *Excel,* os alunos do grupo E5 construíram suas respostas e apresentaram suas conclusões como destaca as conversas gravadas.

> Aluno E45: Como nós podemos organizar os dados da questão 5 no Excel?
> Aluno E25: Vamos escrever a equação do volume e isolar uma variável e encontrar a outra em função dos valores que vamos atribuindo.
> Aluno E15: Como assim, não entendi?
> Aluno E25: Vou explicar! Como o comprimento é 4 e o volume é 9, a gente pode montar uma equação para o volume mais ou menos assim: xy4 = 9. Depois a gente isola o y e vai encontrando valores para ele de acordo com os valores de x.
> Aluno E15: Ah entendi! Então vai ficar y = 9/4x. Certo?
> Aluno E25: Isso mesmo!
> Aluno E35: Mas isso não é suficiente para responder as perguntas! Tem que ser volume e área.
> Aluno E45: É verdade! Mas já sei como fazer.
> Aluno E35: Como?
> Aluno E45: Eu montei uma equação para a área total do tanque.
> Aluno E35: Como assim?
> Aluno E45: A soma das áreas das seis faces do tanque, e ficou assim: A = 2xy + 8x + 8y.
> Aluno E15: Pra que essa equação?
> Aluno E45: É essa área que vai determinar o custo do tanque.
> Aluno E35: É verdade, quanto maior a área total maior vai ser o custo para fabricar o tanque.
> Aluno E25: Olha só pessoal! Depois de digitar alguns valores para x, dá pra perceber que existe uma área total mínima quando os valores de x e y se aproximam de 1,5, pois o Excel mostra que essa área é 28,5 m².

A figura 47 e os diálogos citados explicitam que os alunos do grupo E5, a partir da utilização do *Excel*, chegaram a conclusão que o custo do tanque com as medidas citadas na tarefa 5 será o menor possível quando as medidas da largura e da altura forem iguais 1,5 m, visto que, produzirá a menor área total das faces necessárias para a construção do tanque com 4 m de comprimento e volume de 9 m³. Portanto, o grupo E5 concluiu que existem dimensões mínimas que reproduzem um custo mínimo para a fabricação de tanques e a área total das faces do tanque se aproxima de 28,5 m², que corresponde a mínima possível, já que para valores maiores ou menores de 1,5 m atribuídos à largura e à altura, a área total é maior que 28,5 m². Esta conclusão está ilustrada na figura 47, que representa a estratégia construída pelo grupo E5 no *Excel.*

Desta forma, analisando os fundamentos da tecnologia, Cardoso (2019) destaca que a utilização de recursos tecnológicos nas aulas de Matemática pode trazer benefícios a aprendizagem dos discentes e também inovar as atividades metodológicas de ensino dos âmbitos escolares, pois para o autor, tais instrumentos promovem o interesse dos alunos e proporcionam a melhora de seu rendimento. Corroborando com a autora, Santos e Amaral (2012, p. 84) explicam que “a utilização de novas tecnologias alia-se à necessidade de se aprender melhor, de se utilizar recursos que promovam uma melhor aprendizagem”.

O grupo C5 apresentou simulações do cálculo da área total da caixa d’água sem considerar uma das faces, ou seja, sem a tampa. A seguir o diálogo, extraído das gravações do referido grupo, que confirma a ideia pensada pelo grupo.

> Aluno C35: Para responder essa questão, penso que temos que calcular a área de cada face da caixa d’água.
> Aluno C15: Por que a área?
> Aluno C35: É porque como o tanque deve ser construído de alvenaria, a gente tem que descobrir quantos metros quadrados será necessário para construir essa caixa d’água, quanto mais metros quadrados, mais caro vai custar.
> Aluno C45: Então nós temos que considerar seis faces?
> Aluno C25: Acho que 5 faces, acho que a tampa não deve ser considerada porque a atividade não destaca se é com tampa ou sem tampa.
> Aluno C35: Tudo bem! Vamos fazer os cálculos sem a tampa.

A figura 48 destaca os cálculos efetuados pelo grupo C5 para verificar o comportamento da área total da caixa d’água a partir das medidas estabelecidas pela tarefa 5 para o comprimento e o volume.

Figura 48 – Simulações do grupo C5 da tarefa 5

	Volume	Soma das áreas
x: $\frac{1}{4}$ y: 9	$\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\cdot 9 = 9\,m^3$ $9 = 9$	$SA=(2.x.y)+8y+4x)\,m^2$ $SA=2.\frac{1}{4}.9+8.9+4.\frac{1}{4}$ $SA=4,5+72+1$ $SA=77,5\,m^2$
$x=\frac{2}{4}$ $y=4,5$	$\cancel{4}.\frac{2}{\cancel{4}}.4,5=9\,m^3$ $9=9\,m^3$	$SA=(2.\frac{2}{4}.4,5+8.4,5+4.\frac{2}{4}$ $SA=4,5+36+2$ $SA=42,5\,cm^2$
$x=1,5$ $y=1,5$	$4.1,5.1,5=9\,m^3$ $9=9\,m^3$	$SA=2\times1,5\times1,5+8\times1,5+4\times1,5$ $SA=4,5+12+6$ $\boxed{SA=22,5\,cm^2}$
$x=1$ $y=\frac{9}{4}$	$\cancel{4}.1.\frac{9}{\cancel{4}}=9\,m^3$ $9=9\,m^3$	$SA=2\times1\times\frac{9}{4}+8\times\frac{9}{4}+4\times1$ $SA=4,5+18+4$ $\boxed{SA=26,5\,m^2}$
$x=2$ $y=\frac{9}{8}$	$\cancel{4}.\cancel{2}.\frac{9}{\cancel{8}}=9\,m^3$ $9=9\,m^3$	$SA=2\times2\times\frac{9}{8}+8\times\frac{9}{8}+4\times2$ $SA=4,5+9+8$ $\boxed{SA=21,5}\,m^2$
$x=\frac{9}{8}$ $y=\frac{8}{4}$	$4.\frac{9}{8}.\frac{8}{4}=9\,m^3$ $9=9\,m^3$	$SA=2\times\frac{8}{4}\times\frac{9}{8}+8.\frac{9}{8}+4.\frac{8}{4}$ $SA=4,5+9+8$ $SA=21,5\,m^2$

Fonte: Grupo C5.

