CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

EXPLORANDO ESTRATÉGIAS DIFERENCIADAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Virginia Furlanetto

Lajeado, maio de 2013

Virginia Furlanetto

EXPLORANDO ESTRATÉGIAS DIFERENCIADAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES, como exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Maria Madalena Dullius

Lajeado, maio de 2013

Virginia Furlanetto

EXPLORANDO ESTRATÉGIAS DIFERENCIADAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

A Banca Examinadora abaixo aprova a Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, como parte da exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Profa. Dra. Maria Madalena Dullius – orientadora
Centro Universitário UNIVATES

Prof. Dr. André Jasper
Centro Universitário UNIVATES

Profa. Dra. Marli Teresinha Quartieri
Centro Universitário UNIVATES

Prof. Dr Olivier Feron
Universidade de Évora

Lajeado, maio de 2013

AGRADECIMENTOS

Ao final de mais esta etapa, meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que, de uma ou outra forma, contribuíram para que eu chegasse até aqui:

- Aos meus pais, Nedi e Jacinto; irmãos, João e Henrique; pelo apoio e incentivo desde sempre;

- Ao meu namorado Enio, pelo carinho nos momentos de fragilidade e compreensão pela ausência;

- Aos demais familiares e amigos, pelo carinho nos poucos momentos em que pudemos estar juntos;

- Aos professores que fizeram parte da minha caminhada escolar e acadêmica e, em especial, à minha orientadora Maria Madalena Dullius, pelo conhecimento compartilhado, incentivo e compreensão;

- Aos colegas de curso, pela amizade e motivação;

- Aos colegas bolsistas do Observatório da Educação e escolas parceiras do Programa no Vale do Taquari, pelo auxílio e valiosas contribuições, especialmente Tatiane, Ana Paula e Vanessa, que estiveram mais próximas em todo o processo;

- Às colegas Daniela e Luciana, pelo apoio, motivação e momentos inesquecíveis compartilhados;

- À equipe diretiva e colegas da EMEF Roman Ross e, em especial, aos alunos da 7ª e 8ª séries, sujeitos da pesquisa, por acreditarem e aderirem à proposta;

- À CAPES e Univates, pela oportunidade e apoio financeiro;

-A Deus pela graça da vida.

RESUMO

O ensino e aprendizagem da Matemática tem sido alvo de preocupação por parte de professores e gestores, pois os resultados alcançados pelos estudantes revelam-se pouco satisfatórios no cenário nacional, salvo algumas exceções. O desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é apontado como um dos objetivos principais para a Educação Básica e, nesta perspectiva, cabe ressaltar que existem vários caminhos para se resolver um mesmo problema. Apesar disso, parte dos alunos da Educação Básica está fortemente arraigada à utilização do cálculo formal, o que pode gerar fracasso na busca pela solução de um problema. Diante dessas constatações, questionamo-nos: quais as diferentes estratégias que os alunos utilizam na resolução de problemas e como elas interferem neste processo? A presente pesquisa, alicerçada em estudos sobre as diferentes estratégias passíveis de serem utilizadas na resolução de problemas matemáticos caracteriza-se, segundo os procedimentos técnicos adotados, como um estudo de caso e tem por objetivo propor e investigar a utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas matemáticos por parte de alunos da Educação Básica, para verificar de que forma elas interferem no processo. Iniciamos o trabalho com um estudo bibliográfico sobre as estratégias de resolução de problemas e investigamos quais delas são utilizadas pelos alunos da Educação Básica. Considerando os dados coletados, desenvolvemos uma intervenção pedagógica com alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, em que exploramos problemas de livros didáticos, Olimpíadas Matemáticas e outras fontes, incentivando a utilização de estratégias alternativas ao Cálculo formal e compartilhando-as por meio de discussões para validação das mesmas. Ao final deste período, foram propostas uma nova seleção de problemas e a participação em uma entrevista semiestruturada, por meio das quais foram obtidos indícios de eficácia da proposta. Os participantes passaram a utilizar com maior frequência e eficácia estratégias alternativas ao Cálculo formal e manifestaram preferência por estas formas de resolução. Apresentamos, portanto, uma possibilidade para o trabalho com resolução de problemas capaz de auxiliar os estudantes a obterem, de forma autônoma, êxito no processo.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Estratégias. Ensino e aprendizagem de Matemática.

ABSTRACT

Mathematics teaching and learning have been a permanent concern for teachers and managers since the results that students achieved have not been completely satisfactory nationally. Developing the problem resolution ability is conceived as one of the main goals for Elementary Schools and it is important to state that there are several ways to solve a problem. In spite of that some Elementary School students are strongly attached to the use of formal calculation which may result on failure when searching for problem resolution. Facing such reality and being concerned with it we question which different strategies students use in problem resolutions and how they interfere in the process. The present case study research is based on studies regarding the different strategies to be used in mathematics problem resolution and aims to propose and investigate the use of different mathematics problem resolution strategies by Elementary School students in order to verify how they interfere in the process. It was initially carried out a bibliographical study about problem resolution strategies followed by the investigation on which strategies were used by Elementary school students. Taking into consideration data collected a pedagogical intervention was developed with 7^{th} and 8^{th} grade students of Elementary school aiming to explore textbook problems, Mathematical Olympic games and other sources, encouraging the use of alternative strategies to formal calculation and exchanging them to assure their validation. Finally a new problem selection and the participation in a semi-structured interview were proposed and the indication of an effective proposal was carried out. Participants started to use alternative strategies more frequently and more effectively. Therefore we present the possibility for problem resolution development which may help the students to autonomously succeed in the process.

Key-words: Problem Resolution. Strategies. Mathematics Teaching and Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é, geralmente, uma disciplina considerada difícil pelos estudantes e uma recorrente preocupação dos professores, no que diz respeito ao desempenho escolar. Os números divulgados acerca dos resultados obtidos pelos alunos em avaliações da qualidade da educação apresentam indicativos da preocupante situação em que se encontra a aprendizagem da Matemática, tanto no Rio Grande do Sul quanto no Brasil. Diante desta situação, tem-se como desafio melhorar a qualidade da educação de nossos alunos e para que isso ocorra é preciso ter claro o que se quer que eles aprendam e o que e como ensinar para que essas aprendizagens realmente aconteçam.

Esse quadro vem desprendendo investimentos dos governos no sentido de capacitar professores, mas ainda não tem impactado suficientemente o desempenho dos alunos. Isso pode ser percebido nos resultados das avaliações externas realizadas na última década, entre elas a Prova Brasil, o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), os quais servem de diagnóstico, em larga escala e que apresentam indicadores da qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro e mundial.

Uma das causas dessa ineficiência pode estar relacionada à forma como a Matemática vem sendo abordada em muitas escolas. A visão da ciência perfeita, com fórmulas e resoluções únicas, em que predominam a memorização e mecanização na resolução de exercícios, pode ser a causa do desencanto e afastamento dos alunos, levando-os ao insucesso nessa disciplina que parece estar tão ligada ao nosso dia a dia e à maioria das profissões.

Com relação aos alunos das séries finais do Ensino Fundamental, foco da presente investigação, percebe-se que eles têm alcançado as metas postas pelos órgãos organizadores dos sistemas avaliativos até então, mas o índice esperado para os próximos anos requer uma variação maior na melhoria do desempenho de tais estudantes. Segundo dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira[1] (INEP), os Índices de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) verificados até o ano de 2011, são de 3,5 em 2007; 3,7 em 2009 e 3,9 em 2011. Esses índices combinam resultados obtidos pelos alunos nos testes padronizados da Prova Brasil e SAEB, com informações sobre rendimento escolar. Atualmente, o observado nas séries finais do Ensino Fundamental é 4,1, tendo esses alunos, alcançado, na prova de Matemática, singelos 250,6 pontos de uma escala que varia de 0 a 425. A meta é que, em 2013, ano da realização da próxima edição da prova, o IDEB chegue a 4,4, o que requer um esforço maior no sentido de melhorar a qualidade do ensino e aprendizagem em sua totalidade.

Visando fomentar estudos e pesquisas no sentido de qualificar a Educação Básica no Brasil, a CAPES/INEP (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) lançou o Edital 038/2010/CAPES/INEP, do Programa Observatório da Educação. No Centro Universitário UNIVATES, Lajeado/RS, vem sendo desenvolvido um projeto, no âmbito deste edital, intitulado “Relação entre a formação inicial e continuada de professores de Matemática da Educação Básica e as competências e habilidades necessárias para um bom desempenho nas provas de Matemática do SAEB, Prova Brasil, PISA, ENEM e ENADE”. Esse projeto está vinculado ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas.

O foco do projeto é analisar as habilidades e competências necessárias para um bom desempenho no âmbito da Matemática nas avaliações externas mencionadas, bem como verificar se a formação inicial e continuada dos professores contemplam tais habilidades e competências. Visa também, a partir desses resultados, propor e investigar ações de intervenção pedagógica que, a médio e

[1] Disponível em: http://ideb.inep.gov.br/resultado/. Acesso em: 31 jan. 2013

longo prazo, possam contribuir para a melhoria dos índices de desempenho nas referidas provas.

Neste contexto de ações de intervenção é que foi desenvolvido o estudo aqui apresentado do qual resultou a presente dissertação, visto que a autora integra, como bolsista de mestrado, o projeto mencionado. A partir de investigações acerca dos sistemas avaliativos Prova Brasil e SAEB, verificamos que a prova de Matemática possui como foco principal a resolução de problemas, tornando-se este o tema da dissertação[2].

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) (BRASIL, 1998, p. 40) sinalizam que, "no processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas" e apresentam a resolução destes como objetivo relacionado à grande parte dos conteúdos sugeridos para as várias etapas do Ensino Fundamental. Para que essa forma de trabalho se mostre eficaz, é importante que o professor, além de conhecer o conteúdo, selecione experiências de aprendizagem ricas e diversificadas que proporcionem o desenvolvimento das habilidades e competências para ler, escrever, bem como analisar e resolver problemas, raciocinar e comunicar suas ideias e descobertas, tendo presentes os conceitos e os modos de pensar da Matemática.

Considerando que a resolução de um problema implica a compreensão do que foi proposto e a apresentação de respostas, aplicando procedimentos adequados, cabe ressaltar que existem vários caminhos para se chegar a um mesmo resultado, ou seja, inúmeras são as estratégias que o estudante pode utilizar nesse processo.

A temática das estratégias que podem ser utilizadas na resolução de problemas matemáticos nos sensibiliza, já que percebemos, em nossa trajetória docente, a facilidade com que alguns alunos, quando lhes é permitidos, resolvem determinados problemas utilizando estratégias alternativas, mesmo que conteúdos específicos estejam em desenvolvimento. Nesses casos, é comum justificarem que

[2] O presente trabalho integra o projeto Observatório da Educação, que vem sendo desenvolvido no Centro Universitário UNIVATES, com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), entidade do governo brasileiro voltada para a formação de recursos humanos.

consideram mais fácil resolver de tal forma, que o Cálculo formal é mais trabalhoso e, geralmente, suas resoluções são coerentes com o problema proposto.

Em contrapartida, percebemos em estudo anterior (DULLIUS et al., 2011), realizado a partir de resoluções apresentadas por estudantes do Ensino Médio à uma prova de Olimpíada Matemática realizada na UNIVATES, a forte tendência dos participantes ao uso do Cálculo formal. Este, entretanto, nem sempre significa garantia de êxito e pode levar a um caminho mais longo e difícil na busca pela solução.

Diante do exposto, justificamos o desenvolvimento da pesquisa aqui apresentada, que diz respeito à investigação da possível influência da utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas, por parte de alunos da Educação Básica, para que obtenham êxito ao deparar-se com essas situações matemáticas. Nesse sentido, propusemos a utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas para verificar se esta forma de trabalho pode auxiliar na melhoria da qualidade do ensino da Matemática, elevando, consequentemente, os índices avaliativos.

Destacamos, portanto, como questão de pesquisa:

“Quais as diferentes estratégias que os alunos utilizam na resolução de problemas e como estas interferem neste processo?”

E, como questões norteadoras:

- Os alunos da Educação Básica fazem uso de estratégias diferentes do Cálculo formal na resolução de problemas matemáticos? Em caso afirmativo, quais são elas?

- Nos problemas propostos pela Prova Brasil, é passível a utilização de estratégias diversificadas de resolução? Quais são elas?

- Os estudantes da Educação Básica, mais especificamente os da 7ª e 8ª séries[3], podem obter resultados mais satisfatórios na resolução de problemas ao se utilizarem de estratégias diversificadas de resolução?

O objetivo geral é “explorar o uso de diferentes estratégias de resolução de problemas matemáticos com estudantes da Educação Básica e verificar como estas interferem nesse processo”.

Especificamente, pretendemos:

- Investigar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas matemáticos;
- Estimular a criação e utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas;
- Analisar, interpretar e resolver situações-problema, utilizando diversificadas estratégias;
- Proporcionar atividades que desenvolvam, em longo prazo, a criatividade e autonomia e, consequentemente, a formação de cidadãos mais ativos socialmente;
- Avaliar a contribuição do uso de diferentes estratégias para a obtenção de êxito na resolução de problemas.

No desenvolvimento desta pesquisa, apoiamo-nos na utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas como forma de melhorar a qualidade do ensino da Matemática e, mais do que isso, desenvolver no aluno, capacidades de tomada de decisões, autonomia e de resolver situações cotidianas que possam ocorrer.

Para tanto, desenvolvemos uma intervenção pedagógica onde, inicialmente, várias turmas de 8ª série foram convidadas a resolver uma seleção de oito problemas relacionados à Prova Brasil e SAEB. As resoluções foram analisadas sob

[3] As atuais 7ª e 8ª séries, turmas com as quais foi realizada a intervenção pedagógica da presente pesquisa, referem-se ao 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de 9 anos, que está sendo implantado gradativamente no Brasil.

a perspectiva das diferentes estratégias passíveis de serem utilizadas na solução de problemas matemáticos. Em seguida, em uma das escolas, foram realizados encontros com alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, baseados na resolução de problemas matemáticos, em grupos ou individualmente, incentivando o uso de diferentes estratégias de resolução de problemas e socializando as que foram apresentadas pelos participantes da coleta de dados inicial ou desenvolvidas pelos pesquisadores envolvidos. De natureza predominantemente qualitativa, esta investigação caracteriza-se em um estudo de caso.

A apresentação do estudo está estruturada em sete capítulos sendo este o primeiro, onde expusemos as motivações que nos levaram a investigar o tema e a propormos a intervenção pedagógica que será descrita. No segundo, dialogamos com os referenciais teóricos e orientações governamentais que dão suporte à pesquisa, abordando a importância e a necessidade da resolução de problemas matemáticos e ainda as estratégias passíveis de serem utilizadas e suas possíveis contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e para a formação de sujeitos capazes de criar, argumentar e decidir. Além disso, expressamos os resultados obtidos em um recorrido pela bibliografia de periódicos, destacando investigações sobre o tema estratégias de resolução de problemas já realizadas por outros pesquisadores.

Em seguida, no terceiro capítulo, descrevemos os procedimentos metodológicos empregados, fundamentados no estudo de caso que, segundo Ponte (1994, p. 4), é uma investigação particularística, “que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse”.

No capítulo quatro, exibimos a coleta de dados inicial que contou com a participação de 158 alunos que resolveram uma seleção de oito problemas do banco de dados da Prova Brasil e uma análise da mesma, na qual foi detectada a predominância do Cálculo formal com baixo índice de acerto na resolução da maioria dos problemas. No quinto, apresentamos a condução da intervenção pedagógica, detalhando os encontros, os problemas resolvidos e as estratégias utilizadas, tecendo considerações sobre os mesmos, baseadas na produção escrita dos alunos, nas anotações da pesquisadora e ainda nas gravações de áudio e vídeo.

Em seguida, no capítulo seis, analisamos as resoluções apresentadas pelos estudantes na última seleção de problemas, momento em que trabalharam individualmente. Esta atividade constituiu a última coleta de dados da investigação, juntamente com uma entrevista semiestruturada realizada com os alunos participantes. Por fim, tecemos considerações a respeito do estudo, destacando aspectos relevantes e buscando responder as inquietações existentes antes da realização do trabalho e, mais do que isso, suscitar reflexões, no intuito de contribuir com pesquisadores e professores preocupados com o rumo da Educação Matemática.

Esta dissertação, vinculada à linha de Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o ensino de Ciências e Matemática do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES, constitui-se em uma das ações do Projeto Observatório da Educação. Esperamos que possa contribuir para a prática de professores de Matemática e, consequentemente, à melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem dessa disciplina na Educação Básica.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Os pressupostos teóricos que norteiam o desenvolvimento desta investigação estão fundamentados na abordagem da Matemática através da resolução de problemas com foco na utilização de diferentes estratégias. Apresentamos, na primeira seção deste capítulo, o referencial teórico que sustenta a investigação e, em seguida, na segunda seção, uma breve revisão bibliográfica sobre o tema.

A Matemática é uma ciência desenvolvida a partir da atividade humana que remonta aos primórdios da humanidade. Ninguém sabe ao certo quando surgiu, mas Berlinghoff e Gouvêa (2008, p. 6) ressaltam que “toda civilização que desenvolveu a escrita também mostra evidências de algum nível de conhecimento matemático”. Ela está presente em nossas atividades diárias desde que despertamos pela manhã, ao olharmos o relógio para estabelecer a quantidade de minutos de que dispomos para a realização das primeiras tarefas, estendendo-se sua presença ao longo do dia.

Onuchic e Allevato (2004, p. 213) destacam que “a Matemática têm desempenhado um papel importante no desenvolvimento da sociedade e que problemas de Matemática têm ocupado um lugar central no currículo escolar desde a Antiguidade”. Para as autoras, a atividade matemática está cada vez mais presente em nosso contexto diário e no mundo do trabalho, fazendo-se necessário saber utilizá-la cada vez mais e melhor.

Na sociedade atual, onde a demanda por trabalhadores mais críticos, autônomos e criativos é crescente, a Matemática pode dar sua contribuição à medida que se utiliza de “metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade de enfrentar desafios” (BRASIL, 1998, p. 27).

Os PCN’s do Ensino Médio ressaltam ainda que:

> Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento (BRASIL, [200-], p. 111).

Entretanto, esta disciplina que parece estar tão vinculada às nossas atividades diárias e à maioria das profissões, possui elevadas taxas de insucesso por parte dos alunos, como podemos perceber, por exemplo, nos resultados de avaliações externas, como a Prova Brasil e SAEB.

2.1 Matemática e resolução de problemas

No contexto apresentado, a abordagem da Matemática através da resolução de problemas pode contribuir na formação de cidadãos mais autônomos e críticos à medida que o aluno se torna agente de sua própria aprendizagem, criando seus métodos e estratégias de resolução em contrapartida a metodologias mais tradicionais, onde predomina a memorização e mecanização. Onuchic e Allevato (2004) apresentam a recomendação do Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos (NCTM), publicada no documento *An Agenda for Action*, de 1980, de que o foco da Matemática escolar para aquela década deveria ser a resolução de problemas. Begle (1979, apud BRANCA, 1997, p. 5), também já dizia que “o legítimo fundamento para o ensino da matemática é que se trata de uma matéria útil e que, especialmente, ajuda na resolução de muitos tipos de problemas”.

De acordo com os PCN’s (BRASIL, 1998), a resolução de problemas pode ser vista como ponto de partida da atividade matemática em contrapartida à simples resolução de procedimentos e ao acúmulo de informações, uma vez que possibilitam aos estudantes a mobilização dos conhecimentos e o gerenciamento das informações que estão ao seu alcance. Educadores matemáticos concordam que a capacidade de resolver problemas constitui um dos principais objetivos do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Dante (2000) assinala o trabalho com resolução de problemas matemáticos como a principal forma de se alcançar os objetivos da Matemática em sala de aula, entre eles, o de “fazer o aluno pensar produtivamente”. O autor destaca ainda:

> Mais do que nunca precisamos de pessoas ativas e participantes, que deverão tomar decisões rápidas e, tanto quanto possível, precisas. Assim, é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas de comércio, economia, administração, engenharia, medicina, previsão do tempo e outros da vida diária. E, para isso, é preciso que a criança tenha, em seu currículo de matemática elementar, a resolução de problemas como parte substancial, para que desenvolva desde cedo sua capacidade de enfrentar situações-problema (DANTE, 2000, p. 15).

A resolução de problemas é apontada pelos PCN’s (BRASIL, 1998, p. 40) como ponto de partida da atividade matemática, oferecendo ao aluno a oportunidade de “mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance”. Alertam ainda que:

> Para atender as demandas do trabalho contemporâneo é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula. Também o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades (BRASIL, 1998, p. 34).

Além disso, a Matriz de Referência do SAEB e da Prova Brasil, avaliações estruturadas com foco em resolução de problemas, destaca que “o conhecimento matemático ganha significado, quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução” (BRASIL, 2008a, p. 106). Esses sistemas avaliativos têm gerado preocupação por parte de professores e gestores das escolas, já que os índices apresentados pelos meios de comunicação apontam para a fragilidade do ensino de Matemática em nossas escolas.

Diante desse cenário, onde é essencial fazer com que os estudantes se tornem pessoas capazes de enfrentar situações novas ou diferentes, o trabalho com resolução de problemas, aceitando as diferentes estratégias que o estudante possa vir a utilizar, instigando-o à capacidade de aprender a aprender que, conforme Demo (1996), é o grande desafio do processo educativo. O trabalho com resolução de problemas estimula o estudante a determinar por si próprio o caminho para a solução, ao invés de esperar por uma resposta pronta dada pelo livro didático ou pelo professor.

A respeito do processo de resolução de problemas, Polya (1995, p. 4), destaca quatro fases:

- Compreensão do problema: essa fase implica que o enunciado verbal fique claro e que as “partes principais” do problema, como os dados, a incógnita e a condicionante sejam identificadas.

- Estabelecimento de um plano: consiste em prever os passos que serão executados para encontrar a solução para o problema. Esta etapa pode ser estimulada nos alunos através de questionamentos, por parte do professor, que indiquem um rumo a seguir; além disso, o aluno precisa lançar mão de outros conhecimentos já adquiridos em experiências anteriores e ainda pode “pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante” (POLYA, 1995, p 4).

- Execução do plano: nesta etapa, o aluno coloca em prática o que foi pensado na tarefa de estabelecer o plano, o que exige paciência e flexibilidade, já que é possível que seja necessário acrescentar detalhes e verificar cada passo, a fim de evitar erros.

- Retrospecto: consiste em verificar a resolução desenvolvida, “reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este” (POLYA, 1995, p. 4), já que, apesar da verificação de cada passo, durante a execução, ainda podem ocorrer erros. Esta também é uma forma de consolidar o conhecimento, pensar em outras

> possíveis formas de resolver e detectar qual delas se constitui no caminho mais fácil.

Corroboramos com Dante (2009) que essas etapas não são rígidas e infalíveis, pois o processo de resolução de problemas é mais complexo, não podendo ser limitado a instruções que levem à solução, podendo elas, entretanto, auxiliar o solucionador a orientar-se durante o processo.

Quanto à resolução de problemas, D'Ambrósio (s.d) ressalta que, muitas vezes, os alunos desistem de solucionar um problema matemático por não ter aprendido como resolver esse tipo de questão, ou seja, por que não conhecem o algoritmo ou processo de solução que o professor espera que ele desenvolva para aquele problema. Segundo a autora, "falta aos alunos uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas, diferentes das propostas pelos professores" (D'AMBRÓSIO, s.d, texto digital). Este tipo de atitude pode demonstrar receio por parte dos alunos em tentar soluções diferentes daquelas que lhes são propostas em sala de aula, o que inibe o desenvolvimento de características muito importantes à formação cidadã e ao mundo do trabalho anteriormente citados, como a criatividade, a autonomia e o senso crítico.

A respeito disso, Cavalcanti (2001, p. 126) ressalta que, a valorização das estratégias utilizadas:

> [...]inibe atitudes inadequadas em relação à resolução de problemas, como, por exemplo, abandonar rapidamente um problema quando a técnica envolvida não é identificada, esperar que alguém o resolva, ficar perguntando qual é a operação que resolve a situação, ou acreditar que não vale a pena pensar mais demoradamente para resolver um problema.

Para Echeverría (1998, p. 60), "as estratégias de resolução de problemas seriam formas conscientes de organizar e determinar os recursos de que dispomos para a solução de um determinado problema". Cavalcanti (2001) assinala que a utilização de diferentes estratégias de resolução pelos alunos, possibilita-lhes refletir sobre o processo e auxilia na construção da autonomia, trazendo-lhe confiança em sua capacidade de pensar matematicamente. A autora ressalta ainda que "incentivar os alunos a buscarem diferentes formas de resolver problemas permite uma reflexão mais elaborada sobre os processos de resolução, sejam eles através de algoritmos convencionais, desenhos, esquemas ou até mesmo através da oralidade" (CAVALCANTI, 2001, p. 121).

No entendimento de Musser e Shaughnessy (1997, p. 188), a ênfase do currículo da Matemática na escola do passado era a aprendizagem de algoritmos, devido ao forte domínio da aritmética existente na época; porém, na era eletrônica em que vivemos, a prioridade deve ser o desenvolvimento e o uso de algoritmos para resolver problemas. Os autores citam cinco estratégias de resolução de problemas que julgam pertinentes serem abordadas nas escolas:

- Tentativa-e-erro: aplicação de operações pertinentes às informações dadas.
- Padrões: resolução de casos particulares, encontrando padrões que podem ser generalizados.
- Resolver um problema mais simples: resolução de um caso particular ou um recuo temporário de um problema complicado para uma versão resumida, podendo vir acompanhado do emprego de um padrão.
- Trabalhar em sentido inverso: partindo do resultado, realizar operações que desfazem as originais.
- Simulação: utilizada quando a solução do problema envolve a realização de um experimento e executá-lo não seja prático.

Cavalcanti (2001, p. 127) cita também a utilização do desenho "como recurso de interpretação do problema e como registro da estratégia de solução", podendo fornecer ao professor, pistas sobre como o estudante pensou e agiu para solucionar o problema. A autora propõe três etapas para a utilização desse recurso:

- 1ª etapa: Representação de aspectos da situação;
- 2ª etapa: Resolução da situação completa do problema apenas através do desenho, onde o estudante explora o significado das transformações e das operações presentes no texto;
- 3ª etapa: Mescla de desenhos e sinais matemáticos, sugerindo:

- ✓ Utilização do desenho para interpretação do texto e expressão da resolução através da escrita matemática;

- ✓ Resolução numérica e utilização do desenho para comprovar se a resposta está correta.

A mesma autora também cita a utilização do algoritmo convencional, ou seja, o cálculo relacionado ao conteúdo envolvido no problema como "mais uma possibilidade de resolução" (p. 143).

Echeverría e Pozo (1998, p. 25) citam algumas estratégias que podem ser utilizadas na resolução de problemas, destacando que tais procedimentos são passíveis de serem utilizados na resolução de problemas ou realização de tarefas de outras disciplinas além da Matemática:

- Realizar tentativas por meio de ensaio e erro.
- Aplicar a análise meios-fins.
- Dividir o problema em subproblemas.
- Estabelecer submetas.
- Decompor o problema.
- Procurar problemas análogos.
- Ir do conhecido até o desconhecido.

Notam-se semelhanças entre essas últimas estratégias, mais gerais, com aquelas citadas anteriormente e que são específicas para o trabalho com resolução de problemas matemáticos.

Pesquisas demonstram que uma das estratégias mais utilizadas pelos alunos na resolução de problemas é o cálculo formal (DULLIUS et al, 2011). Porém, a abordagem da Matemática através da resolução de problemas, permitindo que o aluno escolha o caminho que deseja percorrer para chegar à solução, possibilita ir além da linearidade do ensino tradicional à medida que o resolvedor pode mobilizar diferentes conhecimentos para chegar a uma resposta. Corroboramos com Perrenoud (1999) que essa capacidade de mobilizar conhecimentos sugere a construção de uma competência, nesse caso, relacionada à Matemática.

2.2 Algumas pesquisas sobre o uso de estratégias na resolução de problemas

Com o objetivo de conhecer e dialogar com outros trabalhos já realizados sobre a mesma temática que desenvolvemos nesta dissertação, ou seja, o uso de diferentes estratégias no processo de resolução de problemas, realizamos uma busca nas edições dos últimos 5 anos (2008-2012) de revistas com versão *online.* Como escopo desta etapa, elegemos periódicos classificados como qualis A e B pela CAPES na área de ensino, buscando, nos títulos e palavras-chave dos artigos, os termos ou expressões “estratégias” e “resolução de problemas matemáticos” ou “de Matemática”. Nessas condições, coletamos 50 artigos, em 6 periódicos diferentes, sendo que, nos demais, não foram encontrados trabalhos a partir das palavras-chave definidas. O foco desta revisão bibliográfica incide sobre os 6 artigos apresentados na Tabela 1, que tratam de estratégias utilizadas por alunos de diferentes níveis de ensino na resolução de problemas, envolvendo conteúdos específicos e determinados na elaboração de cada estudo.

Tabela 1 – Artigos consultados da área de Ensino

Nome da revista	Artigos
Bolema	Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações (CURY; BISOGNIN, 2009)
	Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio (MENEGHETTI; REDLING, 2012)
	Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec (OLIVEIRA, 2009)
Boletim GEPEM	Futuros professores de matemática e o ensino de proporcionalidade através da resolução de problemas de geometria (COSTA; ALLEVATO, 2012)
Unión	Estratégias de generalização de padrões de alunos do 7º ano de escolaridade (PEREIRA; FERNANDES, 2012)
Zetetiké	As Estratégias de Resolução de Problemas das Estruturas Aditivas nas Quatro Primeiras Séries do Ensino Fundamental (MAGINA et al, 2010)

Fonte: Sistematização feita pela autora

Não é objetivo apresentar uma revisão bibliográfica completa, mas sim ter uma ideia daquilo que vem sendo pesquisado na área da Educação Matemática acerca da utilização de estratégias diversificadas na resolução de problemas. Em nossa perspectiva, são poucos os trabalhos que abordam a temática, o que nos motivou ainda mais a explorar o tema.

Oliveira (2009) apresenta um estudo feito acerca da resolução de problemas de proporcionalidade estudantes alunos do Ensino Fundamental do Quebec, com objetivo principal de “identificar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas de proporção direta e inversa”. Para tanto, foi proposto a uma turma de 33 alunos do 2º ano do 3º ciclo (idade entre 13 e 14 anos) um teste composto por 7 problemas, sendo 3 deles de proporção direta, 2 de proporção inversa e 2 problemas não proporcionais, de forma aleatória, antes do ensino formal de tal conteúdo.

Como resultado, a pesquisadora detectou a utilização de diferentes estratégias, principalmente nos problemas de proporção direta mesmo antes do ensino formal do conteúdo, tais como: escalar, linear, funcional, busca do valor unitário, com as quais, a maioria dos alunos conseguiu resolver corretamente as situações propostas. A pesquisadora também detectou dificuldade por parte dos alunos em identificar problemas de proporcionalidade inversa, ocorrendo que vários participantes resolveram esse tipo de situação como se fosse um problema de proporção direta. Levar em consideração os conhecimentos e dificuldades dos alunos pode facilitar, segundo a autora, o planejamento da sequência didática sobre o assunto. A autora ressalta ainda, resultados semelhantes encontrados em pesquisas no Brasil e assinala que tais estratégias possibilitam aos alunos resolverem de forma correta os problemas propostos.

Já Cury e Bisognin (2009) analisam as soluções apresentadas por alunos ingressantes que cursavam disciplinas matemáticas em oito Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, a uma das doze questões propostas em uma pesquisa. As autoras ressaltam que “cada questão evidencia as estratégias de resolução de determinados problemas e permite tecer considerações sobre a aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental e Médio”. O problema analisado envolve a resolução de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas que, segundo as matrizes de referencias de sistemas de avaliação em larga escala investigadas pelas autoras, é uma habilidade que deve ser adquirida pelos estudantes até o final da Educação Básica, sendo o conteúdo constante nos planos de estudo desde a 6ª série do Ensino Fundamental.

Dos 368 participantes da pesquisa, essa questão, que foi a que obteve mais acertos, sendo resolvida corretamente por 138 alunos e as respostas foram classificadas em quatro categorias: A) o estudante percebeu que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas e soube resolver corretamente; B) apesar de representar corretamente o sistema, errou alguns detalhes e não expressou corretamente a resposta; C) os alunos expressaram o sistema corretamente, mas não souberam resolver; D) o aluno não soube modelar a situação. Para as autoras, as dificuldades apresentadas pelos estudantes nesse tipo de questão influenciam, por exemplo, na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear, que são conteúdos com os quais eles terão contato durante o Ensino Superior. Por fim, sugerem que, ao se analisar soluções de estudantes a questões de testes, mais do que apontar erros, é importante discuti-las à luz de teorias sobre ensino e aprendizagem.

No trabalho de Meneghetti e Redling (2012), é apresentado o recorte de um projeto de pesquisa, que se constituiu em um mini curso de Matemática, realizado com uma turma de treze alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior de São Paulo, com o objetivo de "avaliar os principais aspectos referentes à estruturação das tarefas elaboradas para o ensino de funções, com o intuito de verificar se as mesmas proporcionariam aos alunos uma aprendizagem mais significativa dos conceitos envolvidos". Aos alunos foram propostas três atividades, sendo a primeira a coleta de dados, composta de questões para identificação dos participantes e levantamento de ideias. Em seguida, partiram para a aplicação de duas tarefas reelaboradas do ENEM e de uma prova de vestibular, ambas contemplando o conteúdo funções que foram apresentadas de forma a terem uma abordagem investigativa e/ou de resolução de problemas. Após a resolução feita em grupos pelos estudantes, a professora aplicadora promoveu a discussão das mesmas e formalização dos conceitos envolvidos com a participação dos alunos, visando a um equilíbrio entre o que chamam de aspectos intuitivo e lógico do conhecimento.

