CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS QUAISQUER A PARTIR DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Ivana Maria Nascimento dos Santos

Lajeado, março de 2015

Ivana Maria Nascimento dos Santos

PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS QUAISQUER A PARTIR DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, Centro Universitário UNIVATES, como parte da exigência para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Epistemologia da Prática Pedagógica no Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Dra. Angélica Vier Munhoz

Coorientadora: Dra. Marli Teresinha Quartieri

Lajeado, março de 2015

Ivana Maria Nascimento dos Santos

PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS QUAISQUER A PARTIR DA ENGENHARIA DIDÁTICA

A Banca examinadora abaixo ____________________________ a Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário Univates, como parte da exigência para obtenção do grau de Mestre em Ciências Exatas.

____

Dra. Angélica Vier Munhoz - orientadora

Centro Universitário Univates

____

Dra. Marli Teresinha Quartieri – coorientadora

Centro Universitário Univates

____

Dra. Ieda Maria Giongo

Centro Universitário Univates

____

Dra. Eniz Conceição Oliveira

Centro Universitário Univates

____

Dr. Odorico konrad

Centro Universitário Univates

Lajeado, 31 de março de 2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela concessão do ingresso ao curso de mestrado, dando-me força e sabedoria para cumprir mais esta etapa e, apesar das pedras no caminho, nunca me desamparou.

À minha família, meu porto seguro, pelo incentivo a continuar a jornada mesmo à frente dos obstáculos ao longo da caminhada e pela compreensão nos momentos mais difíceis em que estive ausente.

Ao meu esposo e companheiro, Fábio Andress dos Santos, por me incentivar a cursar o mestrado e sua presença em todos os momentos de nossas vidas.

Aos tesouros da minha vida, Celina, Rogério e Rayanne, por terem sido minha fonte de motivação e incentivo na conclusão deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em ensino de Ciências Exatas que, com toda paciência e dedicação, contribuíram para a minha aprendizagem e realização deste trabalho.

Aos meus colegas do curso de mestrado, pela atenção, compreensão, carinho, respeito e troca de experiências.

Ao meu querido amigo, Edcarlos Vasconcellos, pela ajuda durante o curso.

Ao Corpo Técnico e Docente da Escola Estadual de Ensino Médio José Barroso Tostes, pela permissão à realização da intervenção pedagógica.

Aos meus queridos alunos, que têm sempre me motivado a querer melhorar o desempenho em sala de aula e aumentar os meus conhecimentos.

E à orientadora e coorientadora, professoras Drª Angélica Vier Munhoz e Marli Quartieri, por todo apoio, paciência e preocupação na construção deste trabalho.

“*Os caminhos que nos levam à aprendizagem não são tão fáceis, sempre vamos nos deparar, na nossa luta do dia a dia, com as pedras ao longo da estrada, mas, quando caminhamos positivamente, com fé inabalável, na busca persistente dos nossos objetivos, os obstáculos desaparecem, e os caminhos nos abrem as portas para o sucesso. Tudo depende de nós mesmos, do nosso esforço e coragem para vencer*”

(Adelmar marques marinho)

RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de investigar a produtividade de uma sequência didática relacionada ao tema trigonometria em triângulos quaisquer, junto aos alunos de 2º ano do Ensino Médio, de uma escola da rede pública de Santana-AP. O aporte teórico da investigação envolveu o ensino de Matemática, em particular, o da trigonometria e os princípios da Engenharia Didática. A pesquisa foi realizada através de um estudo de caso com abordagem qualitativa. Os principais instrumentos utilizados foram observações participativas advindas dos momentos de interação entre a professora pesquisadora e os alunos durante o processo de desenvolvimento da sequência didática e os testes inicial e final. Por meio desses instrumentos, foram registradas e analisadas as dificuldades e os avanços que os discentes apresentaram na construção e aquisição do conhecimento. Aquelas estiveram presentes na resolução de situações que não apresentavam desenhos. Entretanto, verificou-se que a proposta elaborada, usando sequência didática, colaborou, de forma efetiva e produtiva, para o ensino e a aprendizagem relacionada, em particular, à aplicabilidade da trigonometria em triângulos quaisquer. Ademais, constatou-se o envolvimento dos discentes no desenvolvimento das atividades.

Palavras-chave: Matemática. Engenharia Didática. Ensino Médio. Trigonometria no Triângulo Qualquer.

ABSTRACT

This essay aims to investigate the productivity of a didactic sequence related to the topic Trigonometry in Any Triangles, with sophomore students from a public high school in Santana, AP. The theoretical framework of the research involved the teaching of Math, in particular trigonometry and principles of Engineering Didactic. The survey was conducted through a study of case with a qualitative approach. The main instruments were participative observations arising from moments of interaction between the researcher teacher and students during the development process of the didactic sequence and initial and final tests. Through these instruments, the difficulties and the progress that students showed in the construction and acquisition of knowledge were recorded and analyzed. Difficulties were observed in the resolution of situations that did not presented drawings. However, it was found that the elaborate proposal, using didactic sequence, cooperated effectively and productively for teaching and learning, particularly related to the applicability of trigonometry in any triangles. Moreover, the involvement of students was observed in the development of activities.

Keywords: Mathematics. Engineering Didactic. High School. Trigonometry in Any Triangles.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo para cálculo do *seqt* pelos egípcios 19
Figura 2 - Resolução correta do Aluno 1 para a questão 5 do teste inicial 51
Figura 3 - Resolução incorreta do Aluno 8 para a questão 5 51
Figura 4 - Resposta do aluno 9, questão 6, sem resolução 53
Figura 5 - Resposta correta da aluna 19, questão 7 54
Figura 6 - Problema da construção de uma ponte sobre o rio Oiapoque-AP 56
Figura 7 - Solução desenvolvida pelo aluno 16 para a questão 8 57
Figura 8 - Problema das distâncias na Ilha de Santana 59
Figura 9 - Estratégia de resolução da dupla 05 para a Atividade 01 62
Figura 10 - Problema das distâncias no rio Igarapé da Fortaleza 65
Figura 11 - Estratégia de resolução da dupla 10 para a atividade 2 67
Figura 12 - Resolução da Atividade 3 da sequência de atividades por A15 70
Figura 13 - Solução da Atividade 3 da sequência didática, por A12 71
Figura 14 - Localização de Santana – AP 73
Figura 15 - Situação apresentada pelos alunos do G1 74
Figura 16 - Situação apresentada pelos alunos do G2 75
Figura 17 - Situação apresentada pelos alunos do G3 75
Figura 18 - Situação apresentada pelos alunos do G4 77
Figura 19 - Situação apresentada pelos alunos do G5 77
Figura 20 - Problema da distância do alvo e o dardo 79
Figura 21 - Problema da distância entre a cidade B e C 79
Figura 22 - Problema da medida de um CD 80

Figura 23 - Resolução do aluno A7 para a atividade 1 do teste final........................84
Figura 24 - Problema a distância entre pontos situados à margem de um riacho.....85
Figura 25 - Resposta da questão 2 do teste final, por A1..86
Figura 26 - Resolução da questão 3, do teste final pelo aluno A13...........................89
Figura 27 - Resposta da questão 4 do teste final, por A10.......................................91
Figura 28 - Situação Problema da questão 5, do teste final apresentada por A3......92

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Comparativo entre os testes inicial e final 93

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Dissertações e artigos encontradas no portal da CAPES sobre trigonometria 27
Quadro 2 - Fases da Engenharia Didática 32
Quadro 3 - Atividades planejadas para intervenção pedagógica............................... 40
Quadro 4 - Comentários dos alunos A1, A2 e A3 para a professora 46
Quadro 5 - Respostas de alguns alunos para a questão 2 do teste inicial 47
Quadro 6 - Respostas à questão 3 do teste inicial 48
Quadro 7 - Respostas para a questão 4 do teste inicial 50
Quadro 8 - Escrita do significado da fórmula da lei dos senos por alguns alunos..... 64
Quadro 9 - Escrita do significado da lei dos cossenos por alguns alunos 68
Quadro 10 - Respostas dos alunos ao questionamento da professora 78
Quadro 11 - Comentários dos alunos das duplas em relação à segunda questão.... 81

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 18
2.1 Os Desafios do ensino de Trigonometria 18
2.1.1 A Trigonometria no contexto histórico 18
2.1.2 A Importância do ensino de Trigonometria 24
2.1.3 Trabalhos com a temática de Trigonometria 26
2.2 Engenharia didática e a Trigonometria 30
2.2.1 Algumas considerações sobre a Engenharia Didática 30
2.2.2 Alguns trabalhos de Trigonometria e Engenharia Didática 35

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 38

4 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS E DISCUSSÃO DOS DADOS EMERGENTES 43
4.1 Primeira fase: análise preliminar 43
4.2 Segunda fase: concepção e análise a priori 57
4.3 Terceira fase: experimentação 58
4.4 Teste final 83
4.5 Quarta Fase: Validação 93

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 95

REFERÊNCIAS 100

APÊNDICES 105
APÊNDICE A - Termo de Concordância da Direção da Instituição de Ensino 106
APÊNDICE B - Termo de Consentimento Livre Esclarecido 107
APÊNDICE C - Teste Inicial 108
APÊNDICE D - Teste final envolvendo problemas de aplicação das leis trigonométricas (lei do seno, lei do cosseno e área de um triângulo qualquer) 110

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho, vinculado ao Programa de Pós-graduação Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES e com embasamento nos princípios da Engenharia Didática, investigou a produtividade de uma sequência didática de ensino relacionada à trigonometria em triângulos quaisquer.

Atualmente, no cenário educacional brasileiro, têm havido índices preocupantes relacionados ao baixo desempenho na disciplina Matemática obtidos nas avaliações externas. Esse fato tem causado muita discussão entre educadores, motivo pelo qual estão sendo realizadas inúmeras pesquisas nessa área educacional. Considerando que o ensino da Matemática, em sala de aula, quase sempre tem seguido regras estabelecidas, descontextualizadas do cotidiano social, as causas desse baixo desempenho talvez não estejam na disciplina em si, mas, possivelmente, relacionada à clareza dos objetivos e à forma como é abordada (BRASIL, 1999). Aliada a isso, a forma mecânica e descontextualizada como vem sendo trabalhada essa disciplina pode ser um dos fatores do insucesso dos alunos nos diferentes conteúdos.

A trigonometria, por exemplo, é um dos conteúdos matemáticos que os alunos têm apresentado dificuldades (COSTA; KLEIN, 2008). Entretanto, é um importante campo do conhecimento da Matemática, com aplicação em áreas, como Física e Astronomia, além de reunir outros conhecimentos da própria Matemática, como geometria e gráfico de funções. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN’s - (BRASIL, 1999), na área da Matemática, aparece evidenciada a importância de ela ser trabalhada em sala de aula.

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações [...] (BRASIL, 1999, p. 257).

Em relação à trigonometria, algumas pesquisas evidenciam dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem por parte de estudantes e professores. Tal fato pode ser comprovado nos trabalhos de Santos et al (2012), Costa e Klein (2008). Brito e Morey (2004), que pontuam esse problema no cotidiano escolar. Os autores também comentam que muitos docentes têm dificuldades em construir uma sequência didática facilitadora do processo, fazendo com que, muitas vezes, os alunos não compreendam os conteúdos de trigonometria, tornando-se, dessa forma, um desafio para ambos, haja vista que a maioria dos estudantes considera “muito difícil” seu estudo.

Pelas análises realizadas, observou-se que o enfoque de interesse maior desses autores é com a abordagem no ensino da trigonometria em triângulo retângulo. Em vista disso, foram dadas várias contribuições para melhorar a prática do professor e facilitar os processos de ensino e de aprendizagem. No entanto, as dificuldades constantes observadas durante a prática da professora em sala de aula e a escassez de pesquisa em relação ao ensino de trigonometria em triângulo não retângulo impediram que a pesquisadora focasse esses estudos. O fato levou-a a realizar a presente investigação com o propósito de contribuir com os processos e, assim, sanar tais dificuldades.