De acordo com a figura 48, o grupo C5 descobriu que a área total da caixa d’água se aproxima de um valor mínimo (21,5 m²) quando os valores da largura e altura se aproximam de 2 m e $\frac{9}{8}$ m, respectivamente. Desta forma, existem dimensões que proporcionam um custo mínimo para a construção da caixa d’água, visto que, se as medidas da largura e altura forem diferentes de 2 m e $\frac{9}{8}$ m a área total da superfície da caixa d’água vai ser maior e, então o custo para a construção vai aumentar. Em relação a utilização de apenas 5 faces e não 6, o grupo descreve que discutiu sobre isso, mas que acabaram esquecendo, só perceberam no memento da socialização dos resultados, como pode ser observado no diálogo que segue:

> Aluno C25: Precisamos encontrar a área de todas as faces para verificar as medidas ideias que diminuem o custo.
> Aluno C15: Então, temos que utilizar 5 faces.
> Aluno C45: Cinco? Por quê?
> Aluno C15: Sim. O fundo, e as quatro paredes.
> Aluno C45: E a tampa?
> Aluno C15: Mas, é necessário utilizar também a tampa.
> Aluno C35: Acho que sim.
> Aluno C15: Ok, então são seis faces.

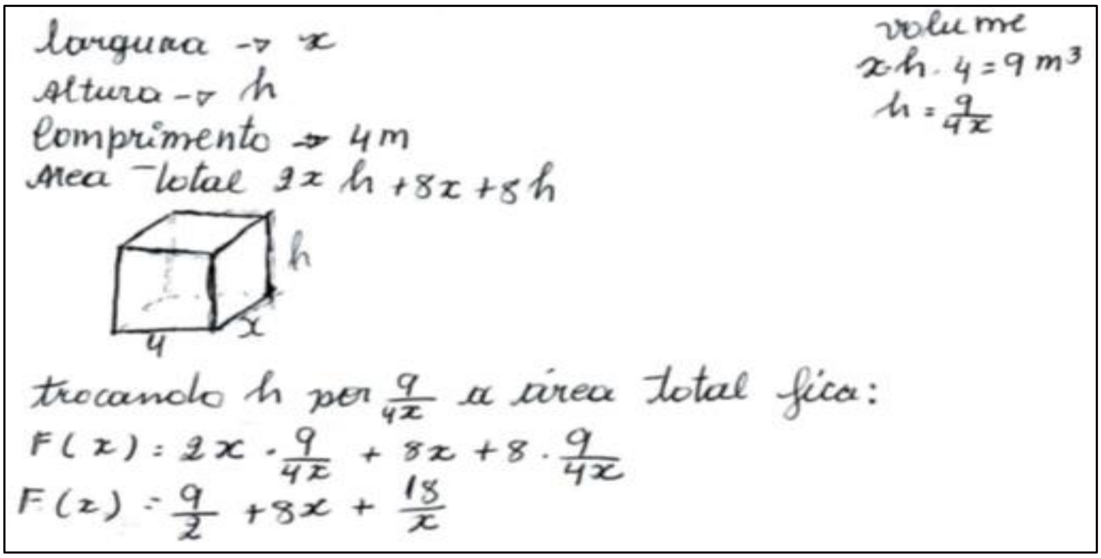
Portanto, esse tipo de atividade é importante ser explorada em sala de aula para evidenciar ao aluno que a Investigação Matemática auxilia na construção do conhecimento em sala de aula e na tomada de decisões no cotidiano. E este é um momento em que o professor deve incentivar os alunos a refletirem sobre o que produziram. Sobre este aspecto relacionado ao papel do professor, Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 51) explicam que “é importante ajudá-los a fazer uma síntese da atividade, descrevendo os seus avanços e recuos, os objetivos que tinham em mente e as estratégias que surgiram”.

Os grupos, A5, B5, utilizaram a mesma estratégia apresentada pelo grupo C5, desta forma, apresentá-las seria repetir situações equivalentes. Mas, o grupo D5, pontuou suas conclusões utilizando uma estratégia diferente, como observa-se no diálogo registrado abaixo:

> Aluno D35: Olha só! Pelos testes que fizemos atribuindo valores para altura descobrimos que a área total das faces da caixa d’água se aproxima de um valor mínimo.
> Aluno D15: Sim, mas o que você está pensando?
> Aluno D35: Como os valores da área total mudam de acordo com as medidas que testamos, o que vocês acham se a gente utilizar derivadas para verificar essa ideia?
> Aluno D45: Sim, concordo!
> Aluno D15: Também concordo! Aí podemos confirmar se realmente existe dimensões para diminuir o custo da construção da caixa d’água
> Aluno D45: Isso mesmo irmão! Dá pra criar uma função para a área total da caixa d’água a partir da expressão do volume.

A figura 49 ilustra como os alunos do grupo D5 colocaram em prática o que discutiram no grupo. Desta forma, destacam as medidas para a largura, altura, comprimento, volume e expressão para área total da caixa d’água de acordo com os dados enunciados na tarefa 5. Assim, estabeleceram uma função para a área total relacionada com a expressão do volume. Depois, substituíram na expressão correspondente a área total e definiram assim uma função dependendo apenas da dimensão da largura denominada de x.

Figura 49 – Expressões matemáticas do volume e área total da caixa d'água


largura → x
Altura → h
Comprimento → 4m
Area total $2x\,h + 8x + 8h$

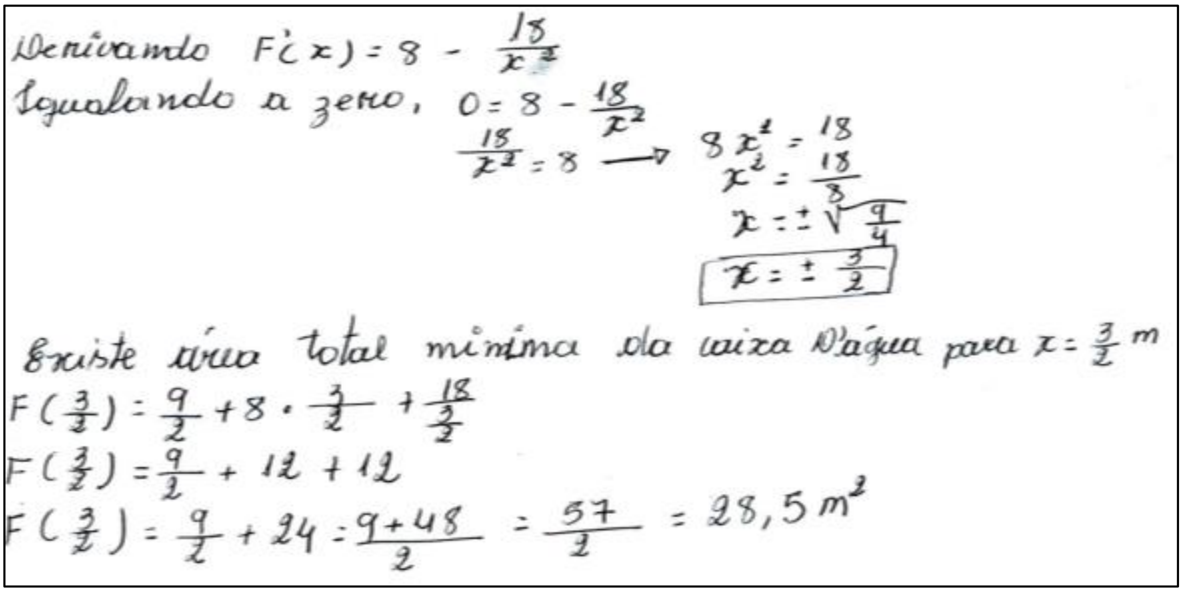
volume
$x \cdot h \cdot 4 = 9\ m^3$
$h = \frac{9}{4x}$

trocando h por $\frac{9}{4x}$ a área total fica:
$F(x) = 2x \cdot \frac{9}{4x} + 8x + 8 \cdot \frac{9}{4x}$
$F(x) = \frac{9}{2} + 8x + \frac{18}{x}$

Fonte: Grupo D5.