Quanto à fase de avaliação da proposta, as autoras (MENEGHETTI E REDLING, 2012) destacam que a mesma contribuiu para despertar o interesse dos alunos, que estabeleceram comparações entre as atividades. Também conseguiram analisar e discutir as tarefas, apresentando pontos de vista e buscando diferentes estratégias de solução, já que a maioria não lembrava, ou muito pouco, sobre funções, o que, para as autoras, revela o potencial das tarefas no desenvolvimento da criatividade dos envolvidos. Por fim, concluem que este tipo de abordagem “influenciou positivamente no processo de ensino e aprendizagem dos alunos”, atribuindo o mérito também ao fato de as atividades serem contextualizadas e levarem em consideração os conhecimentos prévios.

Magina et al. (2010) desenvolveram um estudo que teve como objetivo “realizar um diagnóstico sobre as estratégias utilizadas por alunos das séries iniciais ao resolverem problemas envolvendo as operações de adição e subtração”. Os dados analisados foram as resoluções apresentadas por 1021 alunos de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental de 26 escola públicas de seis municípios do sul da Bahia a 12 problemas de adição e subtração em “situações familiares” e envolvendo números pequenos. A aplicação foi feita pelos próprios professores das turmas que, ao final, preencheram um formulário, relatando como ocorreu o processo.

As estratégias utilizadas pelos alunos foram classificadas em: operação correta, operação contrária, escolha de números do enunciado, erro na operação correta, erro na operação contrária, rabiscos, outros e em branco. “A análise revelou uma relação inversa entre o percentual de acerto e a complexidade do problema e ainda que, quando não há congruência semântica entre as palavras-chaves e a operação, a tendência é que os alunos escolham a operação errada” (MAGINA et al., 2010). Esse último dado, segundo as autoras, indica que os alunos tentam identificar a operação envolvida no problema pelas palavras-chave e não a partir da compreensão do problema, fato este que já havia sido revelado por pesquisas anteriores. As autoras também ressaltam que poucos recorreram a registros icônicos e uma quantidade significativa não registrou a estratégia utilizada, o que pode significar que eles não são incentivados a utilizar outras formas de resolução além do cálculo ou mesmo que tenham calculado mentalmente. Também ficou evidente algo preocupante no que diz respeito à aprendizagem, que é o pequeno ou insignificante crescimento do percentual de acertos dos problemas mais complexos ao longo das séries.

O estudo de Pereira e Fernandes (2012), seguindo o paradigma do estudo de caso, buscou descrever e explicar as estratégias de generalização usadas por alunos do 7º ano na exploração de tarefas de padrões. Participaram da intervenção que se estendeu por 11 aulas, 21 alunos, divididos em sete grupos, sendo dois deles, acompanhados mais de perto (grupos-alvo) para aprofundar o estudo. As aulas foram organizadas em dois momentos: o trabalho autônomo dos grupos e a apresentação e discussão na turma. As aulas foram conduzidas pela professora titular e o investigador, que, na condição de observador participante, interagia com os grupos, incentivando-as e questionando-as. No trabalho, os autores fazem referência a outros estudos que trataram do mesmo tema, referenciam estratégias de resolução detectadas por outros autores e apresentam a análise de três questões.

As resoluções apresentadas pelos participantes desta pesquisa foram categorizadas em: Contagem, Diferença (subdividida em recursiva, múltiplo da diferença sem ajuste e múltiplo da diferença com ajuste), Objeto inteiro (sem ajuste, com ajuste numérico e com ajuste contextual), Tentativa e erro e Explícita. Os autores verificaram no trabalho que, geralmente, os alunos conseguiam encontrar a lei de formação das sequências, porém, tiveram mais dificuldade em traduzi-las algebricamente, o que pode sugerir, segundo eles, que os obstáculos residem na transição do concreto para o abstrato. Cabe ressaltar também que a estratégia mais utilizada nas tarefas propostas foi a Explícita, seguida das de Diferença e Contagem.

Costa e Allevato (2012) apresentam um estudo cujo objetivo é “descrever e analisar como (futuros) professores de Matemática aplicam o conceito de proporcionalidade para calcular termos desconhecidos de um problema de Geometria que envolve o Teorema de Tales”. O estudo é parte de uma pesquisa maior, ainda em desenvolvimento à época da publicação do artigo, e contou com a participação de estudantes de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Maranhão, fato que justifica a utilização do termo “futuros”, já que alguns ainda não atuavam em sala de aula. Tais estudantes reuniam-se semanalmente com o pesquisador e no artigo é apresentada uma discussão referente aos dados coletados em um dos momentos de reflexão acerca da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da resolução de problemas, que é o tema da pesquisa maior. Os autores apresentam o problema que foi explorado pelos (futuros) professores, com base nas etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2009), e analisam algumas das resoluções, destacando que nenhum dos participantes mencionou o Teorema de Tales, apesar de terem percebido a proporcionalidade existente no problema.

Vários participantes resolveram corretamente o problema, afirmando ser o mesmo de fácil interpretação e relatando a utilização do conceito de proporcionalidade e a regra de três para chegar ao resultado. Os pesquisadores ressaltam, entretanto, que a maioria desses alunos não registrou o conceito de proporcionalidade, indo direto para a resolução por regra de três. Ao final da atividade, segundo os autores, foram abordadas a construção do conceito de proporcionalidade, a relação entre esta e o Teorema de Tales, a existência ou não de proporcionalidade entre grandezas e as seguintes estratégias de resolução: regra de três, divisões sucessivas e montagem de tabelas. O estudo revelou poucos conhecimentos por parte dos (futuros) professores em relação aos conteúdos e ao período do ano escolar e à forma de ensiná-lo. Ficou também evidente o potencial da resolução de problemas como metodologia de ensino, fazendo, inclusive, com que os participantes mudassem sua postura de resistência para com essa forma de abordagem matemática.

Os resultados dessas pesquisas nos motivaram ainda mais no desenvolvimento de nossa proposta, já que alguns desses estudos detectaram indícios de que os alunos conseguem desenvolver formas de resolver problemas mesmo antes da apresentação formal de conteúdos, o que nos leva a vislumbrar o potencial da exploração de estratégias que possam ser utilizadas em problemas relacionados a diferentes conteúdos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Considerando os objetivos desta pesquisa, o trabalho desenvolvido se constituiu em uma investigação de abordagem predominantemente qualitativa, pois acreditamos na necessidade e importância de estudar a realidade sob o olhar do sujeito pesquisado, além de termos a visão do pesquisador. Por isso, corroboramos com Martinelli (1999, p. 21), a ideia de que:

> Na verdade, essa pesquisa tem por objetivo trazer à tona o que os participantes pensam a respeito do que está sendo pesquisado, não é só a minha visão de pesquisador em relação ao problema, mas é também o que o sujeito tem a me dizer a respeito. Parte-se de uma perspectiva muito valiosa, porque à medida que se quer localizar a percepção dos sujeitos, torna-se indispensável – e este é um outro elemento muito importante – o contato direto com o sujeito da pesquisa.

Além disso, identificamo-nos com Neves (1996, texto digital), quando este define que, em pesquisas qualitativas é comum “que o pesquisador procure entender os fenômenos, segundo a perspectiva dos participantes da situação estudada e, a partir, daí situe sua interpretação dos fenômenos estudados”.

A presente pesquisa se constituiu, segundo os procedimentos técnicos adotados para seu desenvolvimento, em um estudo de caso, que permite aos pesquisadores, de acordo com Yin (2010, p. 24), reterem “as características holísticas e significativas dos eventos da vida real”, e foi conduzida mediante a obtenção de dados a partir de diferentes fontes de evidência. O autor faz ainda algumas considerações quanto à escolha da metodologia na qual a pesquisa será estruturada, ressaltando que questões de pesquisa do tipo “como” e “por que”, favorecem o uso de estudos de caso.

Além disso, destaca o emprego desta metodologia “no exame dos eventos contemporâneos, mas quando os comportamentos relevantes não podem ser manipulados” (YIN, 2010, p. 32). O autor apresenta algumas fontes de evidência que podem se constituir em importantes instrumentos de coleta de dados, como, por exemplo, as entrevistas, às quais se refere como “fontes essenciais de evidência do estudo de caso” (2010, p 135).

O contexto de investigação e desenvolvimento da proposta foram algumas das escolas estaduais parceiras do Programa Observatório da Educação desenvolvido na Univates e a escola municipal em que a autora trabalha:

- Escola 1, localizada no município de Sério, contava com um total de 278 alunos matriculados;
- Escola 2, localizada no município de Cruzeiro do Sul, contava com um total de 256 alunos matriculados;
- Escola 3, localizada no município de Encantado, contava com um total de 925 alunos matriculados;
- Escola 4, localizada no município de Arroio do Meio, contava com um total de 790 alunos matriculados;
- Escola 5, localizada no município de Santa Clara do Sul, contava com um total de 650 alunos matriculados;
- Escola 6, localizada no município de Monte Belo do Sul, contava com um total de 102 alunos matriculados. Esta é a escola em que a mestranda responsável atua e onde foram realizados os encontros que compuseram a intervenção pedagógica.

Ao convidar estes educandários para integrarem o projeto, o grupo do Observatório da Educação se preocupou em abranger diferentes realidades, ou seja, estarem essas escolas localizadas em zonas urbanas e rurais e inseridas em municípios com número variado de habitantes, o que também está relacionado à quantidade de alunos atendidos. A Região do Vale do Taquari, situada na Região central do Rio Grande do Sul, é formada por 36 municípios e, conforme o Censo Demográfico de 2010, realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), possui cerca de 3,07% da população gaúcha (mais de 329.000 habitantes) (BDR, 2011). No que tange à área da Educação, o índice de alfabetização no Vale, em 2010, era de quase 96%, segundo informações da Fundação de Economia e Estatística Siegfried Emanuel Heuser (FEE, 2010)[4]. Já a escola onde foi realizada a intervenção pedagógica está localizada na Serra Gaúcha, composta por 31 municípios, com uma população total de mais de 869.000 habitantes e com taxa de alfabetização superior a 97%, segundo dados da FEE (2010)[5].

Para o início do desenvolvimento da proposta, reunimos os pesquisadores que integram o grupo do Observatório da Educação para uma conversa gravada, onde foram coletadas informações a respeito da quantidade de turmas de cada série das escolas parceiras, conteúdos desenvolvidos em cada uma delas, disponibilidade de carga horária para a realização da intervenção, além de definir se a coleta de dados inicial junto aos alunos seria procedida pelos próprios professores ou pela mestranda responsável pela ação. Para esta conversa, que foi transcrita posteriormente, foram convidados, além das professoras da Educação Básica, os bolsistas de graduação e as demais mestrandas, já que a maioria atuava em escolas como docentes de Matemática e, portanto, puderam oferecer significativas contribuições para aperfeiçoar e direcionar a proposta.

A partir disto, definimos, dentre as séries participantes da Prova Brasil e SAEB, que a intervenção pedagógica seria realizada com a 8ª série da escola em que a autora atua. A escolha se deu, principalmente pelo fato de que a estrutura da prova, segundo a Matriz de Referência, contempla conteúdos diferentes daqueles que compõem o plano de estudos das escolas, segundo o relato das professoras

[4] Disponível em: http://www.fee.tche.br/sitefee/pt/content/resumo/pg_coredes_detalhe.php?corede=Vale+do+Taquari. Acesso em: 31 jan. 2013.

[5] Disponível em: http://www.fee.tche.br/sitefee/pt/content/resumo/pg_coredes_detalhe.php?corede=Serra. Acesso em 31 jan. 2013

que as representam. Dessa forma, a realização da intervenção em uma dessas turmas prejudicaria o cumprimento do plano de estudos da mesma. Com a turma escolhida, a intervenção pedagógica foi realizada em horários extraclasse, já que os alunos se encontravam na escola uma vez por semana, à tarde, para participar de uma oficina de música, permanecendo dois períodos em outras atividades sugeridas pela direção e professores, fato esse que motivou a inclusão da 7ª série na pesquisa.

Definida a turma, selecionamos oito problemas da Prova Brasil, levando em consideração os temas prioritários à série, segundo a Matriz de Referência (BRASIL, 2008a) do sistema avaliativo. Os mesmos foram resolvidos pelos alunos de 8ª série das escolas envolvidas, enfocando que, durante a resolução, descrevessem detalhadamente os procedimentos, ideias, raciocínios utilizados para que os mesmos fossem analisados, visando verificar as estratégias por eles mais utilizadas. Também foram orientados a tentar descrever, quando não conseguissem resolver algum problema, o motivo pelo qual não o fizeram.

As respostas dos alunos foram analisadas pela autora desta proposta, que contou com a ajuda de dois bolsistas de graduação e duas professoras de Matemática da Educação Básica, sob orientação geral da professora orientadora, todos participantes do Programa Observatório da Educação. Consideramos importante que todos os integrantes participassem desta etapa para garantir que o tema fosse analisado com a articulação de diferentes olhares, em níveis distintos de formação.

A classificação das resoluções apresentadas pelos estudantes, que será detalhada no próximo capítulo, foi feita a partir das seguintes categorias:

- Desenho;
- Cálculo;
- Tabelas ou gráficos;
- Tentativa e erro;
- Organizar padrões;

- Trabalhar em sentido inverso;
- Reduzir à unidade.

Tal categorização foi anteriormente utilizada por Dullius et al (2011) em uma pesquisa desenvolvida a partir das resoluções apresentadas por estudantes de Ensino Médio na Olimpíada de Matemática da Univates. Evidenciou-se a grande utilização do cálculo formal pelos alunos participantes, inclusive em questões em que a diversificação na forma de resolução, favorecia a determinação da resposta final. Moraes (1999, texto digital) define a categorização como "um procedimento de agrupar dados considerando a parte comum existente entre eles. Classifica-se por semelhança ou analogia, segundo critérios previamente estabelecidos ou definidos no processo".

As questões resolvidas pelos estudantes das escolas envolvidas na intervenção pedagógica foram arquivadas a fim de compor o banco de dados do estudo de caso e também para que pudessem, sempre que necessário, serem retomadas, por exemplo, para disseminar entre os participantes, estratégias utilizadas por outros alunos. Yin (2010), destaca que registros em arquivos podem ser utilizados em diferentes etapas do estudo de caso e constituir-se em relevantes fontes de informação, em conjunto com outras evidências.

Após a coleta inicial de dados, iniciamos a intervenção pedagógica que envolveu as turmas de 7ª e 8ª séries da Escola Municipal de Ensino Fundamental Roman Ross, localizada no município de Monte Belo do Sul, onde a mestranda responsável atua. A escola está localizada na zona rural do município e é frequentada por alunos de várias comunidades do interior e também da sede, sendo o único educandário municipal a atender alunos das séries finais do Ensino Fundamental. As duas turmas eram compostas por 13 alunos, dos quais dois não participaram dos encontros, realizados em turno oposto ao de aula, ou seja, à tarde, pois trabalham nesse período. Dos 11, dois foram considerados desistentes por não terem participado dos últimos encontros. Alguns dos alunos que persistiram até o final também auxiliavam suas famílias nas propriedades rurais, porém dedicaram parte das tardes de quintas-feiras a participação na pesquisa.

A intervenção pedagógica consistiu em uma prática docente baseada na utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas por parte dos estudantes da Educação Básica. No decorrer destas aulas, onde foram propostos problemas da Prova Brasil e SAEB, olimpíadas matemáticas, livros didáticos, sites, etc., utilizamos os passos para a resolução de problemas propostos por Polya (1995), insistindo na importância da leitura atenta e na identificação da incógnita para que ocorra uma correta interpretação das situações propostas. Nessa parte do processo, muitas vezes, foram realizadas discussões acerca dos dados apresentados pelos problemas e questionamentos aos alunos com o intuito de auxiliá-los na interpretação.

Porém, o foco da pesquisa estava no passo que correspondia ao estabelecimento de um plano, onde estimulamos a utilização de diversificadas estratégias, socializando aquelas que, porventura tenham sido utilizadas por alunos de outras turmas/escolas, ou mesmo as que surgirem na própria turma e, ainda, entre os bolsistas que auxiliaram no desenvolvimento da proposta. Na etapa de execução do plano, a ideia era que os estudantes ainda pudessem aperfeiçoar a estratégia traçada, acrescentassem detalhes e verificassem atentamente cada passo dado. Quanto ao retrospecto, ocorreu de forma a socializar e discutir as estratégias utilizadas para cada problema apresentado, levando os participantes a detectarem qual das formas se demonstrava mais eficaz.

No decorrer desse período, foram registrados os aspectos relevantes ou inusitados observados, além de feitas cópias do material produzido pelos alunos durante as aulas, para possibilitar a análise detalhada do processo de cada um. Yin (2010) destaca as anotações do pesquisador como o componente mais comum do banco de dados do pesquisador e pode constituir-se em um importante recurso no momento em que forem realizadas as análises dos dados coletados. Todos os encontros foram gravados em áudio e vídeo como forma de complementar o banco de dados da pesquisa e constituir mais uma fonte para possíveis análises.

Ao final do período de experiência e contato dos alunos com a utilização das estratégias diversificadas, os mesmos resolveram novamente uma seleção de problemas. As respostas foram analisadas e categorizadas, verificando se os participantes da investigação passaram a utilizar as estratégias apresentadas ou discutidas durante as aulas e, mais do que isso, detectar se fizeram isso de forma eficaz, melhorando sua forma de resolver problemas.

Além disso, foram convidados a participar de uma entrevista semiestruturada, onde puderam expor suas percepções acerca do trabalho desenvolvido e possíveis mudanças na forma de resolver problemas. Quanto à relevância das entrevistas em estudos de caso, Yin (2010, p. 133) destaca que se constituem em uma das "fontes mais importantes de informação", fazendo-se necessário que o pesquisador tome o cuidado de operar em dois níveis simultaneamente, satisfazendo as necessidades da própria linha de investigação, sem contudo, apresentar questões "ameaçadoras" ao informante. Dessa forma, segundo o autor, os entrevistados podem se tornar peças fundamentais para o êxito do estudo de caso, fornecendo importantes contribuições.

Com estes instrumentos, objetivamos coletar subsídios que nos fornecessem indícios de eficácia da proposta. É importante frisar que não pretendemos com esta pesquisa, generalizar o resultado obtido com este grupo de estudantes. Yin (2010) destaca que tampouco os resultados obtidos através de experimentos podem ser generalizados baseando-se em um único experimento.

Após esta etapa de coleta inicial de dados, realização da intervenção pedagógica e nova coleta de dados, partimos para a análise das evidências que, segundo Yin (2010, p. 155) é um dos aspectos "mais difíceis dos estudos de caso" e são poucas as ferramentas existentes para guiar o desenvolvimento desta etapa. "Ao contrário, muito depende do próprio estilo de raciocínio empírico rigoroso do investigador, juntamente com a apresentação suficiente de evidência e a consideração cuidadosa das interpretações alternativas" (YIN, 2010, p. 155). Moraes (1999) lembra que uma boa análise deve ir além da mera descrição, procurando atingir uma compreensão mais aprofundada do conteúdo.

Em consonância com estas ideias, Martins (2006) destaca a necessidade de deixar claro, na análise dos dados de um estudo de caso, que as evidências relevantes foram de fato abordadas e sustentaram as proposições que nortearam a investigação. O autor caracteriza a análise de dados pelo exame, classificação e categorização de dados, opiniões e informações coletadas, com construção de uma teoria que ajude a explicar o fenômeno a partir das proposições, base teórica e resultados encontrados.

Para Moraes (1999), não é possível realizar uma análise de conteúdo que seja neutra, ou seja, esta leitura constitui-se em uma interpretação pessoal do pesquisador, com relação aos dados que tem à sua disposição. Yin (2010, p. 190) alerta que as interpretações do pesquisador devem levar em conta todas as evidências coletadas e abordar o “aspecto mais significativo” do estudo.

Especificamente na análise das produções dos estudantes, buscamos a comparação de padrões baseados empiricamente com um padrão previsto (YIN, 2010), verificando a possível mudança de postura por parte dos alunos, analisando se passaram a utilizar mais frequentemente e obtiveram resultados satisfatórios em relação à resolução dos problemas propostos, as diferentes estratégias trabalhadas, principalmente nos casos em que essa utilização favorece e facilita o processo. Se isso for identificado, teremos, portanto, evidências da eficácia da intervenção desenvolvida.

4 COLETA DE DADOS INICIAL

Conforme referido anteriormente, a primeira etapa da investigação que compõe a presente dissertação foi realizada com os alunos da 8ª série de cinco escolas estaduais do Vale do Taquari, parceiras do Observatório da Educação e da escola onde a mestranda atua, localizada na Serra Gaúcha. Nesta etapa, 158 alunos foram convidados a resolver, apresentando o desenvolvimento, uma seleção de oito problemas, oriundos de bancos de dados da Prova Brasil e SAEB. Cabe esclarecer que compartilhamos com Lester (1983, apud ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 15) a definição de problema como sendo “uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”. As resoluções foram classificadas segundo as categorias anteriormente mencionadas e os resultados desta análise são apresentados neste capítulo.

Apesar de ser um estudo predominantemente qualitativo, optamos por apresentar um breve resumo quantitativo na Tabela 2, evidenciando a frequência de utilização de cada estratégia nos problemas propostos, distinguindo as resoluções corretas daquelas que não obtiveram êxito. Cabe salientar que a categorização das resoluções apresentadas pelos estudantes, tanto na coleta de dados inicial, quanto nas demais etapas da pesquisa, baseou-se em nossa experiência como professores-pesquisadores e na interpretação feita a partir do referencial teórico estudado, sendo passíveis outras formas de classificação por outro profissional.

Ressaltamos ainda que algumas resoluções foram enquadradas em mais de uma categoria, por evidenciar mescla de estratégias.

Tabela 2 – Categorização das resoluções apresentadas pelos alunos na coleta de dados inicial

Estratégia Utilizada	Correção	Problema							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Cálculo	Correta	13	135	09	67	-	14	45	-
	Errada	09	14	93	65	01	10	12	-
Desenho	Correta	08	-	09	05	46	74	17	24
	Errada	03	-	04	04	51	31	04	01
Organizar padrões	Correta	03	-	-	-	-	04	02	-
	Errada	01	-	-	-	-	01	-	-
Trabalhar em sentido inverso	Correta	01	-	-	-	-	01	-	-
	Errada	-	-	-	-	-	-	-	-
Reduzir a unidade	Correta	-	-	-	-	-	01	-	-
	Errada	-	-	-	-	-	-	-	-
Tentativa e erro	Correta	-	-	-	-	-	-	-	-
	Errada	01	01	-	-	-	-	-	-
Eliminação	Correta	02	-	02	-	01	06	03	40
	Errada	01	-	01	-	-	01	-	02
Só resposta	Correta	13	05	15	05	15	10	48	50
	Errada	92	02	20	11	37	07	27	39
Não respondeu		11	01	05	01	07	04	08	03
TOTAL		158	158	158	158	158	164	166	159

Fonte: Sistematização feita pela autora, a partir das resoluções apresentadas pelos alunos na coleta de dados inicial.

Na sequência apresentamos os problemas resolvidos pelos alunos, bem como uma análise em relação à resolução destacada e alguns exemplos dos mesmos. Para análise das resoluções e exemplificação, o material escrito produzido pelos alunos foi enumerado, utilizando-se A1 para designar o aluno 1, A2 para o aluno 2 e assim sucessivamente.

Problema 1

Analisando a categorização do Problema 1, apresentada na Tabela 2, evidencia-se que quase metade dos estudantes apenas assinalou uma resposta e de forma incorreta, o que pode nos levar a suspeitar que os alunos tenham grandes dificuldades na manipulação de frações. A estratégia que mais se demonstrou eficaz foi Desenho, possivelmente por permitir uma melhor interpretação dessa forma de representação numérica. Na Figura 1, apresentamos o Problema 1 e a resolução com utilização desta estratégia, proposta por A123.

Figura 1 – Problema 1 e resolução de A 123 utilizando a estratégia de Desenho

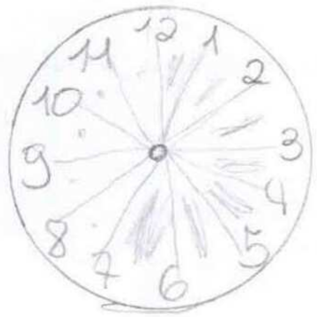
1 – Um dia tem 24 horas, 1 hora tem 60 minutos e 1 minuto tem 60 segundos. Que fração da hora corresponde a 35 minutos?

a) $\frac{7}{4}$

X b) $\frac{7}{12}$

c) $\frac{35}{24}$

d) $\frac{60}{35}$



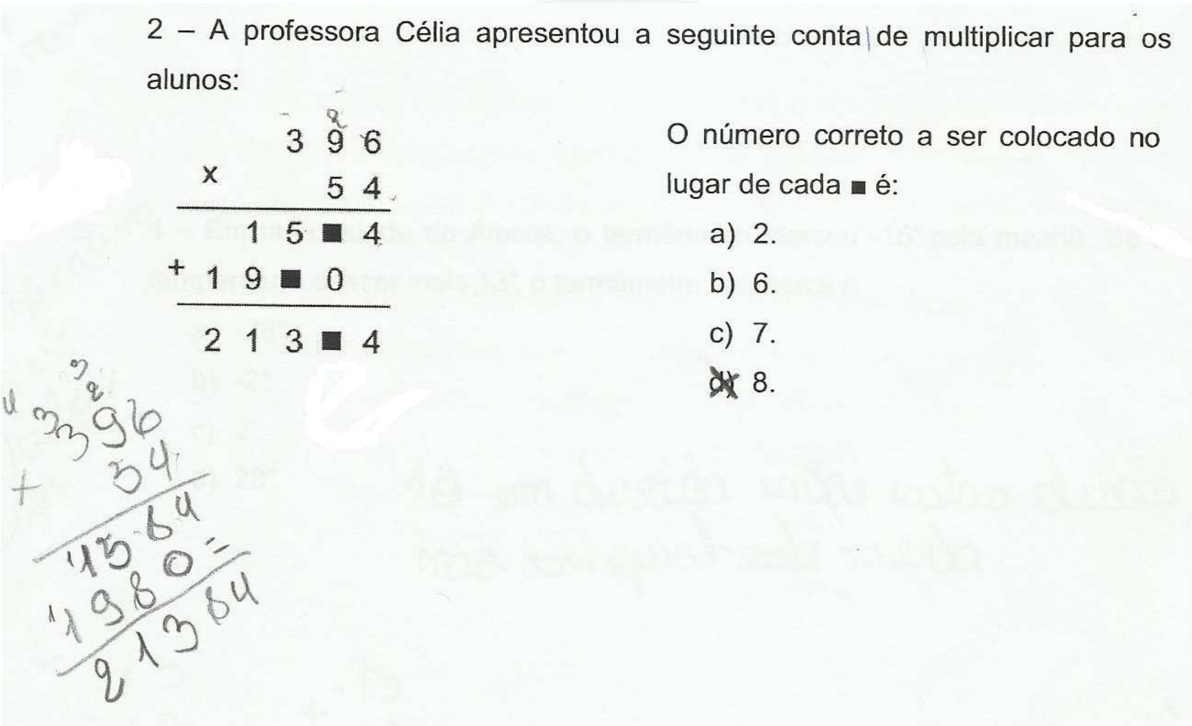
Problema extraído de Brasil (2008a)

A maioria dos alunos que apenas respondeu e errou assinalou a alternativa *d,* utilizando-se provavelmente, dos dados fornecidos no enunciado, sem perceber que a organização fracionária estava incorreta. Inclusive, alguns justificaram que o número 60 representa a hora inteira e o número 35, os minutos solicitados no enunciado. Para os que desenharam, como no exemplo apresentado na Figura 1, parece-nos que ficou mais clara a relação com a forma correta de representar, sem sequer haver necessidade de manipular os números, ou seja, simplificar a fração que poderia ser organizada a partir dos dados do enunciado $\left(^{35}/_{60}\right)$.

Problema 2

Quanto às estratégias utilizadas no Problema 2, apresentado na Figura 2 com a resolução de A145, consideramos pertinente a utilização do Cálculo, já que o algarismo oculto encontra-se no resultado. A maioria dos alunos acertou a questão, resolvendo-a através desta estratégia, conforme evidenciado na Tabela 2.

Figura 2 – Problema 2 e resolução de A145 utilizando a estratégia de Cálculo



2 – A professora Célia apresentou a seguinte conta de multiplicar para os alunos:

```
      3 9 6
x       5 4
-----------
    1 5 ■ 4
+ 1 9 ■ 0
-----------
  2 1 3 ■ 4
```

O número correto a ser colocado no lugar de cada ■ é:

a) 2.
b) 6.
c) 7.
d) 8.

```
  396
x  54
-----
 1584
19800
-----
21384
```

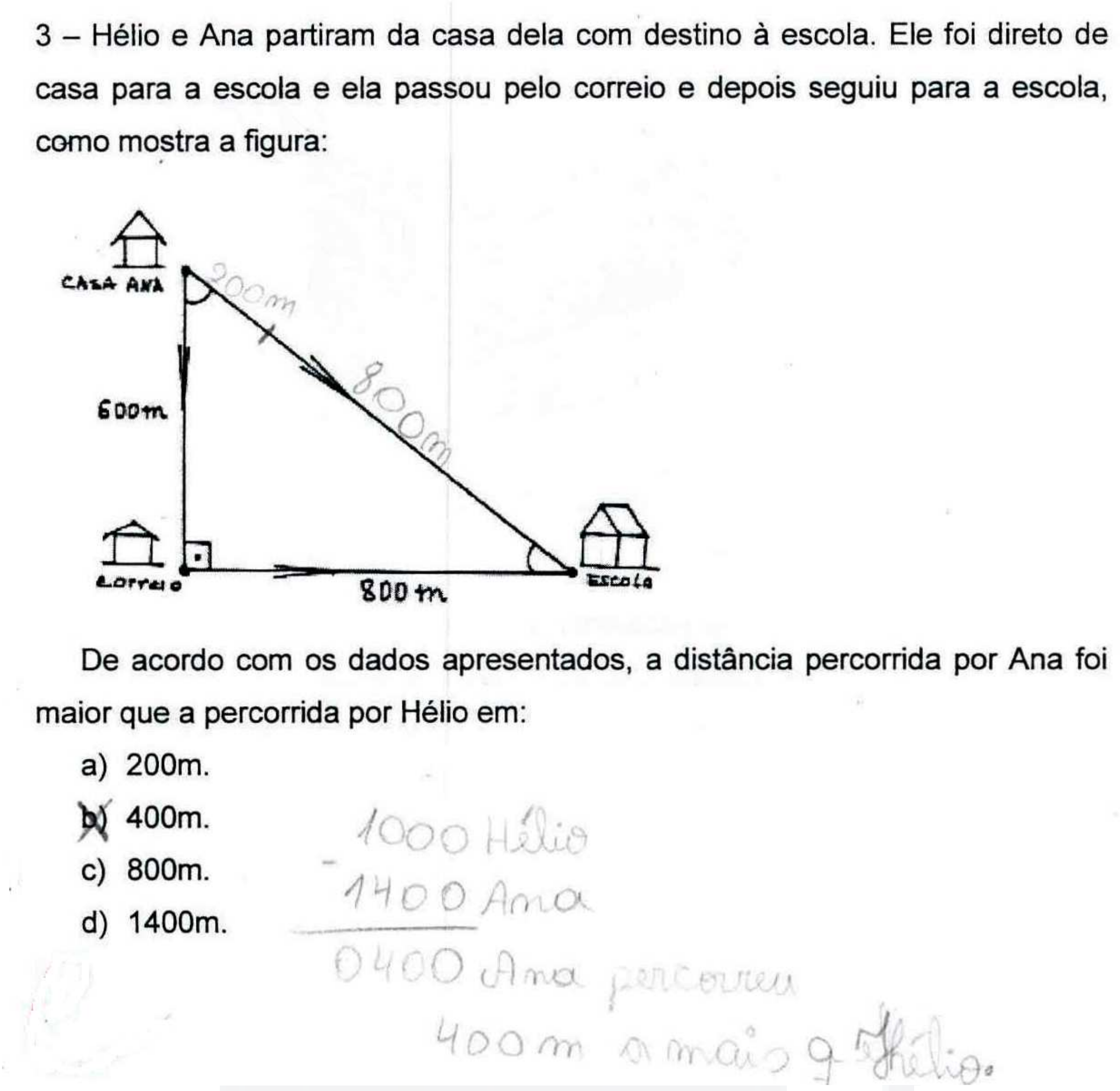
Problema extraído de Brasil (2008a)

Porém, esse tipo de problema pode ser apresentado de forma que o algarismo oculto esteja no multiplicando ou no multiplicador, caso em que é sugerida a utilização da estratégia de Tentativa e erro, onde o resolvedor pode utilizar as possibilidades de resposta e testá-las caso elas existam, ou mesmo escolher algarismos e testá-los.

Problema 3

Na Figura 3, apresentamos o Problema 3 e a resolução de A59 através de Desenho, obtendo êxito.

Figura 3 – Problema 3 e resolução de A59 utilizando a estratégia de Desenho


3 – Hélio e Ana partiram da casa dela com destino à escola. Ele foi direto de casa para a escola e ela passou pelo correio e depois seguiu para a escola, como mostra a figura:

De acordo com os dados apresentados, a distância percorrida por Ana foi maior que a percorrida por Hélio em:

a) 200m.
b) 400m.
c) 800m.
d) 1400m.

1000 Hélio
1400 Ana
0400 Ana percorreu
400 m a mais q. Hélio.

Problema extraído de Brasil (2008a)

Este problema foi o que teve maior índice de erro, principalmente entre os que tentaram resolver através de Cálculo. Para que esta estratégia possa ser utilizada com eficácia, é imprescindível ter conhecimento do conteúdo envolvido, ou seja, o Teorema de Pitágoras, que permite descobrir a medida da hipotenusa do triângulo formado, que representa o trajeto percorrido por Hélio. Um aluno explicou o procedimento que adotaria para resolver o problema, se conseguisse descobrir tal medida. Por ser cego, resolveu a seleção de problemas com auxílio do Programa DOSVOX, que realiza a leitura da parte escrita. Nesse caso, foi necessário explicar-lhe a figura e consideramos que seria mais difícil para ele resolver através de Desenho. Dentre os alunos que conseguiram utilizar-se desta estratégia, como o exemplo apresentado na Figura 3, a maioria acertou a resposta. Para isso, eles utilizaram o Desenho a fim de descobrir a medida faltante, a partir das outras duas, para então calcular a diferença entre os percursos dos dois personagens.