Para realizar este estudo, foi necessário fazer um recorte no tema trigonometria em virtude de outras subáreas de estudo, tais como: arcos, identidades trigonométricas, triângulo retângulo, ciclo, funções, etc. Assim, optou-se por fazer uma investigação com foco na trigonometria do triângulo qualquer.

Neste sentido, a proposta para essa investigação foi a construção de uma sequência didática de ensino com o intuito de facilitar o processo de aprendizagem do aluno e motivar a professora a executar uma aula dinâmica e motivadora. O presente estudo teve, portanto, como objetivo geral investigar a produtividade de uma sequência didática relacionada ao tema trigonometria em triângulos quaisquer, com vistas à aprendizagem dos alunos de 2º ano do Ensino Médio de uma escola localizada na cidade de Santana, Estado do Amapá. Tal estudo surgiu a partir da seguinte problemática: verificar possibilidades e limitações nos processos de ensino e aprendizagem de trigonometria nos triângulos quaisquer, de modo a promover uma aprendizagem efetiva junto aos alunos de segundo ano do Ensino Médio?

Os objetivos específicos para este estudo foram:

- Elaborar e explorar uma sequência didática de ensino de trigonometria em triângulos quaisquer junto aos alunos do 2º ano do Ensino Médio.

- Verificar, através dos testes inicial e final, o processo de aprendizagem dos alunos.

A escolha pela trigonometria decorreu pelo fato de ser esta um campo da Matemática de grande complexidade e pouco explorado pela maioria dos professores. E, com a experiência adquirida ao longo de dez anos atuando como professora de Matemática no Ensino Médio, observou-se que muitos discentes possuíam dificuldades na compreensão de conceitos e significados da trigonometria. Além disso, não conseguiam perceber a aplicação de suas leis em problemas da vida real. Com isso, surgiu a seguinte reflexão: como poderia desenvolver um trabalho em sala de aula que possibilitasse criar estratégias para a resolução dos problemas em relação ao ensino de trigonometria, com enfoque nos triângulos quaisquer, de modo a envolver o aluno de forma dinâmica e autônoma na conquista e na promoção da própria aprendizagem?

Pensando nisso, decidiu-se realizar uma pesquisa bibliográfica no Portal da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), em documentos oficiais, revistas e alguns sites, à procura de trabalhos que focassem a trigonometria no triângulo não retângulo. Diante de leituras de trabalhos testados e comprovados, observou-se que havia alguns estudos sobre Engenharia Didática. Esta chamou a atenção pela denominação e, assim, continuou-se a busca por mais informações a respeito dessa metodologia. Foram encontrados vários trabalhos, mas não com enfoque no triângulo não retângulo. Após inúmeras leituras, decidiu-se associar a Engenharia Didática com a trigonometria em triângulos quaisquer.

A Engenharia Didática emergiu na década de 1980, tendo seu estudo sido amplamente divulgado pela francesa Michèlle Artigue. A autora (1988) buscou comparar o trabalho do professor com o de um engenheiro, por ser a “construção” o objetivo de ambos, o que a levou a estabelecer a seguinte relação: assim como o engenheiro, para realizar um projeto de construção, passa por diversas etapas, o professor também precisa, nessas etapas, ter conhecimento teórico; planejamento para todas as fases de desenvolvimento; verificar as dificuldades e obstáculos encontrados até aplicação da sequência didática.

Logo, a Engenharia Didática exerce uma dupla função: como metodologia de investigação, organiza; analisa e aplica a sequência didática e, como produtora de situações de ensino e de aprendizagem, visa à melhoria da qualidade da aula e à aprendizagem do aluno. Segundo Pais (2001, p. 102):

> Uma Sequência Didática é formada por certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conhecimentos previstos á pesquisa didática. Essas aulas são denominadas sessões.

Partindo dos princípios dessa metodologia, foi viável lançar mão das possibilidades de ensino realizado pela investigação e exploração da sequência de atividade didática. Ademais, a citada metodologia permitiu adaptar as etapas das atividades de acordo com a necessidade do conteúdo a ser desenvolvido na sala de aula, facultando analisar e comparar as concepções dos sujeitos envolvidos nas fases ou etapas dessas sequências. Para Artigue (1988), essas fases estão divididas em análise preliminar ou prévia; concepção e análise a priori; experimentação e análise posteriori e validação.

Diante das reflexões sobre as dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem, acreditou-se que a articulação do ensino da trigonometria em triângulos quaisquer, com embasamento nos princípios da Engenharia Didática, poderia contribuir na obtenção de bons resultados no processo de aprendizagem. Além disso, pretendeu-se, com os resultados deste estudo, auxiliar os professores de Matemática que atuam na Educação Básica.

Para a descrição da pesquisa e dos resultados obtidos, organizou-se o trabalho em cinco capítulos, apresentados a seguir.

No primeiro capítulo, descreve-se o ensino da Matemática, as investigações de alguns pesquisadores sobre o ensino da trigonometria, sua aplicação em diferentes áreas do conhecimento, bem como as dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos e professores em relação ao tema em estudo. Além disso, explicitam-se o problema e os objetivos que direcionaram a pesquisa e as justificativas para a escolha do tema.

O segundo capítulo está dividido em duas subseções: Os Desafios do Ensino da Trigonometria; a Engenharia Didática e a Trigonometria. A primeira aborda o contexto histórico, a importância e os trabalhos com a temática trigonometria. A segunda tece algumas considerações sobre a Engenharia Didática e trabalhos com a trigonometria e a Engenharia Didática. Nesta, Assim, versam-se os princípios da Engenharia Didática em sala de aula com vistas à (re)descoberta e reconstrução de conceitos para aquisição do conhecimento nos processos de ensino e de aprendizagem do aluno e na melhoria da prática pedagógica diária do professor. Ademais, são discutidos alguns trabalhos com experiências testadas e comprovadas, como os dos seguintes autores: Artigue (1988), Brousseau (1996), Brito e Morey (2004), entre outros.

No terceiro capítulo, apresentam-se, nos procedimentos metodológicos, a metodologia de pesquisa usada, a descrição do local e da turma escolhida para pesquisa, a carga horária de Matemática e a descrição dos instrumentos da coleta de dados. No quarto capítulo, relata-se a análise e a discussão dos resultados que surgiram durante o desenvolvimento das atividades, advindas dos comentários, registros e das observações na intervenção pedagógica. No quinto capítulo, expõem-se algumas considerações a respeito da Engenharia Didática e ensino de trigonometria em triângulos quaisquer. E, na sequência, as referências bibliográficas e os apêndices em que constam o teste inicial e final.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os pressupostos teóricos, que direcionaram esta investigação, com foco no estudo da trigonometria em triângulos quaisquer, estão fundamentados nos princípios da Engenharia Didática. Este capítulo foi dividido em duas subseções: Os Desafios do Ensino da Trigonometria; a Engenharia Didática e a Trigonometria.

2.1 Os Desafios do ensino de Trigonometria

Nesta subseção, enfatiza-se o ensino da trigonometria na Educação Básica. Para tanto, a discussão aborda o contexto histórico da trigonometria, a importância do ensino da trigonometria e os trabalhos com a temática de trigonometria.

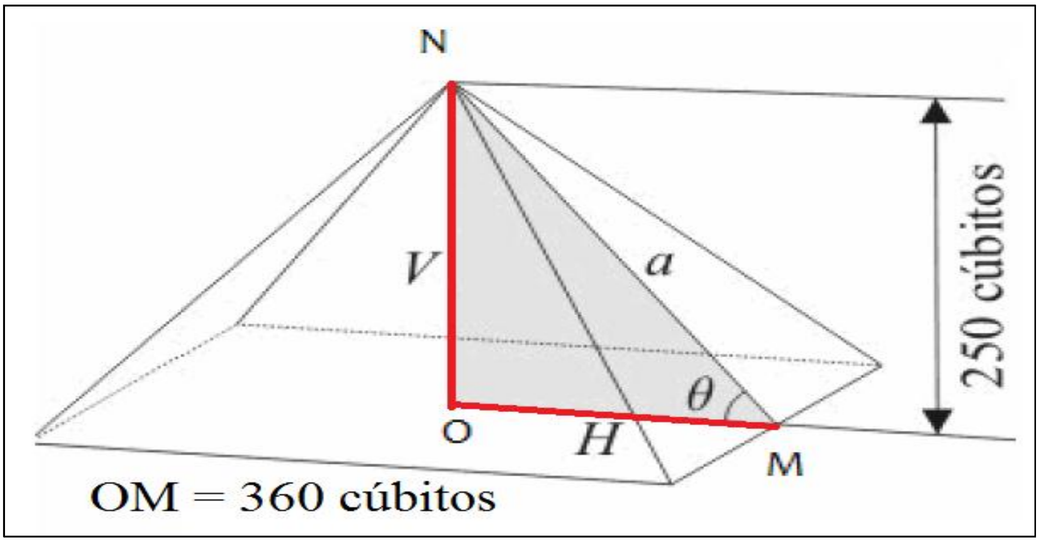
2.1.1 A Trigonometria no contexto histórico

Uma revisão de literatura realizada em Souza, Victer e Lopes (2011) e em Costa (2003), mostra que a história da trigonometria se confunde com a da Matemática em si. Os autores revelam que as raízes históricas da primeira têm origem na Babilônia e Egito e demonstram que, no Papiro de Rhind, datado de 1650 a.C., estava mencionado o *seqt* de um ângulo (equivalente hoje à cotangente de um ângulo):

> Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram tanto na Babilônia quanto no Egito, a partir do cálculo de razões entre números e lados de triângulos semelhantes. No Egito, isso pode ser observado no Papiro Ahmes, também conhecido como Papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C., tem aproximadamente 5,5m de comprimento e 0,32m de largura. Contém 84 problemas ligados à aritmética e à geometria com suas respectivas resoluções (sendo que 4 desses problemas fazem menção ao *seqt17* de um ângulo de uma pirâmide (SOUZA; VICTER; LOPES, 2011, p. 42).

Segundo Costa (2003, p. 02), “na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de *seqt*, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical”. Esse fato é melhor explicitado na Figura 1, que destaca os segmentos $\overline{OM}$ afastamento horizontal) e $\overline{ON}$ (elevação vertical). Percebe-se também que o cálculo era feito como atualmente. Sejam: $\overline{OM}$ = 360 e $\overline{ON}$ = 250 então $\text{Seqt} = \frac{OM}{ON} = \frac{360}{250} = 1{,}44$, que é a constante de inclinação das faces laterais da pirâmide egípcia.

Figura 1 – Modelo para cálculo do *seqt* pelos egípcios



Fonte: Adaptado de Souza, Victer e Lopes (2011).

Além desses cálculos rudimentares da trigonometria aplicados na construção das pirâmides, Costa (2003, p. 03) escreve que, ainda no Egito, e, aproximadamente no mesmo período, surgiu a “ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia”. Eram as primeiras ideias das funções, tangente e cotangente.

Sobre babilônios, estes eram fascinados pela astronomia, motivados por razões religiosas ou pelas relações com seus calendários e períodos de plantios e colheita. Esses povos já conheciam as fases da Lua, pontos cardeais, estações do ano utilizando cálculos de triângulos, sistemas de unidades de medida e escalas.

> Os babilônios foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Eles construíram um calendário astrológico no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, e elaboraram a partir do ano 747 a.C, uma tábua de eclipses lunares. Este calendário e estas tábuas chegaram até os nossos dias (COSTA, 2003, p. 03).