Após a modelagem de uma função para a determinação da área total da superfície da caixa d’água, o grupo D5 recorreu a ideia de derivada para explorar a existência de dimensões que minimizam o custo da construção da caixa d’água como ilustra a figura 50.

Figura 50 – Exploração de derivada pelo grupo D5


Derivando $F'(x) = 8 - \frac{18}{x^2}$
Igualando a zero, $0 = 8 - \frac{18}{x^2}$
$\frac{18}{x^2} = 8 \rightarrow 8x^2 = 18$
$x^2 = \frac{18}{8}$
$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$
$\boxed{x = \pm \frac{3}{2}}$

Existe área total mínima da caixa D'água para $x = \frac{3}{2}\ m$
$F(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2} + 8 \cdot \frac{3}{2} + \frac{18}{\frac{3}{2}}$
$F(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2} + 12 + 12$
$F(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2} + 24 = \frac{9+48}{2} = \frac{57}{2} = 28,5\ m^2$

Fonte: Grupo D5.

Segundo Stewart (2015) a utilização dos conceitos de derivadas é uma ferramenta importante em algumas aplicações do cálculo diferencial, visto que, refere-se a problemas de otimização. Assim, a partir da exploração de derivadas pode-se encontrar valores de máximo e mínimo que ajudarão na tomada de decisão. Nesta mesma linha de pensamento, Thomas (2012, p. 251) afirma que podemos utilizar "derivadas para resolver uma variedade de problemas de otimização nos negócios, matemática, física e economia". Portanto, a partir da utilização da Investigação Matemática, o grupo D5 estabeleceu relações matemáticas no âmbito de derivadas de acordo com definições estabelecidas pelos autores citados.

O grupo D5, após os cálculos que estão representados na figura 50, ainda realizaram alguns testes de verificação dos valores encontrados, para confirmar suas conclusões, conforme visualizado na figura 51. A ação deste grupo é enfatizada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), Magalhães e Varizo (2016) ao expressarem que a verificação é um momento fundamental durante o desenvolvimento de uma tarefa investigativa para proporcionar a validação das conjecturas formuladas.

Figura 51 – Testes de verificação das dimensões da caixa d'água

largura	Altura	comprimento	volume	Área total
1	2.25	4	9	30,5
1,5	1.5	4	9	28,5
2	1.125	4	9	29,5

Fonte: Grupo D5.

Portanto, conforme ilustra a figura 51, o grupo D5 confirma a existência de dimensões que possibilitam uma área total mínima, ou seja, quando a altura e a largura se aproximam da medida de 1,5 m a área total se aproxima de um valor mínimo (28,5 m²). Dessa forma, o grupo D5 justificou que é possível construir a caixa d'água com o comprimento e volume desejado a partir da possibilidade de minimização de custo.

Depois do processo de investigação e discussão das conclusões realizadas em cada grupo, foram socializadas as resoluções de cada grupo. O representante escolhido por cada equipe apresentou os resultados e o que fizeram para testá-los.

Salienta-se que durante este processo, dos cinco grupos, 3 não consideraram uma face da caixa d'água, ou seja, consideraram um tanque sem tampa. Apenas os grupos E5 e D5 consideraram as seis faces e o último utilizou o *Excel* para investigar o comportamento da área total da caixa d'água de acordo com a variação da largura e da altura. Além disso, as equipes que não utilizaram as seis faces destacaram na apresentação final que não consideram a tampa porque achavam que não havia necessidade porque a questão não destacava se o tanque era ou não com tampa (equipes A5 e B5).

Diante deste contexto, é fundamental a atenção do professor para auxiliar na compreensão dos alunos em relação ao enunciado da tarefa proposta. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), o professor precisa estar atento a possibilidade de diversas respostas. Nesta questão, por exemplo, como não estava explícito se era com tampa ou sem tampa significa que ambas as respostas estão corretas, pois os grupos justificaram/argumentaram porque encontraram tal resposta.

7) Sétimo encontro

Depois da realização das cinco tarefas desenvolvidas, apliquei um questionário (APÊNDICE C) com seis questões, numeradas de 1 a 6, para verificar as opiniões dos alunos acerca da metodologia Investigação Matemática. Deste encontro, participaram 20 (vinte) alunos que responderam o questionário. A seguir apresento e discuto algumas respostas deste questionário. Destaco que a identificação dos alunos foi efetivada por meio de letra maiúscula do alfabeto: A, B, C, D, ...

1) A Investigação Matemática já tinha sido utilizada em aulas anteriores?

Dos 20 (vinte) alunos, apenas um respondeu que já tinha trabalhado em sala de aula atividades investigativas.

2) Você achou interessante a metodologia utilizada? Justifique.

Todos os alunos responderam que sim. Destacaram que a metodologia é interessante e importante para a aprendizagem em grupo. Ademais, comentaram que foi novidade. A seguir alguns comentários:

> Aluno A: A metodologia abordada é bastante interessante, e também não tivemos que partir de uma equação só, mas explorar os conhecimentos que temos para responder as questões.
>
> Aluno D: Sim, porque quanto mais você investiga, descobre padrões matemáticos que ajuda a formular conjecturas.
>
> Aluno M: Achei interessante porque, durante as investigações que fomos fazendo, percebemos o que ia acontecendo e com isso aprendemos diversos conceitos matemáticos.
>
> Aluno P: Sim, porque nos motivou a pensar em diferentes formas até achar a melhor solução para as questões.
>
> Aluno S: Foi bastante gratificante, pois presenciei o desenvolvimento de derivadas de outra forma, compartilhando os meus conhecimentos com os dos colegas através do trabalho em grupo.
>
> Aluno X: Sim, porque as vezes nos prendemos a fórmulas matemáticas, e essa metodologia nos deu ideias diferentes, nos motivando a pensar em possibilidades a partir do raciocínio lógico.

Desta forma, as respostas desta questão apontam que para os alunos a metodologia de Investigação Matemática é interessante e possibilita a construção de conhecimentos de forma compartilhada. Segundo Magalhães e Varizo (2016), os trabalhos em sala de aula por meio de tarefas investigativas despertam o interesse dos alunos e o trabalho em grupo possibilita o compartilhamento do conhecimento construído durante as etapas da investigação, visto que, todas as atividades deste trabalho foram desenvolvidas em grupo.