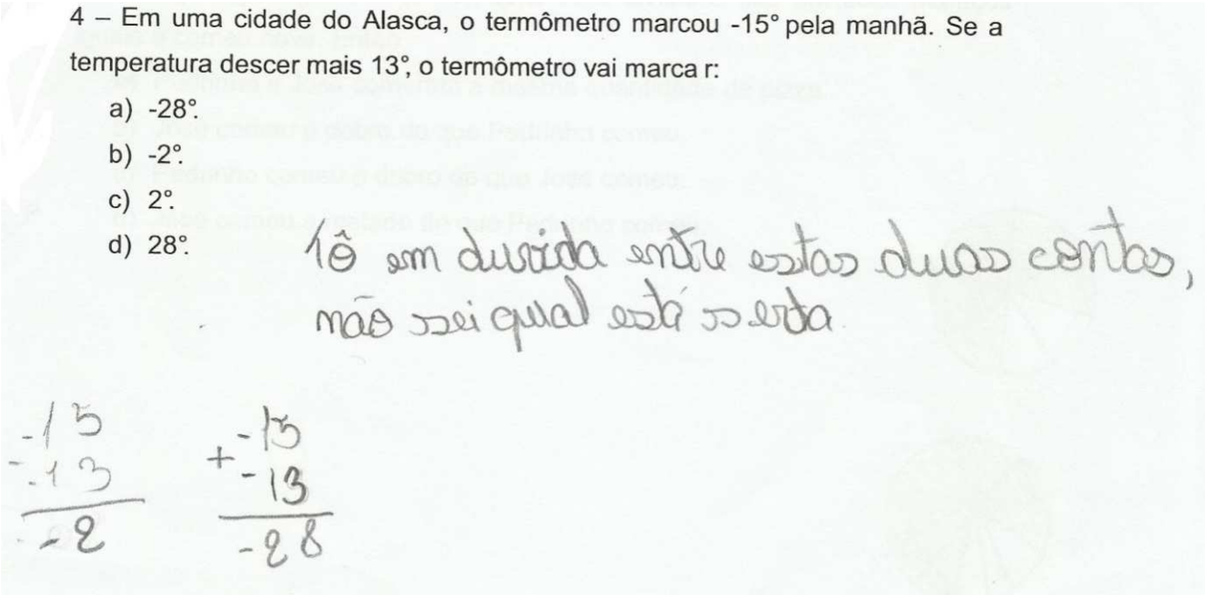
O grande número de alunos que tentaram a resolução através de Cálculo, mesmo sem ter domínio do conteúdo envolvido, motiva-nos ainda mais a refletir sobre o importante papel que podem desempenhar as estratégias diferenciadas na resolução de problemas. É provável que os alunos que se utilizaram do Desenho ainda não tivessem estudado formalmente tal conteúdo na escola, ou se o estudaram, podem ter esquecido, mas se sentiram à vontade para encontrar um caminho que os levasse à solução. Sendo assim, acreditamos que é importante os alunos conhecerem outras formas de resolver, para que tenham mais subsídios e possam escolher a maneira que julgarem mais fácil, até mesmo porque a maioria das estratégias alternativas pode ser empregada em situações muito distintas umas das outras. Não há uma estratégia específica para cada conteúdo envolvido e cada uma pode ser empregada em diversos conteúdos diferentes.

Problema 4

Na Figura 4, apresentamos a resolução do Problema 4 por A145 que se utilizou do Cálculo; porém, por não ter entendido corretamente o significado da expressão “descer mais 13º”, errou a resolução. Esse mesmo erro foi cometido por outros alunos que lançaram mão desta forma de resolver. Este aluno, inclusive, registrou dois cálculos diferentes, mas não conseguiu definir qual dos dois representava a resolução correta.

Podemos inferir que o desenho do termômetro (reta numérica na vertical), como apresentado na Figura 5, poderia tê-lo auxiliado nessa definição, evidenciando que a palavra “descer” deveria conduzir para o lado dos números negativos.

Figura 4 – Problema 4 e resolução de A145 utilizando a estratégia de Cálculo


4 – Em uma cidade do Alasca, o termômetro marcou -15° pela manhã. Se a temperatura descer mais 13°, o termômetro vai marca r:

a) -28°.
b) -2°.
c) 2°.
d) 28°.

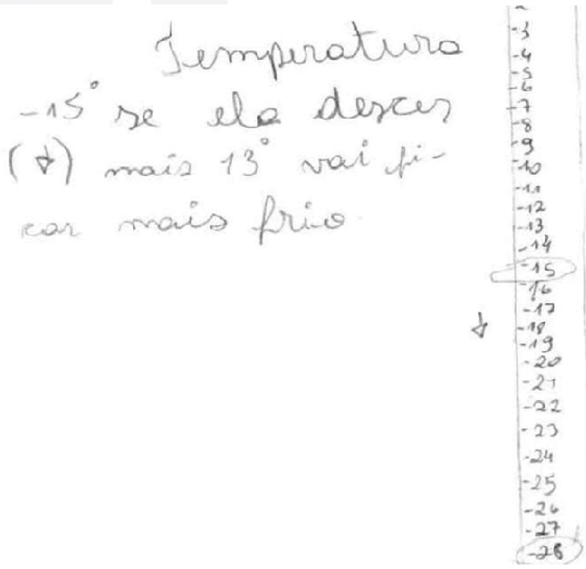
Tô em duvida entre estas duas contas, não sei qual está serta

-15
-13
-2

+ -15
-13
-28

Problema extraído de <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/8_matematica.pdf >

Figura 5 – Resolução de A89 para o Problema 4 utilizando a estratégia de Desenho

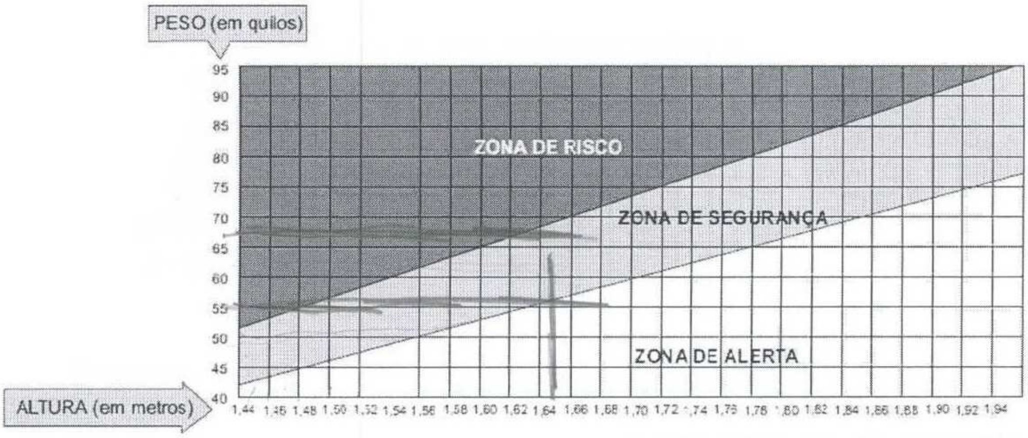


Problema 5

Apresentamos na Figura 6 o Problema 5 que envolve a interpretação de dados apresentados em um gráfico e a resolução de A66 utilizando-se de Desenho.

Figura 6 – Problema 5 e resolução de A66 utilizando a estratégia de Desenho

5 - Observe o gráfico.



Veja / Sua Saúde. Ano 34 – Nº12/2001

Ao marcar no gráfico o ponto de interseção entre as medidas de altura e peso, saberemos localizar a situação de uma pessoa em uma das três zonas. Para aqueles que têm 1,65m e querem permanecer na zona de segurança, o peso deve manter-se, aproximadamente, entre:

a) 48 e 65 quilos.

b) 50 e 65 quilos.

c) 55 e 68 quilos.

d) 60 e 75 quilos.

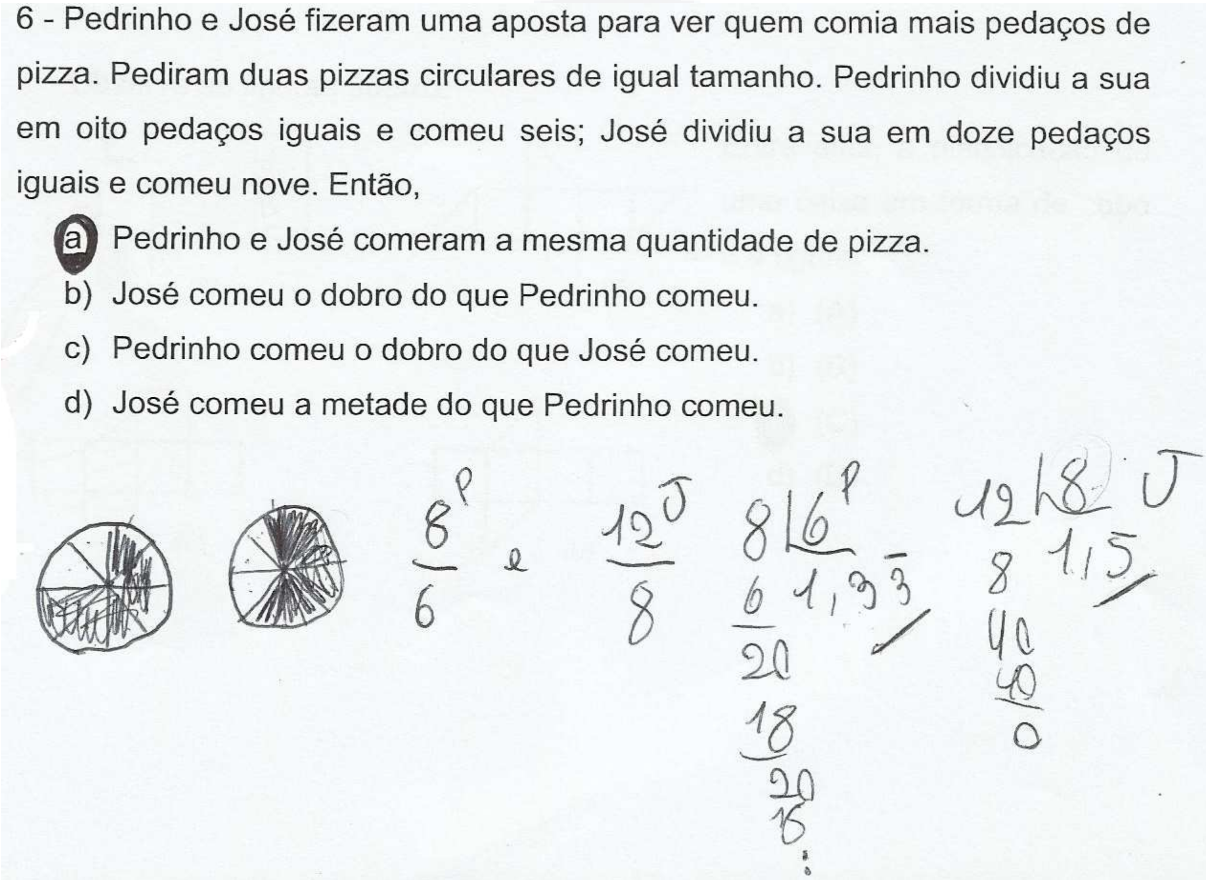
Problema extraído de Simulado da Prova Brasil 2011, 8ª série/9º ano, disponível em <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=16640&Itemid=1109>

Consideramos que a estratégia mais pertinente para resolução desse tipo de problema é o Desenho, onde o aluno pode, utilizando-se de lápis ou caneta, ou apenas mentalmente, detectar o intervalo que corresponde à resposta correta, marcando os pontos no gráfico a partir da altura fornecida, como em um sistema de coordenadas cartesianas, como, por exemplo, na resolução apresentada na Figura 6. Alguns alunos, embora tenham marcado corretamente o ponto com relação à altura, ao invés de seguirem até o eixo do peso com uma linha paralela à da altura, optaram pela linha que delimita o intervalo da zona de segurança, o que fez com que errassem a resposta.

Problema 6

A maior evidência de eficácia de estratégias diferenciadas nesta etapa inicial foi o Problema 6, onde a maioria dos alunos utilizou a estratégia de Desenho que, em comparação às outras, foi a mais eficaz. Um exemplo disso é a resolução apresentada por A90 na Figura 7.

Figura 7 – Problema 6 e resolução de A90 utilizando a estratégia de Desenho



6 - Pedrinho e José fizeram uma aposta para ver quem comia mais pedaços de pizza. Pediram duas pizzas circulares de igual tamanho. Pedrinho dividiu a sua em oito pedaços iguais e comeu seis; José dividiu a sua em doze pedaços iguais e comeu nove. Então,

a) Pedrinho e José comeram a mesma quantidade de pizza.
b) José comeu o dobro do que Pedrinho comeu.
c) Pedrinho comeu o dobro do que José comeu.
d) José comeu a metade do que Pedrinho comeu.

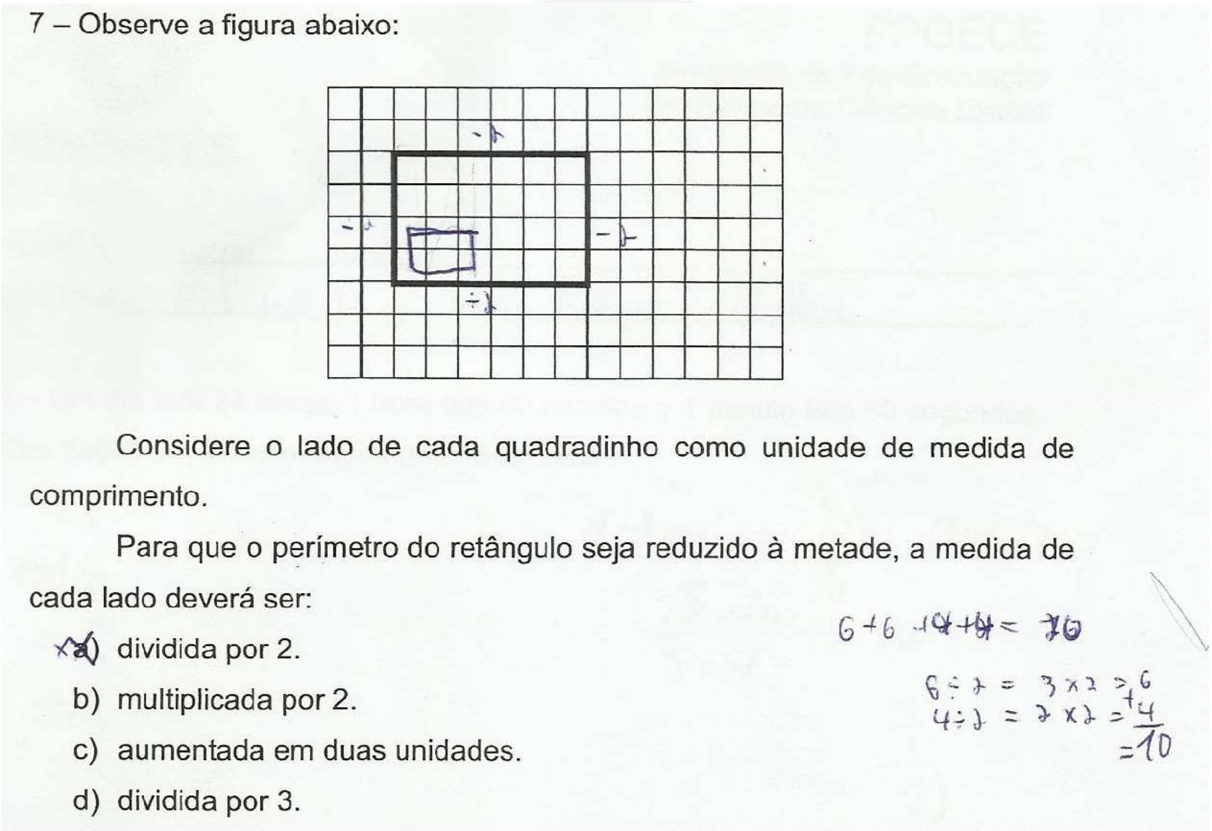
Problema adaptado de Simulado da Prova Brasil 2011, 8ª série/9º ano, disponível em <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=16640&Itemid=1109>

Novamente nos deparamos com a dificuldade na manipulação com frações, já que alguns alunos demonstraram indícios de tentar comparar os dados numéricos, que foram incorretamente representados, abandonando esta estratégia e fazendo uso do Desenho, como exemplificado na Figura 7.

Problema 7

Entre os alunos que apresentaram o desenvolvimento da resolução do Problema 7, a estratégia que predominou foi a do Cálculo, onde alguns demonstraram que reduzindo pela metade as dimensões, ocorre o mesmo com o perímetro, como exemplificado na Figura 8 através da resolução de A142.

Figura 8 – Problema 7 e resolução de A142 utilizando a estratégia de Cálculo


7 – Observe a figura abaixo:

Considere o lado de cada quadradinho como unidade de medida de comprimento.

Para que o perímetro do retângulo seja reduzido à metade, a medida de cada lado deverá ser:

(x) a) dividida por 2.

b) multiplicada por 2.

c) aumentada em duas unidades.

d) dividida por 3.

$6 \div 2 = 3 \times 2 = 6$

$4 \div 2 = 2 \times 2 = 4$

$= 10$

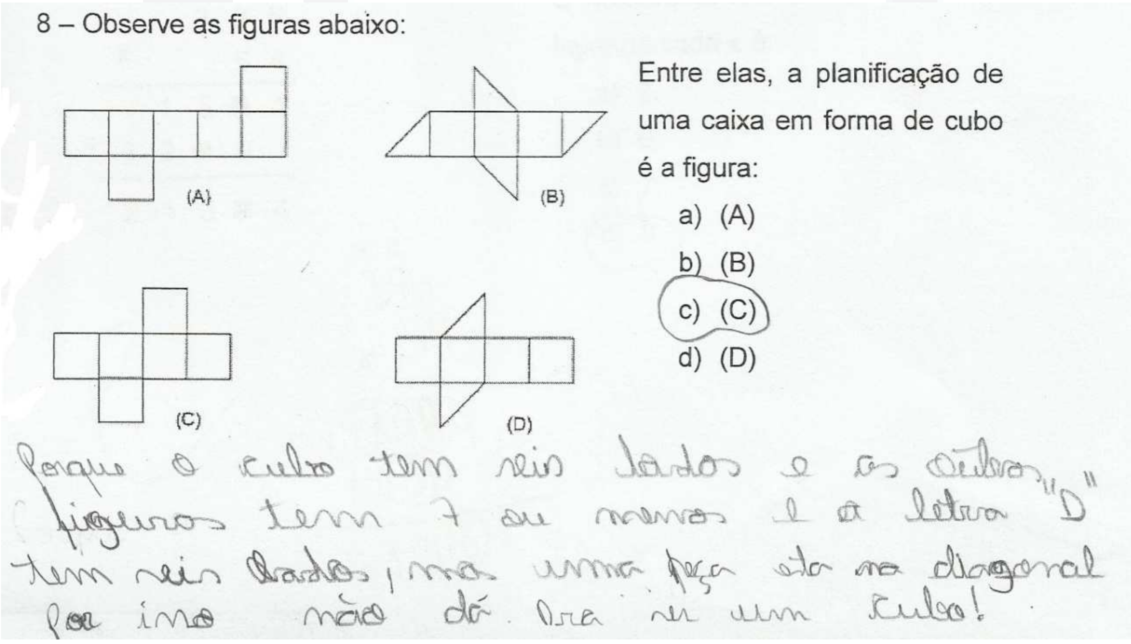
Problema extraído de Simulado da Prova Brasil 2011, 8ª série/9º ano, disponível em <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=16640&Itemid=1109>

Nesse caso, poderia ter sido utilizada a estratégia Desenho, mas a mesma pode acabar confundindo o resolvedor, já que a área ficaria reduzida 4 vezes. Nesse sentido, consideramos importante que o aluno tenha subsídios para escolher em cada problema, a estratégia mais eficaz. Para que isso ocorra, é pertinente que as resoluções por eles apresentadas a cada problema, sejam expostas e discutidas.

Problema 8

Com a análise das respostas apresentadas pelos estudantes nesta etapa inicial de coleta de dados, o grupo percebeu a necessidade de criação de uma oitava categoria, que poderia ser denominada “Eliminação”. Tal estratégia tem potencial para ser utilizada em questões ou problemas de múltipla escolha, onde, após a interpretação da situação, o estudante pode analisar as possíveis respostas e descartar, segundo critérios por ele estabelecidos, algumas alternativas. Nos problemas utilizados, pode-se exemplificar esta estratégia através do Problema 8 apresentado na Figura 9, onde o objetivo é identificar qual das planificações se refere a um cubo.

Figura 9 – Problema 8 e resolução de A11 utilizando a estratégia de Eliminação



Problema extraído de Brasil (2008a)

Alguns alunos justificaram a resposta dada, pelo fato de ser a única com seis faces quadradas, eliminando de antemão as que possuíam mais ou menos faces e, por último, aquela em que duas das seis eram triangulares, estabelecendo, assim, dois critérios, já que o primeiro não foi suficiente para restar apenas uma alternativa. No exemplo apresentado, o aluno cita a expressão “peça na diagonal”, provavelmente referindo-se às faces triangulares.

Ainda a respeito da Tabela 2, chama a atenção nos Problemas 1, 7 e 8, o alto índice de alunos que apenas assinalaram uma resposta, não sendo possível, nesta análise, identificar o motivo. Entretanto, pode revelar indícios de que estes alunos resolveram mentalmente ou, ainda, de que não entenderam tais problemas e "chutaram" uma resposta, o que é possível quando são apresentadas alternativas, causando a falsa impressão de que o aluno conseguiu resolver o problema corretamente, caso acerte a resposta final.

De posse da análise das resoluções apresentadas pelos estudantes nesta etapa inicial de coleta de dados, partimos para o planejamento e prática da intervenção pedagógica, onde os alunos foram estimulados a resolver problemas de diferentes conteúdos, utilizando, quando julgassem conveniente, estratégias alternativas. No capítulo que segue, buscaremos esclarecer a forma como foram conduzidos os encontros e apresentar alguns resultados percebidos em cada um deles.

5 INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Para o desenvolvimento deste Estudo de Caso, nos apoiamos na resolução de problemas matemáticos com utilização de estratégias alternativas ao Cálculo formal para verificar se essa forma de resolução tem potencial de contribuir com a melhoria do processo e, consequentemente, da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática na Educação Básica. Inicialmente, havíamos definido que a intervenção pedagógica seria realizada com os alunos da 8ª série da Escola Municipal de Ensino Fundamental Roman Ross, localizada no município de Monte Belo do Sul. A decisão foi tomada levando em consideração a opinião das professoras representantes das escolas parceiras do Observatório da Educação de que seria inviável realizá-la em uma dessas escolas em horário normal de aula, já que não teríamos registros formais de conteúdos específicos da grade curricular das mesmas, uma vez que optamos por trabalhar com resolução de problemas envolvendo diversos conteúdos.

Conforme referido anteriormente, a prática foi realizada em turno inverso à aula, visto que a maioria dos alunos das Séries Finais do Ensino Fundamental encontra-se na escola às quintas-feiras à tarde para participar de uma oficina de música, com duração de duas horas, lá permanecendo por mais uma hora e meia em outras atividades. Em conversa com a direção da escola, fomos autorizadas a convidar os oito alunos da 8ª série a participar, nesse período, da pesquisa aqui apresentada. Por sugestão da direção, incluímos os cinco alunos da 7º série no grupo que constituiu o público alvo da intervenção.

Nos encontros realizados com os alunos que participaram da intervenção pedagógica, foram explorados problemas de livros didáticos, olimpíadas matemáticas, sites relacionados à disciplina e, ainda, dos bancos de dados da Prova Brasil e SAEB. Os encontros ocorreram nas dependências da escola, semanal ou quinzenalmente, às quintas-feiras, das 15h30min às 17h e foram conduzidos pela mestranda responsável por esta pesquisa. Neles, não foram introduzidos ou explicados conteúdos envolvidos nos problemas, considerando que a intenção foi estimular a busca por estratégias alternativas de resolução. Não é nosso propósito sugerir a eliminação do conteúdo formal na sala de aula, tampouco que os alunos não devam utilizar o Cálculo formal na resolução de problemas, mas acreditamos que eles precisam ter a oportunidade de conhecer outras formas de resolver e optar, em cada caso, pela estratégia que julgarem mais conveniente e fácil.

Com autorização dos pais dos alunos, concedida através do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), todos os encontros foram filmados para compor o banco de dados da pesquisa e estar à disposição, caso fosse necessário consultá-lo na fase de análise dos dados. Inicialmente, onze dos treze participantes que compunham as duas turmas manifestaram interesse em participar da pesquisa, mas, com o passar dos encontros, dois deles desistiram. Dos onze que, inicialmente, fizeram parte do grupo de pesquisa, quatro possuíam, em seu histórico escolar, reprovações em diferentes séries.

Na maioria dos encontros, os alunos estiveram organizados em grupos, ora escolhidos por eles próprios, ora por alguma técnica ou dinâmica proposta pela professora que conduziu as aulas. A formação de pequenos grupos, fixos ou móveis, homogêneos ou heterogêneos permite ao professor, segundo Zabala (2006), deslocar-se e prestar auxílios adequados à necessidade de cada um.

Por questões de organização, os problemas resolvidos por todos os alunos foram enumerados em ordem crescente, do início ao fim dos encontros, a partir do número 1. Aqueles que, eventualmente, fossem resolvidos por apenas um grupo, nos momentos em que cada um resolveu ou analisou um problema diferente, receberam numeração diferenciada, sem relação com a primeira. Para análise das resoluções e exemplificação, o material escrito produzido pelos participantes também foi enumerado, utilizando P1 para designar o participante 1, P2 para o participante 2 e assim, sucessivamente. Esta nomenclatura foi adotada para diferenciar os alunos que participaram da intervenção pedagógica e da coleta de dados inicial.

Apresentaremos a seguir, o detalhamento de cada encontro, descrevendo objetivos, atividades realizadas e focando as estratégias utilizadas pelos alunos ou grupos e a eficácia das mesmas.

<u>ENCONTRO 1</u>

Objetivos

- Discutir sobre a resolução de problemas e coletar informações da percepção dos alunos acerca do tema;
- Conhecer os passos propostos por Polya (1995) para a resolução de problemas;
- Compartilhar estratégias de resolução de problemas.

Desenvolvimento

O encontro iniciou com o "Jogo da velha humano" com o propósito de integrar o grupo de alunos que, apesar de se conhecerem, não fazem parte da mesma turma. Ao final do jogo, discutimos a elaboração de estratégias, destacando que, possivelmente, cada um tenha pensado em uma estratégia diferente de jogo e que muitas delas poderiam funcionar, como na resolução de problemas. As regras do jogo foram as seguintes:

- Os alunos formaram times de três jogadores cada, enumerados de 1 a 3 e o tabuleiro era composto por nove cadeiras dispostas em três colunas de três linhas;
- O jogador 1 do time A se posiciona[ou no tabuleiro; o próximo a posicionar-se foi o jogador 1 da equipe B; em seguida o jogador 2 da equipe A e assim por diante;

- Caso nenhum time conseguisse completar a linha, coluna ou diagonal, os jogadores se movimentavam, iniciando pelo 1 da equipe A, em seguida o 1 da equipe B e assim por diante, até que algum time conseguisse atingir o objetivo;

- Entre os jogadores, não podia haver comunicação.

Em seguida, passamos-lhes informações sobre a pesquisa, sua duração aproximada, a forma de condução dos encontros e objetivos. Também provocamos uma discussão sobre a resolução de problemas, baseada em questionamentos pré-estruturados, tais como:

- O que é um problema?

- Vocês costumam resolver problemas? Gostam?

- Têm dificuldades na resolução de problemas? Quais?

- Quais são as formas de resolver problemas matemáticos?

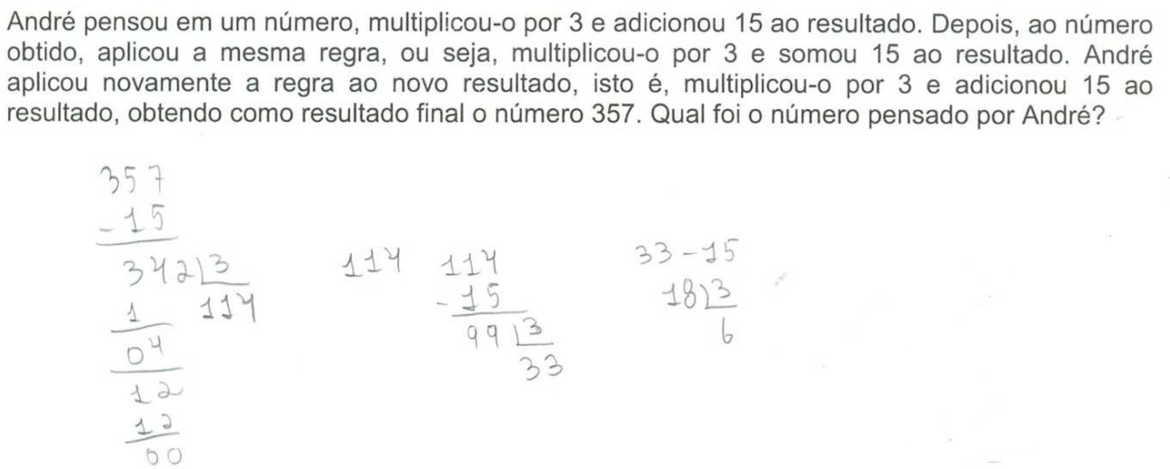
Os alunos destacaram que um problema é algo que não sabemos a resposta e precisamos encontrá-la; também relataram pouco gosto pela resolução e dificuldades de interpretá-los, decidir o que fazer com os dados, ou seja, estabelecer um plano de resolução. Esclarecemos aos participantes que não seriam introduzidos ou explicados conteúdos matemáticos durante o período e que, portanto, não haveria necessidade de utilizarem fórmulas ou cálculos específicos nas resoluções. Na sequência, em grupos, cada aluno recebeu um dos problemas apresentados nas Figuras 10 a 13 e uma resposta.

Nesse encontro, abordamos os passos para resolução de problemas propostos por Polya (1995), discutimos a importância da leitura atenta para entender todas as informações e identificar a pergunta a ser respondida e exploramos o passo seguinte, que era a elaboração de um plano de resolução, onde é possível analisar qual a forma mais apropriada para resolver a situação e planejar cada passo. Os alunos foram estimulados a ler individualmente, já que cada grupo recebeu um problema diferente, discutir o plano de resolução e executá-lo (3º passo).

Ao final das resoluções, cada grupo foi convidado a ler seu problema aos demais, que deveriam manifestar-se caso possuíssem, na ficha de resposta recebida, a correspondente àquele problema. Propositalmente, foram entregues duas que pareciam ser do mesmo problema para que pudéssemos discutir a importância e necessidade de verificação, ou seja, de analisar se a resposta encontrada fazia sentido com os dados fornecidos, se aquela era realmente a resposta final ou apenas um dado necessário de ser aplicado a um próximo procedimento para chegar à resolução. Cada grupo apresentou a estratégia utilizada para resolver seu problema e complementávamos, sugerindo outras estratégias quando fosse possível.

Um dos problemas explorados é apresentado na Figura 10, com a resolução proposta por P4 através da estratégia de Trabalhar em sentido inverso.

Figura 10 – Problema proposto a P4, P8 e P9 e resolução do grupo utilizando a estratégia de Trabalhar em sentido inverso

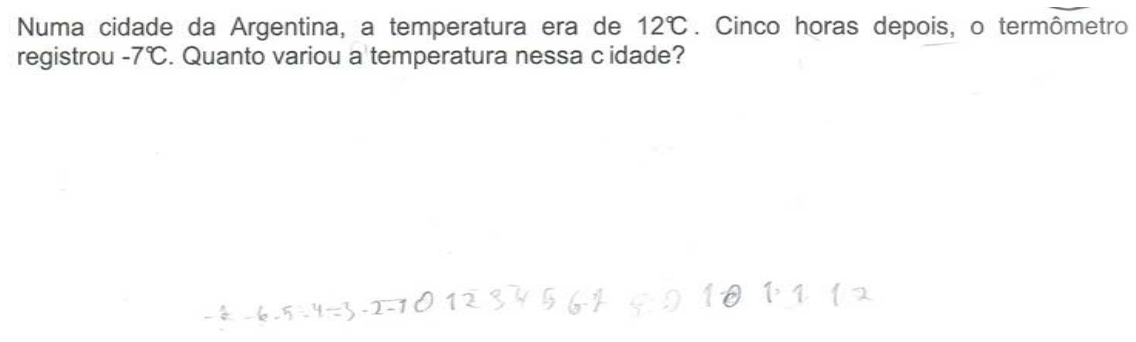

André pensou em um número, multiplicou-o por 3 e adicionou 15 ao resultado. Depois, ao número obtido, aplicou a mesma regra, ou seja, multiplicou-o por 3 e somou 15 ao resultado. André aplicou novamente a regra ao novo resultado, isto é, multiplicou-o por 3 e adicionou 15 ao resultado, obtendo como resultado final o número 357. Qual foi o número pensado por André?

Problema extraído de Haetinger et al (2008)

Um dos componentes deste grupo, ao ler o problema, logo declarou aos colegas que a resolução era “muito fácil”, explicando-lhe como havia pensado em resolvê-lo, ao que foi logo entendido e puseram em prática o plano.

Os alunos que receberam o segundo problema, logo escreveram os números envolvidos, como que em uma reta numérica, porém, não destacaram a resposta, como mostrado na Figura 11.