A trigonometria babilônica foi uma das precursoras do estudo dos ângulos, tão importantes na Matemática de hoje quanto antigamente:

> Um importante conceito no desenvolvimento da Trigonometria é o conceito de ângulo e de como efetuar sua medida, uma vez que ele é fundamental em diversas situações, como na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo (números que dependem dos ângulos agudos do triângulo e não da particular medida dos lados). Existem evidências de tentativas de medi-los, em datas muito remotas, pois chegaram até nossos dias fragmentos de círculos que parecem ter feito parte de astrolábios primitivos, provavelmente usados com propósito de medições (COSTA, 2003, p. 03).

Para Souza, Victer e Lopes (2011), os babilônios desenvolveram um extenso estudo relacionando à astronomia com trigonometria, trabalhando os ângulos. Também na Grécia há registros de cálculos trigonométricos envolvendo os ângulos em estudos de círculos, cordas e arcos.

> A conceituação de ângulo aparece, inicialmente, em matérias gregas no estudo de relações envolvendo elementos de um círculo juntamente com o estudo de cordas e arcos. As cordas eram medidas de ângulos centrais ou eram inscritas em círculos. Suas propriedades já eram conhecidas desde o tempo de Hipócrates e, possivelmente, Eudoxo tenha usado medidas de ângulos e razões na determinação das dimensões da Terra e no cálculo das distâncias entre o Sol e a Terra (SOUZA; VICTER; LOPES, 2011, p. 46).

Da Grécia Antiga, têm-se dois conceitos de ângulos: “um ângulo é uma deflexão, ou uma quebra em uma linha reta” ,ou, conforme Euclides, “um ângulo plano é a inclinação recíproca de duas retas que num plano tem um extremo comum e não estão em prolongamento” (SOUZA; VICTER; LOPES, 2011, p. 47).

Do mundo antigo, há registros de cálculos rudimentares, como a utilização de triângulos retângulos pelos chineses, há cerca de 1000 anos a.C., para cálculos de distâncias e outras medidas.

> Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-lo, mas, infelizmente não temos registro de como eram feitas as medições e quais as unidades de medida usadas (COSTA, 2003, p. 03).

Seguindo as origens históricas da trigonometria, Claudio Ptolomeu (150 a.C.), autor da obra o “Almagesto”, composta de treze volumes, onde o conteúdo é citado nos capítulos décimo e décimo primeiro, reúne todos os conhecimentos em torno dessa área da Matemática, conhecida e aprimorada até aquele momento por todos que estudaram suas leis e propriedades. O Almagesto é em si uma obra voltada à Astronomia, mas rica em conhecimentos trigonométricos.

> O Almagesto é um marco, um modelo de Astronomia que perdurou até Copérnico, no século XVI. Ptolomeu, na verdade, sistematizou e compilou no Almagesto uma série de conhecimentos bastante difundidos em sua época e que a maior parte da obra é baseada no trabalho do astrônomo e matemático grego Hiparco, cujos livros se perderam. Isto aparece num comentário sobre trabalhos mais antigos, de Teon de Alexandria, que viveu dois séculos após e foi um dos matemáticos que pesquisaram sobre as descobertas dos gregos anteriores. Ele menciona que Hiparco escreveu doze livros sobre cálculo de cordas, incluindo uma tábua de cordas (COSTA 2003, p. 07).

Souza, Victer e Lopes (2011) escrevem que essa obra já falava sobre a divisão do círculo em 360 graus e da tabela de cordas que era a de senos.

> O *Almagesto* de Ptolomeu apresenta uma tabela de cordas indo de ½ grau a 180 graus, utilizando um intervalo de comprimento meio entre o tamanho das cordas A circunferência foi dividida em 360 partes (agora chamadas graus), o diâmetro dividido em 120 porções e cada uma dessas foi dividida em 60 partes chamadas, de acordo com a primeira versão latina do Almagesto de 1155 d.C., “partes *minutae primae*” (primeiras menores partes ou sexagésimos). Cada uma dessas últimas, por sua vez, foi dividida em 60 partes (sexagésimo do sexagésimo) chamadas “partes *minutae secundae*” (segundas menores partes). Daí os termos “minuto” e “segundo” (SOUZA; VICTER; LOPES, 2011, p. 55).

Segundo Costa (2003, p. 08), “em nosso entender, a mais importante contribuição do Almagesto foi tornar evidente a possibilidade de uma descrição quantitativa dos fenômenos naturais”, haja vista toda a modelagem construída a partir da geometria estar associada aos fenômenos astronômicos. Esses conceitos puderam ser transformados em aplicação para a vida cotidiana, como a criação do calendário, períodos de colheita de plantações, compreensão do universo, etc.

Seguindo os caminhos históricos da trigonometria, tem-se a contribuição do povo hindu, o qual, segundo Costa (2003), com a crise da Europa Ocidental no Século IV da nossa era, passou a pertencer ao mundo árabe, especialmente a Índia, que lançou a obra *Siddhanta,* que significa Sistemas de Sol, datada, aproximadamente, de 400 d.C. Ainda, para o autor, a importância dessa obra se deve ao fato de ela ter aberto novos horizontes aos estudos trigonométricos.

> A importância do Surya, para nós, é que ele abriu novas perspectivas para a Trigonometria por não seguir o mesmo caminho de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes. Nas aplicações da função corda, na Astronomia, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. No Surya, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de jiva. Isto possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência (COSTA, 2003, p. 09).

Souza, Victer e Lopes (2011, p. 60) reforçam que "os hindus não seguiram o mesmo caminho de Ptolomeu [...] passaram a trabalhar com a semi-corda, que atualmente corresponde ao seno". A diferença entre um e outro é explicada da seguinte forma.

> Nas aplicações da função corda, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente Finalmente, alguém pensou em calcular e usar a metade da corda de um arco duplo (SOUZA; VICTER; LOPES, 2011, p. 60).

Os trabalhos dos hindus com a semicorda foram as primeiras noções de seno e cosseno, utilizados até hoje na matemática contemporânea. A participação da matemática hindu foi importante no sentido de contribuir com o aprimoramento dos cálculos trigonométricos, inclusive a criação do círculo de raio unitário se deve ao matemático árabe Al-Battani (850-959 d.C.).

Essa inovação foi realizada com base na trigonometria hindu (COSTA, 2003). Al-Battani (850-959 d.C.) também se aprofundou no Siddhanta e Almagesto e seus trabalhos levaram à conclusão de que a razão seno estudada pelos hindus era válida para qualquer triângulo retângulo. Isso foi provado por meio da circunferência trigonométrica de raio unitário de Al-Battan (COSTA, 2003).

Já por volta de 980 d.C., outro importante matemático árabe, Abûl Wêfa, contribuiu com provas e teoremas trigonométricos. O astrônomo Persa Nasîr Ed-dên al-Tûsî, em 1250, realizou um trabalho destacando a trigonometria como uma ciência desvinculada da Astronomia. Esses estudos foram retomados pela Europa do século XV quando os conhecimentos trigonométricos foram finalmente estabelecidos como uma área da Matemática (COSTA, 2003).

Segundo Costa (2003, p. 11),“quando a Escola de Bagdad entrou em declínio, o centro das atividades intelectuais deslocou-se para o sul da Europa, na Península Ibérica, e com ele o estudo da Trigonometria [...]”, tão necessário às atividades de navegação que diversos matemáticos árabes viajaram à Europa a fim de divulgar os novos conhecimentos. E um dos matemáticos europeus mais famosos, no período de 1170 – 1250, foi Fibonacci, que fez seus estudos no norte africano e, em seguida, aprofundou-se no Oriente, sofrendo influência da matemática árabe. Em 1220, lançou uma obra denominada *Practica Geometriae*, que nada mais era do que um conjunto completo de aplicações da trigonometria oriental na Agrimensura. Costa (2003, p. 16) fala sobre os avanços da trigonometria na Europa.

> No século XIV, Purbach, na Inglaterra, retomou a obra de Ptolomeu e computou uma nova tábua de senos, muito difundida entre os estudiosos europeus. Purbach foi o mestre de Regiomontanus (1436-1475), um dos maiores matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabelecendo a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia. Regiomontanus escreveu um *Tratado sobre triângulos,* em cinco livros, contendo uma trigonometria completa. A invenção posterior dos logaritmos e alguns dos teoremas demonstrados por Napier (1550-1617) mostram que a Trigonometria de Regiomontanus não diferia basicamente da que se faz hoje em dia.

Outro importante matemático Europeu foi Copérnico (1473-1543), que aprimorou e completou alguns trabalhos desenvolvidos por Regiomontanus. Viète (1540-1603) também deu sua contribuição com uma abordagem analítica da trigonometria, e o avanço da imprensa ajudou a difundir todo esse conhecimento que se espalhou por toda a Europa (COSTA, 2003).

O inglês John Newton (1622-1678) publicou a obra *Trigonometria Britannica,* na qual inseriu divisões centesimais do ângulo nas tábuas trigonométricas. Outro inglês, John Wallis (1616-1703), contribuiu trabalhando a trigonometria, usando as equações no lugar das proporções (COSTA, 2003).

O também inglês Sir Isaac Newton (1642-1727), mais renomado matemático inglês, fez trabalhos paralelos aos seus estudos de cálculo diferencial. Conforme Costa (2003, p. 15), Newton “trabalhou com séries infinitas, tendo expandido o arcsen x em séries e, por reversão, deduzido a série para sen x". Ademais, realizou estudos sobre fórmula geral para sen (nx) e cos (nx). Boyer (1996, p. 108) comenta que:

> A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado "trilaterometria", ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que 'Trigonometria", a medida das partes de um triângulo. Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos(ou arcos) num círculo e os comprimentos de cordas que se subtendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo Hipócrates, e é provável que Eudoxo tenha usado as razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da terra e as distâncias relativas do sol e da terra.

Todos esses estudos formam a sólida trigonometria como a conhecemos hoje. Essa análise é importante devido à sua aplicabilidade no dia a dia, como, por exemplo, em navegação e nas diversas engenharias.

2.1.2 A Importância do ensino de Trigonometria

Segundo os PCN+ (BRASIL, 2002, p.111), "[...] o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana" ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento. Sendo assim, é importante o conhecimento de sua aplicabilidade em diferentes situações.

Em relação aos conteúdos de Trigonometria, a falta de compreensão destes, segundo Dionizio e Brandt (2011, p. 02), "pode ser devida a diversos fatores, dentre eles a dificuldade que os estudantes têm de conceituar os objetos matemáticos, que se apresentam de forma muito abstrata". Consequentemente, os citados autores consideram a abstração na Matemática um grande entrave ao ensino de seus conteúdos, inclusive em trigonometria.

Do ponto de vista do ensino de matemática, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) nos revelam que o sucesso da aprendizagem dos alunos depende da transposição didática que o professor leva para sala de aula.

Para isso, pode fazer uso da contextualização dos conteúdos.

> É na dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola (BRASIL, 2006, p. 83).

As orientações curriculares recomendam que a contextualização pode ser realizada pelo professor por meio da resolução de problemas. Entretanto, este precisa estar atento ao adotar essa metodologia, devendo usar os problemas que de fato servirão ao desenvolvimento de habilidades para os alunos.

> A contextualização pode ser feita por meio da resolução de problemas, mas é preciso atenção aos problemas “fechados”, porque esses pouco incentivam o desenvolvimento de habilidades. Nesse tipo de problema, já de antemão o aluno identifica o conteúdo a ser utilizado, sem que haja maiores provocações quanto à construção de conhecimento e quanto à utilização de raciocínio matemático. O uso exclusivo desse tipo de problema consegue mascarar a efetiva aprendizagem, pois o aluno, ao antecipar o conteúdo que está sendo trabalhado, procede de forma um tanto mecânica na resolução do problema (BRASIL, 2006, p. 83).