3) As tarefas investigativas propostas lhe ajudaram a compreender o conceito de derivada? Justifique.

De todos os alunos que responderam o questionário, apenas um destacou que as tarefas investigativas não ajudaram a entender o conceito de derivadas. Este aluno apenas respondeu o seguinte: “infelizmente não” (Aluno J). Analisando esta resposta, e mediante observações durante o desenvolvimento das tarefas investigativas, isto pode ter ocorrido porque este aluno pode ser um dos quais apresentaram muitas dificuldades em conteúdos básicos de matemática como funções do 1º e 2° grau. Como o questionário não foi assinado pelos alunos, não foi possível a identificação para possíveis questionamentos sobre este fato. Sobre este contexto, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) pontuam que no decorrer da exploração de tarefas investigativas é fundamental o aluno possuir conceitos básicos vinculados com o tema explorado para produzir a compreensão almejada do assunto em debate.

Os demais alunos pontuaram que as tarefas investigativas ajudaram a compreender o conceito de derivadas porque conforme as simulações que fizeram, perceberam variações e ideias de máximo e mínimo que apontavam para o conceito de derivada. Destaco algumas respostas dos alunos:

> Aluno B: Sim, me ajudaram bastante porque percebi que poderia usar as regras de derivadas para investigar as questões, que tratava de taxa de variação.
>
> Aluno K: Sim, ajudou porque entendi onde o conceito de derivada pode ser utilizado no cotidiano, através da exploração de taxa de variação, máximo e mínimo, como a verificação de volume máximo de um tanque e as medidas de uma caixa que possibilita a redução de gastos na construção.
>
> Aluno G: Sim porque podemos visualizar o conceito através das investigações, e ajudaram a observar como as funções se comportam nas perspectivas de máximo e mínimo.

De acordo com as respostas dos três alunos citados, as tarefas investigativas auxiliaram esses alunos a compreenderem o conceito de derivada e onde pode ser aplicado no cotidiano. Gonçalves (2012) confirma esse resultado ao descrever que a utilização da Investigação Matemática em sala de aula contribui para o estudo de derivada porque promove confiança aos alunos que se sentem desafiados diante das tarefas que são propostas, e a busca por relações matemáticas possibilita a construção de conhecimentos.

4) Descreva os aspectos positivos e negativos em relação ao uso da Investigação Matemática.

A maioria dos alunos destacou que os aspectos positivos desta metodologia são as possibilidades de interação que ela promove por meio dos debates, discussões e apresentação dos resultados. Além disso, enfatizaram que favorece a criatividade, instiga a motivação e a atitude diante dos desafios propostos de construir conhecimentos com autonomia. Ainda neste contexto, Magalhães e Varizo (2016) fortalecem a respostas dos alunos ao pontuarem que o desenvolvimento de tarefas investigativas desafia os alunos a serem criativos e tomar iniciativa diante das tarefas propostas.

Como pontos negativos, a maioria dos alunos destacou as dificuldades que enfrentaram, como o conhecimento de alguns conceitos matemáticos que são fundamentais para a formulação eficaz das conjecturas, visto que, na primeira tarefa investigativa, os alunos apresentaram dificuldades em encontrar estratégias de verificação de relações matemáticas relacionadas com a tarefa proposta. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), as dificuldades apresentadas pelos alunos na busca de estratégias que promova a formulação de conjecturas acontece porque eles não estão habituados a trabalharem com Investigação Matemática, mas conforme as aplicações das atividades as relações matemáticas são estabelecidas, testadas e validadas.

5) Como o grupo registrou as conjecturas e conclusões? Encontrou dificuldades? Justifique.

A maioria dos alunos respondeu que os registros foram feitos mediante descrição da estratégia que utilizaram para formular conjecturas. Esta descrição foi registrada de forma escrita em um caderno de campo providenciado pelo professor para cada grupo. Além disso, destacaram que a estratégia mais utilizada foi a simulação de várias situações envolvendo os dados das tarefas mediante a exploração dos conceitos de taxa de variação, máximo e mínimo. As simulações por meio dos testes com valores diferentes, possibilitaram a reflexão do comportamento da situação explorado conforme a variação dos itens apresentados. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) o registro das estratégias é fundamental para a reflexão do sentido lógico das conjecturas formuladas, pois é um momento onde os alunos apresentam suas ideias para a discussão do grupo, e a partir daí a reformulação e refinamento dessas ideias produzirão relações matemáticas imbricadas com o conteúdo explorado.

6) O que você achou do momento das discussões em grupo para construção de conhecimentos e aprendizagem? Justifique.

Em relação a essa questão, a maioria dos alunos destacou que tiveram dificuldades na primeira tarefa. Entretanto, elogiaram a produtividade da interação dos grupos que ocorreu no decorrer das aulas. Salientaram a importância da socialização dos resultados porque cada grupo apresentava suas conclusões e as discussões oriundas desta socialização auxiliava na validação dos resultados. A socialização foi o momento em que cada grupo apresentou suas conjecturas e as estratégias utilizadas para encontrá-las, esse momento é fundamental para os discentes conhecerem os resultados dos outros grupos. Desta forma, os alunos demonstraram que as discussões em grupo são fundamentais para a produção de novos conhecimentos e desenvolvimento da aprendizagem de forma eficaz.

Tanto Magalhães e Varizo (2016) quanto Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) valorizam bastante o momento das discussões, pois, é a ocasião em que os alunos compartilham posicionamentos, inquietudes, dúvidas e criatividade em busca da produção de conhecimentos que são colocados a prova, e cada componente do grupo defende seu ponto de vista. Além disso, na apresentação final, as conjecturas aprovadas em grupo são apresentadas para toda a turma, e testadas por todos os grupos. Portanto, o trabalho em sala de aula mediado pela metodologia Investigação Matemática, demonstra que motiva, instiga e desafia os alunos a atuarem como protagonistas do desenvolvimento de sua aprendizagem e contribui para a formação de professores comprometidos com a construção autônoma de conhecimentos, visto que, os alunos que participaram deste trabalho são futuros professores de Matemática.

Analisando os resultados apresentados durante o desenvolvimento das tarefas investigativas e as respostas dos alunos sobre o uso desta metodologia, vale salientar que os grupos discutiram, buscaram alternativas para encontrar relações matemáticas de acordo com a tarefa proposta, formularam conjecturas debatendo o significado das mesmas e expressaram que esse tipo de atividade auxiliou no estudo de derivadas. Assim, posso inferir que trabalhar com tarefas investigativas contribuiu com o ensino de derivadas de forma dinâmica e eficaz, pois os alunos forma agentes ativos do processo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho foi realizado com o objetivo de analisar estratégias e conjecturas elaboradas pelos alunos da disciplina de Cálculo I, do curso de Licenciatura em Matemática, ao utilizarem tarefas investigativas envolvendo derivadas. O desenvolvimento das tarefas investigativas em sala de aula, demonstrou que a utilização da metodologia Investigação Matemática proporciona a construção de conhecimentos matemáticos fundamentado na interação do professor com os alunos. Aliado a isso, o educador é agente fundamental para instigar os alunos a buscarem possibilidades e padrões na formulação de conjecturas que são testadas e validadas por meio de discussões e apresentação dos resultados (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2016).