Figura 11 – Problema proposto a P3 e P11 e resolução do grupo

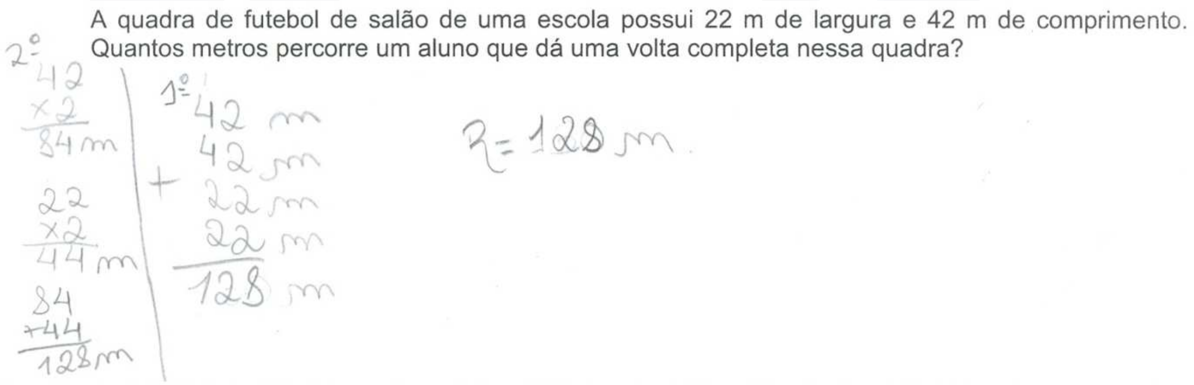

Numa cidade da Argentina, a temperatura era de 12℃. Cinco horas depois, o termômetro registrou -7℃. Quanto variou a temperatura nessa c idade?

-8 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Problema extraído de Brasil (2008a)

O terceiro problema é apresentado na Figura 12, com a resolução proposta por P2 e P5, através de Cálculo, de forma correta.

Figura 12 – Problema proposto a P2 e P5 e resolução do grupo utilizando a estratégia de Cálculo


A quadra de futebol de salão de uma escola possui 22 m de largura e 42 m de comprimento. Quantos metros percorre um aluno que dá uma volta completa nessa quadra?

2º 42 x2 = 84 m; 22 x2 = 44 m; 84 + 44 = 128 m

1º 42 m + 42 m + 22 m + 22 m = 128 m

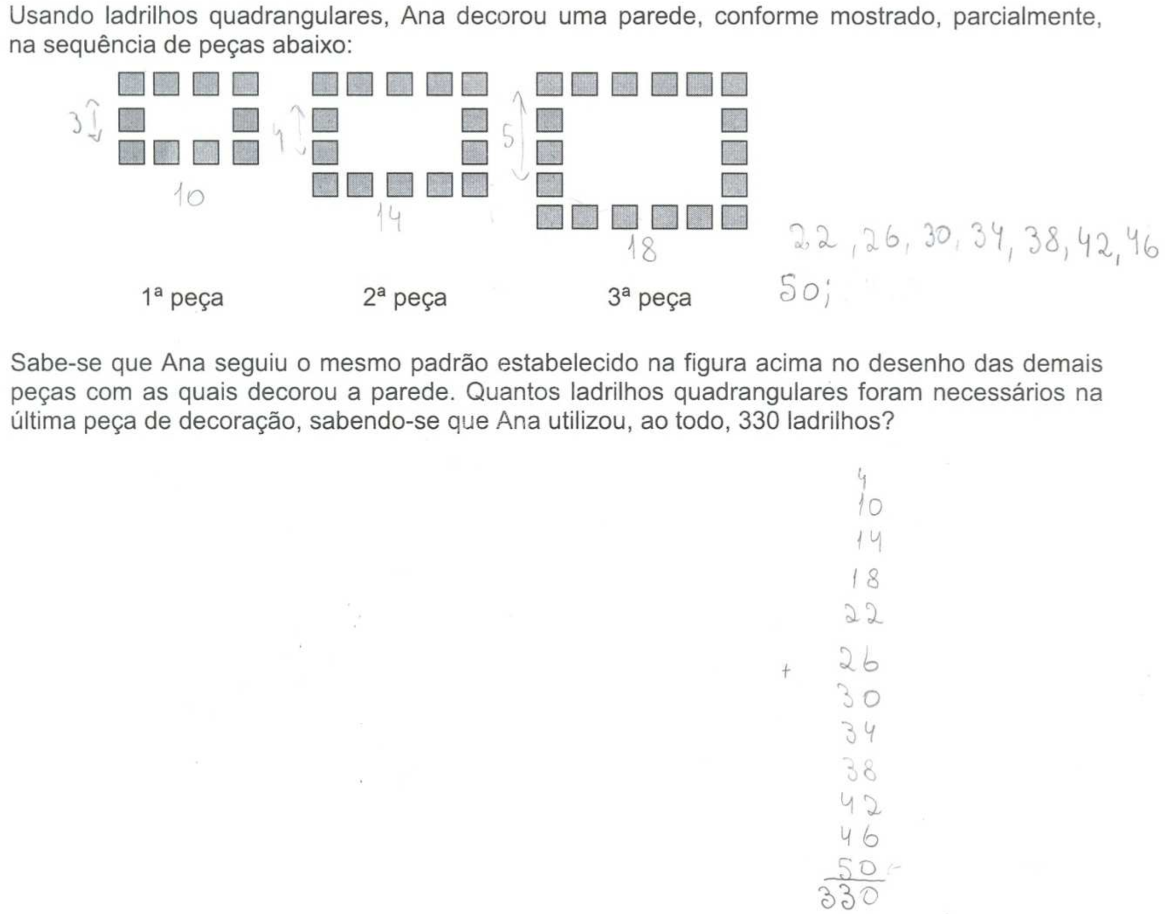
R= 128 m.

Problema extraído de Brasil (2008a)

A dupla teve dificuldades, inicialmente, em definir se precisavam utilizar apenas as medidas 22 m e 42 m, ou se as mesmas precisavam ser dobradas para o Cálculo, mas, no fim, conseguiram. Na apresentação da resolução, comentamos que o desenho da quadra poderia ter facilitado esta interpretação.

O problema que mais gerou dúvidas e dificuldades foi o quarto, apresentado na Figura 13, com a resolução proposta por P6 e P7.

Figura 13 – Problema proposto a P6 e P7 e resolução do grupo utilizando a estratégia de Tentativa e erro


Usando ladrilhos quadrangulares, Ana decorou uma parede, conforme mostrado, parcialmente, na sequência de peças abaixo:

Sabe-se que Ana seguiu o mesmo padrão estabelecido na figura acima no desenho das demais peças com as quais decorou a parede. Quantos ladrilhos quadrangulares foram necessários na última peça de decoração, sabendo-se que Ana utilizou, ao todo, 330 ladrilhos?

Problema extraído de Haetinger et al (2008)

A primeira dificuldade foi na interpretação do problema, mas, após os questionamentos feitos, os alunos entenderam que a sequência de peças deveria continuar, anotando ao lado da figura as quantidades de ladrilhos das peças seguintes ao perceber que aumentavam de 4 em 4 ladrilhos. Após, somaram todas até chegar aos 330 ladrilhos, apagando as anotações referentes às peças a mais que haviam anotado. Quando expuseram a resolução aos demais, sugeri a utilização de uma Tabela, onde poderiam anotar, na 3ª coluna, a quantidade total de ladrilhos utilizados a cada peça acrescentada na sequência. Dullius et al (2011) também detectaram, em investigação desenvolvida acerca das estratégias utilizadas por participantes de uma Olimpíada Matemática, predomínio desta estratégia nas resoluções apresentadas para o mesmo problema.

ENCONTRO 2

Objetivos

- Analisar, interpretar e resolver situações problemas utilizando diversificadas estratégias;
- Compartilhar estratégias de resolução de problemas alternativas ao cálculo formal.

Desenvolvimento

Para a formação dos grupos, cada aluno recebeu um número, distribuído em ordem crescente, a partir do 1 e dividiu-o por 4 com a condição de que o quociente fosse inteiro. Cada equipe foi formada pelos alunos que obtiveram o mesmo resto. Finalizamos a discussão dos problemas do encontro anterior e iniciamos os próximos, retomando os passos de resolução e solicitando que um aluno realizasse a leitura em voz alta.

A leitura de cada problema foi acompanhada de questionamentos com o intuito de incentivar a busca pela solução e auxiliar na interpretação do problema. Dante (2009, p. 63) alerta que: “Não devemos dizer ao aluno aquilo que ele pode descobrir por si só. [...] Ao incentivar os alunos na resolução de um problema, devemos apresentar sugestões e insinuações, mas nunca apontar o caminho a ser seguido.”

Com relação a este auxílio que o professor deve prestar aos seus alunos, Polya (1995, p. 1) destaca que é uma tarefa difícil, mas imprescindível:

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável do trabalho*. (Grifos do autor)

Os momentos de auxílio aos alunos foram difíceis tanto individual quanto coletivamente. Desempenhar o papel de questionador e orientador não é uma tarefa fácil, já que as perguntas e direcionamentos devem tomar o cuidado de não fornecer respostas ou soluções. Além do mais, o impulso de auxiliar os alunos e livrá-los do “sofrimento” de não saber que rumo tomar, é muito grande.

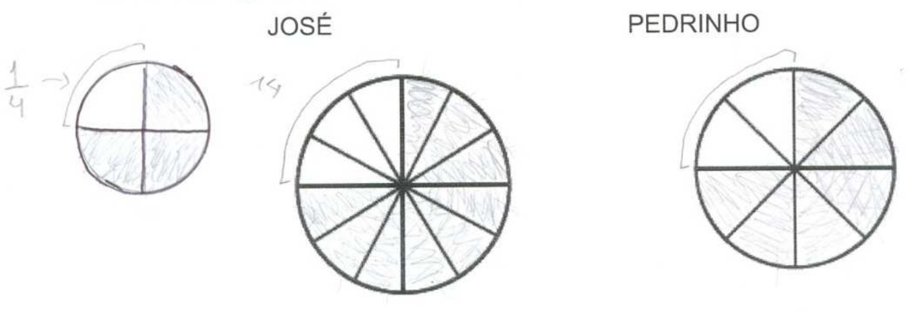
Cabe ressaltar que, em todos os encontros, cada problema foi entregue à turma realizando a leitura, interpretação e resolução, passando à exposição dos caminhos utilizados e discussão dos mesmos. Somente após estas etapas é que um novo problema era proposto à turma. Nos últimos encontros, optamos por deixar a cargo de cada aluno ou grupo a exploração do problema, desde a leitura até a resolução, como forma de estimular a autonomia. O auxílio era dado, quando necessário, particularmente.

Problema 1

No caso do Problema 1 apresentado na Figura 14 com a resolução de P7, inserimos os desenhos alusivos à divisão das pizzas, como forma de estimular a utilização desta estratégia na resolução. Em alguns outros problemas, também foram inseridos aspectos com o mesmo propósito.

Figura 14 – Problema 1 e resolução de P7 utilizando a estratégia de Desenho

1 – Observe as figuras:



Pedrinho e José fizeram uma aposta para ver quem comia mais pedaços de pizza. Pediram duas pizzas circulares de igual tamanho. Pedrinho dividiu a sua em oito pedaços iguais e comeu seis; José dividiu a sua em doze pedaços iguais e comeu nove. Então,

X a) Pedrinho e José comeram a mesma quantidade de pizza.

b) José comeu o dobro do que Pedrinho comeu.

c) Pedrinho comeu o dobro do que José comeu.

d) José comeu a metade do que Pedrinho comeu.

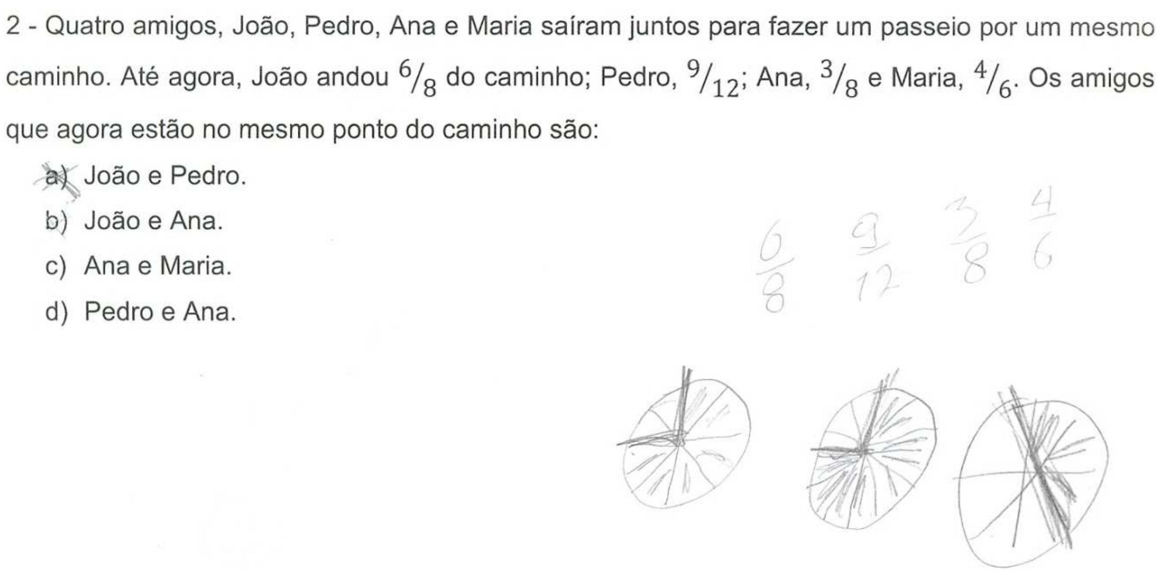
Problema extraído de Simulado da Prova Brasil 2011, 8ª série/9º ano, disponível em <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=16640&Itemid=1109>

Destacamos que todos os alunos presentes neste encontro utilizaram o Desenho que constituía o problema para resolvê-lo, pintando a parte que cada personagem comeu e chegando a uma resposta correta, em contraposição ao que ocorreu na coleta de dados inicial, onde o mesmo problema foi resolvido sem inserção dos elementos representativos das pizzas.

Problema 2

O Problema 2, apresentado na Figura 15 com a resolução proposta por P9, também envolveu comparação de frações e foi resolvido através de Desenho pela maioria dos alunos e de forma correta.

Figura 15 – Problema 2 e resolução de P9 utilizando a estratégia de Desenho


2 - Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $^6/_8$ do caminho; Pedro, $^9/_{12}$; Ana, $^3/_8$ e Maria, $^4/_6$. Os amigos que agora estão no mesmo ponto do caminho são:

a) João e Pedro.
b) João e Ana.
c) Ana e Maria.
d) Pedro e Ana.

Problema extraído de Brasil (2008a)

Na resolução apresentada, os alunos transcreveram as frações, porém não as simplificaram, apenas desenharam-nas, na mesma sequência, comprovando que os trajetos de João e Pedro eram iguais. Apenas dois deles utilizaram o Cálculo, obtendo êxito também. Durante a discussão, foi comentado com os alunos que, ao resolver cada problema novo, podemos retomar conhecimentos e estratégias utilizadas em outros. Polya (1995, p. 40) sugere que “relembrando problemas já anteriormente resolvidos e que tenham a mesma incógnita ou outra semelhante [...], teremos uma boa possibilidade de começar na direção certa e poderemos conceber um plano de resolução”.

ENCONTRO 3

Objetivos

- Ampliar o repertório de estratégias de resolução de diferentes situações problemas;
- Compartilhar estratégias de resolução de problemas alternativas ao cálculo formal.

Desenvolvimento

Cada aluno recebeu um dos problemas das Figuras 16 a 18 e a formação de grupos se deu pelo recebimento do mesmo problema. Este foi analisado pelo grupo que avaliou as duas formas de resolução apresentadas, escolhendo a que considerassem mais propícia e fácil de entender e utilizar. Também poderiam, caso julgassem conveniente, criar uma estratégia diferente. Ao final, apresentaram o problema para a turma e justificaram a escolha da estratégia.

Figura 16 – Problema proposto a P3, P4 e P6

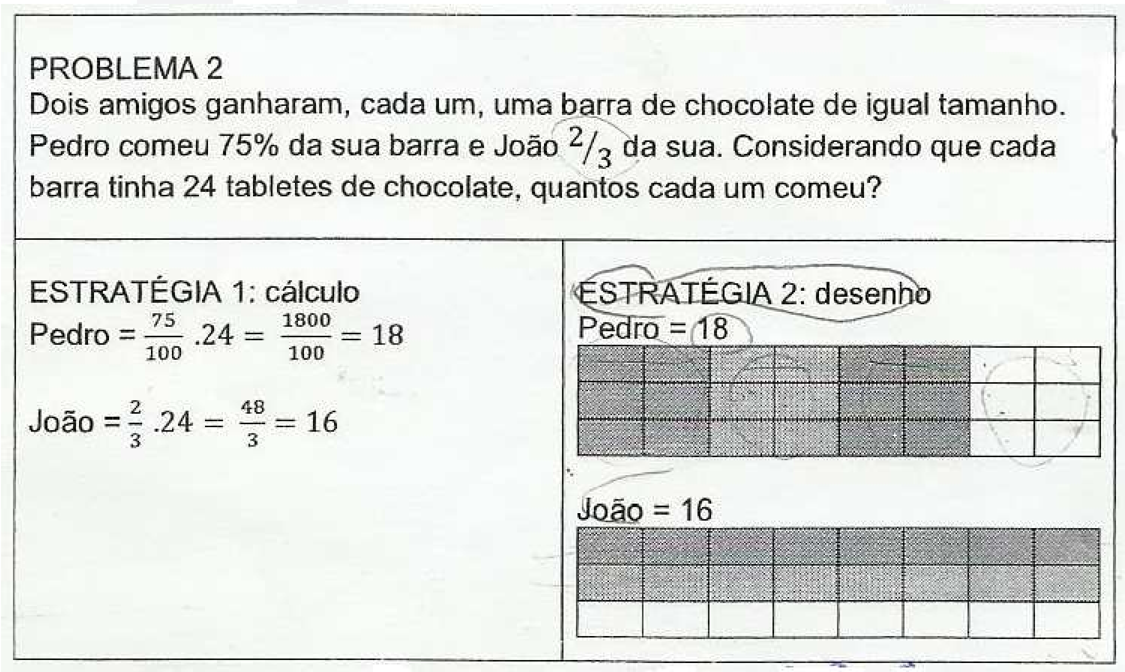
PROBLEMA 1 Pensei em um número, multipliquei-o por 4 e ao resultado somei 5. Resultou 41. Em que número pensei?	
ESTRATÉGIA 1 Cálculo: $4x + 5 = 41$ $4x = 41 - 5$ $4x = 36$ $x = 36/4$ $x = 9$	ESTRATÉGIA 2 Sentido inverso: $41 - 5 = 36 : 4 = 9$

Problema elaborado pela autora

O grupo que analisou o problema e propostas de resolução apresentados na Figura 16 justificou que considerava ambas as opções de resolução favoráveis e fáceis, já que por seu relato, conseguiriam organizar a equação. Ao apresentar para a turma, a maioria considerou a estratégia de Sentido inverso mais fácil, com a justificativa de que teriam dificuldades para organizar a equação.

O grupo que analisou o problema e as formas de resolvê-lo, apresentados na Figura 17, demonstrou mais dificuldade em entender o Cálculo do que o Desenho, relatando não lembrar esse tipo de Cálculo e sem auxilio, não conseguiram entender o significado dos números e operações. Conseguiram interpretar o Desenho apenas analisando a representação, a qual explicaram para o restante da turma.

Figura 17 – Problema proposto a P7 e P9



PROBLEMA 2
Dois amigos ganharam, cada um, uma barra de chocolate de igual tamanho. Pedro comeu 75% da sua barra e João $^2/_3$ da sua. Considerando que cada barra tinha 24 tabletes de chocolate, quantos cada um comeu?

ESTRATÉGIA 1: cálculo
Pedro = $\frac{75}{100} .24 = \frac{1800}{100} = 18$

João = $\frac{2}{3} .24 = \frac{48}{3} = 16$

ESTRATÉGIA 2: desenho
Pedro = 18

João = 16

Problema extraído de arquivo pessoal

O grupo responsável pela análise do problema e resoluções apresentados na Figura 18 relatou aos colegas a preferência pela resolução através da organização de uma Tabela de Tentativas devido às dificuldades em organizar e resolver o sistema de equações. Em seguida, todos os grupos receberam e resolveram o Problema 3, cujas estratégias de resolução utilizadas foram ao final, apresentadas e discutidas.

Figura 18 – Problema proposto a P2 e P10

PROBLEMA 4

Uma garrafa com sua rolha custam R$1,10. Sabendo que a garrafa custa R$1,00 a mais que a rolha, qual é o preço da rolha? E qual é o preço da garrafa?

ESTRATÉGIA 1: tabela

Garrafa	Rolha	Diferença
R$ 1,00	R$ 0,10	R$ 0,90
R$ 0,90	R$ 0,20	R$ 0,70
R$ 1,05	R$ 0,05	R$ 1,00

ESTRATÉGIA 1: cálculo

$$\begin{cases} x + y = 1{,}10 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

y + 1 + y = 1,10

2y = 1,10 – 1

2y = 0,10

y = $^{0,10}/_{2}$

y = 0,05 = rolha

x = 0,05 + 1

x = 1,05 = garrafa

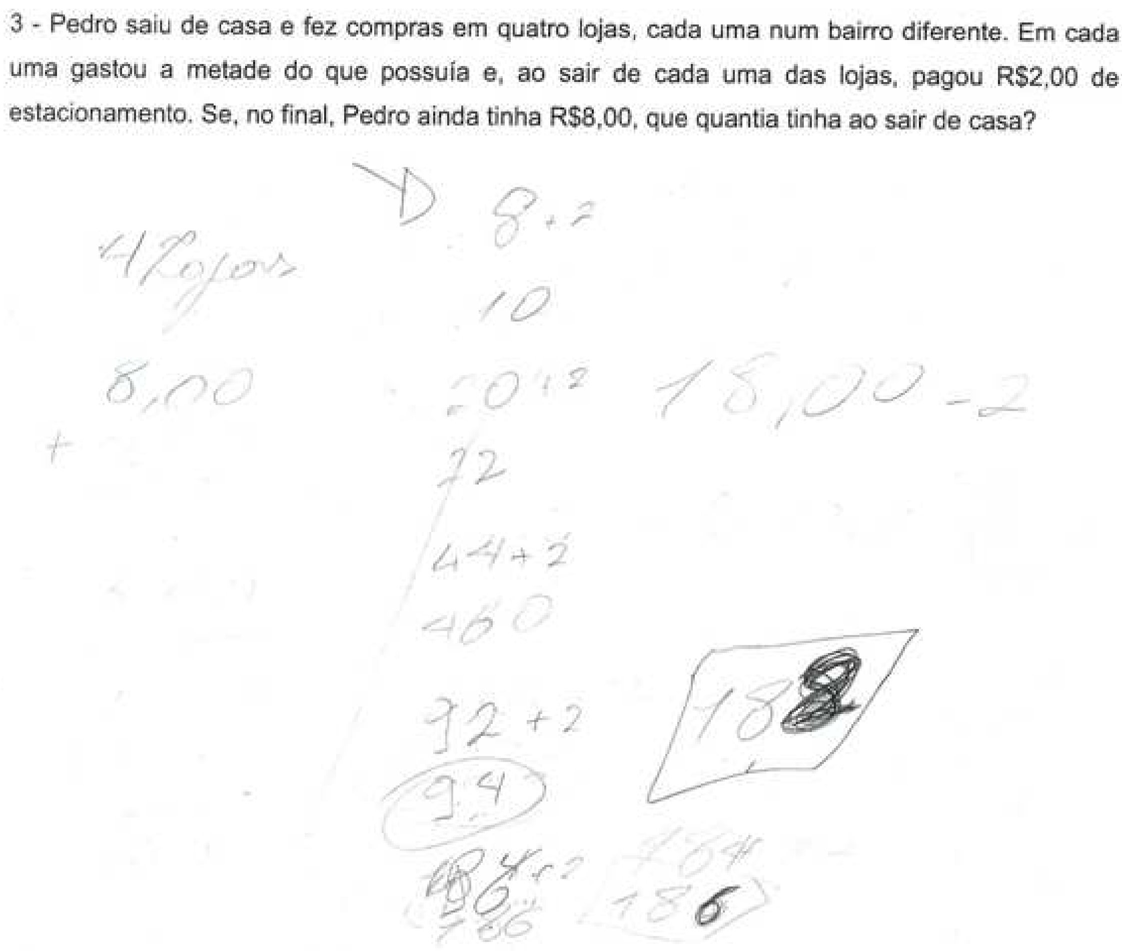
Problema extraído de http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=220

Problema 3

Na Figura 19, exemplificamos através da resolução de P9 a estratégia de Trabalhar em sentido inverso, utilizada corretamente pela maioria dos estudantes para resolver o Problema 3.

Inicialmente, alguns grupos pensaram em diminuir todo o valor pago por Pedro em estacionamentos todo de uma vez, sem perceber que isso influenciaria no valor que ele teria ao entrar em cada loja. Foram feitos questionamentos e, por fim, exemplificado através de uma redução do problema, momento em que perceberam onde estava o erro. Caso optassem por realizar o cálculo formal algébrico, provavelmente, seria necessário realizá-lo em partes e, sob nossa perspectiva, com grande chance de ocorrerem falhas no procedimento, que requer bastante atenção.

Figura 19 – Problema 3 e resolução de P9 utilizando a estratégia de Trabalhar em sentido inverso


3 - Pedro saiu de casa e fez compras em quatro lojas, cada uma num bairro diferente. Em cada uma gastou a metade do que possuía e, ao sair de cada uma das lojas, pagou R$2,00 de estacionamento. Se, no final, Pedro ainda tinha R$8,00, que quantia tinha ao sair de casa?

Problema extraído de SBM (2000)

Os próprios alunos, presentes nesse encontro, relataram sequer saber como organizar o cálculo formal para encontrar tal resposta, preferindo, portanto, a estratégia de Trabalhar em sentido inverso. Alguns ainda optaram pela Tentativa e erro, simulando valores que Pedro poderia possuir antes das compras e os gastos que teve. A partir do resultado obtido na primeira tentativa, analisaram se o próximo valor a ser testado deveria ser maior ou menor e partiram para novos testes até obter como resultado final os R$ 8,00 condicionados pelo problema, o que também possibilitou chegar à resposta correta.

ENCONTRO 4

Objetivos

- Ampliar o repertório de estratégias de resolução de diferentes situações problemas;
- Compartilhar estratégias de resolução de problemas alternativas ao cálculo formal;
- Formular problemas matemáticos.

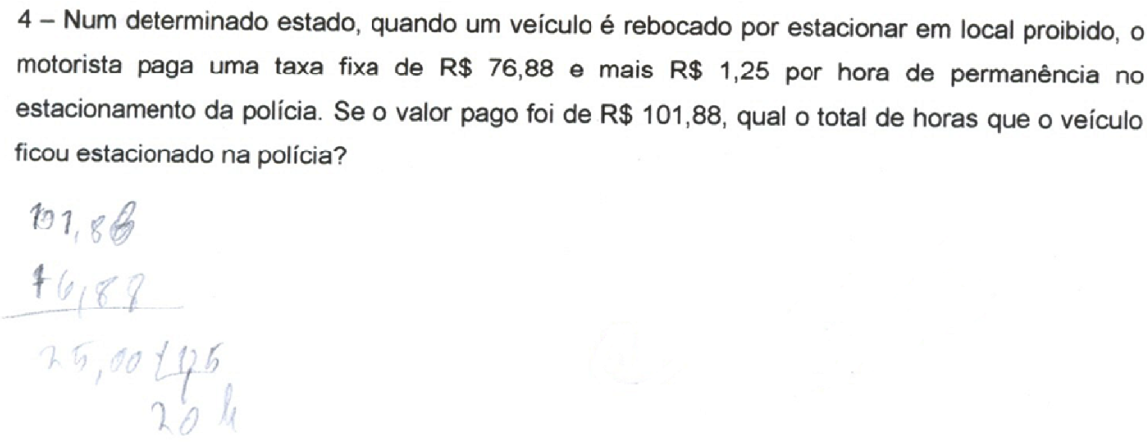
Desenvolvimento

Neste encontro os alunos, em trios, resolveram problemas cujas resoluções foram expostas para o grupo.

Problema 4

O Problema 4, apresentado na Figura 20 com a resolução de P4, foi proposto aos alunos com o objetivo de que eles reconhecessem que o mesmo poderia ser resolvido através da estratégia Trabalhar em sentido inverso utilizada no problema anterior.

Figura 20 – Problema 4 e resolução de P4 utilizando a estratégia de Trabalhar em sentido inverso



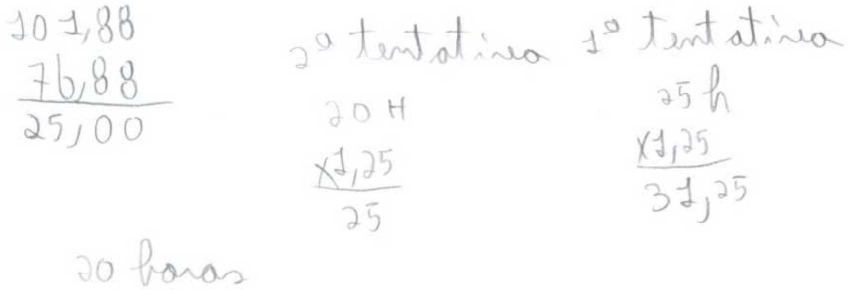
4 – Num determinado estado, quando um veículo é rebocado por estacionar em local proibido, o motorista paga uma taxa fixa de R$ 76,88 e mais R$ 1,25 por hora de permanência no estacionamento da polícia. Se o valor pago foi de R$ 101,88, qual o total de horas que o veículo ficou estacionado na polícia?

101,88
76,88
25,00 | 1,25
20 h

Problema extraído de Haetinger et al. (2011)

Os sete alunos que o resolveram utilizaram tal estratégia, sendo que seis deles associaram-na à Tentativa e erro, escolhendo possíveis quantidades de horas e multiplicando pelo valor de cada hora, ou seja, R$ 1,25, até encontrar como resultado R$ 25,00. É provável que tenham feito isso por não reconhecerem a divisão como operação inversa da multiplicação ou por não terem lembrado essa possibilidade. Na Figura 21, apresentamos um exemplo dessa associação de estratégias. Mais uma vez ficou evidente a preferência dos alunos pelas estratégias alternativas, pois nenhum grupo utilizou o cálculo algébrico, que se constitui em uma possibilidade formal de resolução para este problema.

Figura 21 – Resolução de P3 para o Problema 4 utilizando as estratégias de Trabalhar em sentido inverso e Tentativa e erro

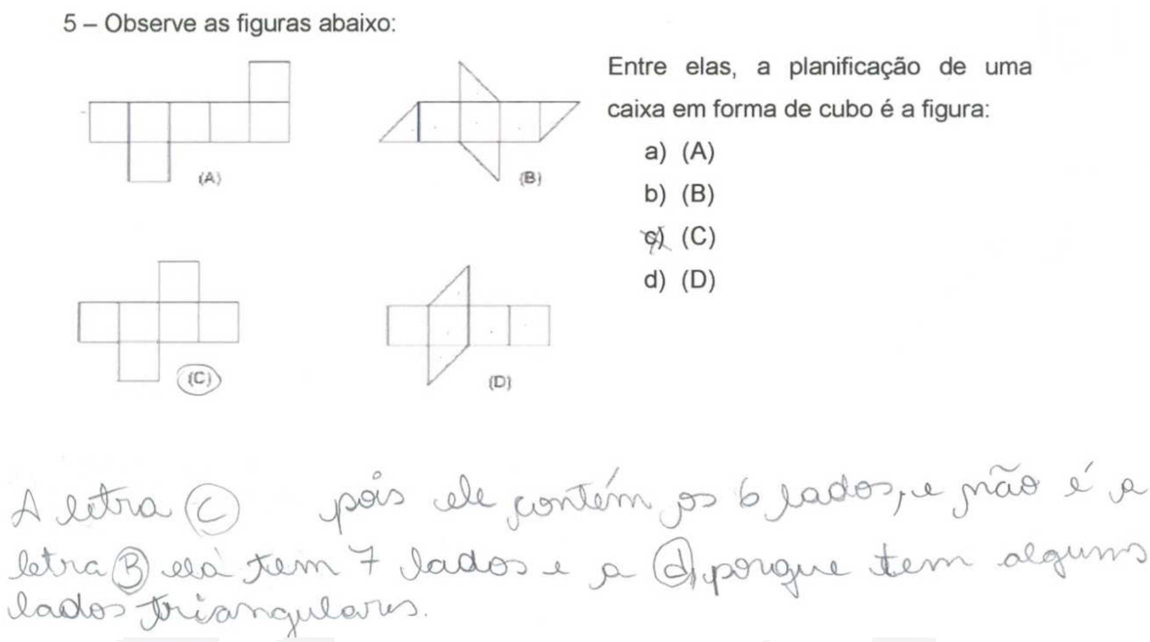


Problema 5

O Problema 5 foi resolvido pela maioria dos alunos utilizando a estratégia por nós denominada Eliminação, que tem potencial de demonstrar-se eficaz em problemas de múltipla escolha, onde o resolvedor precisa estabelecer critérios e eliminar alternativas que não se enquadrem nos mesmos. Em determinados casos, um critério basta e em outros, são necessárias outras análises e eliminações, até que reste apenas uma opção. No exemplo apresentado na Figura 22, o aluno P2 esclarece os critérios utilizados, descartando primeiramente, planificações que não tivessem 6 faces (lados), ao que restaram as opções “C” e “D”, obrigando-o a buscar um segundo critério, neste caso, o formato das faces.

Na Figura 22 apresentamos o Problema 5 e a resolução de P2 utilizando-se da Eliminação de alternativas para encontrar a solução correta para o problema.

Figura 22 – Problema 5 e resolução de P2 utilizando a estratégia de Eliminação



Problema extraído de Brasil (2008a)

Neste encontro, os alunos foram ainda desafiados a elaborar problemas a partir de uma resposta dada, de uma figura e de uma pergunta, além de elaborar uma pergunta para uma situação apresentada. Os problemas foram por nós analisados e propostos aos alunos nos encontros 5 e 6 e, portanto, serão apresentados mais adiante. Segundo Chica (2001, p. 152):

> Dar oportunidade para que os alunos formulem problemas é uma forma de levá-los a escrever e perceber o que é importante na elaboração e na resolução de uma dada situação; que relação há entre os dados apresentados, a pergunta a ser respondida e a resposta; que relação há entre os dados apresentados, a pergunta a ser respondida e a resposta; como articular o texto, os dados e a operação a ser usada. Mais que isso, ao formularem problemas, os alunos sentem que têm controle sobre o fazer matemática e que podem participar desse fazer, desenvolvendo interesse e confiança diante de situações-problema.