Costa e Klein (2008) afirmam que, no âmbito educacional, a matemática é vista como uma ciência afastada da realidade e que o ensino de trigonometria acompanha essa situação, sendo pouco associado ao cotidiano do aluno. Assim, cabe ao educador um papel determinante no sentido de mudar essa realidade, buscando associar os conceitos trigonométricos a situações que circundam os alunos.

Neste sentido, o professor deve considerar recomendações importantes em relação aos conteúdos de trigonometria. As orientações curriculares recomendam o seguinte para a introdução do conteúdo.

> Na introdução das razões trigonométricas seno e cosseno, inicialmente para ângulos com medida entre 0º e 90º, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 900 e 1800. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos devem ser justificados os valores de seno e cosseno relativos aos ângulos de medida 300, 450 e 600 (BRASIL, 2006, p. 73).

O ensino das leis dos senos e dos cossenos, necessários ao ensino de trigonometria em triângulos quaisquer, pode ser feito por meio de atividades que proporcionem o cálculo de distâncias inacessíveis, tais como distâncias entre margens de rios, conforme constam nas orientações curriculares.

> A apresentação das leis dos senos e dos cossenos pode ser motivada com questões relativas à determinação das medidas de elementos de um triângulo. Por exemplo: conhecendo-se a medida de dois lados de um triângulo e a medida do ângulo formado por esses lados, sabe-se que esse triângulo é único e, portanto, é possível calcular a medida dos demais elementos do triângulo. Também é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola. Por exemplo, como calcular a largura de um rio? Que referências (árvore, pedra) são necessárias para que se possa fazer esse cálculo em diferentes condições – com régua e transferidor ou com calculadora? (BRASIL, 2006, p. 74)

Assim, o ensino de trigonometria é relevante, uma vez que desperta o interesse do educando pelo mundo das ciências, além de estar presente em diversas situações de seu cotidiano e que pode ser percebido após a aquisição desses conhecimentos.

> O estudo da trigonometria é essencial para engenheiros, físicos, informáticos e para muitos cientistas, no entanto o desenvolvimento no ensino médio também é fundamental, pois ela está presente em situações cotidianas e de fácil entendimento, como no cálculo da altura de um prédio através de sua sombra e a distância a ser percorrida em uma pista circular de atletismo. A trigonometria permite, ainda, calcular medidas mais abrangentes, como: largura de rios e montanhas, medida do raio da Terra, distância entre a Terra e a Lua, entre outras (PORTO; NOVELLO, 2010, p. 04).

Neste sentido, realizou-se um estudo acerca do conteúdo de trigonometria e suas aplicações a fim de verificar as dificuldades dos alunos e procurar sanar tais problemas. A importância do estudo da trigonometria se deu pelo fato de poder modelar problemas da vida real, utilizando conteúdos matemáticos para resolvê-los, aproximando o aluno da ciência e da vida real.

2.1.3 Trabalhos com a temática de Trigonometria

Ao realizar um estudo dos artigos e das dissertações nos programas de Pós-Graduação, no período de 2004 a 2013, no portal da CAPES, sobre Trigonometria com alunos do Ensino Médio, foram encontrados os trabalhos descritos no Quadro 1.

Quadro 1 - Dissertações e artigos encontrados no portal da CAPES sobre trigonometria

Título	Autor(es)	Ano
Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental	BRITO, A. de J; MOREY, B. B	2004
Dificuldades no Processo Ensino e Aprendizagem de Trigonometria por Meio de Atividades	OLIVEIRA, Francisco Canindé	2006
Um olhar histórico nas aulas de trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa	BORTOLI, Gládis	2012
A Trigonometria na Educação Básica com foco em sua Evolução Histórica e suas Aplicações Contemporâneas	OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes	2013

Fonte: CAPES (2004, 2013, texto digital).

Para Brito e Morey (2004), o conteúdo de trigonometria é um dos subcampos da matemática de maior complexidade de ensino nessa área. Talvez, o fato de não apresentar significado de sua aplicação no cotidiano dos alunos contribua para o fracasso nos processos de ensino e de aprendizagem, gerando, no educando, repulsa pela disciplina de Matemática, em particular, pelos conteúdos de trigonometria que, em muitos casos, estende-se ao professor que ministra aulas da referida disciplina.

Os referidos autores (2004) investigaram as dificuldades que professores de matemática possuíam em relação ao ensino de trigonometria junto aos seus alunos de Ensino Médio. No desenvolvimento das atividades, elas foram observadas pelos pesquisadores em relação aos conceitos e resoluções de problemas, concluindo, dessa forma, que havia a necessidade de se promover a formação continuada visando à melhoria da prática pedagógica.

Essas dificuldades que os professores de matemática têm demonstrado nos trabalhos de Brito e Morey (2004) mostram a necessidade de o docente buscar metodologias que sejam favoráveis aos alunos e à sua própria prática. Assim, verifica-se que, os desafios relacionados ao ensino de trigonometria podem ser superados por meio da construção de sequências didáticas que promovam o resgate do conhecimento do aluno. Aliadas a isso, essas construções podem embasar o docente em termos conceituais e transformá-lo em um pesquisador da própria prática pedagógica.

Entre as investigações envolvendo o tema trigonometria, um trabalho que merece ser destacado é o de Francisco Canindé Oliveira, intitulado “Dificuldades no Processo Ensino Aprendizagem de Trigonometria por Meio de Atividades”, ano de 2006. O estudo foi desenvolvido na Escola Estadual Desembargador Floriano Cavalcanti, situada na zona sul de Natal, município do Rio Grande do Norte, RN. A turma escolhida para a realização da intervenção pedagógica foi uma de 2ª série do Ensino Médio, com cinquenta e dois alunos, faixa etária entre quinze e dezessete anos. O objetivo desse trabalho foi verificar quais as dificuldades sentidas pelos professores e alunos durante procedimentos de ensino baseados numa sequência de atividades de trigonometria.

Para servir como intervenção pedagógica de ensino, Oliveira (2006) elaborou várias atividades sequenciadas que seguiam um mesmo padrão estrutural e que tinham a finalidade de analisar e relacionar as dificuldades do professor e do aluno no processo de ensino em trigonometria. Para o embasamento teórico, o autor concentrou seu referencial na revisão de trabalhos publicados em ensino de trigonometria a fim de verificar os resultados que já haviam sido encontrados por outros pesquisadores. A metodologia empregada foi a Engenharia Didática e os instrumentos, observações durante a intervenção pedagógica; registros das dificuldades e dos pontos relevantes encontrados na realização das atividades; entrevistas; aplicação de atividades.

Em seu estudo, o citado pesquisador propôs uma intervenção pedagógica que abordasse os conteúdos de trigonometria. Para isso, ministrou doze aulas com propostas de atividades que tinham como foco conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo. Todos os trabalhos foram realizados em grupo e a análise dessa sequência de atividades ocorreu em todo o processo. Os resultados demonstraram maior empenho dos alunos, com participação de todos no desenvolvimento das atividades.

Bortoli (2013) realizou a pesquisa “Um olhar histórico sobre as aulas de trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa”. A autora, visando problematizar a constituição de conhecimentos vinculados à trigonometria no triângulo retângulo, mostrou, nessa prática, que trabalhar os conteúdos de trigonometria vinculados às questões da história da matemática e aos saberes matemáticos presentes no mundo da construção civil, torna o processo de ensino e aprendizagem mais interativo, construtivo, e participativo. Durante a investigação, os alunos foram desafiados a analisar, refletir e tirar conclusões. Nessa abordagem, a nomeada pesquisadora desenvolveu atividades com metodologias de pesquisa , experimentos e saída a campo. Ademais, evidenciou a possibilidade de novas investigações, enfatizando a introdução da história da matemática e de conhecimentos da Etnomatemática no estudo das relações trigonométricas no círculo trigonométrico e no triângulo qualquer.

No trabalho intitulado “A Trigonometria na Educação Básica com foco em sua Evolução Histórica e suas Aplicações Contemporâneas”, Juliana Elvira Mendes (OLIVEIRA, 2013) teve como objetivo apresentar uma proposta metodológica para o ensino de trigonometria na Educação Básica, concentrando-se nas aplicações contemporâneas. A pesquisadora fez um breve relato sobre a história da trigonometria, sua relação e aplicação, apresentando sugestões e orientações curriculares sobre sua asserção. Como proposição metodológica, expôs uma sequência didática com atividades em que utilizou recortes da história da matemática, recursos multimídias e atividades práticas.

As contribuições dos estudos sobre a temática trigonometria, realizados pelos autores acima citados, mostraram a necessidade de o professor buscar metodologias que sejam favoráveis aos alunos e à sua própria prática pedagógica. Apresentaram uma proposta com foco na trigonometria e as abordagens foram desenvolvidas por meio de atividades diferenciadas. Nos trabalhos, percebeu-se o envolvimento e interesse dos discentes em todo o processo. A abordagem de forma diferenciada expôs resultados positivos em relação à aprendizagem da turma. É importante destacar que o docente, ao desenvolver uma metodologia diferenciada, favorece a aquisição e construção do conhecimento do educando.

A revisão dos trabalhos publicados em ensino de trigonometria apontaram as dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem em trigonometria no triângulo retângulo, percebidas por professores e alunos. Tais estudos mostraram as contribuições dos autores no sentido de superar tais dificuldades. Nesta perspectiva, dentre os trabalhos aqui comentados, tomou-se como base o de Oliveira (2006), por apresentar uma metodologia de pesquisa semelhante à proposta da professora pesquisadora. Vale ressaltar que o foco deste estudo é o triângulo não retângulo e a Engenharia Didática, discutidos na seção que segue.

2.2 Engenharia didática e a Trigonometria

Nesta seção, são abordadas algumas considerações sobre a Engenharia Didática, alguns trabalhos envolvendo-a com a trigonometria e a estrutura metodológica.

2.2.1 Algumas considerações sobre a Engenharia Didática

Em meados de 1980, a francesa Michèle Artigue iniciou seu trabalho na área de ensino em matemática e entregou-se à investigação, inovação e ao desenvolvimento profissional de professores, buscando divulgar a engenharia didática como metodologia de pesquisa no ensino de matemática. Seu estudo possibilitou a articulação entre a teoria e a prática, pois essa metodologia consiste na elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática que pode ser desenvolvida em sala de aula ou fora dela.

Dessa forma, a Engenharia Didática tornou-se um recurso utilizado na prática pedagógica da matemática, focando sempre a aprendizagem do aluno e transformando o docente em “professor engenheiro”. A Engenharia Didática é um termo que possui uma dupla função: é utilizada como uma metodologia de investigação e também como produtora de situações de ensino e de aprendizagem com vistas à melhoria da qualidade da aula e aprendizagem dos educandos.

Almouloud e Coutinho (2008, p. 05) consideram a Engenharia Didática uma metodologia de pesquisa:

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita

> internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

É importante destacar que o objeto central, nessa metodologia, é a sequência didática por meio da qual são observadas as interações entre o tripé professor, aluno e saber. Nesse sentido, Brousseau (1996, p. 49) "[...] coloca que é preciso criar situações didáticas que façam funcionar o saber, a partir dos saberes definidos culturalmente nos programas escolares" (GÁLVEZ, 1996, p. 32).

Brousseau (1996) propõe ao professor que, durante o seu trabalho docente, desenvolva situações de ensino nas quais sejam encontradas estratégias na resolução de problemas, envolvendo situações dentro de um contexto social e cultural do aluno. Desse modo, estaria possibilitando uma forma de contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem, promovendo a construção e aquisição do conhecimento.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008), a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que tem sua base fundamentada na experimentação e com foco nas realizações didáticas em sala de aula. O seu desenvolvimento leva em consideração quatro etapas: concepção, realização, observação e análise das sequências de ensino, e sua validação é feita por comparação entre análise a priori e posteriori.

> A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer) (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008, p. 05).