Durante o desenvolvimento das tarefas propostas os alunos demonstraram mudanças relacionadas com a motivação, interesse e compromisso na busca da construção de conhecimentos matemáticos com autonomia. Além disso, a partir da observação constante dos grupos, percebi que a atitude de buscar estratégias no estabelecimento de relações matemáticas apresentada pelos alunos favoreceu a melhoria no desempenho dos aspectos cognitivos.

Como os participantes ainda não tinham trabalhado com Investigação Matemática, no primeiro momento apresentaram dificuldades e não relacionaram as atividades com derivadas. É importante salientar que o surgimento de dificuldades no início do uso de tarefas investigativas é algo natural, mas no decorrer do desenvolvimento da intervenção pedagógica, os alunos foram ganhando confiança e destacaram conceitos envolvendo derivadas com taxa de variação, máximos e mínimos de funções.

Destacando a minha experiência neste processo, enfrentei dificuldades para compreender a essência do trabalho investigativo em sala de aula, principalmente na elaboração das tarefas que foram trabalhadas com os alunos. Isto ocorreu porque este tipo de trabalho não fazia parte do meu cotidiano de sala de aula como docente, visto que, era muito pautado em aulas expositivas seguidas da resolução de exercícios. Desta forma, a Investigação Matemática possibilitou a reflexão de sair da zona de conforto, onde Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) destacam que o professor é desafiado a instigar os alunos usando a ferramenta interrogativa e, os discentes são provocados a buscar afirmações que são comprovadas durante todo o processo investigativo. Além disso, vale salientar que as tarefas investigativas não foram totalmente abertas, mas foi o início deste tipo de atividades para os alunos.

Um outro momento que observei, foi o destaque dos alunos em relação ao tempo para investigar e discutir cuidadosamente as tarefas executadas. Para eles, algumas atividades precisam de mais tempo para serem exploradas a partir de várias regularidades que são essenciais à determinação de conjecturas. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) a disponibilização de tempo nas tarefas investigativas é fundamental para o aluno procurar regularidades, formular conjecturas, testar e validar.

No decorrer dos sete encontros realizados, conforme os resultados apresentados pelos alunos e a interação que acontecia na sala de aula, percebi que a minha compreensão a respeito da Investigação Matemática se modificava, visto que, entendi que esta metodologia convida os alunos assumirem o papel de serem protagonistas na sua aprendizagem, e o professor um agente mediador ativo que participa o tempo todo do processo, instigando, motivando e possibilitando a investigação por meio de perguntas quando percebe que os alunos não estão produzindo. Também observei que a confiança dos alunos aumentava, motivada pelas estratégias que utilizavam e conjecturas que formulavam, bem como pelo entusiasmo que demonstravam nas discussões em grupos e na apresentação dos resultados. Desta forma, o desenvolvimento de tarefas investigativas em sala de aula é produtivo e auxilia na busca da construção e do entendimento de que saber matemática é fazer matemática (POLYA, 1975). Trabalhar na perspectiva dos fundamentos da investigação é encarar o desafio de fazer matemática.

Percebi que utilizar esta metodologia nas aulas de Matemática desafia o aluno a testar sua criatividade, o seu saber matemático acumulado e a capacidade de agir como investigador e matemático, sendo o principal agente do processo de construção de sua aprendizagem. Desta forma, o professor deve pensar na elaboração de tarefas investigativas diferenciadas.

Uma contribuição que também é relevante destacar, é que durante o desenvolvimento de tarefas investigativas, os resultados construídos pelos alunos podem surpreender o professor. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) as respostas apresentadas pelos alunos podem surpreender o professor, visto que, durante a realização de trabalhos investigativos, o professor pode ser surpreendido por conjecturas validadas que não tinha pensado. Isto ocorreu durante a realização da tarefa 5, visto que um grupo perguntou ao professor se poderia utilizar o *Excel* para investigar as dimensões de uma caixa que torna o custo o mínimo possível. Esta atitude dos alunos chamou minha atenção, pois em momento algum falamos sobre recursos tecnológicos. Esta ação descreve a iniciativa dos alunos de buscar alternativas para conquistar os objetivos.

O desenvolvimento das tarefas investigativas poderá contribuir com a formação destes futuros professores de matemática, porque esta metodologia valoriza a iniciativa e a criatividade do aluno, proporcionando ao professor atuar como um mediador que provoca o tempo todo os discentes a agirem como investigadores. Isso foi corroborado pelo posicionamento do grupo A5 durante a última tarefa desenvolvida. O grupo salientou que "as atividades de investigação dão liberdade para a gente buscar alternativas através de vários testes de maneiras diferentes, então não precisa decorar uma fórmula, a gente consegue entender investigando várias situações que ajuda a chegar nas respostas". Destacaram também que a Investigação Matemática auxiliou a desenvolver suas habilidades matemáticas de forma dinâmica e criativa com liberdade para formular conjecturas sem se prender a fórmulas prontas como ponto de partida, e esta capacidade eles desempenharam com sabedoria ao formular conjecturas, testá-las e justificá-las.

Mediante a exploração das cinco tarefas desenvolvidas foi alcançado o primeiro objetivo: explorar tarefas investigativas que instiguem os alunos a formular conjecturas sobre derivadas envolvendo taxa de variação, máximos e mínimos de funções. Durante a realização dessas tarefas, os alunos demonstraram evolução na formulação de conjecturas conforme as tarefas eram desenvolvidas e, a partir dos testes as mesmas foram justificadas e validadas, e com isso, foi alcançado o segundo objetivo: descrever as estratégias e conjecturas elaboradas pelos alunos durante o desenvolvimento das tarefas investigativas propostas.

As principais estratégias utilizadas pelos alunos foram: o uso de diferentes representações simbólicas e numéricas para resolver as tarefas propostas como construção de quadros, desenhos, e modelos matemáticos para simular situações relacionadas com taxa de variação, máximos e mínimos de funções de acordo com o enunciado de cada tarefa investigativa. Também foi utilizado o *Excel* para testar conjecturas formuladas, e por meio destas estratégias os alunos produziram conceitos sobre derivadas, destacando as ideias de limite por meio da aproximação de um valor pela direita e pela esquerda que tende para um parâmetro máximo ou mínimo. Estas conjecturas foram validadas na discussão dos grupos e na apresentação final para a turma. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) o desenvolvimento de várias estratégias de cunho investigativo aprimora nos alunos a habilidade de formular conjecturas. Isto pode ser observado nos resultados desta investigação, uma vez que o uso de diferentes estratégias e a formulação de conjecturas, de uma atividade para a outra, foram sendo construídos com mais refinamento.