Problema 7

Para finalizar, os alunos resolveram o Problema 7, sendo que sete o resolveram corretamente, utilizando Desenho, como apresentado na Figura 23, através da resolução de P6. Dois dos alunos presentes não apresentaram o desenvolvimento utilizado para chegar à uma resposta, que estava errada.

Figura 23 – Problema 7 e resolução de P6 utilizando a estratégia de Desenho

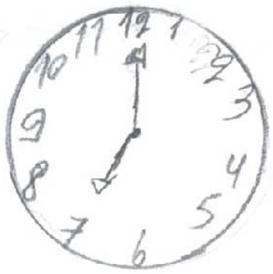
7 – Um dia tem 24 horas, 1 hora tem 60 minutos e 1 minuto tem 60 segundos. Que fração da hora corresponde a 35 minutos?

a) $\frac{7}{4}$

X b) $\frac{7}{12}$

c) $\frac{35}{24}$

d) $\frac{60}{35}$



Problema extraído de Paulina (2009)

Mais uma vez percebemos a importante contribuição que o Desenho pode dar em situações que envolvem representações fracionárias. Na turma em que se encontram esses alunos, a manipulação de frações já poderia ter passado a um plano mais abstrato, pois, há vários anos eles lidam - ou pelo menos deveriam - satisfatoriamente com esse tipo de situação. Para os que não possuíam clareza quanto à organização fracionária, o Desenho pode ter auxiliado a vislumbrar a alternativa B como uma resposta possível, por evidenciar claramente 7 partes de um todo composto por 12. Talvez esta estratégia tenha sido pouco explorada em anos anteriores, ocasionando dificuldades por parte dos alunos, ao lidar com a representação fracionária. Na coleta de dados inicial, também houve mais êxito por parte dos alunos que utilizaram o Desenho, em comparação com outras estratégias, como o Cálculo, por exemplo.

<u>ENCONTRO 5</u>

Objetivo

- Discutir a formulação de problemas matemáticos.

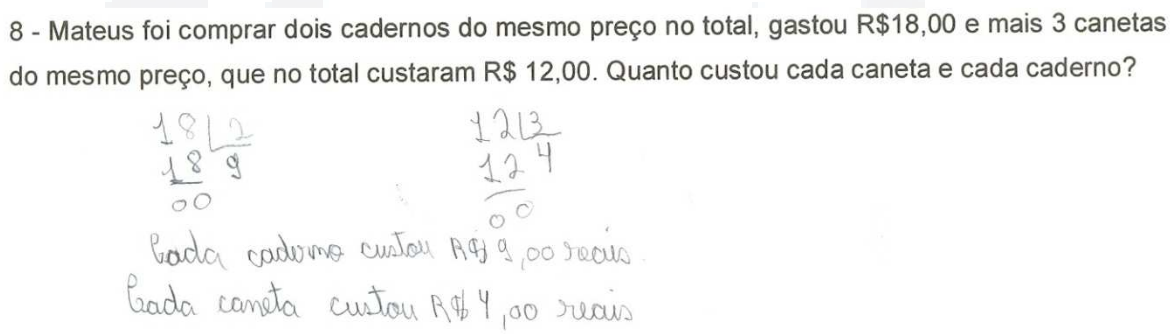
Desenvolvimento

Nesse encontro, os problemas produzidos pelos alunos foram apresentados em slides para leitura e discussão coletiva, verificação da adequação ao nível das turmas, resolução, correção feita pelos elaboradores do problema e, quando necessário, reelaboração e nova resolução.

Problema 8

O primeiro problema foi elaborado pelos alunos A4 e A11 (este não participou dos encontros até o final da pesquisa), para os quais foi fornecida a resposta transcrita na resolução do problema. Na Figura 24, apresentamos o problema e a resolução de P10 através de Cálculo.

Figura 24 – Problema 8 e resolução de P10 utilizando a estratégia Cálculo


8 - Mateus foi comprar dois cadernos do mesmo preço no total, gastou R$18,00 e mais 3 canetas do mesmo preço, que no total custaram R$ 12,00. Quanto custou cada caneta e cada caderno?

18 | 2
18   9
00

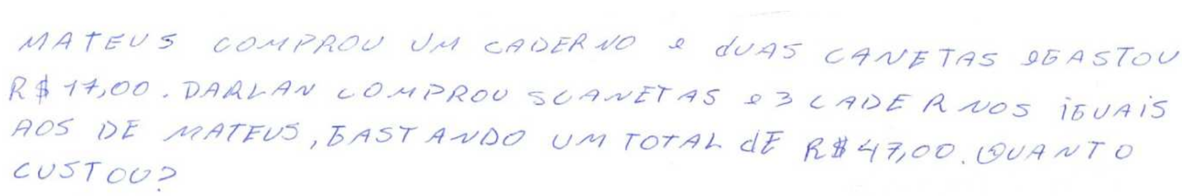
12 | 3
12   4
00

Cada caderno custou R$ 9,00 reais.
Cada caneta custou R$ 4,00 reais

Problema elaborado por P4 e P11

Esse problema foi considerado pelos alunos inadequado por envolver apenas divisões simples entre números conhecidos a partir da leitura do enunciado. Diante disso, foi reescrito; porém, foi necessário interferir para que o mesmo se adequasse ao nível, conforme apresentado na Figura 25.

Figura 25 – Reelaboração do Problema 7, feita coletivamente


MATEUS COMPROU UM CADERNO E DUAS CANETAS E GASTOU R$ 17,00. DARLAN COMPROU 5 CANETAS E 3 CADERNOS IGUAIS AOS DE MATEUS, GASTANDO UM TOTAL DE R$ 47,00. QUANTO CUSTOU?

Fonte: Material produzido por P4

Mateus comprou um caderno e duas canetas e gastou R$ 17,00. Darlan *comprou 5 canetas e 3 cadernos iguais aos de Mateus, gastando um total de R$ 47,00. Quanto custou (cada caderno e cada caneta)?*

Entretanto, após a reelaboração, apenas uma dupla conseguiu resolver o problema corretamente utilizando Cálculo. Alguns escreveram equações e tentaram organizar sistemas, mas não chegaram ao final e também não encontraram outra estratégia. Podemos visualizar um exemplo disso na Figura 26, onde o aluno escreveu duas equações, sendo que em uma delas, utilizou a incógnita “x” para representar o caderno e na outra, a mesma incógnita representou as canetas. De qualquer forma, representadas as duas equações, o aluno parece não ter reconhecido a possibilidade de organizar um sistema e aplicou a multiplicação entre as duas, ignorando os valores da igualdade.

Figura 26 – Resolução apresentada por P6 ao Problema 7 reelaborado, utilizando a estratégia Cálculo

$$x+2y=17 \mid 5y+3x=47$$

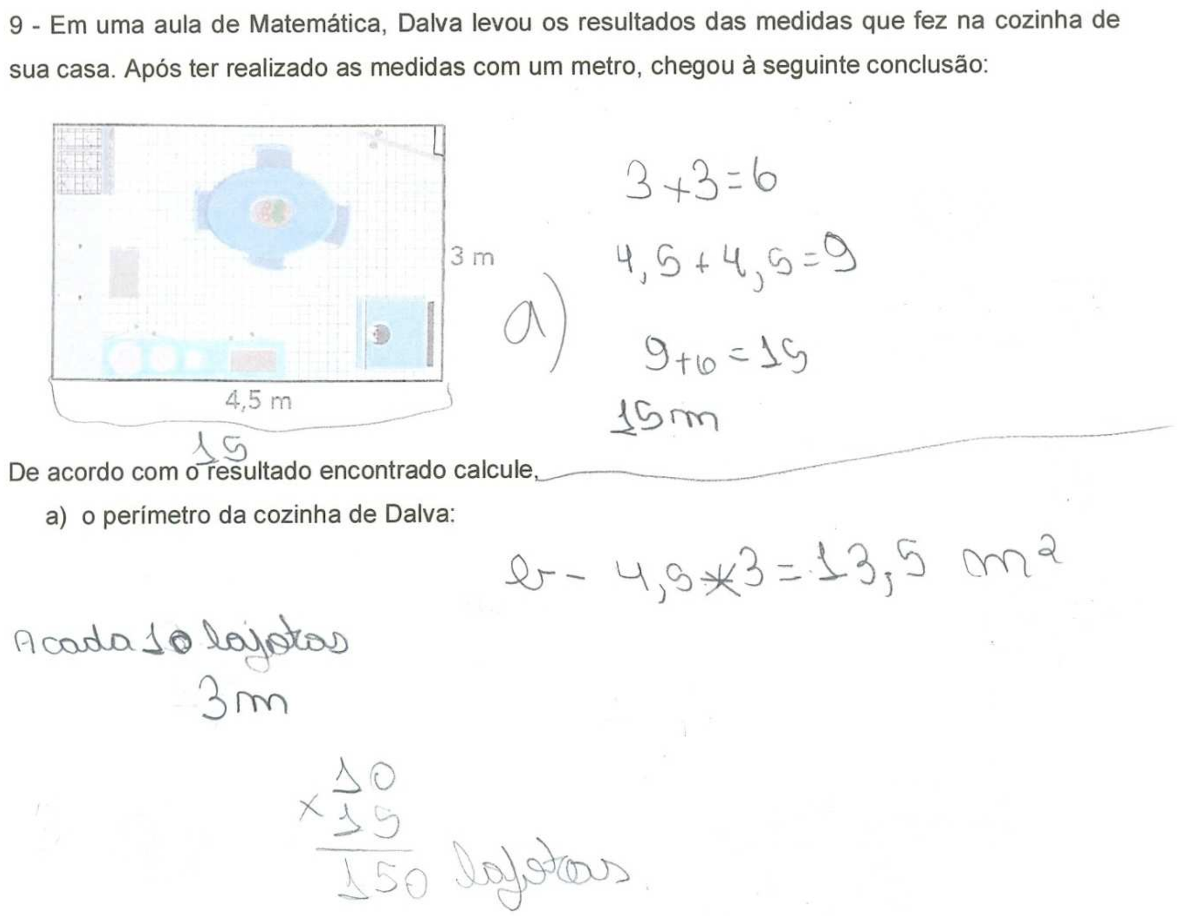
$$(x+2y)\cdot(5y+3x)$$

Sendo assim, organizamos coletivamente as resoluções através de sistema de equações e de uma Tabela onde foram realizadas tentativas, estimando possíveis valores para cada item e testando a compatibilidade com a outra condição do problema, ou seja, o gasto total de cada personagem. A maioria dos alunos copiou a resolução através de Cálculo, o que também nos chamou atenção, haja vista que, durante a construção das resoluções, demonstraram-se muito mais participativos na elaboração da Tabela do que na organização e resolução do sistema de equações, o que nos fez supor a sua preferência pela estratégia alternativa.

Problema 9

O Problema 9 foi elaborado por P2, P6 e P7 a partir da figura representativa de uma cozinha e foi considerado simples, porém adequado ao nível dos alunos, pois tem relação com um conteúdo de geometria. Assim mesmo, estimulamos a turma a analisar a figura e propor mais questionamentos a partir do enunciado elaborado pelo grupo, ao que formularam a questão “b” (a área da cozinha) e acrescentamos a “c” (quantas lajotas de 30x30cm são necessárias para trocar o piso da cozinha?). Na Figura 27, destacamos o problema na íntegra, com a inserção da figura fornecida aos alunos para a elaboração do mesmo e exemplo de resolução de cada questão, com o material produzido por P5.

Figura 27 – Problema 9 e resolução de P5 utilizando as estratégias Cálculo e Desenho


9 - Em uma aula de Matemática, Dalva levou os resultados das medidas que fez na cozinha de sua casa. Após ter realizado as medidas com um metro, chegou à seguinte conclusão:

3 m

4,5 m

15

a)

3+3=6

4,5+4,5=9

9+6=15

15m

De acordo com o resultado encontrado calcule,

a) o perímetro da cozinha de Dalva:

b- 4,5*3=13,5 m²

A cada 10 lajotas

3m

$\times$ 10
15
150 lajotas

Problema elaborado por P2, P6 e P7
Dados extraídos de Dante (2005)

A questão “a” foi respondida corretamente por todos os alunos, sendo que um deles não apresentou o desenvolvimento e os demais, utilizaram o Cálculo semelhante ao apresentado no exemplo. Semelhante ocorreu na questão “b”, que também foi respondida corretamente pelos presentes com utilização de Cálculo pela maioria e apenas dois deles não apresentaram o desenvolvimento. Para esses questionamentos, consideramos pertinente a utilização de tal estratégia, haja vista que o que mais influencia é a diferenciação dos conceitos de "área" e "perímetro".

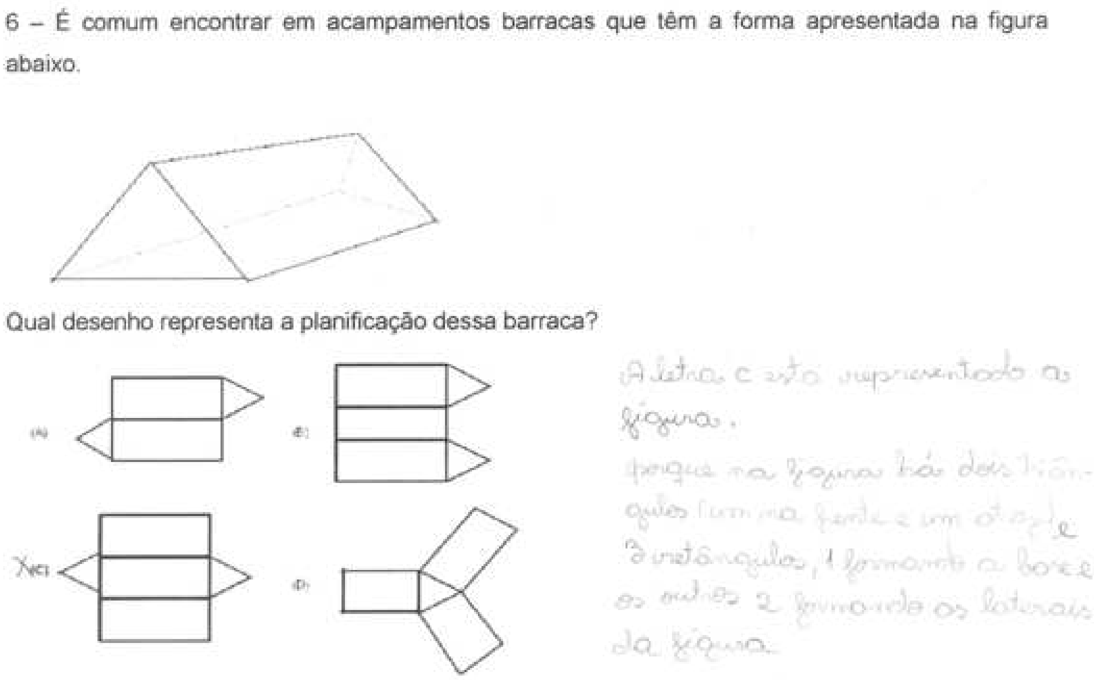
A questão "c" foi resolvida sem êxito, através de Cálculo, por dois alunos, que começaram errando no cálculo da área de cada lajota. Ao que parece, a intenção era de, após calcular tal área, verificar quantas seriam necessárias para preencher o espaço da cozinha. Os alunos, porém, não transformaram as unidades de medidas, ou seja, manipularam a área da lajota em cm^2 e da cozinha em m^2. As demais resoluções, que permitiram a obtenção da resposta correta, foram categorizadas em Desenho e Cálculo. No exemplo apresentado, percebemos no canto superior direito, que o aluno desenhou uma lajota e inferimos que tenha se utilizado disso para descobrir que, para preencher a largura da cozinha são necessárias 10 lajotas, especificando isso abaixo da figura através da expressão "A cada 10 lajotas 3m". O aluno também destacou no comprimento da cozinha, 15 lajotas e, por isso, essa resolução, assim como as demais que possuíam algum complemento semelhante na figura, foram classificadas na categoria Desenho. A partir destas descobertas, os alunos multiplicaram a quantidade de lajotas necessárias na largura e no comprimento, obtendo portanto, o total e, por isso, essas resoluções também foram categorizadas como Cálculo.

Ao final da apresentação e discussão das resoluções desenvolvidas pelos alunos, foi apresentado o Cálculo que poderia ter sido utilizado para resolver o problema, onde foi ressaltada a necessidade de transformação de uma das unidades de medida. Apesar disso, a maioria teve um melhor entendimento da resolução desenvolvida com utilização de Desenho e Cálculo.

Problema 6

Por fim, fez-se a leitura do Problema 6 e, em seguida os alunos foram questionados se conheciam algum problema semelhante, sendo estimulados a recorrerem a uma estratégia já utilizada. Um deles apresentou apenas a resposta para tal problema e os demais usaram novamente a estratégia Eliminação, semelhante ao apresentado na Figura 28 com a resolução de P7.

Figura 28 – Problema 6 e resolução de P7 utilizando a estratégia de Eliminação



Problema extraído de <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/menu_do_gestor/exemplos_questoes/M08_Saeb_site_FP.pdf >

Como a barraca em questão foi apresentada com efeito 3D, o aluno conseguiu contar a quantidade de faces e, mais do que isso, de cada forma geométrica. Percebe-se que ele precisou de um segundo critério para eliminar a alternativa “b”, já que esta possuía a mesma quantidade de faces de cada forma que a planificação “c”. O aluno escreveu: *“A letra c está representando a figura, porque na figura há dois triângulos um na frente e outro atrás e 3 retângulos, 1 formando a base e os outros 2 formando as laterais da figura.”* (Mantivemos a ortografia utilizada pelo aluno)

<u>ENCONTRO 6</u>

Objetivos

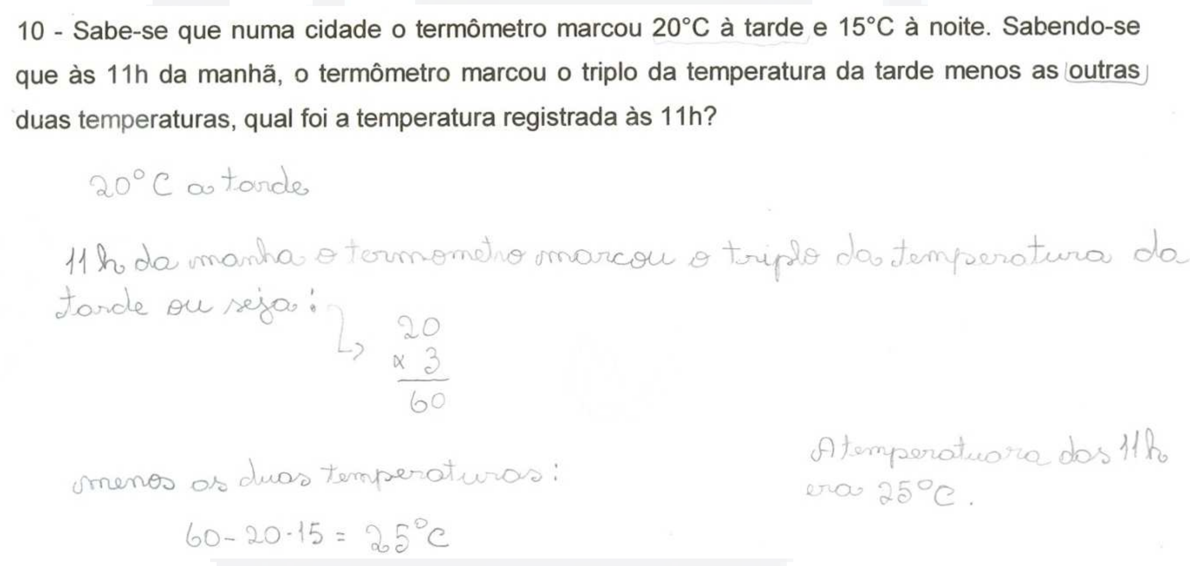
- Discutir a formulação de problemas matemáticos;
- Resolver problemas a partir da retomada de problemas semelhantes;

Desenvolvimento

Problema 10

Este encontro seguiu com a discussão dos problemas elaborados pelos alunos no encontro 4. P1 e P10 receberam uma pergunta (Qual foi a temperatura registrada às 11h?) para a qual elaboraram o Problema 10 que, com exceção de um aluno, que não o resolveu, todos se utilizaram de Cálculo para fazê-lo, como exemplificado na Figura 29.

Figura 29 – Problema 10 e resolução de P7 utilizando a estratégia de Cálculo



10 - Sabe-se que numa cidade o termômetro marcou 20°C à tarde e 15°C à noite. Sabendo-se que às 11h da manhã, o termômetro marcou o triplo da temperatura da tarde menos as outras duas temperaturas, qual foi a temperatura registrada às 11h?

20°C a tarde

11h da manha o termometro marcou o triplo da temperatura da tarde ou seja:

$20 \times 3 = 60$

menos as duas temperaturas:

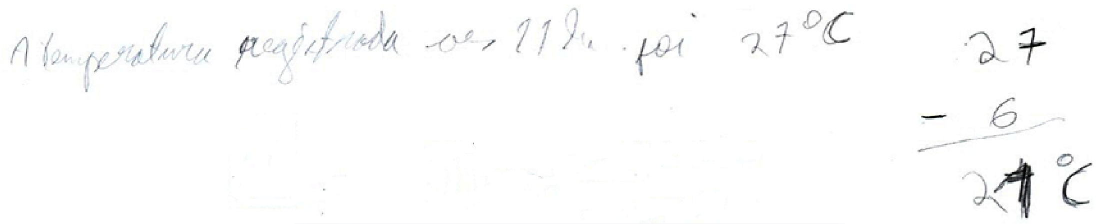
60 - 20 - 15 = 25°C

A temperatuora das 11h era 25°C.

Problema elaborado por P1 e P10

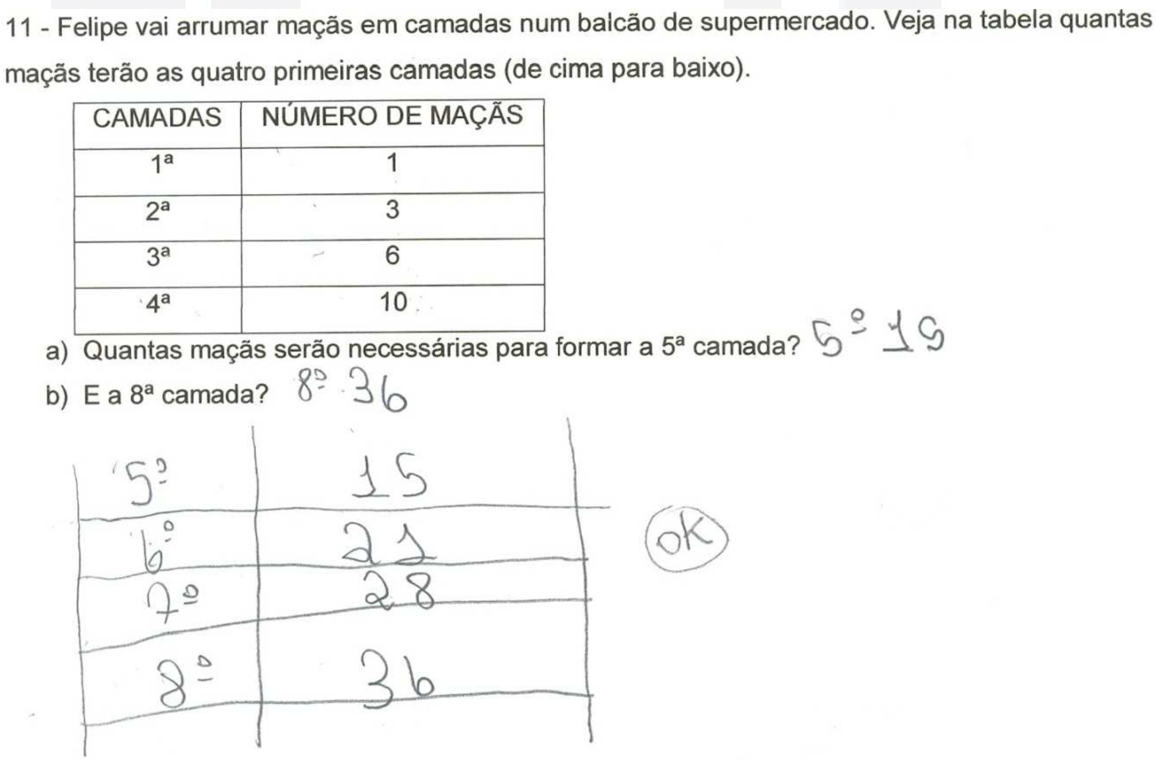
P7 especificou cada passo dado na resolução do problema, mas, ao analisá-lo, a turma o considerou confuso, levando-a a optar pela sua reelaboração, cuja versão é a seguinte: *"Em uma cidade, a temperatura variou -6℃ entre as 11h e as 20h, quando o termômetro marcava 21℃. Qual foi a temperatura registrada as 11h?".* Na Figura 30, apresentamos a resolução de A4, que, ao ser questionado quanto ao porquê de ter subtraído 6 de 27 respondeu que pensou em uma temperatura que tirando 6℃ resultaria em 21℃. Foi o único aluno que resolveu dessa forma, que categorizamos como Tentativa e erro, já que ele escolheu um valor e testou a veracidade do mesmo. Os demais o solucionaram através do Cálculo formal, ou seja, acrescentaram 6℃ aos 21℃ registr ados pelo termômetro.

Figura 30 – Resolução apresentada por P4 ao Problema 10 reelaborado, utilizando a estratégia Tentativa e erro



Problema 11

Figura 31 – Problema 11 e resolução de P5 utilizando a estratégia de Tabela



11 - Felipe vai arrumar maçãs em camadas num balcão de supermercado. Veja na tabela quantas maçãs terão as quatro primeiras camadas (de cima para baixo).

CAMADAS	NÚMERO DE MAÇÃS
1ª	1
2ª	3
3ª	6
4ª	10

a) Quantas maçãs serão necessárias para formar a 5ª camada? 5º 15

b) E a 8ª camada? 8º 36

5º	15
6º	21
7º	28
8º	36

OK

Problema elaborado por P3 e P9
Dados extraídos de Dante (2005)

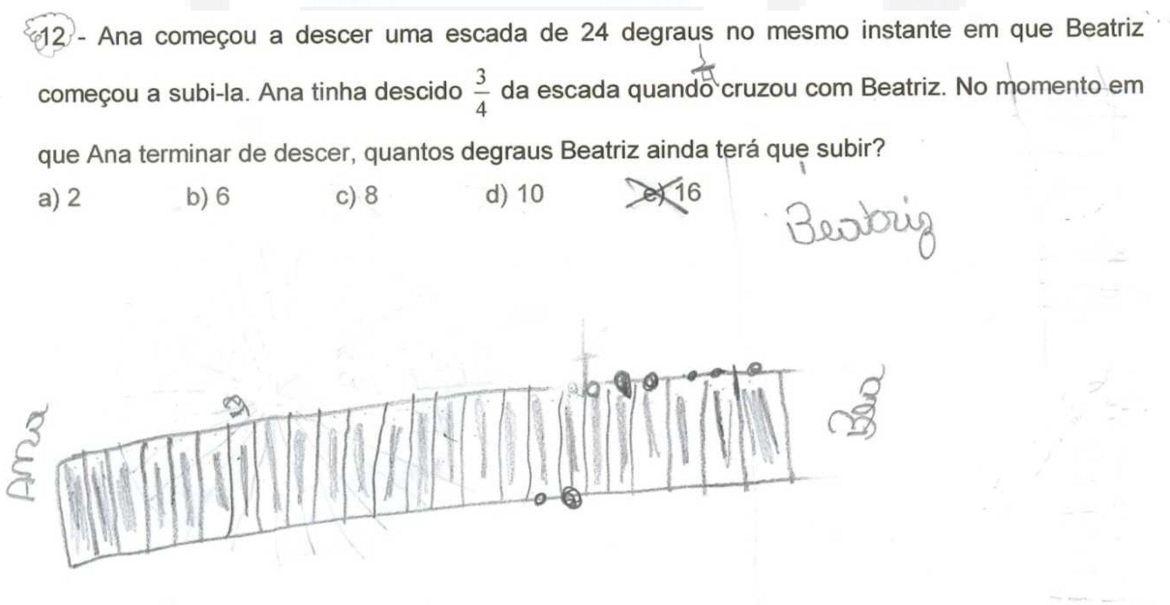
Para P3 e P9, foi fornecida a situação apresentada na Figura 31, composta pelo enunciado e tabela, para a qual deveriam formular a pergunta. Como os alunos haviam elaborado, inicialmente, apenas um questionamento que foi considerado mais simples, sugerimos que acrescentassem outra pergunta. Para a resolução do que foi o 11º problema resolvido pelos alunos, todos os presentes utilizaram Tabela, o que consideramos mais fácil do que generalizar em uma equação e resolver. Um exemplo dessa forma de resolver é apresentado na Figura 31 através da resolução de P5.

Os alunos que o resolveram desta forma devem ter percebido que para formar cada camada era necessário acrescentar à quantidade de maçãs usadas na anterior, o número de maçãs igual ao número representativo da camada, em posição.

Problema 12

Para encerrar o encontro, os alunos resolveram o Problema 12, novamente envolvendo números fracionários, constante na Figura 32, com a resolução de P5 através de Desenho.

Figura 32 – Problema 12 e resolução de P5 utilizando a estratégia de Desenho



Problema extraído de SBM (2011)

Exploramos o problema por meio de alguns questionamentos para auxiliar na interpretação, como por exemplo: “Qual a situação em discussão?”, “Ambas partiram do mesmo ponto?”, “Fizeram isso em diferentes tempos e velocidades?”, “Finalizarão o trajeto ao mesmo tempo?”, “Quem finalizará antes?”, “O que precisamos descobrir?”, “Conhecemos algum problema semelhante?”.

Mesmo com os questionamentos, alguns aspectos não ficaram esclarecidos para todos os alunos, pois muitos não se deram conta de que a pergunta se referia à parte da escada faltante para Beatriz quando Ana terminasse a descida e não ao momento do encontro das duas. Logo, estavam focados em descobrir a quantidade de degraus representantes de $^{3}/_{4}$ da escada. Quando entenderam que a questão não era essa, perceberam que precisariam reorganizar o plano de resolução.

Os nove alunos presentes no encontro, provavelmente, utilizaram Desenho para resolver o problema por terem considerado mais fácil simular os passos de cada uma das personagens simultaneamente do que calcular. A maioria, após desenhar a escada, fez simulações até descobrir quantos passos Ana dava para cada passo de Beatriz, levando em consideração o momento do encontro das duas. Depois, continuaram “na mesma velocidade” até que Ana chegasse ao final da escada, contando os degraus faltantes para Beatriz. No exemplo apresentado na Figura 32, isso fica evidente pelos dois pontinhos feitos pelo aluno no lado contrário aos outros seis: segundo a explicação dada no quadro, ao expor aos demais a resolução, os riscos no centro dos degraus indicam aqueles que já foram percorridos por Ana e os pontinhos, representam os degraus já percorridos por Beatriz, sendo os primeiros seis antes do encontro e os outros dois, após. Feito isso, bastou contar os degraus que faltavam.

<u>ENCONTRO 7</u>

Objetivo

- Ampliar o repertório de estratégias de resolução de diferentes situações problemas.

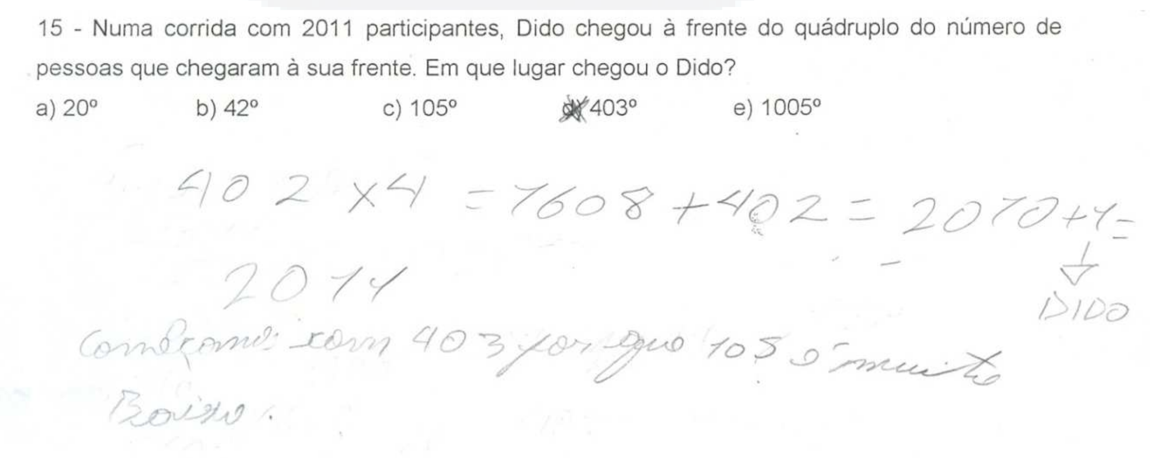
Desenvolvimento

Para formação dos grupos, cada aluno recebeu uma parte de um dos Problemas 15, 16 ou 17, como por exemplo, uma frase do enunciado ou as alternativas de resposta, para que, organizando cada problema, constituíssem os grupos. Cada um desses grupos resolveu os problemas organizados e socializou as estratégias utilizadas para resolução. Nesse encontro, os grupos trabalharam mais autonomamente, sem realizar discussões coletivas a respeito dos problemas, em que a maioria conseguiu resolver até dois deles, ficando os faltantes para o próximo. Mas, por questões de organização, optamos por apresentar a discussão de dois, ficando o terceiro para o encontro seguinte.

Problema 15

Na Figura 33, temos o Problema 15 acompanhado da resolução proposta por P9, juntamente com seu grupo, através da estratégia de Tentativa e erro, que foi utilizada corretamente por todos os alunos, sendo que alguns a associaram ao Desenho, usado para auxiliar na interpretação, que, segundo Cavalcanti (2001), é outra possibilidade para essa estratégia.