Os citados autores argumentam que a Engenharia Didática pode ser desenvolvida como um suporte de ensino de certo objeto matemático. A pesquisa foi representada pelos processos de ensino e de aprendizagem da trigonometria no triângulo não retângulo, fazendo sentido na aplicação das leis trigonométricas e no cálculo da área. E, a partir deste, o que se desejou foi a construção de uma abordagem didática para concretizar esse campo do conhecimento. Teixeira e Passos (2013, p. 18) comentam:

> A Engenharia Didática consegue interligar o plano teórico da racionalidade à experimentação da prática educativa, numa execução que envolve desde o pensar das ideias iniciais até a prática, que no caso do professor

pesquisador, será quase sempre em sala de aula.

As autoras acima citadas enfatizam que o trabalho desenvolvido com os alunos através de um esquema experimental baseado nas "realizações didáticas" em sala de aula possibilita ao professor realizar um estudo minucioso, analisando cada fase da sequência de ensino ocorrida durante os processos de ensino e aprendizagem. A Engenharia Didática compreende as fases descritas no Quadro 2.

Quadro 2 – Fases da Engenharia Didática

Fase	Características
1. Análise Prévia	Nesta fase, são realizadas as análises preliminares que podem englobar: • Revisão epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; • O ensino usual e seus efeitos; • As concepções dos alunos, dificuldades e os obstáculos que marcam sua evolução; • Condições e fatores de que depende a construção didática efetiva; • A consideração dos objetivos específicos da pesquisa; • O estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual se insere o trabalho.
2. Análise a priori	Nesta fase, são definidas as variáveis microdidáticas e macrodidáticas de ensino para logo em seguida: • Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação a-didática desenvolvida; • Analisar a importância dessa situação para o aluno; • Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervieram, resultem do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.
3. Experimentação	Momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o, se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade.
4. Análise a posteriori e validação	Apoia-se no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. A análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem

	para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo.

Fonte: Adaptado de Almouloud e Coutinho (2008).

Sobre a primeira fase, a análise preliminar, Pommer (2013) argumenta que o pesquisador deve fazer ponderações entre o tema da pesquisa e o quadro teórico didático geral, buscando conhecer o objeto de estudo, de forma que possa desenvolvê-lo coerentemente com os objetivos da pesquisa. O autor afirma que:

> Nesta análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino (POMMER, 2013, p. 23).

A análise preliminar é seguida pela fase de análise a priori, que se constitui numa etapa mais dinâmica que a anterior. Pommer (2013) escreve que é nesta etapa que se definem as variáveis didáticas do estudo em questão. São as estratégias de ensino e resolução de atividades que objetivam fazer evoluir de modo positivo o desempenho dos estudantes envolvidos na pesquisa. Pommer cita Artigue para definir a fase a priori:

> [...] deve ser concebida como uma análise do controle do sentido; muito esquematicamente, se a teoria construtivista coloca o princípio do compromisso do aluno na construção dos seus conhecimentos por intermédio das interações com determinado meio, a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia de engenharia [didática], teve desde sua origem, a ambição de se constituir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações (ARTIGUE, 1996, apud POMMER, 2013, p. 24).

A segunda fase é a de planejamento, em que o pesquisador elabora toda sua estratégia didática. Para isso, é importante considerar as variáveis globais e locais, bem como prever os comportamentos e procurar validar suas hipóteses. O aluno é o ator principal, tendo em vista que todo o planejamento da pesquisa é nele focado.

A terceira fase, a experimentação, é bastante pragmática. Nela, o pesquisador põe em prática tudo o que planejou nas fases anteriores e é onde de fato acontece a aplicação da Engenharia Didática. Esta fase pressupõe:

> - a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa a população de alunos que participará da experimentação;
> - o estabelecimento do contrato didático;

> - a aplicação do instrumento de pesquisa;
> - o registro das observações feitas durante a experimentação (MACHADO, 2002, p. 206).

O contrato didático ao qual Machado se refere é explicado por Brousseau (1996) como sendo o ato de o pesquisador não intervir no processo de construção do conhecimento. A descoberta e a solução deveriam acontecer de forma independente, baseadas nos conhecimentos anteriores do aluno. A interferência, na verdade, não é negada; ela existe, mas o autor recomenda que seja a mínima possível.

Assim, Almouloud e Coutinho (2008, p. 06) escrevem que “a fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário”. Dessa forma, verifica-se que a experimentação é uma fase que deve ser conduzida com todo rigor no sentido de se obterem resultados coerentes com os objetivos traçados.

A última fase - a análise a posteriori - é uma consequência imediata da aplicação da fase anterior de experimentação. Nesta última etapa, o pesquisador analisa toda a produção construída ao longo da aplicação da pesquisa na etapa anterior. Segundo Pommer (2013, p. 26),

> [...] esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise *a priori*, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa.

Essas são as fases que tornam a Engenharia Didática um processo contínuo de construção do conhecimento e investigação metodológica, cabendo ao docente adaptar suas etapas segundo o conteúdo que deseja trabalhar em sala de aula. Como aponta Artigue (1988, p. 03),

> A engenharia didática, encarada como metodologia de pesquisa, caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado nas “realizações didáticas” e são construídas em sala de aula, levando em consideração a concepção, a realização, a observação e a análise, que são as fases de seu processo.

O uso da Engenharia Didática como metodologia de ensino emerge à medida que as necessidades de exposições didáticas dos conteúdos se tornam um desafio em sala de aula, dado o alto nível de abstração de alguns conteúdos matemáticos, como é o caso do de trigonometria, cujos alunos possuem dificuldades no aprendizado. Nesta metodologia de pesquisa, Artigue (1988, p. 283) compara o trabalho do professor com o de um engenheiro, pois, nessa relação:

> Tal como o engenheiro, o professor necessita de um conjunto de conhecimentos teóricos, ter planejamento de todas as etapas da pesquisa, ir prevendo as possíveis dificuldades e soluções para os problemas encontrados, até a aplicação da sequência didática.

A autora menciona que, no decorrer de cada fase, durante todo o trabalho de pesquisa, é necessário que tais fases sejam retomadas de acordo com as dificuldades e obstáculos observados.

2.2.2 Alguns trabalhos de Trigonometria e Engenharia Didática

A literatura relata muitas situações em que o ensino de trigonometria esbarra nas dificuldades que os alunos apresentam ao operarem com os conceitos trigonométricos. Entretanto, quando o conteúdo é abordado com foco em sequências didáticas e que vislumbram a qualidade no ensino, os resultados podem ser produtivos. Para comprovar essa afirmativa, buscou-se por dissertações sobre trigonometria em triângulos não retângulos e a Engenharia Didática no Ensino Médio no Portal da CAPES. Assim, nesta seção, apresentam-se alguns resultados.

Como exemplo, observa-se em Arantes (2013) o relato de uma experiência bem sucedida quanto à idealização, planejamento e aplicação de uma aula, envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo, através da análise de rampas de acesso e da norma brasileira que as regulamenta. A autora seguiu como pressupostos teóricos a Engenharia Didática, fundamentando-se nas experiências do professor em sala de aula. Com o intuito de despertar o interesse e motivar os alunos à participação, planejou uma sequência de atividades. A aula teve início com a apresentação do tema “As razões trigonométricas e as rampas de acesso”.

Para o desenvolvimento do tema, a professora utilizou uma história em quadrinhos com o título “Acessibilidade”, promovendo uma discussão sobre a existência ou não de rampas de acesso nos diferentes locais, como na escola, em prédios da cidade, e a dificuldade de locomoção enfrentada pelos cadeirantes. Ademais, problematizou a presença de pessoas com necessidades especiais de locomoção na escola e como criar um modelo matemático para representar essas rampas.

Após a análise das rampas de acesso à escola que os alunos frequentavam e compararem suas medidas com a norma brasileira da ABNT que regulamenta a acessibilidade em prédios e construção, Arantes (2013) desenvolveu atividades com a finalidade de que os seus alunos construíssem o conceito de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e atribuíssem a estes conceitos os significados. O trabalho da autora mostrou que a proposta foi viável para o ensino de trigonometria, fugindo do tradicional e possibilitando interações dinâmicas no processo de ensino e aprendizagem.

Outro exemplo está na pesquisa realizada por Silva (2011), que investigou as contribuições de uma abordagem, envolvendo modelagem e diferentes tecnologias no ensino de trigonometria com base na metodologia de pesquisa inspirada na Engenharia Didática. A investigação compreendeu as etapas de análises prévias; concepção e análise *a priori*; implementação; análise a posteriori e validação da sequência didática. A autora pretendeu, através de uma abordagem inspirada na modelagem e utilização de recursos didáticos diferenciados, incentivar os alunos a descobrirem propriedades trigonométricas presentes em situações-problema com referência na realidade.

Também foram objetivos do trabalho de Silva (2011) ressignificar com os alunos modelos trigonométricos clássicos através da modelação, propiciando-lhes situações em que pudessem atribuir significado ao conteúdo trigonométrico por meio da utilização de material concreto ou *applets* de Geometria Dinâmica. Para elaborar a sequência didática, parte integrante da pesquisa, a citada autora fez uma revisão bibliográfica nos livros didáticos, nos documentos oficiais e em outras pesquisas para observar como esse assunto era abordado. A sequência didática contou com vinte e três atividades que constituíram uma unidade de ensino com foco na trigonometria. Os sujeitos envolvidos foram setenta alunos de duas turmas da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública do interior do Estado de Minas Gerais.

A autora evidenciou que os resultados contribuíram para o desenvolvimento de recursos e atividades de matemática, incentivando os professores a melhorarem sua prática em sala de aula. Ademais, possibilitou que os alunos atribuíssem significado aos conteúdos trigonométricos estudados, incentivando seu envolvimento e empenho durante a realização das atividades.

Pelos trabalhos mencionados, observa-se o esforço de alguns professores em romper com o ensino tradicional, desafio este que os está levando à busca de métodos alternativos, novas estratégias de ensino que contribuam para a aprendizagem, construção e aquisição do conhecimento por parte dos alunos. O uso de uma sequência de atividades, tendo como base os pressupostos da Engenharia Didática, faculta a produção de resultados produtivos, desde que o docente enfrente, sem medo, o desafio de colocar em prática suas ideias.

No próximo capítulo, é apresentada a metodologia da pesquisa e os instrumentos utilizados para a coleta dos dados.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para a realização deste estudo, propôs-se uma pesquisa de abordagens quantitativa e qualitativa, Em relação a abordagem qualitativa, segundo Moresi (2003, p. 09), tem como base a análise das variáveis de forma indutiva, pois:

> [...] considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem.

Dessa forma, pretendeu-se analisar a relação entre os alunos e seus processos de aprendizagem, intermediada pelo professor com o uso de sequências didáticas de ensino. A investigação foi baseada na Engenharia Didática, tratando-se, neste sentido, de um estudo qualitativo. Contudo, também ocorreu o uso da abordagem quantitativa para comparar os resultados decorrentes dos testes inicial e final realizados com os discentes. Logo, as duas abordagens estão presentes nesta pesquisa.

Ainda com relação à abordagem quantitativa, seu uso, neste estudo, também foi utilizado para fins de apresentação gráfica e comparação de resultados dos testes a *priori* e *posteriori* da Engenharia Didática. Tal uso é justificado por Moreira (2003, p. 07), quando afirma que a pesquisa quantitativa "procura estudar os fenômenos de interesse da pesquisa em educação, geralmente através de estudos experimentais ou correlacionais caracterizados primordialmente por medições objetivas” e, por consequência, as análises quantitativas.