Saliento também a percepção que os alunos adquiriram em relação a importância de registrar as estratégias que adotavam para produzir os resultados, isto é, a escrita com detalhes de como pensaram e agiram para a resolução das tarefas propostas. No início as dificuldades em encontrar estratégias de escrita incomodavam os próprios alunos, mas com as orientações constantes do professor e as discussões durante todo o processo investigativo, os grupos compreenderam que a escrita deste contexto é fundamental para a legitimidade da construção de conhecimentos matemáticos. A identificação dessas dificuldades foi o alcance do terceiro objetivo: identificar dificuldades e avanços dos alunos no decorrer da exploração de tarefas investigativas.

Os resultados destacam indícios de que houve construção do conhecimento em relação ao tema derivadas, em particular no âmbito de taxa de variação, máximos e mínimos de funções. Outro avanço, no decorrer da exploração de tarefas investigativas no estudo de derivada, foi que os alunos por meio das simulações produzidas destacaram conceitos da ideia de limites. Ademais, as aplicações de derivadas como nos exemplos da minimização de custo da construção de caixa d'água e também as dimensões de um terreno que produza a área máxima a partir de um perímetro estabelecido, possibilitou fomentar a tomada de decisão, pois tiveram que decidir os resultados para as situações propostas, em grupo.

Por fim, em relação a questão proposta neste trabalho - que estratégias e conjecturas os alunos da disciplina de Cálculo I, de uma turma de licenciatura em Matemática, elaboram na exploração de tarefas investigativas no estudo de derivadas? - os resultados apontaram que os alunos utilizaram como estratégias representações simbólica e numérica mediante a exploração de simulações, quadros, modelos matemáticos e o *Excel* para formularem conjecturas relacionadas com os conceitos de derivada.

Mediante os resultados apresentados, posso inferir que a metodologia de Investigação Matemática tem potencial para contribuir com os processos de ensino de matemática em sala de aula, visto que, além de aperfeiçoar os conhecimentos acumulados pelos alunos na caminhada escolar, aguça-os a construírem novos conceitos matemáticos indispensáveis à formação educacional e profissional. Saliento que, minha prática docente mudou, visto que, desde o desenvolvimento deste trabalho que ocorreu nos meses de abril e maio, já explorei em sala de aula outros trabalhos utilizando tarefas investigativas. Destaco que, por exemplo, em julho, apresentei no evento do XIII ENEM em Cuiabá os resultados de uma prática pedagógica por meio de Investigação Matemática que executei em projeto de nivelamento com alunos do Curso de Matemática da UEA, e esses resultados serão publicados nos Anais deste evento em forma de um artigo científico.

Portanto, pretendo realizar trabalhos futuros envolvendo tarefas investigativas na sala de aula para ampliar meus conhecimentos sobre esta tendência e contribuir com o ensino de outros conteúdos, e dessa forma, fomentar a formação profissional de futuros professores de matemática enquanto professor universitário. Além disso, em meus próximos trabalhos com esta tendência, pretendo utilizar ferramentas tecnológicas como *softwares* e aplicativos, porque acredito que aliadas aos fundamentos da Investigação Matemática contribuirão com os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, Eva Maria S. **A ludicidade e o ensino da matemática: uma prática possível**. Campinas: Papirus, 2001.

ANDRADE, Mario Celso Ramiro de. **O gabinê fluidificado e a fotografia dos espíritos no Brasil**: a representação do invisível no território da arte em diálogo com a figuração de fantasmas, aparições luminosas e fenômenos paranormais. 2008. 162f. Tese (Doutorado) – Escola de Comunicações e Artes, Universidade de São Paulo (USP): São Paulo, 2008.

ANTON, Howard. BIVENS, Iri. DAVIS, Stephen. **Cálculo**. Tradução: Claus Ivo Doering. 8ª. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ATKINSON, R.; ATKINSON, R.; SMITH, E.; BEM, D**. Introdução à psicologia de Hilgard.** 13º Ed. Porto Alegre: Artmed. 2002

BACCARIN, Sandra A. de O. **Investigação matemática: uma análise da sua contribuição na construção de conceitos algébricos.** 2008. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

BARBOSA, M. A. **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. Dissertação de Mestrado em Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, 2004.

BARDI, Jason Socrates. **A Guerra do Cálculo**. [tradução: Aluízio Pestana da Costa]. 3ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2016.

BIANCHI, Sara Rebecca. **A importância da motivação na aprendizagem no ensino fundamenta**. 2011. Disponível em: http://www.ufscar.br/~pedagogia/novo/ files/tcc/tcc_turma_2008/313653.pdf. Acesso em: 17 set. 2019.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho.; ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

BRASIL. MEC. Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio – **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Secretaria de Educação Básica. – Brasília:MEC/SEF, 1998. Disponível na Internet em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 17 set. 2019.

______. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília, DF, 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>: Acesso em: 30 nov. 2018

BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia,N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores. p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002

CARDOSO, Mikaelle Barboza. **Práticas docentes e tecnológicas no ensino de matemática**. Curitiba: CRV, 2019.

CATAPANI, E. C. Cálculo em serviço: um estudo exploratório. In: **Bolema**, Rio Claro, ano 14, nº 16, p. 48-62, 2001.

CAVALHEIRO, Gabriela Castro Silva. **Resolução de Problemas e Investigação Matemática**: um processo de intervenção formativa para licenciando em matemática 15/08/2017 196 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru, 2017.

CAVASOTTO, Marcelo. Reflexões sobre as dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. **III Mostra de Pesquisa da Pós-Graduação** – PUCRS, 2008.

CERCONI, F. B. M.; MARTINS, M. A. **Recursos tecnológicos no ensino de matemática**: considerações sobre três modalidades. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA- 4, 2014, Ponta Grossa. Anais...Ponta Grossa. 2014. Disponível em: <http://sinect.com.br/anais2014/ anais2014/artigos/ensino-de-matematica/01409358155.pdf>. Acesso em 25 set 2018.

CERVO, Amado L. et al. **Metodologia científica**. 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan**. Educação Matemática**: da teoria à prática. 23.ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. ROSE, M. **Um diálogo com Ubiratan D'Ambrósio: uma conversa brasileira sobre etnomatemática**. In: BANDEIRAS, F. A. B.; GONÇALVES, P.G. F. (Orgs.). Etnomatemática pelo Brasil: aspectos históricos, ticas de matema e prática escolares. Curitiba: CRV, 2016.

D’AVOGLIO, A. R. **Derivada de uma função num ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2002.