Figura 33 – Problema 15 e resolução de P9 utilizando a estratégia de Tentativa e erro


15 - Numa corrida com 2011 participantes, Dido chegou à frente do quádruplo do número de pessoas que chegaram à sua frente. Em que lugar chegou o Dido?

a) 20º b) 42º c) 105º ~~d)~~ 403º e) 1005º

402 x4 = 1608 + 402 = 2010+1=
2011
DIDO
Concordamos com 403 porque 105 é muito
Baixo.

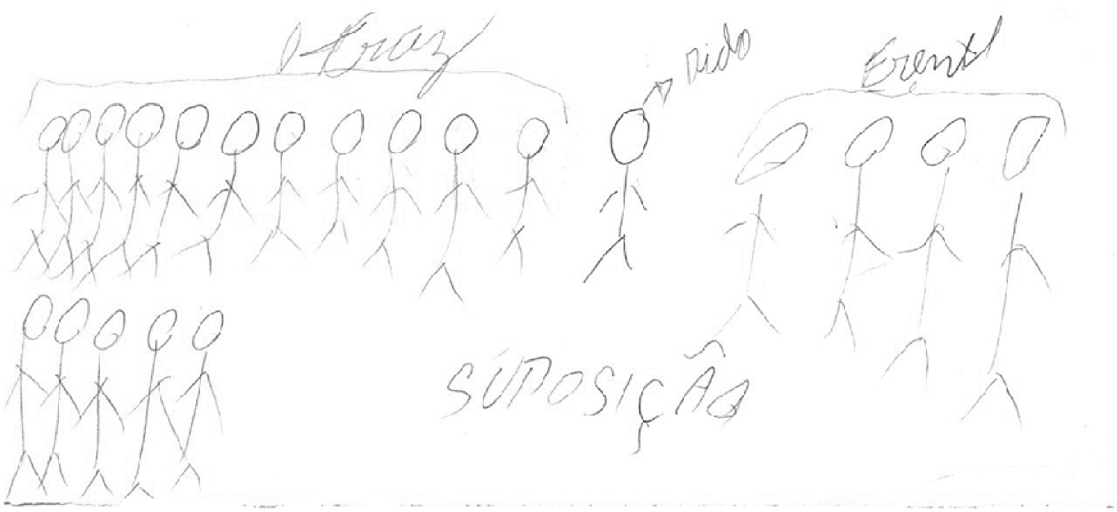
Problema extraído de IMPA/OBMEP (2012)

O aluno optou por testar as alternativas multiplicando cada uma por 4, representando os participantes que chegaram atrás de Dido, adicionando o valor ao resultado e acrescentando o personagem principal. O fato de terem iniciado a tentativa pelo número 403 revela uma análise mais aprofundada por parte desse grupo, com relação aos demais, que testaram todas as possibilidades. O aluno relatou em sua resolução: *"começamos com 403 porque 105 é muito baixo"*, o que demonstra que estimou o possível resultado para cada opção antes de realizar o teste e comprovar a resposta.

Um grupo havia iniciado testes com outros números, parecendo não se dar conta de que havia alternativas e que a resposta devia ser uma delas. Ao questioná-los e ter certeza de que estavam testando possibilidades, apenas apontei as alternativas, momento em que seus componentes concluíram que não precisavam testar muitos números, mas apenas aqueles cinco. Nenhum grupo mencionou ou tentou organizar uma equação para resolver este problema.

Esse problema gerou muitas dúvidas, pois a maioria dos alunos não conseguia entender a condição "chegou à frente do quádruplo do número de pessoas que chegaram à sua frente". Foi necessário ler várias vezes e alguns compreenderam que, desenhando uma situação mais simples, poderiam interpretar mais facilmente este dado. Foi o caso de P6, que desenhou a Figura 34 e questionou: *"Então é assim, aqui é o Dido: se quatro pessoas chegaram na frente dele, dezesseis chegaram atrás?"*

Figura 34 – Desenho utilizado por P6 para auxiliar na interpretação do Problema 15



Problema 16

A primeira questão do Problema 16 foi resolvida corretamente por todos os alunos através de Desenho; porém, um dos grupos, apesar de ter acertado o desenvolvimento da resolução, errou ao destacar a resposta, como mostramos na Figura 35.

Figura 35 – Problema 16 e resolução de P7 utilizando as estratégias de Desenho e Tentativa e erro

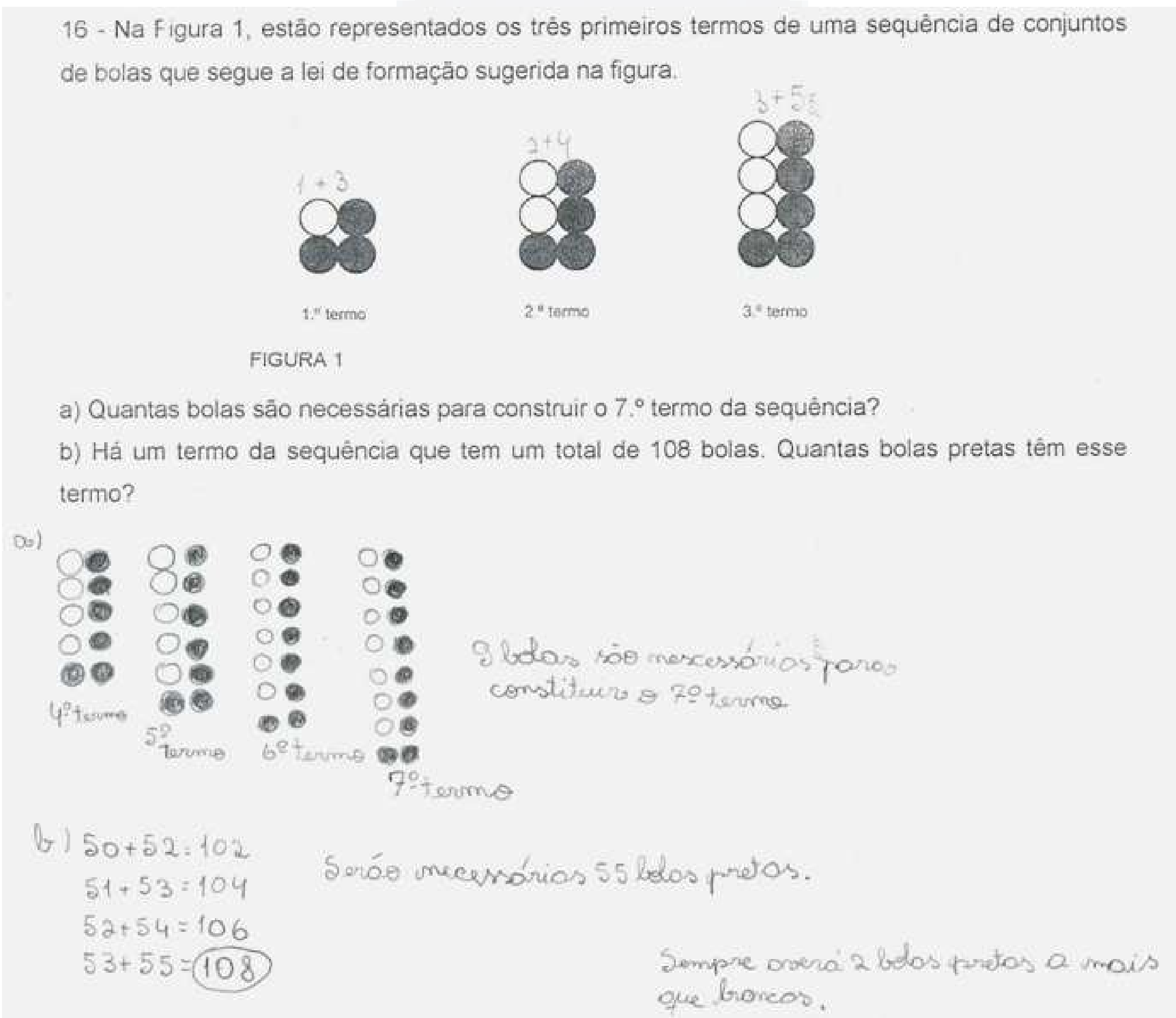

16 - Na Figura 1, estão representados os três primeiros termos de uma sequência de conjuntos de bolas que segue a lei de formação sugerida na figura.

FIGURA 1

a) Quantas bolas são necessárias para construir o 7.º termo da sequência?

b) Há um termo da sequência que tem um total de 108 bolas. Quantas bolas pretas têm esse termo?

a)

9 bolas são necessários para constituir o 7º termo

b) 50+52=102
51+53=104
52+54=106
53+55=108

Serão necessários 55 bolas pretas.

Sempre será 2 bolas pretas a mais que brancos.

Problema extraído de https://sites.google.com/site/desmatematicos/exames-provas/testes-intermedios---8o-ano/2010-2011---3-periodo

Nesse caso, evidencia-se mais uma vez a necessidade da verificação do resultado, pois se os alunos tivessem lido novamente a pergunta, é provável que percebessem que ela se referia ao número total de bolas no 7º termo e não à quantidade de bolas pretas, que foi a resposta dada por P7. Talvez essa confusão tenha ocorrido devido à 2ª pergunta, já que esta sim solicitava o número de bolas pretas de determinado termo.

Esse problema foi acertado por seis dos nove alunos que a resolveram e as estratégias variaram entre Tentativa e erro, como no exemplo da Figura 35, e Trabalhar em sentido inverso, onde os alunos dividiram o total de bolas (108) por 2 (número de colunas) e ao resultado, acrescentaram 1, pois há uma bola preta a mais que brancas.

Dentre os que resolveram por Tentativa e erro, três erraram, pois, nos últimos testes feitos, parecem ter se confundido e utilizado 4 bolas de diferença entre pretas e brancas e não 2, como fizeram inicialmente. Quanto à resolução daqueles que utilizaram esta estratégia de maneira correta, destacamos a provável análise realizada, pois, ao contrário do outro grupo, que organizou toda a sequência de termos, iniciaram os testes com o número 50, provavelmente por terem percebido que, para resultar 108, seriam necessários dois termos maiores que 50.

ENCONTRO 08

Objetivo

- Proporcionar atividades que desenvolvam, a longo prazo, a criatividade e autonomia e, consequentemente, a formação de cidadãos mais ativos socialmente.

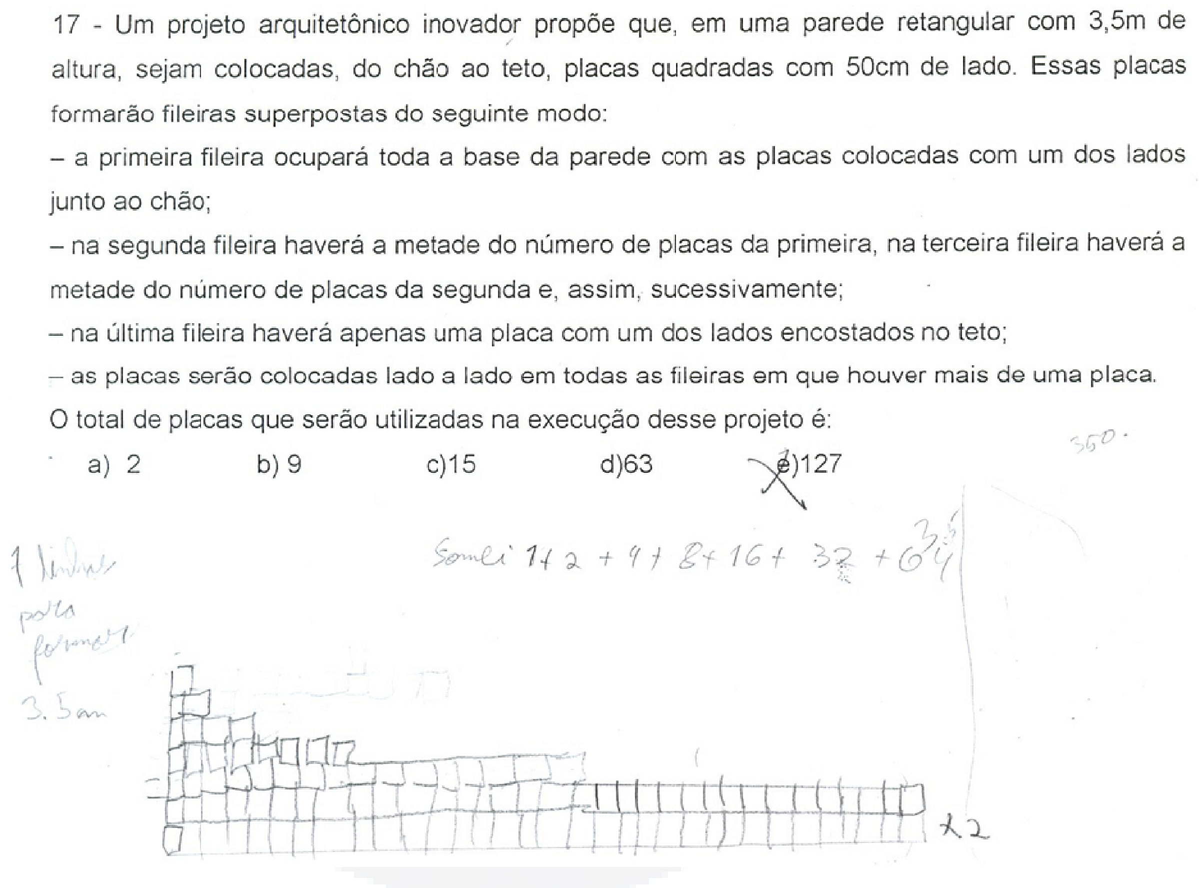
Desenvolvimento

Inicialmente, finalizamos a resolução e discussão dos problemas do encontro anterior.

Problema 17

Apresentamos na Figura 36 o Problema 17, para o qual foi utilizado principalmente o Desenho como forma de interpretação e obtenção de dados necessários para a resolução. O exemplo é a resolução de P4, que usou essa estratégia associada ao Cálculo.

Figura 36 – Problema 17 e resolução de P4 utilizando as estratégias de Desenho e Cálculo


17 - Um projeto arquitetônico inovador propõe que, em uma parede retangular com 3,5m de altura, sejam colocadas, do chão ao teto, placas quadradas com 50cm de lado. Essas placas formarão fileiras superpostas do seguinte modo:

– a primeira fileira ocupará toda a base da parede com as placas colocadas com um dos lados junto ao chão;

– na segunda fileira haverá a metade do número de placas da primeira, na terceira fileira haverá a metade do número de placas da segunda e, assim, sucessivamente;

– na última fileira haverá apenas uma placa com um dos lados encostados no teto;

– as placas serão colocadas lado a lado em todas as fileiras em que houver mais de uma placa.

O total de placas que serão utilizadas na execução desse projeto é:

a) 2 b) 9 c)15 d)63 e)127

Problema extraído de Haetinger et al (2004)

Para a resolução desse problema, foi preciso organizar várias informações, ou seja, estar atento a diversas condições impostas pelo enunciado. Um aluno havia iniciado um desenho onde colocava várias placas, lado a lado, mas apagou-as e, ao ser questionado do motivo, relatou, apontando para o segundo item do problema, que leu novamente e percebeu que a cada camada, o número de placas diminui pela metade. A maioria entendeu logo esta condição, sendo que o que gerou mais dúvidas foi a quantidade de fileiras que deveriam existir, até que uma aluna disse: *"tem que saber quantos 50cm cabem em 3,5m"*. Descoberto isso, dois grupos adicionaram parcelas de 50 cm até obter 350 cm, chegando à conclusão de que seriam necessárias 7 fileiras portanto. O outro grupo não fez esse registro.

De posse desses dados, dois grupos iniciaram o desenho em Sentido inverso, ou seja, partindo da última fileira, composta por uma placa e dobrando essa quantidade a cada fileira. Após algumas fileiras perceberam que não havia necessidade de desenhá-las todas e a maioria optou por apenas escrever a quantidade de placas necessárias em cada fileira, somando-as ao final.

Porém, um grupo, ao descobrir que seriam necessárias 7 fileiras, iniciou a resolução através de Tentativa e erro, utilizando, na primeira delas, a quantidade de 30 placas para a primeira fileira e reduzindo à metade cada uma delas, provavelmente para encontrar um número que possibilitasse restar uma placa na última fileira, conforme enunciado no problema. Após a segunda tentativa, parecem ter desistido e, assim como os demais, escreveram as quantidades para cada fileira partindo da última e dobrando a cada fileira.

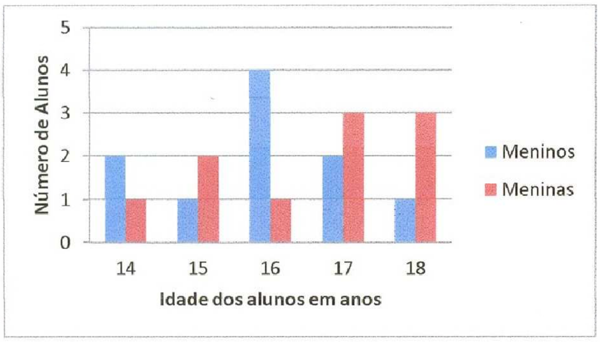
Cabe ressaltar mais uma vez as prováveis análises que os alunos têm feito durante as resoluções, como, por exemplo, ao perceber que não precisariam desenhar todas as fileiras, o que seria mais trabalhoso, ou ainda, quanto ao grupo que abandonou a estratégia de Tentativa e erro para Trabalhar em sentido inverso, em uma lógica semelhante aos que utilizaram-se do Desenho.

Problema 13

Neste encontro, resolveram ainda o Problema 13, apresentado na Figura 37, acompanhado de anotações feitas por P8. O problema envolve a análise de um gráfico e de informações a seu respeito. Apesar de não terem apresentado o desenvolvimento, estes alunos, assim como os demais, testaram todas as alternativas e anotaram ao lado de cada uma para verificar se a mesma era verdadeira ou não.

Figura 37 – Problema 13 e resolução de P8 utilizando a estratégia de Tentativa e erro

13 – (UFSCar-SP) Num curso de iniciação à informática, a distribuição das idades dos alunos, segundo o sexo, é dada pelo gráfico seguinte:



Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar que:

a) O número de meninas, com no máximo, 16 anos é maior que o número de meninos nesse mesmo intervalo de idades. NÃO
b) O número total de alunos é 10. NÃO
c) Há exatamente 10 alunos com mais de 16 anos. NÃO
d) O número de meninos é igual ao número de meninas. Sim
e) O número de meninos com idade maior que 15 anos é maior que o número de meninas nesse mesmo intervalo de idades. NÃO

Problema extraído de http://www.ebah.com.br/content/ABAAAew48AB/banco-questoes-matematica

Todas as resoluções foram categorizadas como Tentativa e erro que se caracteriza, segundo Musser e Shaughnessy (1997, p. 189) como a “aplicação das operações pertinentes às informações dadas”. Um aluno, ao contrário dos demais colegas de grupo, errou ao assinalar a resposta apesar de ter apresentado o mesmo desenvolvimento que eles. Diante desta situação, mais uma vez destacamos aos alunos a importância de verificar a resposta, que, nesse caso, possivelmente teria evitado esse erro.

ENCONTRO 9

Objetivo

- Proporcionar atividades que desenvolvam, em longo prazo, a criatividade e autonomia e, consequentemente, a formação de cidadãos mais ativos socialmente.

Desenvolvimento

Neste encontro, os alunos resolveram problemas em grupos e trocaram as resoluções entre si, podendo um grupo opinar sobre a estratégia utilizada por outro, com intuito de aperfeiçoá-la, caso julgassem pertinente.

Problema 14

Com o Problema 14, entretanto, não foi possível proceder a troca entre os grupos pois, apesar de alguns terem assinalado a resposta correta, a forma de encontrá-la foi inadequada, como exemplificado na Figura 38, através da resolução apresentada por P8.

Figura 38 – Problema 14 e resolução de P8 utilizando a estratégia de Organizar padrões

14 - Considerar os números $M=2^{700}$, $N=11^{200}$, $O=5^{300}$. Assinalar a alternativa correta:

a) M<O<N

b) N<M<O

X c) N<O<M   VSAMOS A ORDEM crescente DOS EXPOENTES.

d) O<M<N

e) O<N<M

Problema extraído de Haetinger et al (2008)

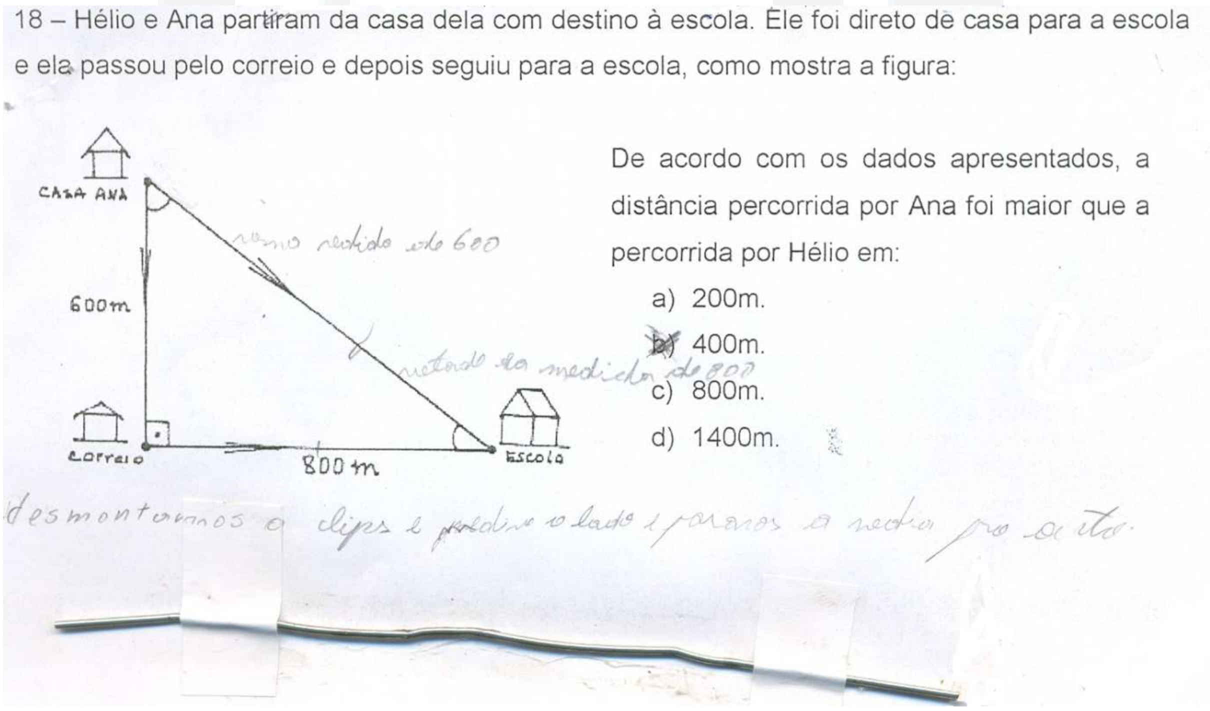
Este aluno, assim como outros colegas, justificou a utilização da ordem crescente dos expoentes dos números para estabelecer a relação entre eles, o que funcionou para a situação em discussão, mas não significa garantia de eficácia quando forem utilizados outras bases ou outros expoentes. Para o grupo que utilizou a ordem crescente da base como critério, há a alternativa “a” que pode ser assinalada, causando uma falsa impressão de que a resolução foi desenvolvida corretamente. Esse é um cuidado muito importante em problemas e questões de múltipla escolha, pois as alternativas podem ser pensadas a partir dos diferentes caminhos pelos quais os alunos possam optar durante a resolução.

No momento em que receberam o problema, alguns alunos manifestaram que seria impossível ou muito difícil resolver através do Cálculo formal, ou seja, elevar as bases às suas respectivas potências. Um grupo utilizou uma redução de unidade, porém não foi adequada para a situação, uma vez que optaram por elevar cada base à décima potência e depois, multiplicar o resultado por 7, 2 e 3, respectivamente. Essa forma também demonstrou-se ineficaz, pois um dos números resultou em muito grande, fazendo com que a calculadora o apresentasse em exponencial e os alunos não souberam interpretá-lo.

Por fim, socializamos no quadro negro uma forma eficaz de resolver o problema, utilizando a Redução de unidade dos expoentes, dividindo-os todos por 100, resultando, portanto nas potências $M=2^7$, $N=11^2$ e $O=5^3$, que puderam ser resolvidas, levando à alternativa “c” como resposta.

Problema 18

Figura 39 – Problema 18 e resolução de P9 utilizando a estratégia de Desenho



Problema extraído de Brasil (2008a)

O Problema 18, que na coleta de dados inicial teve um altíssimo índice de erro, foi resolvido corretamente por todos os alunos participantes do encontro, sendo que apenas dois deles utilizaram o Cálculo formal. Na Figura 39, apresentamos o problema com a resolução de P9, que foi classificada na categoria Desenho, devido aos recursos utilizados.

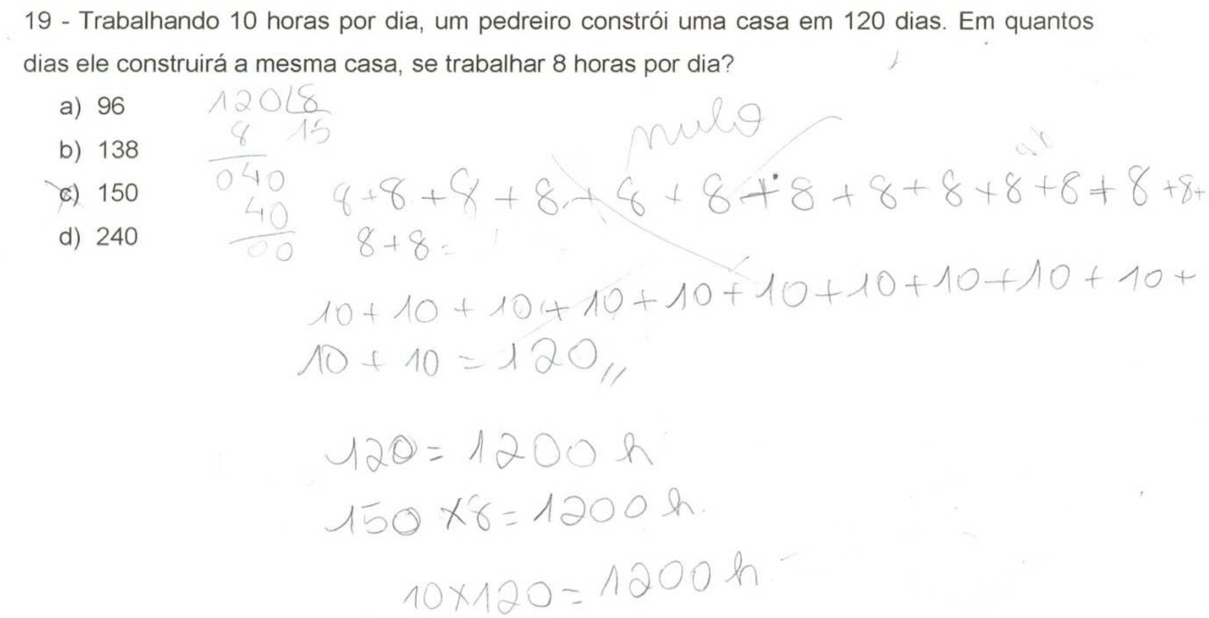
Nessa resolução, o grupo utilizou um clips para comparar os lados do triângulo formado pelos percursos e demarcar medidas iguais, destacando inclusive quais são elas: “mesma medida de 600” e “metade da medida de 800”, concluindo, portanto que a hipotenusa media 1000m. Após, é provável que tenha subtraído esses 1000m dos 1400m (600 + 800), percorridos por Ana, chegando ao resultado correto. Entretanto, não seria necessária a utilização deste instrumento, já que outros alunos fizeram comparações semelhantes, apenas traçando um arco a partir do ângulo de 90° graus formado pelos catetos, até a hipotenusa, o que os possibilitou demarcar nesta, uma medida de 600m e outra de 400m, ou seja, igual à metade do lado de 800m (aproximadamente).

Quanto aos alunos que se utilizaram do Cálculo formal, ou seja, o Teorema de Pitágoras, podemos supor que o tenham feito em função de um deles ter estudado, há pouco tempo, no horário regular de aula, tal conteúdo, o que proporcionou que lembrasse do mesmo. O colega de grupo manifestou, na ocasião, não lembrar de tal conteúdo, que foi brevemente relatado por aquele que sugeriu sua utilização. Ao final das resoluções, foi proporcionado o momento de troca das resoluções entre os grupos, onde alguns, ao visualizar a resolução através de Cálculo, lembraram que já haviam estudado o conteúdo enquanto outros manifestaram desconhecimento e preferência pela estratégia Desenho.

Problema 19

Nas resoluções apresentadas para o Problema 19 evidenciamos a utilização da estratégia Tentativa e erro, como no exemplo da Figura 40 e também através da Redução da unidade ou desta, associada à Organização de padrões.

Figura 40 – Problema 19 e resolução de P2 utilizando a estratégia de Tentativa e erro


19 - Trabalhando 10 horas por dia, um pedreiro constrói uma casa em 120 dias. Em quantos dias ele construirá a mesma casa, se trabalhar 8 horas por dia?

a) 96

b) 138

c) 150

d) 240

Problema extraído de Brasil (2008a)

Na resolução desenvolvida por esta dupla, percebe-se uma primeira tentativa de resolução abandonada através da palavra “nulo”. Abaixo, percebemos a relação estabelecida entre os 120 dias trabalhados e o total de 1200 horas, calculadas mais abaixo (10 x 120 = 1200h). Os alunos também demonstraram que são necessários 150 dias trabalhando 8h por dia, para completar as mesmas 1200 horas trabalhadas (150 x 8 = 1200h). É provável que tenham testado também as demais alternativas ou eliminado, de antemão, pelo menos a primeira, por se tratar de menos dias do que na situação de 10 horas diárias trabalhadas.

A dupla que errou a resolução tentou organizar uma regra de três (Cálculo formal), resolvendo-a, porém, como se a situação fosse diretamente proporcional, encontrando 96 dias como resultado. Entretanto, ao analisar a situação, percebeu que, em conseqüência da redução do número de horas diárias trabalhadas, o número de dias precisava aumentar. Neste caso, evidenciamos mais uma vez que a existência de alternativas, quando não forem bem utilizadas, pode atrapalhar o aluno na resolução, causando-lhe a falsa impressão de ter resolvido corretamente a situação. Na troca das resoluções entre os grupos, estes alunos receberam a dica do grupo que utilizou Tentativa e erro na resolução, relatando ao final, entendimento do problema.

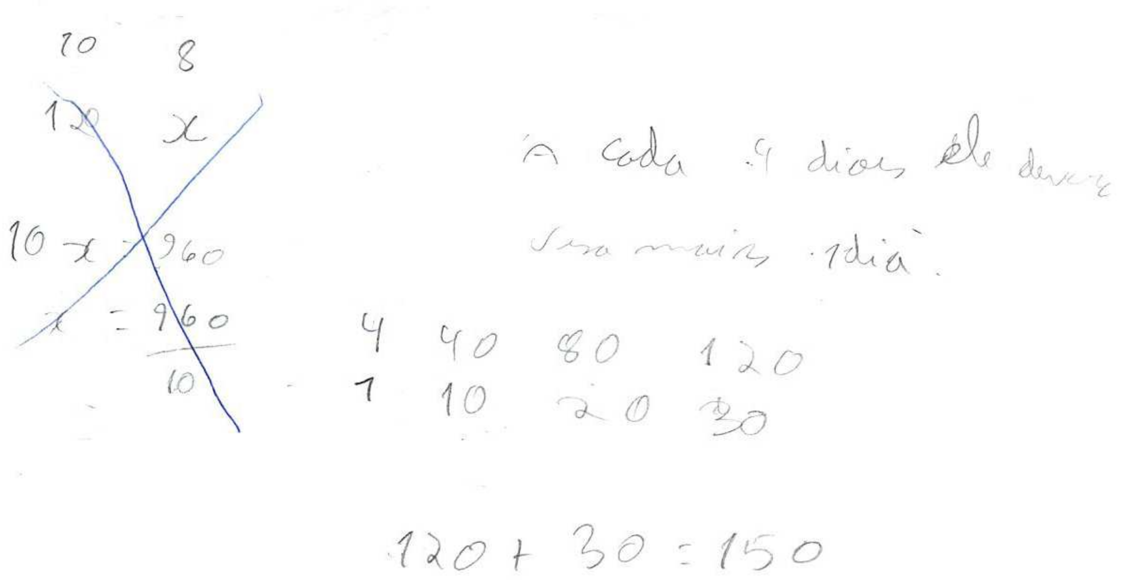
Já a dupla que utilizou a estratégia de Redução de unidade, também precisou verificar o total de horas necessárias para a construção e redistribuí-las em 8 horas diárias, obtendo o total de dias necessários, conforme exemplificado na Figura 41, com a resolução de P7.

Figura 41 – Resolução apresentada por P7 ao Problema 19 utilizando a estratégia de Reduzir à unidade

Destacamos a resolução apresentada por outra dupla que associou o reconhecimento de Padrões à estratégia de Redução da unidade e organizou a resolução apresentada na Figura 42.

Os alunos que desenvolveram esta resolução haviam iniciado também através de regra de três como se a situação fosse diretamente proporcional, porém, ao serem alertados quanto à verificação da resposta, detectaram a impossibilidade da resposta encontrada e traçaram um novo plano. Perceberam, conforme o que detalharam em sua resolução, que a cada 4 dias trabalhados com a carga horária reduzida, seria necessário trabalhar 1 dia a mais para compensar. Logo, fizeram as relações seguintes, baseadas nesta, como pode-se observar no exemplo, concluindo que seriam necessários 30 dias a mais de trabalho. Essa estratégia nos surpreendeu, pois não havíamos visualizado essa possibilidade de resolução, o que vem, mais uma vez, demonstrar a possibilidade de desenvolvimento de soluções criativas por parte dos alunos, quando permitidos a testar suas ideias.