Os sujeitos de pesquisa deste estudo foram os alunos do 2º ano de uma Escola Estadual, cidade de Santana/AP. A referida escola, localizada na área urbana central no município de Santana, Estado do Amapá, era uma instituição de médio porte; contava, em 2014, com, aproximadamente, mil e quinhentos alunos matriculados; funcionava nos três turnos; continha treze salas de aula e atendia a duas modalidades de Ensino: Técnico Profissionalizante e Médio Regular. Fazia parte da sua administração institucional um diretor; um diretor adjunto; um psicólogo e um nutricionista. Trabalhavam, ainda, em cada turno, três coordenadores pedagógicos e vinte professores das disciplinas dos Ensinos Técnico e Médio. Sua estrutura física era composta por uma biblioteca, dois laboratórios de informática, uma quadra coberta, um auditório com capacidade para cinquenta pessoas, um sala de vídeo e uma de leitura. No período da intervenção da professora pesquisadora, alguns blocos encontravam-se em reforma, motivo pelo qual a realização desta prática acabou se estendendo.

A turma[1] escolhida para a realização da intervenção pedagógica possuía trinta alunos matriculados, sendo dezesseis meninos e quatorze meninas, com idade variando de quinze a dezessete anos. Essa turma era um misto de realidades, pois os discentes, em sua maioria, residiam no Bairro Central, nas proximidades da escola. Em relação ao conteúdo de Matemática, muitos alunos possuíam dificuldades na compreensão de conceitos e significados da trigonometria. Além disso, não conseguiam perceber a aplicação de suas leis em problemas da vida real.

A duração do período escolar diário era de cinco horas e vinte minutos, distribuídas em seis aulas de cinquenta minutos. A carga horária de Matemática para o Ensino Médio correspondia a três aulas semanais. Nesse educandário, eram desenvolvidos muitos projetos, portanto, uma referência no município. Vale ressaltar que, ao diretor, foi solicitada a permissão para a realização desta pesquisa por meio do Termo de Concordância da Direção da Instituição de Ensino (APÊNDICE A) e, aos alunos, a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE B) para que eles tivessem ciência da participação na presente investigação.

[1] Turma escolhida não era da professora pesquisadora.

Para alcançar os objetivos propostos e efetivar esta intervenção pedagógica, foi elaborada uma sequência didática de ensino, que consta no quadro 3. Para esta, foi utilizada a metodologia da Engenharia Didática, com aplicação de teste inicial, atividades da intervenção pedagógica e teste final para análise da aprendizagem. E, como instrumentos de pesquisa, a aplicação de testes inicial e final; exploração de uma sequência didática; filmagem de aulas; diário de bordo do aluno e do professor.

Quadro 3 - Atividades planejadas para intervenção pedagógica

Encontro	Número de horas aulas	Atividade proposta
01	02	• Apresentação aos alunos do projeto de pesquisa e comentários sobre o porquê da escolha do tema e dos instrumentos de coleta de dados para a pesquisa: a filmagem das aulas, o diário de campo do aluno e professor. • Aplicação do teste inicial para os alunos.
02	01	• Revisão oral com exposição das soluções na lousa.
03	02	• Travessia do rio da Ilha de Santana.
04	01	• Discussões e socialização das estratégias de resolução.
05	02	• Travessia do rio do Igarapé da Fortaleza.
06	01	• Discussões e socialização das estratégias de solução.
07	02	• Cálculo da área de uma região triangular.
08	01	• Socialização e discussão dos resultados.
09	02	• Aplicação da trigonometria.
10	01	• Socialização e discussão dos resultados
11	02	• Calculando distância e altura
12	01	• Socialização dos problemas de aplicação da lei dos senos e cossenos.
13	02	• Aplicação do teste Final.

Fonte: Elaborado pela autora.

Os testes inicial e final foram constituídos de questões que versaram sobre problemas envolvendo trigonometria. Ambos os instrumentos apresentaram algumas questões semelhantes, envolvendo situações-problema do cotidiano e questões formais relacionadas ao tema trigonometria. As semelhanças verificadas nas questões se justificaram, pois, ao utilizar a Engenharia Didática, um dos pressupostos era identificar indícios de melhoria na aprendizagem dos alunos.

O diário de bordo da professora serviu para o registro detalhado e preciso dos

(Continua...)

passos de investigação, dos testes e resultados alcançados, das datas e locais da investigação, bem como das dificuldades e dos avanços durante o desenvolvimento da intervenção pedagógica. De acordo com Hess (2006, p. 93), "O diário é uma fonte para trabalhar a congruência entre teoria e prática". E o diário de bordo do aluno foi utilizado para registro de dúvidas que surgissem no andamento das atividades, além da descrição de estratégias de resolução de atividades. Cabe destacar que esses dados foram complementados por meio de filmagens.

A sequência didática de ensino, elaborada de acordo com a teoria da Engenharia Didática, contemplou os seguintes conteúdos: lei dos senos, lei dos cossenos e área de triângulos quaisquer. A estratégia de ensino para tais conteúdos envolveu atividades no laboratório de informática, na sala de aula e fora dela. Foi utilizado o LIED (Laboratório de informática Educacional) para a criação de figuras representativas de situações-problema no média player[2], com apoio de um profissional da área de tecnologia.

Vale destacar que outros conteúdos foram revisados após o resultado do teste inicial (APÊNDICE C) junto aos alunos. Após essa etapa, a sequência foi elaborada definitivamente. Em relação à sequência didática, é importante salientar que, em cada encontro, foi explicitado o objetivo; o que se esperava alcançar e estratégias de resolução para cada atividade proposta, considerados passos importantes na metodologia escolhida para esta investigação. Além disso, quando possível, era descrita uma situação-problema com o intuito de que o aluno percebesse a aplicação do conteúdo em estudo.

A pesquisa ocorreu durante as aulas de Matemática e teve a duração de dezesseis horas aulas. Entretanto, antes da investigação, a professora pesquisadora não atuava na turma escolhida. O desenvolvimento das atividades em sala de aula aconteceu da seguintes forma: os testes inicial (diagnóstico) e final, os alunos os resolveram individualmente; na sequência didática, formaram, livremente, pequenos grupos, cujos participantes mantiveram-se no decorrer de todo o estudo. No levantamento dos dados, cada aluno foi identificado por um número - de 1 a 30 - para a preservação do anonimato.

---

[2] Macromédia *player é um programa* reprodutor de mídia digital, ou seja, áudio e vídeo em computadores pessoais, produzidos pela Microsoft.

No capítulo que segue, o relato do desenvolvimento das atividades propostas e a discussão dos dados emergentes da pesquisa.

4 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS E DISCUSSÃO DOS DADOS EMERGENTES

Neste capítulo, são descritas as atividades realizadas, seguindo as fases de acordo com a metodologia da Engenharia Didática. Além disso, são apresentados os dados emergentes da proposta, bem como a discussão e a análise dos resultados decorrentes em cada fase.

4.1 Primeira fase: análise preliminar

Para a fase preliminar de uma prática com a utilização da Engenharia Didática, Machado (1999) sugere que o professor pesquisador faça ponderações entre o tema da pesquisa e o quadro teórico geral, buscando conhecer os objetos de estudo. Segundo ele:

> [...] considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão, bem como: a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino, a análise do ensino atual e de seus efeitos, a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução [*e*] a análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática (MACHADO, 1999, p. 201).

Para verificar os conhecimentos dos alunos em relação à trigonometria, foi utilizado como instrumento de coleta de dados um teste inicial, realizado em sala de aula. Como explica Artigue (1988), é na primeira fase que as “análises prévias ou preliminares” são realizadas; e, na qual é analisado o conteúdo a ser trabalhado, bem como as formas de desenvolvê-lo. Ademais, investigam-se dificuldades e obstáculos observados durante os processos de ensino e de aprendizagem.

Neste contexto, o encontro um teve a duração de duas horas aulas e foi dividido em dois momentos. No primeiro, a professora apresentou a pesquisa aos alunos, comentou a importância do trabalho que seria desenvolvido para sua carreira docente e a contribuição para os processos de ensino e de aprendizagem de matemática, em particular da trigonometria. Explicou que tinha como finalidade verificar a produtividade de uma sequência didática relacionada ao tema trigonometria no triângulo não retângulo e que o estudo envolveria os seguintes conceitos trigonométricos: a lei dos senos, lei dos cossenos e cálculo da área de uma região triangular no triângulo não retângulo.

A pesquisadora explicou ainda que, como se tratava de uma pesquisa, precisaria mostrar um resultado final. E, para chegar a ele, utilizaria alguns instrumentos para a coleta dos dados, tais como, aplicação de um teste inicial (diagnóstico) com a finalidade de verificar o nível de conhecimento matemático dos alunos em relação à trigonometria no triângulo retângulo; aplicação de uma sequência didática de ensino para constatar os possíveis problemas de compreensão apresentados referentes à trigonometria de um triângulo qualquer; aplicação de um teste final para averiguar a aprendizagem. Quanto à sequência didática que seria desenvolvida, explicou que constaria de atividades envolvendo conteúdos de trigonometria, desenvolvidas por meio de encontros nas aulas de matemática, cujos resultados serviriam para descrição e análise dos dados.

Após a fala da pesquisadora, alguns alunos comentaram que não gostavam muito do tema, pois achavam o conteúdo de trigonometria muito complicado e sem importância, já que não conseguiam relacioná-lo com seu cotidiano. De acordo com Thomaz (1999, p. 10):

> A Matemática é uma disciplina que se destaca em relação às outras, muito mais pela dificuldade que representa para muitos alunos do que pela sua importância enquanto área de conhecimento. Dificuldade entendida como algo complexo, complicado, custoso de entender e de fazer.

E Lima (1995, p. 7) complementa:

> Um aluno pode, por exemplo, saber praticamente tudo sobre a Proclamação da República Brasileira e ignorar completamente as capitanias hereditárias. Mas não será capaz de estudar Trigonometria se não conhecer os fundamentos da Álgebra, nem entenderá essa última se não souber as operações aritméticas.

A professora argumentou que seria uma boa oportunidade para eles perceberem a relação da matemática, em especial da trigonometria, com situações do cotidiano. Ademais, explicou sobre a necessidade da participação ativa da turma na investigação. Alguns ficaram relutantes quanto ao seu envolvimento no estudo proposto.

A maioria dos alunos ainda comentou que não gostava da disciplina de Matemática, sentia muita dificuldade e, por consequência, acabava desenvolvendo sentimentos negativos em relação aos conteúdos e, em muitos casos, estendendo-os ao professor. Nesse sentido, eram frequentes tais comentários: *"Por que a senhora escolheu ser professora de Matemática?", "Não gosto nem de ouvi falar em Matemática!", "Eu até gosto da senhora, mas não dessa disciplina"* entre outros.

Sentimentos, como medo, repulsa e outros, podem contribuir para o entrave no desenvolvimento cognitivo dos discentes diante dos conteúdos nessa área do conhecimento. Nesse contexto, Panizza (2006, p. 10) enfatiza a importância da função do professor na construção do conhecimento dos alunos.

> Ser capaz de diferenciar os objetos matemáticos de suas representações, compreender as condições nas quais uma representação funciona como tal, identificar nos procedimentos e representações que os alunos usam maneiras distintas de tratar e de conhecer os objetos e suas representações e dispor de conhecimentos didáticos para gerir um ensino que os faça evoluir são considerados saberes necessários para realizar uma gestão da classe favorável à construção do sentido dos conhecimentos por parte dos alunos.

Nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática, segundo a autora citada, é importante a interação do professor com os alunos para que esses processos ocorram de forma prazerosa e tenham significado para o aluno. Dessa forma, podem contribuir com o desenvolvimento e capacidade de sua autonomia, no agir e no pensar durante a realização das atividades propostas.