DIOGO, M. G. V. S. **Uma Abordagem Didático-Pedagógica do Cálculo Diferencial e Integral I Na formação de professores de Matemática**. 2015, 256p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

ESTÁCIO, Marcos André Ferreira. **Universidade do Estado do Amazonas**: uma década de história. IX SEMINÁRIO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS HISTÓRIA, SOCIEDADE E EDUCAÇÃO NO BRASIL, 9., 2012, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: UFP, 2012. p. 1536-1557.

FERREIRA, Adriana Assis. **A produção de significados matemáticos em um contexto de aulas exploratório-investigativas**. 2012 298 f. Doutorado em Educação. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

FERREIRA, Allan Silva. **Diferentes abordagens do conceito de derivada:** uma proposta de Investigação Matemática**'** 18/12/2017 158 f. Mestrado Profissional em ENSINO Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS, Belo Horizonte Biblioteca Depositária: PUC Minas, 2017.

FIGUEIREDO, Antônio Macena de. SOUZA, Soraia Riva Goudinho de. **Como elaborar projetos, monografias, dissertações e teses**: da redação científica à apresentação do texto final. 4. ed. Rio de Janeiro: Lumen Juris, 2011.

FLEMMING, D. M., GONÇALVES M. B. **Cálculo A**: funções, limite, derivação e integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; MELLO, Ana Cláudia Collaço de. Resolução de Problemas. In: **Tendências em educação matemática**. 2. ed. Palhoça : Unisul Virtual, 2005.

FLOOD, Raymond. WILSON, Robin. **A História dos Grandes Matemáticos**: as descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos. São Paulo: M. Books do Brasil Editora, 2013.

FONSECA, Laerte. et al. **Didática do cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina de Cálculo I: a análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos.** 2013. 298 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas. São Paulo. 2013.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Método e técnicas de pesquisa social**. 6ª. ed. São Paulo: Atlas S.A, 2008.

GIL, A. C.; **Método e técnicas de pesquisa social**. 5ª Edição. São Paulo. Editora Atlas S.A. 2019.

GIORDANI, Jordana; NOVAES, Crislaine do Carmo; FERREIRA, Jean Michel. A utilização de jogos em sala de aula de 9º ano do ensino fundamental. **XI CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE. PUCPR – 2015.**

GONÇALVES, D. C.; REIS, F. S. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 417-432, ago. 2013

GONÇALVES, Daniele Cristina. **“Aplicações das Derivadas no Cálculo I: Atividades Investigativas utilizando o GeoGebra”**' 01/05/2012 110 f. Profissionalizante em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO, OURO PRETO Biblioteca Depositária: ICEB/UFOP, 2010.

GONÇALVES, M.H. C. C., BRITO, M.R. F. A aprendizagem de atitudes positivas em relação à Matemática. In: BRITO, M. R.F. **Psicologia da Educação Matemática**: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2005.

GONÇALVES, P.G. F. (Orgs.). Etnomatemática pelo Brasil: aspectos históricos, ticas de matema e prática escolares. Curitiba: CRV, 2016.

GRANDO, N. I.; VIEIRA, Giancarla Beatriz. Números decimais: dificuldades conceituais. In: GRANDO, N. I. Pesquisa em Educação Matemática: contribuições para o processo ensino aprendizagem. 1 ed. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2006, v. 1, p. 110-135.

GRUPO ANIMA EDUCAÇÃO. **Manual de Métodos Quantitativos de Pesquisa:** suporte ao trabalho de conclusão de curso (TCC). Belo Horizonte, 2014.Disponível em: <http://disciplinas.nucleoead.com. br/pdf/anima_tcc/gerais/manuais/manual_quanti.pdf>. Acesso em: 30 set. 2018.

GUERRA, R. A. T. et al. **569 Cadernos Cb Virtual 2**. João Pessoa: Ed. Universitária, 2011.

HONORATO, **Vinícius dos Santos. Elaborando atividades matemáticas com o software GeoGebra** 2018. 157 f. Dissertação (Mestrado Em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018.

IEZZI, G. MURAKAMI, C. MACHADO, N. J. **Fundamentos de Matemática Elementar 8**: limites, derivadas, noções de integral. 7ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino de Cálculo e um estudo sobre números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p.11-26.

KRUEGER, Sheila Dalmonico. **Matemática Significativa**. Centro Universitário Leonardo da Vinci – Indaial: Grupo UNIASSELVI, 2009.

LAKATOS, Eva Maria. MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 3. Ed. São Paulo: Editora Atlas, 1996.

MACCALI, Ludmila. **Atividades Investigativas para o ensino da álgebra em turmas de 7° ano e 9° ano do Ensino Fundamental** 2017. 116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2017.

MACHADO, Luiz Elpídio de Melo **O hipertexto na aprendizagem do cálculo diferencial e integral**. 2002, 94p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas). Florianópolis: UFSC.

MAGALHÃES, Ana Paula A. S. VARIZO, Zaíra da Cunha Melo. **Atividades Investigativas como uma estratégia de ensino e aprendizagem da matemática**. Curitiba: CRV, 2016.

MAOR, Eli. **e:** a história de um número. Tradução de Jorge Calife. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MARCONI, M. de Andrade; LAKATOS, E. M.; **Fundamentos de Metodologia Científica.** 8. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de Derivadas em Cálculo I**: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, XVII, Vitória, *Anais*... Vitória: SBEM, p. 1-12, 2013.

MELLO, M.H.C.S., FERNANDES, J.S. **Mudanças no Ensino de Cálculo I: Histórico e Perspectivas**. Cobenge, Porto Alegre, RS, 2001.

MENEZES, Paulo Victor Silva. **Métodos de contagem**: uma abordagem investigativa. 2016. 77 f. Dissertação. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Universidade Federal de Sergipe. Itabaiana, 2016.

MONDINI, Fabiane. MOCROSKY, Luciane. PAULO, Rosa Monteiro. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral I: possibilidades de investigação. **Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 59, p. 150-162, jul./set. 2018.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textal:** discursiva. Ijuí: Uni-juí, 2007.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: **Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF,1997.

PEREIRA, Ademar Barros, Ludmila. **Investigação Matemática: possibilidade para ensino de trigonometria** 2015. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2015.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. [Tradução Heitor Lisboa de Araújo]. Rio de Janeiro: Interferência, 2006

PONTE, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, 25, 105-132. Este artigo é uma versão revista e actualizada de um artigo anterior: Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. Quadrante, 3(1), 3-18. (re-publicado com autorização).

PONTE, J. P. Investigations and explorations in the mathematics classroom. ZDM, **The International Journal on Mathematics Education**, New York, NY, v. 39, n. 5-6, p. 419-430, Oct. 2007.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3 ed. rev. ampl; reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

REGINALDO, Bruna K. S. Reflexões teóricas sobre o trabalho com Investigação na sala de aula de Matemática. **Anais Ebrapem** (2011) – Volume 1, Número 1. Disponível: <http:/ /www.editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/ 0c212dac247070f5735886d89153ea77.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2019.