Figura 42 – Resolução apresentada por P4 ao problema 19 utilizando as estratégias de Organizar padrões e Reduzir à unidade

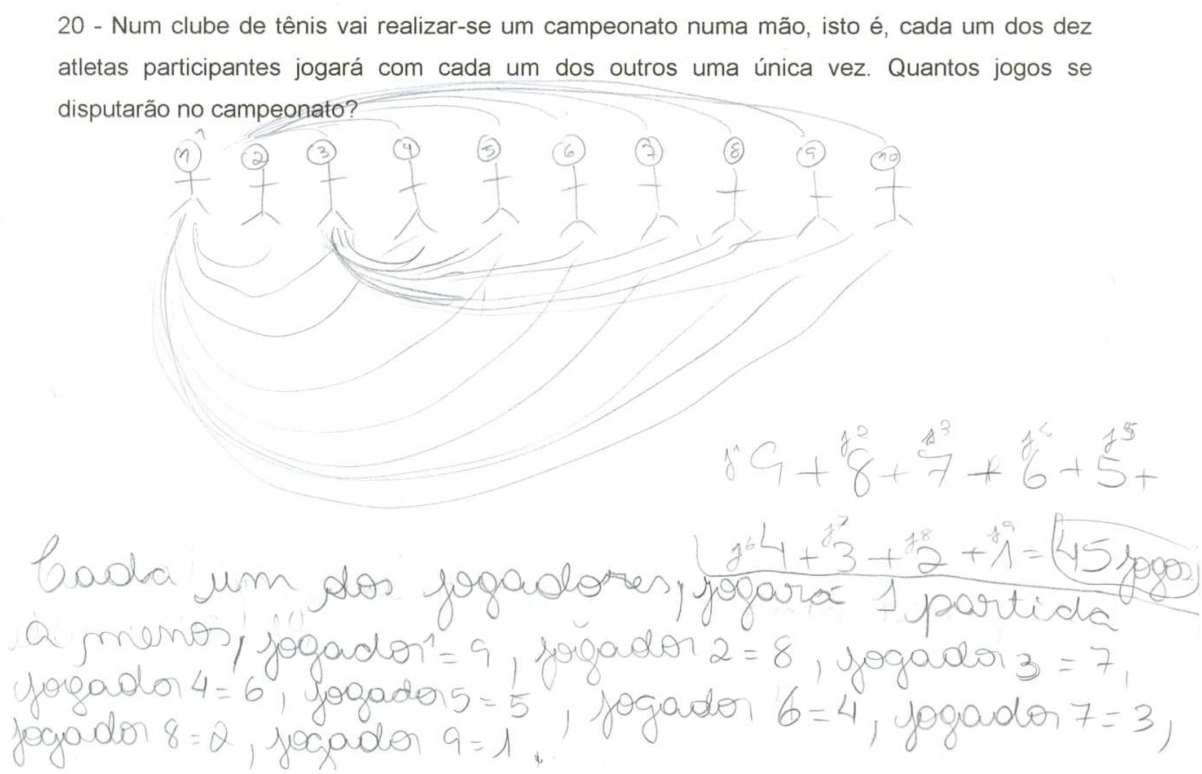


Problema 20

Para finalizar este capítulo, apresentamos o Problema 20 que, assim como o anterior, deixou de ser resolvido por apenas uma dupla. Os demais utilizaram a estratégia de Desenho como forma de verificar um comportamento para, em seguida, organizar os dados, no formato de uma Tabela. Um exemplo dessa forma de resolver é apresentado na Figura 43, através da resolução de P2.

O aluno, juntamente com seu colega de dupla, desenhou a situação, ou seja, os 9 jogadores, simulando, através da união de 2 jogadores com uma linha, as possibilidades de jogos para os 3 primeiros jogadores, observando, a partir disso, que, para cada jogador, deveriam contar uma partida a menos que o anterior, já que precisavam considerar, por exemplo, apenas um jogo entre o jogador 1 e o jogador 2. Ao observar essa regularidade, partiram para a organização dos dados em uma espécie de Tabela, provavelmente por considerar que seria menos trabalhoso do que realizar todas as possibilidades e depois contá-las. Na “Tabela”, anotaram quantos jogos cada jogador teria, desconsiderando as repetições e, ao final, somaram.

Figura 43 – Problema 20 e resolução de P2 utilizando as estratégias de Desenho e Tabela



Problema extraído de <http://educamat.ese.ipcb.pt/0607/images/PDF/Mater_2C/sessao_03_estrategias.pdf>

Mais uma vez é possível perceber que os participantes começaram a desenvolver mecanismos facilitadores para as resoluções, através da análise do plano traçado para cada problema. É positivo o fato de alguns alunos terem se dado conta de que não precisariam desenvolver todo o desenho, percebendo através dele, a existência de outra estratégia mais fácil e ágil de resolução.

Ao final do período de realização dos encontros, percebemos a evolução dos alunos no que tange à ampliação do repertório de estratégias utilizadas, em comparação ao que foi exposto por eles mesmos na primeira discussão, onde evidenciaram o Cálculo como principal forma de resolver problemas. Apesar disso, nos problemas propostos no decorrer da intervenção pedagógica, esta estratégia foi uma das menos utilizadas pelos participantes.

Também vemos com destaque a mudança de postura, embora que pequena ainda, quanto à confiança e autonomia para testar planos traçados para a resolução, sendo que inicialmente, os alunos mostravam-se extremamente dependentes, questionando qual o tipo de conta a ser feita ou se o caminho pensado estava correto. Dante (2009, p. 57) destaca a importância de não fornecer respostas diretas à essas perguntas, o que resolveria o problema oportunizando que o aluno não precisasse pensar, apenas “executar as contas rápida e automaticamente”. Segundo o autor, se o professor lançar outro questionamento, discutir o problema com o aluno ou mesmo sugerir que o faça com um colega, “os alunos continuam envolvidos com o problema e pouco a pouco vão perguntando menos e tornando-se mais independentes e autônomos” (DANTE, 2009, p 57). No próximo capítulo, apresentaremos os resultados de uma coleta de dados obtida após a intervenção pedagógica, com os quais será possível aferir a relevância da mesma.

6 COLETA DE DADOS FINAL

Com o objetivo de obter indícios sobre a eficácia da intervenção pedagógica realizada com os alunos e obter mais subsídios para a análise dos dados, organizamos uma coleta de dados composta por dois instrumentos, sendo o primeiro uma seleção de oito problemas previamente selecionados, propostos aos nove participantes da pesquisa para resolução individual. Tais problemas, de forma semelhante aos demais que foram propostos aos alunos durante a intervenção pedagógica, foram extraídos de diferentes fontes, como livros didáticos, Olimpíadas matemáticas e outras publicações da área. Como principal critério de seleção, buscamos problemas para os quais houvesse mais de uma possibilidade de resolução, contemplando as diversas estratégias que foram compartilhadas durante o período da intervenção pedagógica.

O segundo instrumento consistiu em uma entrevista semiestruturada com os participantes, a qual foi gravada e transcrita para facilitar a análise. As perguntas, previamente elaboradas, estavam focadas em evidenciar a opinião dos alunos quanto à participação nos encontros, a possíveis mudanças de postura no que tange à resolução de problemas e à utilização de estratégias diferenciadas no processo.

Na sequência deste capítulo serão detalhados os instrumentos utilizados para a última coleta de dados, bem como resultados obtidos a partir dos mesmos. Em forma de tabela, apresentaremos na primeira seção, um resumo quantitativo das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas que compuseram a coleta de dados. Os problemas propostos vem acompanhados de exemplos de resoluções desenvolvidas pelos alunos, bem como análises das mesmas, focando nas estratégias utilizadas e no raciocínio desenvolvido pelos alunos. Na segunda seção, analisaremos as entrevistas realizadas com os alunos, destacando opiniões dos mesmos com relação à participação na intervenção pedagógica, à possível superação de dificuldades na interpretação e resolução de problemas matemáticos, ao trabalho em grupo e, principalmente, quanto à ampliação do repertório de estratégias e sua influência no processo de resolução de problemas.

6.1 Resolução de problemas matemáticos

Um dos instrumentos utilizados para a coleta de dados após a intervenção pedagógica foi uma seleção de oito problemas, resolvidos individualmente pelos participantes. Sintetizamos na Tabela 3, a quantidade de alunos que utilizou cada estratégia para a resolução dos problemas desta etapa, diferenciando aqueles que obtiveram êxito daqueles que não chegaram à resposta correta. As estratégias “Organizar padrões” e “Eliminação”, não foram identificadas nas resoluções dos alunos e, por isso, não foram incluídas na Tabela 3. Cabe ressaltar ainda, que algumas resoluções foram classificadas em duas categorias e, por isso, para alguns problemas, o total de estratégias utilizadas é superior ao total de alunos participantes.

É possível que a opção por propor aos alunos oito problemas neste instrumento não tenha sido a mais apropriada, visto que, transcorridas aproximadamente 1h30min a 2h do início do encontro, demonstraram-se cansados e desestimulados a finalizar a resolução dos problemas. Essa pode ter sido uma das causas do alto índice de alunos que não resolveram os problemas 2 e 8.

Tabela 3 - Categorização das resoluções apresentadas pelos alunos na coleta de dados final

Estratégia Utilizada	Correção	Problema								
		1a	1b	2	3	4	5	6	7	8
Cálculo	Correta	-	05	-	01	-	-	-	-	01
	Errada	-	-	01	01	03	05	01	03	02
Desenho	Correta	-	-	-	-	-	07	-	-	03
	Errada	-	-	-	-	-	-	-	-	01
Organizar padrões	Correta	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Errada	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Trabalhar em sentido inverso	Correta	-	-	-	-	-	-	-	01	-
	Errada	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Tabelas	Correta	08	01	-	-	01	-	-	-	-
	Errada	01	01	-	-	04	-	-	-	-
Reduzir a unidade	Correta	-	-	-	-	-	-	02	-	-
	Errada	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Tentativa e erro	Correta	-	-	05	07	-	-	03	06	-
	Errada	-	-	-	-	-	-	01	-	-
Só resposta	Correta	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Errada	-	01	-	-	-	-	01	-	-
Não respondeu		-	01	03	-	01	01	01	-	04
TOTAL		09	09	09	09	09	13	09	10	11

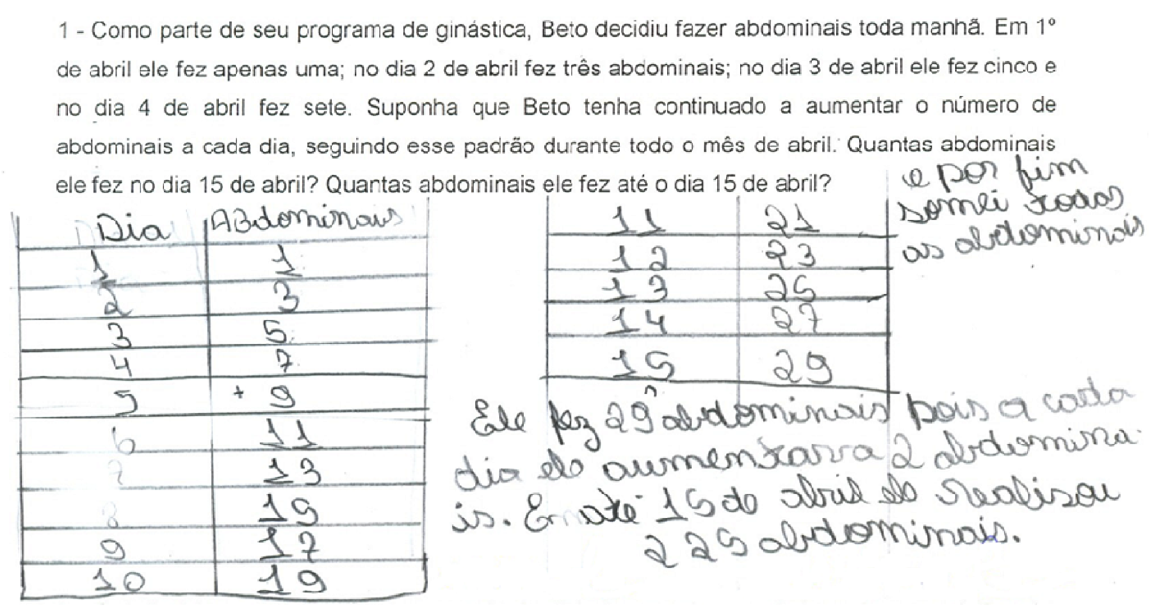
Fonte: Sistematização feita pela autora

Quanto aos dados sintetizados nas Tabela 3, cabe salientar algumas diferenças com relação àqueles obtidos na coleta de dados inicial e apresentados na Tabela 2, como por exemplo, a significativa redução da quantidade de alunos que apenas assinalou uma resposta, ao invés de desenvolver uma resolução. Destacamos também o predomínio da utilização de estratégias diferentes do Cálculo formal na maioria dos problemas e alto índice de acertos nesses casos.

Problema 1

O Problema 1 está entre os que os alunos mais obtiveram êxito na resolução, principalmente ao analisarmos a questão “a”, que foi resolvida por todos os alunos de forma semelhante àquela utilizada por P5, na Figura 44.

Figura 44 – Problema 1 e resolução de P5 utilizando a estratégia de Tabela


1 - Como parte de seu programa de ginástica, Beto decidiu fazer abdominais toda manhã. Em 1° de abril ele fez apenas uma; no dia 2 de abril fez três abdominais; no dia 3 de abril ele fez cinco e no dia 4 de abril fez sete. Suponha que Beto tenha continuado a aumentar o número de abdominais a cada dia, seguindo esse padrão durante todo o mês de abril. Quantas abdominais ele fez no dia 15 de abril? Quantas abdominais ele fez até o dia 15 de abril?

Dia	Abdominais
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13
8	15
9	17
10	19
11	21
12	23
13	25
14	27
15	29

e por fim somei todos os abdominais

Ele fez 29 abdominais pois a cada dia ele aumentava 2 abdominais. Em até 15 de abril ele realisou 225 abdominais.

Problema adaptado de Allevato e Onuchic (2009)

O aluno organizou uma Tabela com a quantidade de abdominais diários feitos por Beto, levando em consideração o acréscimo de duas repetições do exercício a cada dia, até chegar ao dado solicitado pelo problema, ou seja, a quantidade de abdominais no dia 15. Apesar de não apresentar a resolução para a questão “b”, esclarece que somou todos os abdominais, utilizando, portanto, um Cálculo com dados extraídos da Tabela, para chegar à resposta. Se considerarmos o conteúdo envolvido neste problema (Progressão Aritmética), ele seria abordado apenas com alunos do Ensino Médio, mas nem por isso, alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, deixaram de resolvê-lo, dando indícios do importante papel da utilização de estratégias diferenciadas na resolução de problemas.

Problema 2

Quanto ao Problema 2, evidencia-se através da Tabela 3, o predomínio da utilização de Tentativa e erro, para resolução, como exemplificado na Figura 45, com a resolução de P7.

Figura 45 – Problema 2 e resolução de P7 utilizando a estratégia de Tentativa e erro

2 - O João foi a uma loja e gastou metade do dinheiro que tinha e ainda mais um real. Depois, entrou numa segunda loja e gastou metade do dinheiro que lhe restava e ainda mais um real, tendo esgotado o dinheiro todo. Quanto dinheiro tinha ele antes de ir à primeira loja?

6 reais, gastou metade mais 1 ficou com 2, foi até a outra loja gastou metade e mais 1 real e esgotou o dinheiro.

4 = 2 + 1 = 3 = 1 não

6 = 3 + 1 = 4 gastou 2 = 1 e gast

Problema adaptado de http://educamat.ese.ipcb.pt/docs/sessao4_estrategias_resolucao.pdf

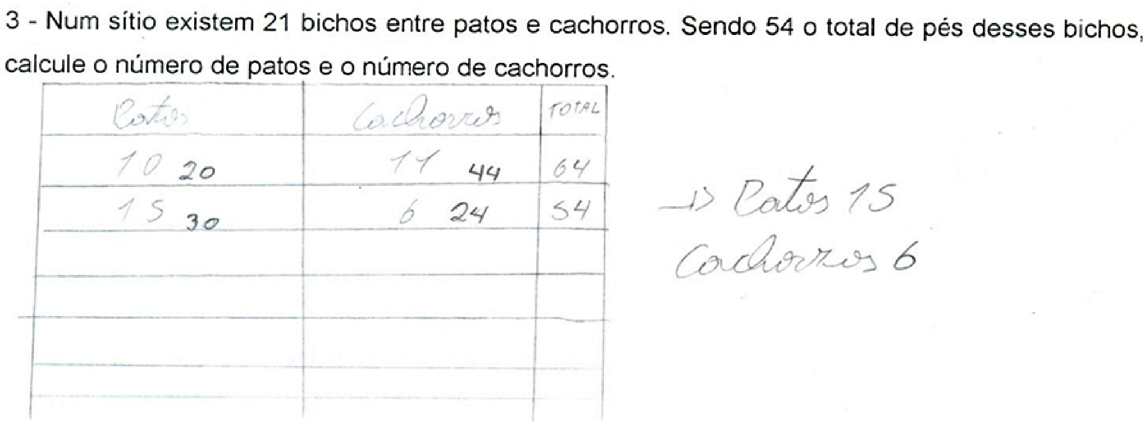
Nessa resolução é possível perceber que o aluno testou, inicialmente, o valor R$4,00, chegando a conclusão de que assim, ao sair da primeira loja, João teria apenas R$1,00, o que o impossibilitaria de gastar a metade e mais R$1,00. Testou, portanto, um valor maior, R$6,00, com o qual obteve êxito, satisfazendo a condição do problema de esgotar o dinheiro inicial. Consideramos que, para um problema como este, a estratégia de Trabalhar em sentido inverso garantiria mais rapidez na resolução, já alguns alunos chegaram a testar em torno de 10 valores diferentes, até chegar ao resultado correto. Porém, como comprovado por cinco alunos, a Tentativa e erro também possibilita encontrar a resposta.

Problema 3

Para resolver o Problema 3, caso optasse pelo Cálculo formal, o aluno deveria organizar um sistema de equações e resolvê-lo. Dentre os participantes, entretanto, a preferência foi pela utilização de Tentativa e erro, conforme evidenciado na Tabela 3. Apenas dois alunos utilizaram o Cálculo, sendo que um deles não obteve êxito. Na Figura 46, apresentamos a resolução de P9, que testou valores (Tentativa e erro) organizados em uma Tabela.

Inicialmente, o aluno supôs a existência de 10 patos e 11 cachorros, o que satisfaz a condição de 21 animais, ultrapassando, contudo, a quantidade de pés estipulada, conforme anotado na 3ª coluna, a partir da soma dos valores das outras duas colunas, onde apresentou a quantidade de animais e ao lado, o total de pés. É provável que o aluno tenha analisado que, para reduzir a quantidade de pés, era necessário reduzir também a quantidade de cachorros e aumentar os patos, talvez até, tenha simulado outros valores mentalmente, já que, após o primeiro teste, utilizou logo as quantidades adequadas.

Figura 46 – Problema 3 e resolução de P9 utilizando a estratégia de Tentativa e erro



3 - Num sítio existem 21 bichos entre patos e cachorros. Sendo 54 o total de pés desses bichos, calcule o número de patos e o número de cachorros.

Patos	Cachorros	TOTAL
10 20	11 44	64
15 30	6 24	54

→ Patos 15
Cachorros 6

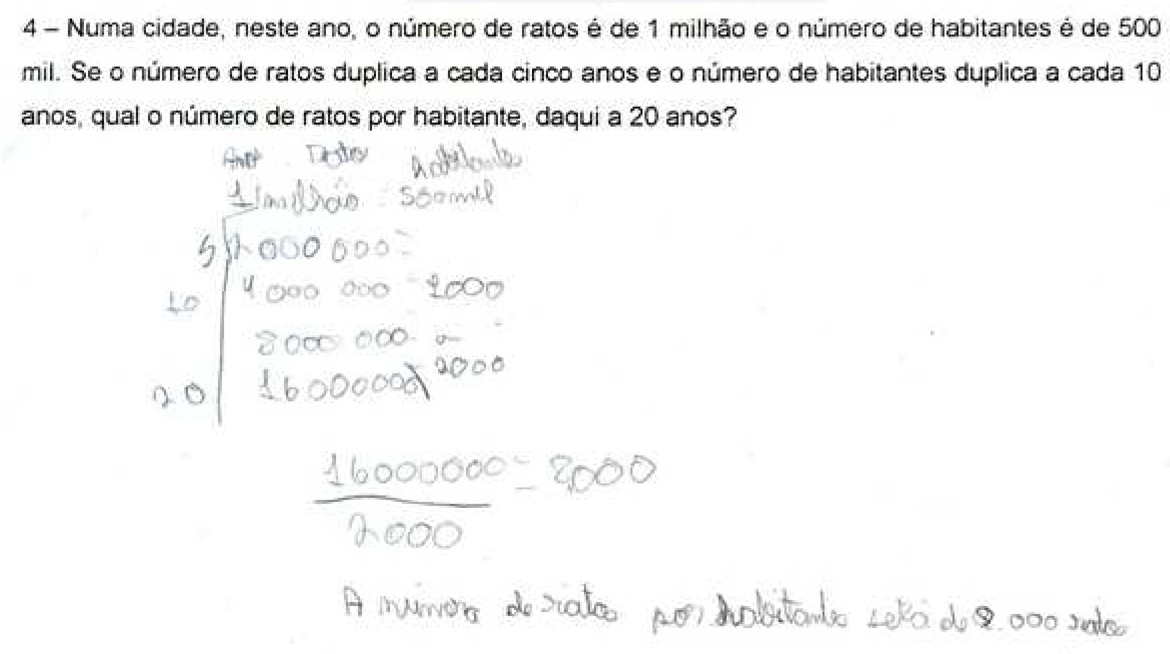
Problema adaptado de http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=240

Cury e Bisognin (2009) verificaram a utilização da estratégia de Tentativa e erro até mesmo por alunos ingressantes no Ensino Superior, ao resolver problemas envolvendo sistemas de equações. Nem todos utilizaram representações bem elaboradas matematicamente, mas alguns deles chegaram à resposta correta para o problema. As autoras consideram, baseadas em documentos oficiais, que tais estudantes já deveriam ter evoluído desta forma de resolução, para a utilização dos métodos de adição ou substituição. Entretanto, alguns dos alunos sequer conseguiram modelar corretamente a situação e, dentre os que alcançaram esta etapa, há aqueles que não foram capazes de resolver.

Problema 4

O Problema 4 foi o que teve maior índice de erro, talvez por se tratar de algo que não seja corriqueiro, que os alunos poucas vezes ou nunca tenham se deparado com situações semelhantes. Na Figura 47, apresentamos a resolução proposta por P10, que elaborou um plano de resolução com potencial de alcançar a resposta correta, envolvendo a organização de uma Tabela.

Figura 47 – Problema 4 e resolução de P10 utilizando a estratégia de Tabela



4 – Numa cidade, neste ano, o número de ratos é de 1 milhão e o número de habitantes é de 500 mil. Se o número de ratos duplica a cada cinco anos e o número de habitantes duplica a cada 10 anos, qual o número de ratos por habitante, daqui a 20 anos?

Ano Ratos habitantes
1 milhão 500 mil
5 2 000 000
10 4 000 000 1000
8 000 000
20 16 000 000 2000

16000000 / 2000 = 8000

O número de ratos por habitantes será de 8.000 ratos

Problema adaptado de Haetinger et al (2011)

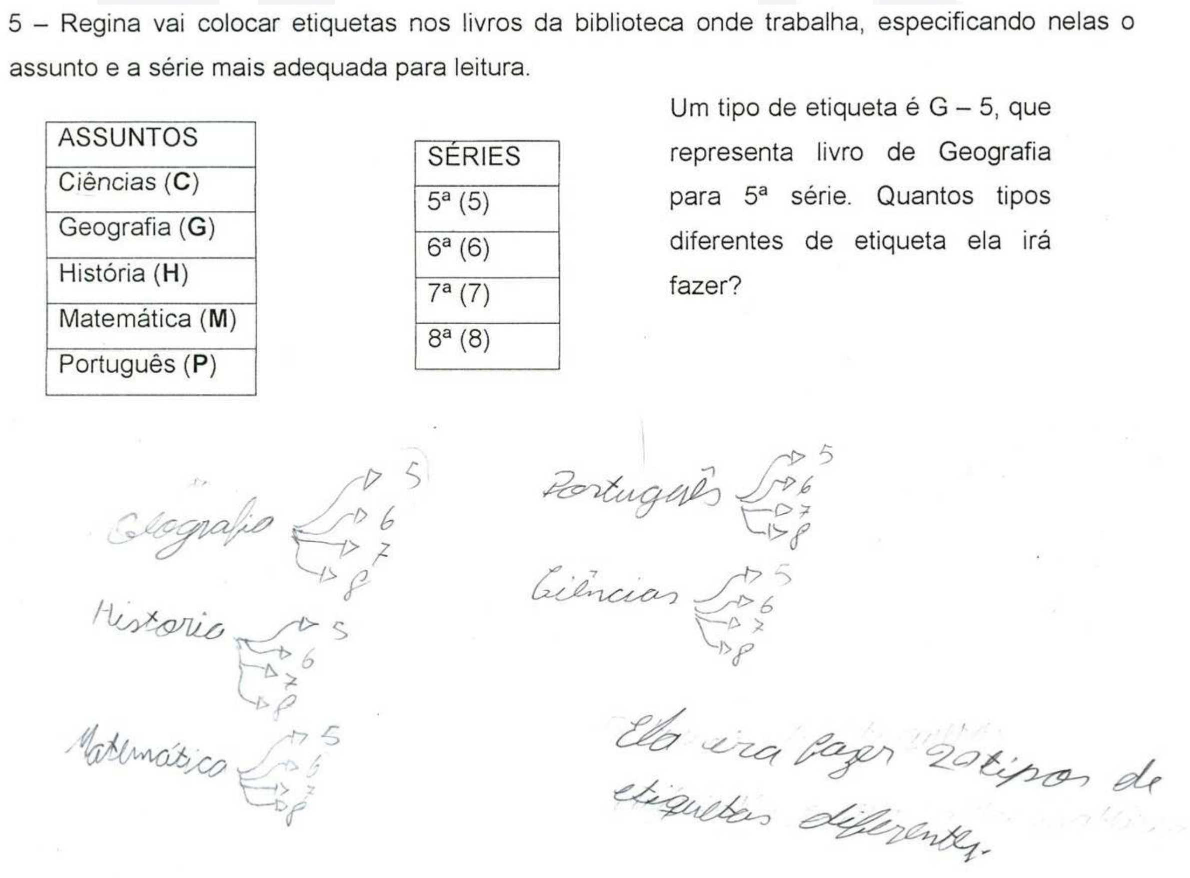
Como podemos perceber, o aluno registrou na segunda linha, a quantidade 1 milhão de ratos e 500 mil habitantes e, ao registrar a quantidade de animais, transcorridos os primeiros 5 anos, substituiu a palavra “milhão” pela respectiva quantidade de zeros. Entretanto, ao registrar o aumento populacional, parece ter ignorado a palavra mil, já que, ao dobrar “500 mil”, utilizou apenas o número “1000”. O aluno inclusive tomou o cuidado de dobrar a quantidade de ratos a cada cinco anos e de pessoas a cada 10 anos, conforme o enunciado previa e de realizar a divisão, ao final, de ratos por habitantes. Um pequeno descuido, entretanto, causou o insucesso na resolução, apesar de a estratégia ter sido planejada corretamente.

Semelhante ocorreu com os demais alunos que fizeram uso de Tabelas: erraram ao manipular os números, quintuplicando ou acrescentando 2 milhões ao invés de dobrar a quantidade, por exemplo. Outros alunos não realizaram a divisão, ao final, da quantidade de ratos pelos habitantes e, na resposta, registraram “16.000.000 de ratos para cada habitante”, ignorando os 2.000.000 encontrados.

Problema 5

O Problema 5, exemplificado na Figura 48 com a resolução de P6, envolve a combinação de elementos e foi resolvido corretamente, através de Desenho, por sete, dos nove participantes.

Figura 48 – Problema 5 e resolução de P6 utilizando a estratégia de Desenho



5 – Regina vai colocar etiquetas nos livros da biblioteca onde trabalha, especificando nelas o assunto e a série mais adequada para leitura.

ASSUNTOS
Ciências (**C**)
Geografia (**G**)
História (**H**)
Matemática (**M**)
Português (**P**)

SÉRIES
5ª (5)
6ª (6)
7ª (7)
8ª (8)

Um tipo de etiqueta é G – 5, que representa livro de Geografia para 5ª série. Quantos tipos diferentes de etiqueta ela irá fazer?

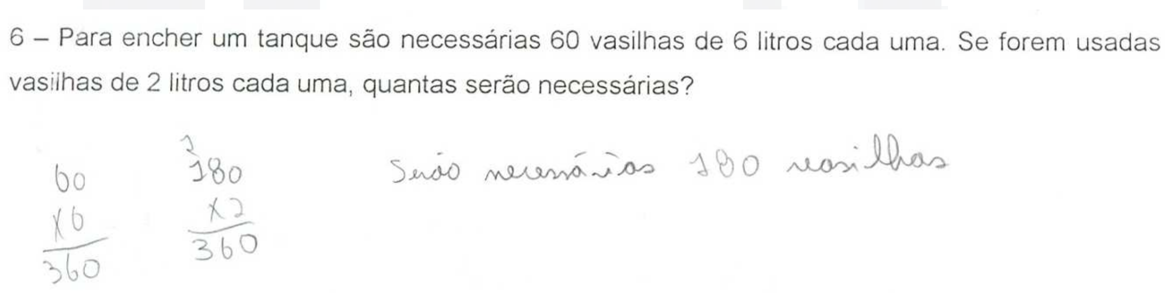
Problema extraído de Dante (2005)

Este aluno simulou todas as possibilidades de etiquetas a serem feitas, organizando esquemas onde representou cada disciplina ligada a cada série, compondo um total de 20 etiquetas diferentes. Esquemas semelhantes a este, ou como no caso de outro aluno, que ligou cada disciplina a cada série, nas tabelas apresentadas no problema, foram categorizados como Desenho. O aluno que utilizou Cálculo, somou os números 5, 6, 7 e 8, parecendo não ter entendido a proposta do problema.

Problema 6

O Problema 6, que foi resolvido corretamente por alunos que utilizaram Redução de unidade e Tentativa e erro, é apresentado na Figura 49, acompanhado da resolução de P3, utilizando Tentativa e erro.

Figura 49 – Problema 6 e resolução de P3 utilizando a estratégia de Tentativa e erro


6 – Para encher um tanque são necessárias 60 vasilhas de 6 litros cada uma. Se forem usadas vasilhas de 2 litros cada uma, quantas serão necessárias?

60
x6
360

180
x2
360

São necessárias 180 vasilhas

Problema extraído de http://www.alunosonline.com.br/matematica/grandezas-inversamente-proporcionais-.html

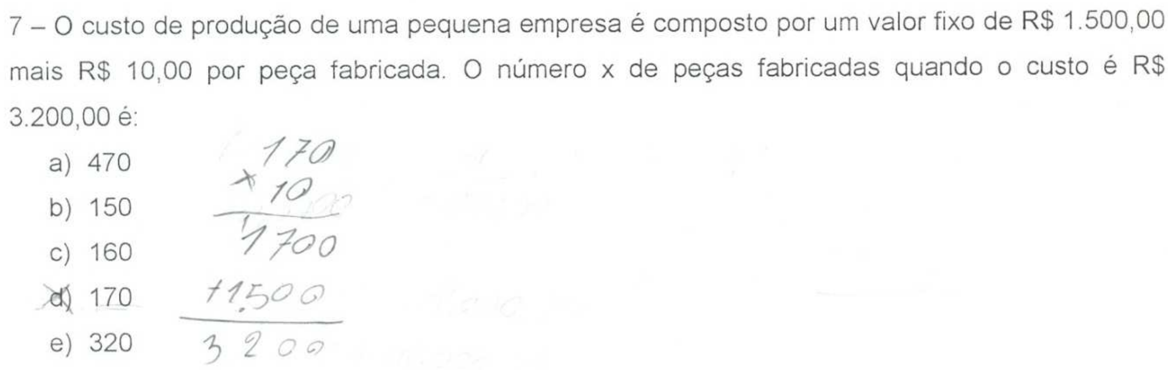
Neste caso, o aluno verificou a capacidade do tanque para, em seguida, testar quantidades de vasilhas de 2 litros que resultassem nos mesmos 360 litros. Não é possível definir se o aluno percebeu que deveriam ser 180 vasilhas ou se realizou testes em outro local ou apagou-os da folha.

Outros alunos, que optaram pela Redução da unidade, dividiram 360 litros em vasilhas com capacidade para 2 litros, encontrando, portanto, a necessidade de 180 vasilhas. Para realização do Cálculo formal, seria necessário organizar uma regra de três, mas tomar o cuidado de que as grandezas são inversamente proporcionais, o que pode ser facilmente esquecido pelos alunos. Oliveira (2009) em um estudo das estratégias utilizadas por alunos do Quebec em problemas de proporcionalidade verificou esta dificuldade da parte de alguns alunos. Entretanto, chamou atenção no estudo, o fato de que, mesmo antes do ensino formal do conceito de proporcionalidade, os participantes do estudo foram “capazes de resolver problemas de proporção inversa, apoiando-se, para isso, em estratégias próprias e de maneira consciente/controlada” (OLIVEIRA, 2009, P. 73).

Problema 7

Para resolução do Problema 7, pode-se utilizar o método algébrico, com organização de uma equação com uma incógnita, ou então, utilizar estratégias como Trabalhar em sentido inverso ou Tentativa e erro, a partir das alternativas que o compõem. Na Figura 50 apresentamos a resolução de P6 através de Tentativa e erro, que foi a que se demonstrou mais eficaz.

Figura 50 – Problema 7 e resolução de P6 utilizando a estratégia de Tentativa e erro



7 – O custo de produção de uma pequena empresa é composto por um valor fixo de R$ 1.500,00 mais R$ 10,00 por peça fabricada. O número x de peças fabricadas quando o custo é R$ 3.200,00 é:

a) 470
b) 150
c) 160
d) 170
e) 320

Problema extraído de Brasil (2008b)

Caso o problema não apresentasse alternativas de resposta, consideramos que a estratégia de Trabalhar em sentido inverso seria mais pertinente, pois bastaria ao aluno subtrair R$1500,00 de R$3200,00 e dividir o resultado por R$10,00.