No segundo momento do encontro, houve a aplicação do teste inicial para investigar quais os conhecimentos de matemática que os alunos possuíam referentes às relações trigonométricas em triângulos retângulos, bem como verificar o nível de interesse pelos conteúdos matemáticos, em particular, trigonometria. O teste constou de oito questões; as quatro primeiras, com perguntas abertas, e as demais, para serem respondidas, necessitavam da resolução de cálculos matemáticos. Respondido de forma individual, o referido teste teve a duração de uma hora aula de cinquenta minutos e envolveu conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo.

A seguir, apresentam-se as questões do teste inicial, as respostas dos alunos e a análise dos dados emergentes.

QUESTÃO 1 - O que você entende por trigonometria?

O objetivo dessa questão era investigar quais os conceitos que os alunos possuíam em relação à trigonometria. Esperava-se que eles fossem capazes de conceituar trigonometria de acordo com o que já haviam estudado.

As respostas foram diversificadas. Dos trinta alunos participantes, nenhum definiu corretamente trigonometria, ou seja, desconheciam que a palavra vem do grego (trigono: triângulos e metria: medidas). Portanto, ela é o estudo da matemática responsável pela relação existente entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

Alguns a relacionaram com o estudo de três ângulos e ainda houve os que a associaram ao estudo do quadrado. Os alunos se referiram ao quadrado não como figura geométrica, mas ao teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$. Durante a realização da atividade, surgiram comentários, como os descritos no Quadro 4.

Quadro 4 - Comentários dos alunos A1, A2 e A3 para a professora

Aluno/Professor	**Comentários**
Aluna 1	Esse assunto é muito chato, porque temos que estudar trigonometria?
Professora	Por que você acha chato se vivemos rodeados de situações que envolvem matemática?
Aluno 2	A palavra trigonometria vem de trigo?
Professora	Claro que não! Que tal realizar uma pesquisa sobre o assunto?
Aluna 3	Ah, esse assunto ainda não estudei!

Fonte: Banco de dados da professora pesquisadora.

Diante do que foi colocado pelos alunos, percebeu-se que seria interessante a professora trabalhar o conceito histórico da trigonometria para a compreensão dos conteúdos relacionados ao tema. Nesse sentido, Vergnaud (1987, p. 5) lembra que:

> É essencial que os professores estejam cientes que não podem resolver o problema do ensino, usando simples definições por melhores que elas sejam; as ideias dos alunos só podem mudar se conflitarem com situações que eles não consigam resolver... Resolver problemas é a fonte e o critério do conhecimento operacional. Precisamos ter essa ideia sempre em mente e sermos capazes de oferecer aos alunos situações que busquem estender o significado de um conceito.

O autor menciona que o professor deveria propor atividades de ensino que estimulassem os alunos a buscarem compreender o significado de um conceito de forma autônoma.

QUESTÃO 2 - O que você já estudou ou leu sobre trigonometria?

Com essa pergunta, esperava-se que cada aluno respondesse que já havia estudado ou lido sobre trigonometria.

Da mesma forma que na questão anterior, as respostas foram diversificadas. A maioria respondeu que estudou o conteúdo de trigonometria em sala de aula e até conseguiu associar o estudo aos conceitos básicos trigonométricos. Houve também os que buscaram mais informações a partir de leituras complementares fora da sala de aula. No Quadro 5, algumas respostas dadas pelos alunos participantes.

Quadro 5 - Respostas de alguns alunos para a questão 2 do teste inicial

2 - O que você já leu ou estudou sobre trigonometria?	
Aluno	**Resposta**
A1	Estudei sobre o triângulo retângulo, as relações seno, cosseno e tangente; ângulos notáveis e o teorema de Pitágoras.
A2	Li sobre semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras.
A3	Li sobre a soma dos ângulos internos que é 180º.
A4	Estudei que trigonometria é a medida do triângulo quadrado que possui 3 lados: cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa.
A5	Não respondeu nada.

Fonte: Banco de dados da pesquisadora.

A expectativa era de que a maioria conceituasse a trigonometria como sendo o estudo da matemática responsável pela relação existente entre a medida dos lados e os ângulos de um triângulo, Sabe-se que os conceitos básicos de trigonometria são conteúdos abordados na oitava série e são pré-requisitos para um estudo mais complexo. Entretanto, esses alunos do Ensino Médio demonstraram que não sabiam conceituá-la. Brolezzi (1996) afirma que uma das dificuldade no processo de aprendizagem de conteúdos da trigonometria pode ser explicado pela história da matemática.

> Da carga simbólica forte da Trigonometria advém muito da dificuldade do seu ensino e aprendizagem. A origem grega de boa parte dos seus conceitos e a utilização da linguagem dos ângulos calcada na base 60 dos povos da Mesopotâmia fazem com que os alunos tenham muita dificuldade em aprender Trigonometria (BROLEZZI, 1996, p. 70).

Neste sentido, a busca por respostas na história da matemática pode favorecer a compreensão dos conceitos e a aplicabilidade da trigonometria em situações cotidianas.

QUESTÃO 3 - Cite dificuldades em relação ao tema trigonometria.

A questão número três tinha como objetivo identificar as principais dificuldades dos alunos referentes ao tema trigonometria.

Pelas respostas, foi possível observar as dificuldades de interpretação e leitura do problema apresentadas pela maioria da turma em questão, haja vista não saber que relação trigonométrica utilizar. Uma parte respondeu que a dificuldade estava na identificação dos catetos oposto e adjacente, bem como da hipotenusa. Já outra mencionou, como entrave, a efetuação dos cálculos e quatro não responderam á questão. O Quadro 6 mostra as respostas mais pertinentes dos alunos.

Quadro 6 - Respostas à questão 3 do teste inicial

3 - Cite dificuldades em relação ao tema trigonometria	
Aluno	**Resposta**
A1	A dificuldade encontrada é saber quem é o cateto oposto e adjacente
A2	É mais na hora de retirar os dados de uma questão, principalmente quando o texto é muito grande e requer interpretação.
A3	São os cálculos que envolvem raiz quadrada.
A4	Lembrar o valor dos ângulos notáveis.
A5	Não respondeu nada.

Fonte: Banco de dados da pesquisadora.

Considerando as respostas dadas, observou-se que os alunos não tinham o conceito bem definido das razões trigonométricas do triângulo retângulo, fato que pode tê-los confundido no momento da leitura e interpretação para a resolução dos problemas, pois “Ler é o processo de construir significado a partir do texto” (NASPOLINI, 1996, p. 25). Se o educando conseguir compreender as informações contidas no texto, possivelmente, chegará a um esquema representativo a partir da interpretação dessas informações.

Após análise das respostas dadas pelos alunos nessa questão, a professora percebeu a necessidade de fazer uma revisão, em sala de aula, por meio da aplicação de questões práticas sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo a fim de estabelecer diferenças entre elas. Como propõe Artigue (1988), no decorrer do trabalho de pesquisa, torna-se necessário que cada fase seja retomada e aprofundada de acordo com a necessidade dos educandos durante os processos de aprendizagem. Segundo a autora, a fase de análise preliminar ou prévia pode ser retomada após o início da fase seguinte, a experimentação, por ser a de organização da sequência didática.

QUESTÃO 4 - Quais as expectativas em relação às aulas com o conteúdo de trigonometria?

Em relação à questão quatro, presumia-se que os alunos citassem, como expectativas, aplicações práticas do conteúdo de trigonometria com o cotidiano. Nos processos de ensino e de aprendizagem, uma aula desenvolvida dessa forma pode despertar o interesse e a curiosidade, estimular a participação na busca de solução. Isso “demonstra que criança não aprende nada senão por uma conquista ativa” (ROUSSEAU, 2014, texto digital).

A diversificação das repostas novamente ocorreu. Predominaram o desejo de aprender o conteúdo de trigonometria para usá-lo no cotidiano e que as aulas fossem mais divertidas. Outros responderam ainda que esperavam aulas normais, ou seja, aulas expositivas das quais já estavam acostumados, ou ainda, não tinham nenhuma expectativa. No Quadro 7, a exposição de algumas respostas.

Quadro 7 - Respostas para a questão 4 do teste inicial

4 - Quais suas expectativas em relação às aulas com o conteúdo de trigonometria?	
Aluno	**Resposta**
A1	Aprender os conteúdos de trigonometria para usar no cotidiano.
A6	Que as aulas sejam mais divertidas e menos chatas.
A7	Aprender a ver a trigonometria nas situações do cotidiano.
A10	Normal.
A15	Nenhuma

Fonte: Dados da pesquisa.

Após análise das respostas dos alunos, refletiu-se a importância de o professor, em sua prática docente, desenvolver atividades de ensino envolvendo o cotidiano do aluno para que ele seja o agente ativo na construção e aquisição do conhecimento. Nesse sentido, de acordo com Micotti (1999, p. 154):

> A aplicação dos aprendizados em contextos diferentes daqueles em que foram adquiridos exige muito mais que a simples decoração ou a solução mecânica de exercícios: domínio de conceitos, flexibilidade de raciocínio, capacidade de analise e abstração. Essas capacidades são necessárias em todas as áreas de estudo, mas a falta delas, em Matemática, chama a atenção.

Para a autora, o contexto no qual o aluno está inserido permite perceber a importância que a matemática exerce no mundo à sua volta e, com isso, a necessidade de compreender as situações vivenciadas em seu cotidiano. Associar teoria e prática no ensino de matemática de forma contextualizada possibilita ao aluno desenvolver habilidades e competências, como a criatividade, o interesse, o espírito de investigação e capacidade de resolver problemas, além de contribuir para uma aprendizagem que apresente maior significado para o aluno.

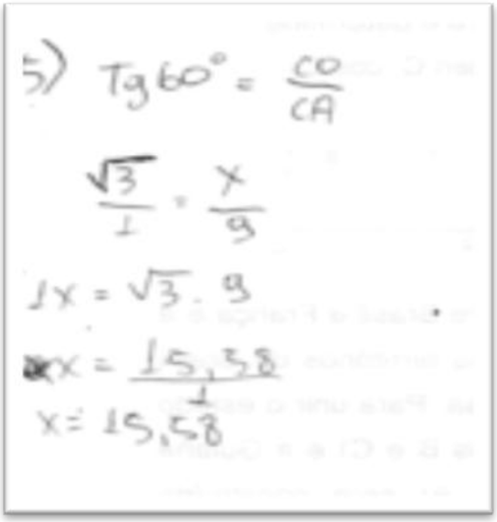
Questão 5 - (Escola Adventista, 2013) Um navio, navegando em linha reta, vai de um ponto B até um ponto A. Quando o navio está no ponto B, é possível observar um farol situado num ponto C de tal forma que o ângulo ABC mede 60º. Sabendo que o ângulo $C\hat{A}B$ é reto e que a distância entre A e B é de 9 milhas, calcule a distância, em milhas do ponto A ao farol.

Quanto à questão acima, conjecturava-se que, a partir da aplicação das relações trigonométricas no triângulo retângulo, os discentes fossem capazes de calcular a distância, em milhas, do ponto A ao farol.

Dos trinta que responderam ao teste, somente três acertaram a questão; sete deixaram em branco e vinte a erraram. Um dos cálculos corretos realizados encontra-se na Figura 2 e uma resolução incorreta, na Figura 3.

Figura[3] 2 - Resolução correta do Aluno 1 para a questão 5 do teste inicial

Quadro A



Quadro B

5) $Tg60º = \frac{CO}{CA}$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{X}{9}$$

$$1X = \sqrt{3}.9$$

$$X = \frac{15,58}{1}$$

$$X = 15,58$$

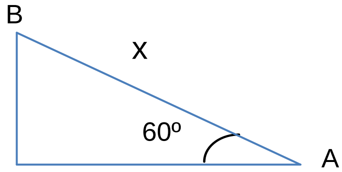
Fonte: Arquivo da professora pesquisadora.

Figura 3 - Resolução incorreta do Aluno 8 para a questão 5

Quadro A

Quadro B

5)



$$sen60º = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{1} = \frac{9}{X}$$

$$\sqrt{3} = 9$$

Fonte: Arquivo da professora pesquisadora.