REIS, F da S. **Discutindo a Relação Entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e de Análise: Uma Contribuição Para o Debate em Educação Matemática no Ensino superior**. XXVI Reunião Latino americana de Matemática Educativa. Belo Horizonte, 2012.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, p. 81-97, 2009.

REZENDE, W. M. **Ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RICALDONI, Marcio Augusto Gama. **Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no ensino de Cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a Derivadas de Funções Reais.**' 22/05/2014 114 f. Mestrado Profissional em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO, Ouro Preto Biblioteca Depositária: Repositório Institucional Universidade Federal de Ouro Preto, 2014.

ROCHA, M. D. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I**: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto**:** Ouro Preto, 2010.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil Editora, 2012.

SANTOS, A. R.; KUBRUSLY, R. S.; BIANCHINI, W. **Mathlets:** Applets Java para o Ensino de Matemática; Anais II HTEM; UERJ: Rio de Janeiro, 2004.

SANTOS, I. N**. Explorando conceitos de Geometria Analítica Plana utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação: uma ponte do Ensino Médio para o**

Ensino Superior construída na formação inicial de Professores de Matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto: UFOP, 2010.

SANTOS, M. E. K. L. dos. AMARAL, L. H. Avaliação de objetos virtuais de aprendizagem no ensino de matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**. V. 3, n. 2, p. 83-93, 2012.

SANTOS, Vinício de Macedo. **A matemática escolar, o aluno e o professor**: paradoxos aparentes e polarizações em discussão. Cad. CEDES[online]. 2008, vol.28, n.74, p. 25-38. ISSN 0101-3262. doi: 10.1590/S0101-32622008000100003. Disponível em: >. Acesso em: 16 out. 2018.

SCHMITT, Fernanda E. **Abordando Geometria por meio da investigação matemática**: um comparativo entre o 5º e 9º anos do ensino fundamental. 2015. 105 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2015.

SEABRA, Giovanni de Farias. **Pesquisa Científica**: o método em questão. Brasilia, DF: UNB, 2001.

SILVA, Circe Mary Silva da. SIQUEIRA FILHO, Moysés Gonçalves. **Matemática**: resolução de problemas. Brasília: Liber Livro, 2011.

SOUZA, Dalva Inês de. et al. **Manual de orientações para projetos de pesquisa**. Novo Hamburgo: FESLSVC, 2013.

STEWART, James. **Cálculo**. [tradução EZ2 Translate]. São Paulo: Cengage Learning, 2013. V.1

THOMAS, GEORGE, B. **Cálculo**. Tradução Kleber Pedroso e Regina Simille de Macedo. 12. ed. - São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. V.1

VIEIRA, G; ALLEVATO, N. S. G. Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental. **Anais do Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 1-13, 2012.

YIN**,** Robert K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de concordância da instituição de ensino.

Ao senhor Diretor do Centro de Estudos Superiores de Tefé – CEST da Universidade do Estado do Amazonas – UEA.

Eu, Carlos José Ferreira Soares, aluno regularmente matriculado no Curso de Pós-graduação Stricto Sensu, Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari (UNIVATES) e Lajeado, RS, venho solicitar a autorização para coletar dados neste estabelecimento de ensino, para a realização de uma atividade referente à minha pesquisa de mestrado intitulada: **"Atividades Investigativas no Ensino de Derivadas em uma turma de Licenciatura em Matemática"**, tendo como objetivo geral: analisar as estratégias e conjecturas que os alunos da disciplina de Cálculo I de uma turma de licenciatura em Matemática elaboram ao utilizarem atividades investigativas envolvendo derivadas .

A investigação será realizada no primeiro semestre de 2019 com os alunos do 2º período do Curso de Licenciatura em Matemática durante os horários da disciplina Cálculo I, que será ministrada pelo pesquisador do presente trabalho.

Agradeço a disponibilidade e pelo presente termo, peço que autorize a realização da pesquisa e o uso do nome do Centro de Estudos Superiores de Tefé – CEST/UEA.

Tefé – AM, _______ de _____________________ de 2019

____

Diretor do Centro de Estudos Superiores de Tefé – CESTE/UEA

____

Carlos José Ferreira Soares

APÊNDICE B – Termo de Consentimento Livre Esclarecido.

Pelo presente Termo de Consentimento Livre Esclarecido, e como aluno do 2º período do Curso de Licenciatura em Matemática, declaro está ciente que participarei como voluntário da pesquisa: “**Atividades Investigativas no Ensino de Derivadas em uma turma de Licenciatura em Matemática”,** sob a responsabilidade do pesquisador Carlos José Ferreira Soares e sob a orientação da professora Dr. Marli Teresinha Quartieri. Este trabalho está pautado nos seguintes objetivos: analisar as estratégias e conjecturas que os alunos da disciplina de Cálculo I de uma turma de licenciatura em Matemática elaboram ao utilizarem atividades investigativas envolvendo derivadas; explorar atividades investigativas que desafiem os alunos a formarem conjecturas sobre derivadas enfocando taxa de variação, máximo e mínimo; destacar as estratégias e conjecturas construídas pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades investigativas propostas; identificar as dificuldades e as possibilidades de aprendizagem apresentadas pelos alunos ao trabalhar com atividades investigativas. Os resultados deste trabalho gerados mediante a exploração de imagens, gravações de áudio, as informações registradas pelos participantes e pelos pesquisadores poderão ser apresentadas em eventos e publicados em periódicos regional, nacional e internacional. Desta forma, todos aos resultados ficarão disponível a comunidade que se interessar e à instituição.

Diante disto, o presente documento está pautado no compromisso ético dos pesquisadores em garantir que os dados e os resultados desta pesquisa serão tratados de acordo com os princípios éticos de uma pesquisa de cunho científico. Além disso, serei esclarecido (a) em qualquer aspecto da pesquisa que desejar.

Nessas condições declaro que estou ciente da abordagem do presente termo, e externo que estou a disposição em participar deste trabalho de pesquisa de mestrado como voluntário (a).

________________________________ _____/______/______

Assinatura do (a) discente Participante Data

________________________________ _____/______/______

Carlos José Ferreira Soares – Mestrando Data

APÊNDICE C

Questionário

1. A Investigação Matemática já tinha sido utilizada em aulas anteriores?

(   ) Sim   (   ) Não

2. Você achou interessante a metodologia utilizada? Justifique.

(   ) Sim   (   ) Não

____

____

____

3. As tarefas investigativas propostas lhe ajudaram a compreender o conceito de derivada? Justifique.

(   ) Sim   (   ) Não

____

____

____

4. Descreva os aspectos positivos em relação ao uso da Investigação Matemática.

____

____

____

5. Como o grupo registrou as conjecturas e conclusões? Encontrou dificuldades? Justifique.

____

____

6. O que você achou do momento das discussões em grupo para construção de conhecimentos e aprendizagem? Justifique.

____

____