Problema 8

O Problema 8 teve alto índice de alunos que não responderam (quatro de um total de 9), o que pode estar relacionado ao fato de ser o último, na organização da seleção. Dentre os que resolveram corretamente, destaque para a estratégia de Desenho, que durante toda a intervenção pedagógica, foi a mais utilizada para problemas envolvendo frações, como é o caso deste. Na Figura 51, apresentamos a resolução de P7, utilizando esta estratégia.

Figura 51 – Problema 8 e resolução de P7 utilizando a estratégia de Desenho

8 - Em um concurso foi concedido um tempo T para realização de uma prova de Matemática. Um candidato gastou $1/3$ deste tempo para resolver a parte de Aritmética e $1/4$ do tempo restante para resolver a parte de Álgebra. Como ele só gastou $2/3$ do tempo de que ainda dispunha para resolver a parte de Geometria, entregou a prova faltando 35 minutos para o término da mesma. Qual foi o tempo concedido para a realização da prova?

Problema extraído de Haetinger et al (2007)

Para esta resolução, provavelmente o aluno tenha, inicialmente, dividido o círculo em três partes e pintado uma, para representar o tempo gasto com a parte de Aritmética e, em seguida, dividido cada uma das partes restantes em duas, para destacar o tempo utilizado para a realização da parte de Álgebra. Dessa forma, teria sobrado ainda metade do tempo disponibilizado inicialmente, de onde foram pintadas duas partes, pois já estava dividida em três, restando $1/6$ do tempo total, o que, segundo ao enunciado, corresponde a 35 minutos. Após, o aluno deve ter adicionado todas as partes de 35 minutos, obtendo o tempo total fornecido para a realização da prova.

Com relação ao material escrito produzido pelos alunos a partir dos problemas propostos, destacamos que surpreendeu-nos a quantidade de estratégias utilizadas desde o início dos encontros, já que esse comportamento não foi observado, por exemplo, na coleta de dados inicial. Alguns alunos demonstraram-se mais insistentes, inicialmente, em tentar utilizar conteúdos que estavam sendo estudados nas aulas de Matemática do horário regular, resistindo à busca por estratégias próprias de resolução. Este fato pode ser decorrente da Matemática do século XIX, quando educadores acreditavam que a “resolução de problemas deveria ocorrer como aplicação de princípios aprendidos”, segundo D’Ambrósio (2008, texto digital) que lamenta o predomínio desta visão há mais de 150 anos. Cabe destacar que “ao propor uma forma de trabalho diferente da que estão acostumados, é preciso considerar que a adaptação dos alunos a esta metodologia será lenta, sendo um processo contínuo que evolui aos poucos” (DULLIUS, ARAÚJO E VEIT, 2011). Com o tempo, porém, parecem ter entendido que os encontros não tratavam de conteúdos específicos ou de algo diretamente relacionado às aulas.

6.2 Entrevista semiestruturada com os alunos

A entrevista semiestruturada com os participantes foi gravada e, posteriormente, transcrita[6] para análise da percepção de cada aluno com relação ao trabalho desenvolvido. A entrevista era composta por nove questões norteadoras, acrescidas, ocasionalmente, de perguntas para esclarecimentos ou aprofundamento das opiniões dos alunos. A maioria dos participantes demonstrou bastante timidez em participar da entrevista, mesmo que estivéssemos gravando apenas o áudio. Após duas ou três entrevistas, optamos por ter em mãos o material produzido pelos alunos durante os encontros para comentá-lo, retomar o que haviam feito, numa tentativa de fazê-los expressar mais opiniões acerca da intervenção pedagógica.

O início da conversa remeteu ao primeiro encontro, onde os alunos relataram, na discussão inicial, dificuldades com a interpretação dos problemas e em saber o que fazer com os dados apresentados. Durante a entrevista, foi possível perceber, na fala de alguns alunos que os encontros os auxiliaram a superar parte dessas dificuldades, citando, à princípio, melhorias no que tange à interpretação dos problemas e ao gosto em resolvê-los, como por exemplo, no relato de P2:

[6] Transcrevemos as falas fazendo pequenas correções gramaticais, quando a forma original tornaria o texto de difícil compreensão

> *P2: Eu comecei a prestar mais atenção nos problemas, ler eles com calma, se eu não entendi eu leio mais uma vez até eu entender.*
> *Pesquisadora: E quanto à resolução, tu tinhas dificuldades também ou logo que conseguisses entender o problema, tu já sabias uma forma de resolver?*
> *P2: Eu tinha que pensar um pouco em como colocar os dados...*
> *[...]*
> *P2: Acho que mudou a facilidade de fazer as coisas.*
> *Pesquisadora: Mas e o gostar? Mudou ou não?*
> *P2: Comecei a gostar um pouquinho mais.*
> *[...]*
> *P2: Os problemas a gente tentava resolver, conforme a gente ia tentando, de tantos problemas que a gente fez a gente ia começando a aprender mais, sempre mais, um pouquinho mais.*

No relato de P5 percebemos a influência do conhecimento e utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas na motivação e no aumento do gosto do aluno pela resolução:

> *P5: Eu acho que eu gostei mais, eu não gostava, uma vez, de resolver problemas, agora melhorou um pouco.*
> *Pesquisadora: Melhorou um pouco, que bom. Por que tu achas que melhorou um pouco? O que influenciou para gostares um pouquinho mais?*
> *P5: Acho que as novas maneiras de resolver.*
> *Pesquisadora: Isso te ajudou?*
> *P5: É, isso.*
> *Pesquisadora: O que isso faz contigo, essas novas maneiras de resolver?*
> *P5: Faz com que eu goste mais acho.*
> *Pesquisadora: Mas por que tu achas que resolvendo de outras maneiras tu podes gostar mais?*
> *P5: Porque assim eu vou aprendendo um pouco mais também, não sei, acho que é isso.*

É provável que essa possibilidade, por ter proporcionado ao aluno, mais gosto pela resolução de problemas, tenha influenciado também na facilidade com que resolve e na eficácia do processo. Compartilhamos com Diniz (2001, p. 95) a ideia de que “a motivação do aluno está em sua percepção de estar apropriando-se ativamente do conhecimento, ou seja, a alegria de conquistar o saber, de participar da elaboração de ideias e procedimentos, gera o incentivo para aprender e continuar a aprender”.

Também lembramos, na entrevista, que no primeiro encontro a maioria, ao falar de formas de resolver problemas, citou apenas o cálculo formal, apesar de saber da existência de outras formas. Questionados se passaram a conhecer outras formas, muitos alunos negaram ou citaram apenas uma ou duas, mas, no decorrer da conversa, lembrando dos problemas resolvidos nos encontros, passaram a citá-las. Alguns ressaltaram que conheceram tais estratégias nos encontros, pois não faziam uso das mesmas anteriormente, como por exemplo P8, enquanto discutíamos o Problema 1 da coleta de dados final:

> *Pesquisadora: Por exemplo, tu usaste um cálculo para fazer isso ou uma equação.*
> *P8: Ia contando os dias e quantos dias que fazia cada dia e ia somando. Ai deu isso*
> *Pesquisadora: Isso, tu concordas que não é cálculo, não é uma equação que tu pegaste ou uma fórmula pronta em que tu trocaste letras por números para resolver?*
> *P8: Não.*
> *Pesquisadora: Isso aqui a gente chama, na verdade, tua organização é de uma tabela, mas tu foste fazendo as tentativas de ver quantos abdominais a cada dia, tu foste simulando todos os valores. Então isso não é cálculo formal isso é uma mistura de tentativa e erro com tabela. Essa é uma estratégia que tu usaste. Tu conhecias isso? Tu costumavas resolver problemas desse jeito?*
> *P8: Desse jeito não, depois que eu vim nas aulas de tarde eu aprendi.*

P2 tem opinião semelhante:

> *Pesquisadora: Então, essas formas de resolver, tu já conhecias ou passaste a conhecer e a usar nesses nossos encontros?*
> *P2: Eu comecei a usar e conhecer novos aqui nos encontros.*

Como vários alunos haviam comentado das dificuldades em interpretar, questionamos se preferem que alguém faça a leitura do problema ou se entendem melhor quando eles próprios leem. Em relação a este aspecto, as opiniões ficaram divididas, sendo necessário, portanto, que o professor, ao trabalhar com resolução de problemas, proporcione ambas as formas de leitura.

> *P4: Deixa eu ver, é que a profe já lê tipo, já interpretando, falando e explicando melhor.*
> *P6: Se alguém lê pra mim, eu interpreto mais, porque se eu leio, eu não guardo muito a informação...*
> *P7: Mas eu gosto mais, particularmente, que eu leia bastante vezes, para que depois eu consiga bem (entender).*
> *P9: Eu prefiro ler bastante também com a professora junto né, pra resolver. E tem partes que eu não entendo e dá uma pista, daí eu consigo resolver, consigo entender melhor.*

Com relação à leitura nas aulas de Matemática, Smole e Diniz (2001) destacam que existem características próprias que podem diferir textos específicos da disciplina daqueles da língua materna. Segundo as autoras, as dificuldades dos alunos com relação à leitura e escrita matemática podem estar ligadas à ausência de um trabalho específico de familiarização com a linguagem e os símbolos próprios deste componente curricular, fazendo-se necessária a criação de “uma rotina de trabalho que articule momentos de leitura individual, oral, silenciosa ou compartilhada, de modo que, nas aulas de Matemática, os alunos defrontem-se com situações efetivas e diversificadas de leitura” (SMOLE; DINIZ, 2001, p. 71).

A terceira, a quinta e a sexta perguntas tiveram foco na opinião dos alunos quanto à importância de conhecer e utilizar outras maneiras de resolver problemas e à contribuição das mesmas no processo de resolução. Foi unânime entre os alunos a opinião de que o conhecimento de outras estratégias de resolução de problemas pode contribuir, auxiliar na melhoria da forma de resolver problemas ou torná-la mais fáceis. P10 relatou, por exemplo, que ao esquecer de uma fórmula, pode recorrer a outra estratégia para resolver problemas em aula:

> *Pesquisadora: Conhecer essas formas, essas formas diferentes te ajuda a resolver problemas melhor?*
> *P10: Ajuda, bastante eu acho.*
> *Pesquisadora: Por quê?*
> *P10: Porque assim, se tu não vai lembrar, por exemplo, numa prova, talvez do Teorema de Pitágoras, alguma coisa assim, dai isso pode ajudar.*

P9 evidenciou opinião semelhante durante uma discussão a respeito de um problema que envolvia sistemas de equações:

Pesquisadora: Esse problema poderia ter sido resolvido através de um sistema, certo?
P9: Sim.
Pesquisadora: E por quê fizeste uma tabela?
P9: Porque é mais fácil, porque montar o sistema é muito difícil. E colocar os números em ordem, se tu fizer a equação errada, tu não acerta.

P2 e P5 também confirmaram a importância de conhecer diferentes estratégias:

> *P2: Sim, porque não é tão difícil fazer por equações, mas é mais fácil fazer por assim (estratégias) [...] tem que ir mais ou menos por lógica.*
> *P5: Sim.*
> *Pesquisadora: Por quê?*
> *P5: Porque quando a gente não sabe resolver por um método, a gente tenta pelo outro.*

P9: Sim, porque é mais fácil de resolver. Eu, por mim, acho mais fácil, a maioria também acha.

Alguns alunos destacaram também a utilização das estratégias em situações com as quais se depararam nas atividades da Matemática do currículo escolar:

P5: Tinha na apostila alguns problemas que eram parecidos e aí a gente tentava.
Pesquisadora: Aí tu conseguiste transportar teus conhecimentos daqui?
P5: É, do projeto pra sala de aula.

Pelo relato de P3, podemos inferir que considera que as estratégias serão mais úteis para os problemas da vida cotidiana, aqueles que terá que enfrentar e resolver fora da escola.

Pesquisadora: Tu achas importante poder usar essas estratégias?
P3: Claro que é!
Pesquisadora: Por quê?
P3: Porque pode usar no dia, geralmente, no futuro.

Ao discutir com alguns alunos, questões pontuais, como por exemplo, um problema específico e a forma de resolução que tenha utilizado, ficou evidenciado, por diversas vezes, a preferência destes e facilidade maior para lidar com outras estratégias do que com o cálculo formal. Ao analisar, juntamente com P8 a resolução através de Desenho, desenvolvida para o Problema 1 do primeiro encontro (Figura 1), explicamos que, utilizando Cálculo, seria necessário comparar frações, com necessidade de simplificação, exemplificando isso em uma folha. O aluno relatou que não haviam pensado nessa forma de resolução e confirmou a importância do conhecimento e uso de estratégias diferenciadas:

P8: Porque aquela conta que tu explicou ali, eu não lembro direito como se resolve e (com) esse sistema de lógica, cheguei à resposta certa.

É importante salientar que, por diversas vezes, diferentes alunos citaram, no decorrer das conversas, a palavra “lógica”, ao que buscávamos confirmação quanto ao significado que estavam dando para a mesma. Todos eles confirmaram a utilização dessa palavra para designar estratégias diferentes do cálculo formal, ou seja, o que nós pesquisadores nomeamos como Tabelas, Desenho, Tentativa e erro, Redução de unidade, entre outras, para eles se resume na palavra “lógica”

Comentando com P7 a respeito do Problema 3 da coleta de dados final (apresentado na Figura 46), questionamos se saberia resolver através de um sistema de equações (Cálculo formal):

P7: Mais ou menos sim.
Pesquisadora: Tu lembras como se monta um sistema de equações e como se resolve?
P7: Mais ou menos profe, não muito.
Pesquisadora: Lembras que um sistema é formado por, pelo menos duas equações? Lembras como se resolve quando elas estão organizadas?
P7: Não, não me lembro mais.

Esse e outros relatos confirmam a dificuldade que os alunos têm em utilizar o Cálculo formal na resolução de problemas, principalmente quando o conteúdo envolvido não é recente, que é o caso deste aluno, integrante da 8ª série, sendo que na escola, este conteúdo é abordado principalmente na 7ª série.

Questionados a respeito das resoluções desenvolvidas individualmente ou em grupos, durante a prática, a maioria dos alunos relatou maior utilização de estratégias diferenciadas, o que demonstra a preferência por esta forma de resolução:

P7: Na maioria eu usei outras formas.
Pesquisadora: Mas por quê? Consideraste isso mais fácil?
P7: Mais fácil eu acho.

Ainda a respeito da organização de grupos na resolução de problemas, questionamos aos alunos quanto à influência desta forma de trabalho, onde também coletamos opiniões divergentes entre os alunos. Esse é outro aspecto, portanto, a ser levado em consideração pelo professor, ao desenvolver com seus alunos o trabalho acerca da resolução de problemas. É importante avaliar se a turma tem condições de trabalhar em grupo, se os alunos conseguem esperar, um o tempo do outro para interpretar o problema e entender a proposta de resolução e ainda, se todos estão dispostos a colaborar para que o trabalho seja produtivo.

P4: Depende a dupla. [...] Pego uma dupla, um colega meu que pensa também, daí me ajuda e ele pode ver coisas que eu não consigo estar vendo. [...] Se é alguém que não se dedica, eu prefiro individual.
P6: Se eu ficar em dupla, de repente aquele que tem a ideia mais complexa, ele vai fazer o dele (problema), e eu não vou ficar entendendo o que ele ta fazendo. [...] Ele faz mais rápido e acaba antes.

P10: Acho que eu prefiro individual.
Pesquisadora: Por quê?
P10: Ah! Talvez pedir alguma ajuda, mas individual tem mais concentração, tu consegue ler melhor, concentrar mais.

Nas falas de *P*3, P5 e P9, percebemos a preferência pelo trabalho em grupo e o reconhecimento da existência e importância das diferentes estratégias de resolução de problemas:

P3: Melhor em grupo, se o outro sabe mais, ele me ensina. [...] A gente discute sobre o problema, de fazer de um jeito ou de outro.
P5: Cada um ia dando sua opinião de como poderia fazer, resolver e depois, a gente tentava, pelos três métodos.[...] E também misturar as ideias, um com o outro.
P9: Eu prefiro em grupo, porque em duas pessoas ou em grupo, em mais, tem diferentes formas de resolver e mais possibilidade de acertar entre essas formas e em uma pessoa só, individual, em até uma ou duas formas, talvez não dê certo.

Quase ao final da entrevista, conversamos quanto à utilidade de contar, a cada novo problema a ser resolvido, com outros problemas e resoluções já desenvolvidas ou ainda, se durante as resoluções, fizeram uso de ideias ocorridas em problemas anteriores. Consideramos que essa possibilidade estaria de acordo com o que Polya chama de "recorrer a problemas semelhantes", não para copiar uma resolução, já que não faz sentido que os alunos resolvam problemas iguais, uns aos outros, mas como forma de levantar dicas e verificar estratégias com potencial de resolução para cada tipo de problema. A maioria considerou essa possibilidade interessante:

P5: Tornaria mais fácil. [...] Se talvez eu não lembrasse, eu fiz uma forma, mas não deu certo e então eu precisaria fazer de outra, aí eu olharia esses e teria uma ideia de como fazer.
Pesquisadora: Houve momentos, problemas durante os encontros que vocês usavam ideias de outros que já haviam resolvido em outros dias?
P3: Sim
Pesquisadora: O que principalmente vocês utilizavam? Vocês procuravam um problema parecido ou uma forma de resolver parecida?
P3: Uma forma de resolver.
P4: Eu primeiro leio pra ver se tem (outro) parecido, semelhante. Se é semelhante, eu tento buscar em outros. [...] Daí eu tento pensar pra ver se já tinha resolvido (um problema) parecido e uso a mesma forma.

Por fim, questionamos a respeito da perspectiva dos alunos quanto à participação nos encontros, buscando uma opinião geral quanto ao aproveitamento dos mesmos, quanto à possíveis influências para as vidas dos participantes, tanto em sala de aula quanto fora dela. Percebemos que os alunos, de um modo geral, se manifestaram positivamente.

> *P4: Eu gostei, porque deu mais conhecimento.*
> *P5: Eu achei que foi bom, valeu a pena, eu achei que fosse mais centrado mais em fazer cálculos, acho que foi bom. Também vai ser mais fácil quando a gente for pra oitava, pro primeiro ano... usar outras formas.*
> *P10: Acho que foi bom, que ajudou nas aulas, nas resoluções de problemas. Gostei bastante, valeu a pena...*

No relato de P5, fica evidente a preferência pela utilização de estratégias diferenciadas na resolução de problemas, quando revela que gostou de ter participado dos encontros por não ter sido priorizado o cálculo na resolução de problemas.

7 CONCLUSÃO

A resolução de problemas tem sido apontada por documentos oficiais e pesquisadores da área como uma das atividades centrais da Matemática escolar e sua inserção nas aulas é amplamente incentivada. Avaliações em larga escala da qualidade da Educação Básica brasileira e mundial utilizam-se deste tipo de atividade para tentar quantificar o que vem sendo aprendido pelos estudantes deste nível de ensino.

Apesar disso, a resolução de problemas ainda é vista por muitos alunos como uma atividade que sinaliza o término do estudo de algum conteúdo, procurando, portanto, a aplicação de algoritmos, mesmo sem entendimento daquilo que estão fazendo, e a discussão de alternativas de resolução, muitas vezes é deixada de lado (CURY; SAMPAIO, 2006). Preocupados com a forma como a resolução de problemas vem sendo abordada e com o pouco êxito atingido pelos alunos, decidimos investigar o potencial da utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas, independentemente da abordagem de conteúdos específicos da Matemática escolar.

Buscamos estimular os alunos a utilizar e compartilhar diferentes formas de resolver problemas, já que o Cálculo formal nem sempre possibilita a obtenção da resposta correta ou o entendimento do que fazem. Em nossas buscas sobre pesquisas acerca do tema, encontramos poucos trabalhos e ainda assim a maioria deles focado na utilização ou verificação de estratégias utilizadas em conteúdos específicos. Também encontramos opiniões divergentes acerca deste tipo de trabalho, mas não é nosso intuito sugerir que os conteúdos matemáticos formais sejam abolidos do currículo.

Nos dados coletados inicialmente no intuito de investigar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas matemáticos, verificamos o predomínio do cálculo formal como forma de resolver problemas, ocasionando, em alguns casos, baixo índice de acerto. Durante a intervenção pedagógica, analisando o material produzido pelos alunos participantes, verificamos que os alunos foram capazes de utilizar, de forma eficaz, uma grande variedade de estratégias de resolução de problemas, tais como: Tentativa e erro, Desenho, Tabelas, Trabalho em sentido inverso, Redução de unidades, Organização de padrões e Eliminação, algumas delas sequer pensadas por nós professores, evidenciando assim, o estímulo à criatividade e autonomia proporcionado por esta forma de trabalho.

Creditamos o fato de terem utilizado mais e melhor uma ampla gama de estratégias de resolução de problemas ao estímulo oferecido para que isso ocorresse e que tem sido um dos objetivos perseguidos desde o início da pesquisa. Os alunos utilizaram as estratégias compartilhadas, principalmente o Desenho, inclusive para auxiliar na interpretação de determinadas situações.

Esta diferença com relação à coleta de dados inicial pode estar relacionada ao fato de, em momento algum ter sido exigida a utilização de algoritmos formais ou mesmo, discutido ou apresentado um conteúdo da Matemática escolar. Dessa forma, portanto, conseguiram ampliar o repertório de estratégias passíveis de serem utilizadas, conforme relatado por vários alunos na entrevista. Na oportunidade evidenciou-se também, preferência de parte da maioria, pela utilização das formas alternativas de resolução, sob a justificativa principal da dificuldade em lembrar ou saber como e em quais casos aplicar certos algoritmos, o que reforça a contribuição desta forma de trabalho para a obtenção de êxito na resolução de problemas, considerando que sem essa possibilidade, muitos sequer resolveriam determinados problemas. Durante a conversa, alguns alunos chegaram a comentar a preferência pelo cálculo formal, citando sistemas e equações, porém, nos problemas resolvidos durante os encontros, poucas vezes percebemos esse tipo de organização, mesmo por parte desses alunos.

Cabe ressaltar ainda que a maioria dos alunos apresentou, durante a intervenção pedagógica, dificuldades relacionadas a interpretação dos problemas propostos. Para tentar auxiliar neste aspecto, cabe ao professor da turma, suscitar questionamentos que levem os alunos a raciocinar e tentar relacionar as informações, o que é uma tarefa árdua. É importante fazer questionamentos auxiliares, sem entretanto, deixar evidente a resposta ou o caminho a ser percorrido. Observamos a evolução de alguns alunos nesse sentido, o que inclusive foi comentado com a turma ao final de certos encontros, o que parece tê-los estimulado ainda mais à empenhar-se na realização dos problemas propostos.

Analisando a transcrição das entrevistas realizadas ao final dos encontros, fica clara a adesão dos participantes à proposta, quando sinalizam a importância de conhecer e poder fazer uso das estratégias que foram compartilhadas. Alguns alunos, como por exemplo A2, A5 e A9, confirmaram a utilização dos conhecimentos adquiridos e compartilhados durante a intervenção pedagógica, nas aulas de Matemática e mesmo em avaliações da disciplina. Vários dos participantes atribuíram a este conhecimento o fato de ter aumentado o gosto, antes quase inexistente, pela resolução de problemas.

Mais uma vez salientamos que não temos a pretensão se sugerir a eliminação do ensino de conteúdos formais da Matemática escolar, mas consideramos importante que, simultaneamente ao estudo de tais conteúdos, os alunos tenham também a oportunidade de conhecer as diversas formas passíveis de serem utilizadas, podendo optar, no momento de elaborar um plano de resolução, pela estratégia que julgar mais conveniente, por aquela que avaliar como facilitadora de seu processo. Ao se depararem, por exemplo, com problemas, que envolvem conteúdos de um ano inteiro ou mais, os alunos podem esquecer de detalhes que farão toda a diferença na obtenção de respostas corretas, ao utilizar o Cálculo formal, ao passo que, conhecendo estratégias, podem adaptá-las a diferentes contextos e obter êxito.

Destacamos ainda a positiva influência que esta pesquisa exerceu em nossa prática docente, já que conduziu a adoção de uma postura mais estimuladora da reflexão por parte dos alunos quanto à forma de resolver cada problema e do compartilhamento e discussão do processo desenvolvido por cada um, no intuito de que todos possam conhecer as diferentes formas de resolver, mesmo que um conteúdo formal esteja em discussão. Antes da realização desta pesquisa, a importância e necessidade deste tipo de trabalho ganhava menos destaque e, muitas vezes, ficava sufocada pela preocupação em “trabalhar” os conteúdos matemáticos.

Esta ação foi desenvolvida contando com auxílio dos demais participantes do grupo do Observatório da Educação em determinadas etapas, principalmente no que tange à categorização das resoluções apresentadas pelos estudantes. O compartilhamento das ações e resultados na forma de dissertação vinculada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Univates, visa socializar boas práticas em Educação Matemática, que consigam auxiliar os estudantes na melhoria de seu desempenho no processo de resolução de problemas.

No decorrer da pesquisa aqui apresentada, além dos aspectos relevantes acerca da utilização de estratégias diferenciadas na resolução de problemas, evidenciaram-se grandes dificuldades, por parte dos alunos, na interpretação de problemas matemáticos. Esta dificuldade constitui-se num importante tema para ser investigado em futuras pesquisas do grupo do Observatório da Educação, sendo que uma das mestrandas que o integra, focará sua dissertação na busca por contribuições neste aspecto.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma S.; ONUCHIC, Lourdes R. Ensinando Matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, ano 33, n. 55, p 133-154, jul./dez. 2009.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução de Elza Gomide e Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BDR, Banco de Dados Regional do Centro Universitário UNIVATES. Perfil Socioeconômico do Vale do Taquari Setembro/2011. Disponível em: <http://www.univates.br/bdr>. Acesso em: 17 ago. 2012.

BRANCA, Nicholas A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E (Orgs.). **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 4 – 12.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE : Plano de Desenvolvimento da Educação**: Prova Brasil: Ensino Fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC/SEB; Inep, 2008a. 193 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação:** SAEB: Ensino Médio: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC/SEB; Inep, 2008b. 127 p.

BRASIL. **PCN +: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF [200-]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 30 jan. 2012.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

CAVALCANTI, Cláudia. Diferentes formas de resolver problemas. In: SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 121 – 149.

CHICA, Cristiane H. Por que formular problemas? In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 151 - 173.

COSTA, Manoel dos S.; ALLEVATO, Norma S. G. Futuros professores de matemática e o ensino de proporcionalidade através da resolução de problemas de geometria. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, ano 36, n. 61, p. 109 – 123, jul./dez. 2012. Disponível em:<http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path[]=634&path[]=758>. Acesso em: 15 out. 2012.

CURY, Helena N.; BISOGNIN, Eleni. Análise de soluções de um problema representado por um sistema de equações. **Bolema**, Rio Claro, ano 22, n. 33, p. 1 – 22, 2009. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2951/2433>. Acesso em 17 jan. 2012.

CURY, Helena N.; SAMPAIO, Maria L. F. B. O Desafio de Substituir Letras por Números: que conteúdos e estratégias podem ser desenvolvidos? **Bolema**, Rio Claro, v. 19, n. 26, 2006. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1850/1611>. Acesso em 28 nov. 2011.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Disponível em: <http://educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf>. Acesso em 11 jan. 2012.

______. A evolução da resolução de problemas no Currículo Matemático. In: I SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO PROBLEMAS, 2008, Rio Claro. **Múltiplos Olhares sobre Resolução de Problemas Convergindo à Aprendizagem.** Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo1.pdf>. Acesso em: 25 abr. 2013.

DANTE, Luiz. **Didática da resolução de problemas de matemática:** 1ª a 5ª series. 12. ed. São Paulo: Ática, 2000.

______. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009. 192 p.

______. **Tudo é Matemática**: Ensino Fundamental: Livro do professor – 7ª série. São Paulo: Ática, 2005.

DEMO, Pedro. **Educação e qualidade.** Campinas: Papirus, 1996.

DINIZ, Maria I. Resolução de problemas e comunicação. In: SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 87 – 97.

DULLIUS, Maria M. et al. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas matemáticos. **Revista chilena de educación científica**, v. 10, n. 1, p. 23-32, 2011.

DULLIUS, Maria M.; ARAÚJO, Ives S.; VEIT, Eliane A. Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica: uma experiência em cursos de Engenharia. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 17 – 42, abril 2011.

ECHEVERRÍA, Maria D. P. P. A Solução de Problemas em Matemática. In: POZO, Juan I. (Org.). **A solução de problemas:** Aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 43 – 65.

ECHEVERRÍA, Maria D. P. P.; POZO, Juan I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, Juan I. (Org.). **A solução de problemas:** Aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 13 - 42.

HAETINGER, Claus, et al. Anais da VII Olimpíada Matemática da UNIVATES, 15 de setembro de 2004. Lajeado, RS: UNIVATES, 2004.

______. Anais da X Olimpíada Matemática da UNIVATES, 12 de setembro de 2007. Lajeado, RS: UNIVATES, 2007.

______. Anais da XI Olimpíada Matemática da UNIVATES, 10 de setembro de 2008. Lajeado, RS: UNIVATES, 2008.

______. Anais da XII Olimpíada Matemática da UNIVATES, 30 de setembro de 2009. Lajeado, RS: UNIVATES, 2009.

______. Anais da XIV Olimpíada Matemática da UNIVATES, 15 de setembro de 2011. Lajeado, RS: UNIVATES, 2011.

IMPA/OBMEP. **Banco de Questões 2012**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 144 p.

MAGINA, Sandra M. P. et al. As Estratégias de Resolução de Problemas das Estruturas Aditivas nas Quatro Primeiras Séries do Ensino Fundamental. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, n. 34, p. 15 – 49, jul./dez. 2010. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2810/2472>. Acesso em: 17 jan. 2012.

MARTINELLI, Maria L. O uso de abordagens qualitativas na pesquisa em serviço social. In: ______. **Pesquisa Qualitativa**: um instigante desafio. São Paulo: Veras editora, 1999.

MARTINS, Gilberto A. **Estudo de caso**: uma estratégia de pesquisa. São Paulo: Atlas, 2006.

MENEGHETTI, Renata C. G; REDLING, Julyette P. Tarefas alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42A, p. 193 - 229, abr. 2012. Disponível em: < http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2810/2472>. Acesso em: 18 nov. 2012.

MORAES, Roque. Análise de conteúdo. **Revista Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999. Disponível em: <http://cliente.argo.com.br/~mgos/analise_de_conteudo_moraes.html>. Acesso em: 15 jan. 2012.

MUSSER, Gary L.; SHAUGHNESSY, J. Michael. Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (Orgs.) **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 188 – 201.

NEVES, José L. Pesquisa Qualitativa: características, usos e possibilidades. **Caderno de pesquisas em Administração**, São Paulo, v. 1, n. 3, 2º sem./1996. Disponível em: <http://www.ead.fea.usp.br/cad-pesq/arquivos/c03-art06.pdf>. Acesso em: 05 jan. 2011.

OLIVEIRA, Izabella. Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. **Bolema**, Rio Claro, ano 22, n. 34, p. 57 – 80, 2009. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/3299/2790>. Acesso em: 18 jan. 2011.

ONUCHIC, Lourdes de L. R.; ALLEVATO, Norma S. G.. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria A. V.; BORBA, Marcelo de C. (Orgs.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213 - 231

PAULINA, Iracy. Prova Brasil de Matemática – 5º Ano: Números e operações. **Revista Nova Escola**, Edição 223, jun./jul. 2009. Disponível em <http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/prova-brasil-numeros-operacoes-475733.shtml>. Acesso em 12 de julho de 2012.

PEREIRA, Manuel de S.; FERNANDES, José A. Estratégias de generalização de padrões de alunos do 7º ano de escolaridade. **Unión**, FISEM, n. 29, p. 85 – 108, mar. 2012. Disponível em: <http://www.fisem.org/web/union/images/stories/29/archivo9.pdf>. Acesso em : 15 out. 2012.

PERRENOUD, Philippe. **Construir as competências desde a escola**. Tradução de Bruno Charles Magne. Porto Alegre: Artmed, 1999.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. Reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João. P. O estudo de caso na investigação em educação matemática. **Quadrante**, v. 3 n. 1, p. 3-18, 1994.

SBM, Sociedade Brasileira de Matemática. XXI Olimpíada Brasileira de Matemática, Primeira Fase – Nível 2. **Revista Eureka!**, n. 7, p. 7 – 9, 2000. Disponível em: <http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/eureka7.pdf>. Acesso em: 18 mar. 2012.

SBM, Sociedade Brasileira de Matemática. XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática: Problemas e soluções da Primeira Fase. **Revista Eureka!**, n. 34, p. 3 – 14, 2011. Disponível em: <http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/eureka34.pdf>. Acesso em: 18 mar. 2012.

SMOLE, Kátia C. S.; DINIZ, Maria I. Ler e Aprender Matemática. In: SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 69 – 86.

YIN, Robert K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. Tradução de Ana Thorell. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZABALA, Antoni. Os enfoques didáticos. In: COOL, César et al. (Orgs.) **O Construtivismo na sala de aula**. Tradução de Cláudia Schilling. São Paulo: Editora Ática, 2003, p. 153 - 196.

Sites consultados

http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/menu_do_gestor/exemplos_questoes/M08_Saeb_site_FP.pdf

http://educamat.ese.ipcb.pt/0607/images/PDF/Mater_2C/sessao_03_estrategias.pdf

http://educamat.ese.ipcb.pt/docs/sessao4_estrategias_resolucao.pdf

http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/8_matematica.pdf

http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=16640&Itemid=1109>

http://www.alunosonline.com.br/matematica/grandezas-inversamente-proporcionais-.html http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAue4AD/matematica-concursos

http://www.ebah.com.br/content/ABAAAew48AB/banco-questoes-matematica

http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=220

http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=240

https://sites.google.com/site/desmatematicos/exames-provas/testes-intermedios---8o-ano/2010-2011---3-periodo

https://sites.google.com/site/desmatematicos/exames-provas/testes-intermedios---8o-ano/2010-2011---3-periodo