O problema acima exposto pode ser considerado de baixo nível de

[3] As figuras do quadro A representam as soluções encontradas pelo aluno, enquanto que o quadro B é a transcrição das soluções devido à falta de nitidez das imagens.

complexidade, pois o aluno apenas necessitava lê-lo e interpretá-lo para aplicar corretamente a relação trigonométrica de acordo com os dados fornecidos na questão. Ademais, bastava encontrar apenas a altura e, para solucioná-lo, usar a relação da tangente de um ângulo α (0 < α < 90°) de um triângulo retângulo.

Conforme verificado, o percentual de alunos que errou a questão foi alto. Pode-se inferir que tal dificuldade pode ter ocorrido por falta da representação da situação em forma de um desenho. De acordo com Cury (2013), os estudantes apresentam mais dificuldade na resolução de algum problema quando não há um esquema (desenho) representando os dados. Assim, tentam organizá-los, na maioria das vezes, de forma incorreta e acabam por não saber qual fórmula empregar ao resolvê-los.

> Considerando o número de questões e o número de erros cometidos pelos alunos, podemos dizer que a análise de erros também pode ser entendida como uma metodologia de ensino se for elaborada atividades de sala de aula em que os erros dos alunos sejam explorados e aproveitados como ferramentas para a aprendizagem (CURY, 2013, p. 02).

Segundo a autora, o professor pode usar o erro do aluno para explorar as lacunas de aprendizagem existente em determinado conteúdo, como, nesse caso, no conhecimento das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Sendo assim, o docente possibilita ao educando desenvolver habilidades necessárias à construção e aquisição do conhecimento e, com isso, superar as dificuldades.

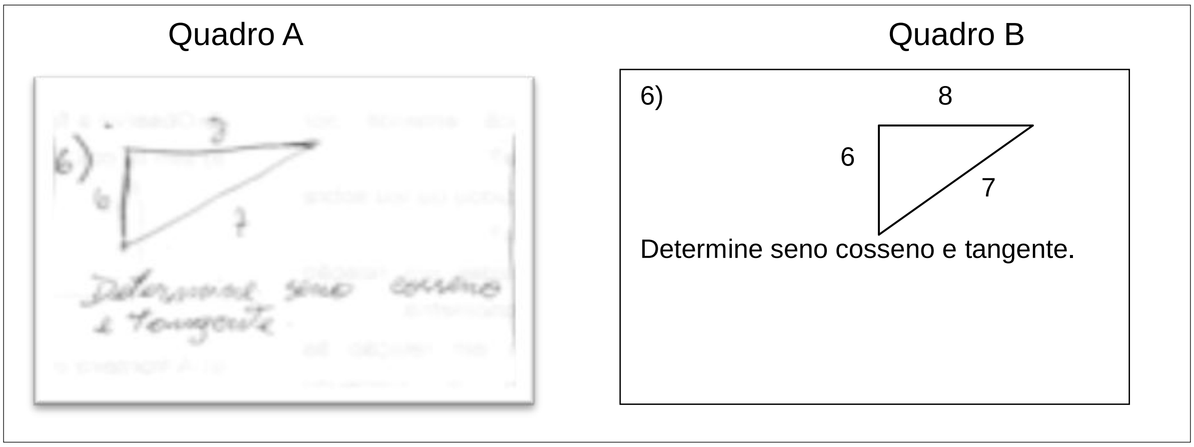
QUESTÃO 6 - Escreva uma situação-problema em que, para resolvê-la, é necessário utilizar uma das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Ao aplicar a questão, supunha-se que os alunos fossem capazes de criar um problema que envolvesse uma situação cotidiana e, ao resolvê-lo, percebessem a aplicabilidade de conceitos trigonométricos em situações reais. Entretanto, nenhum deles apresentou uma situação - problema; apenas exercícios em que constavam as soluções. Ademais, alguns destes não continham enunciados referentes ao cálculo realizado pela turma. Desta, apenas três calcularam o valor do x e um estabeleceu as relações seno, cosseno e tangente.

Na Figura 4, expõe-se a resolução do aluno 9. É possível observar que ele não apresentou uma solução-problema, mas um tipo de exercício sem solução.

Salienta-se ainda que o enunciado não estava completo, pois não incluiu o ângulo a que estava se referindo para determinar seno, cosseno e tangente.

Figura 4 - Resposta do aluno 9, questão 6, sem resolução



Fonte: Arquivo da professora pesquisadora.

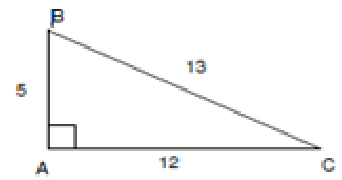
Ainda referente à questão 6, quatro alunos não a responderam e dois estiveram ausentes no dia do teste. Nas soluções apresentadas, observou-se que um dos erros esteve em distinguir uma situação - problema de um exercício de aplicação. Para essa distinção, Dante (1988, p. 86) estabelece que o exercício “[...] serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo". E, “problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que garanta a sua solução" (Ibidem).

Dessa forma, concluiu-se que professores, geralmente, têm trabalhado mais exercícios do que problemas contextualizados, ocorrendo o mesmo com o ensino de trigonometria. Em muitos casos, os conteúdos explorados em sala de aula têm levado os alunos a decorarem e empregarem fórmulas que exigem memorizações de relações sem qualquer sentido ou significado (BRIGUENTI, 2007; CAMARGO, 2004). Partindo dessas percepções, o docente precisa analisar e refletir sobre a sua prática a fim de rever a postura diante dos processos de ensino e de aprendizagem.

Após a análise das resoluções, a professora solicitou aos alunos que realizassem uma pesquisa sobre problemas com aplicação no triângulo retângulo para a aula seguinte. Na sequência e de posse dos resultados da investigação solicitada, houve uma socialização com a turma e os problemas apresentados pelos participantes, explorados em sala de aula pela docente. Assim, a aula objetivou a compreensão do educando na elaboração de situação- problema, acreditando-se que a aula contribuiu para esse processo.

QUESTÃO 7 - Observe a figura e determine:

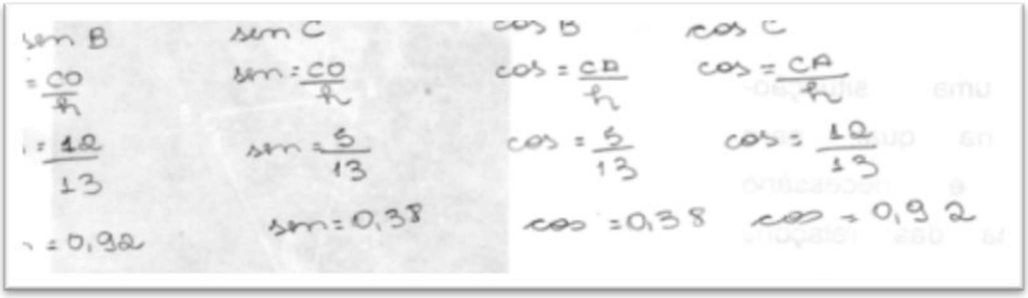
a) sen B; *b) cos B;* *c) sen C;* *d) cos C*



Com essa questão, almejava-se que, a partir das definições de seno, cosseno e tangente, os alunos usassem corretamente as razões trigonométricas correspondentes a cada item. O índice de acertos foi de vinte e dois; sete participantes não a resolveram e dois não empregaram a razão trigonométrica precisa. O erro aconteceu na relação entre as medidas dos lados e o ângulo do triângulo. Na Figura 5, encontra-se o registro de uma resposta correta.

Figura 5 - Resposta da aluna 19, questão 7

Quadro A



Quadro B

senB	senC	cosB	cosC
$sen=\frac{co}{h}$	$sen=\frac{co}{h}$	$cos=\frac{cA}{h}$	$cos=\frac{cA}{h}$
$sen=\frac{12}{13}$	$sen=\frac{5}{13}$	$cos=\frac{5}{13}$	$cos=\frac{12}{13}$
sen = 0,92	sen = 0,38	cos = 0,38	cos = 0,92

Fonte: Banco de registros da professora pesquisadora.

Essa questão pode ser considerada “fácil”, pois o aluno apenas necessitava ter conhecimento dos conceitos básicos de trigonometria para usar corretamente a razão trigonométrica. Além disso, havia o desenho representando a situação em estudo. De acordo com as medidas dos lados e a posição dos ângulos de um triângulo dado na questão, os discentes poderiam estabelecer diferenças entre elas.

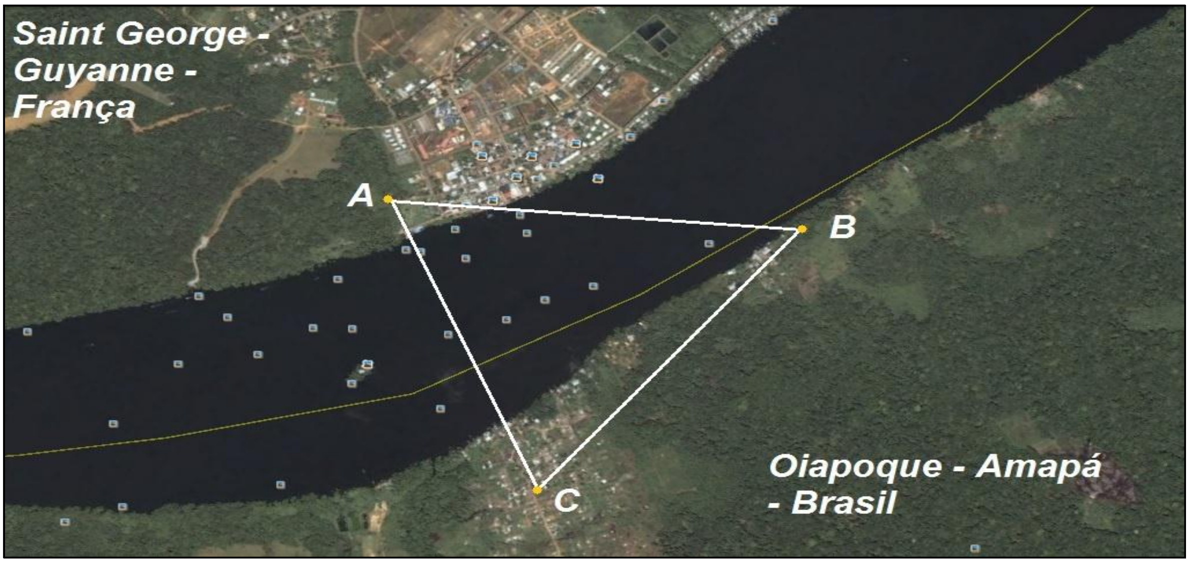
O percentual do número de acertos nessa questão foi alto. O fato pode significar que, por ela estar representada por uma figura geométrica, a dificuldade seria mínima à turma. Pelas respostas, a pesquisadora percebeu que a representação visual facilitou o entendimento dos participantes e a organização dos dados possibilitou-lhe encontrar a solução. Como bem aponta Fischbein (1987, p. 104),

> (...) Uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios.

O autor considera a representação visual um fator importante e essencial na compreensão para a resolução do problema.

QUESTÃO 8 - A fronteira entre Brasil e França é a linha que limita os territórios do Brasil e Guiana Francesa. Para unir o Estado do Amapá (pontos B e C) e a Guiana Francesa (ponto A), será construída uma ponte sobre o rio Oiapoque-AP. Considerando a figura para representar a situação, temos os seguintes dados: ângulos CBA = 59º e ACB = 57º. Sabendo que BC mede 30 metros, indique, em metros, a distância AB.

Figura 6 – Problema da construção de uma ponte sobre o rio Oiapoque-AP

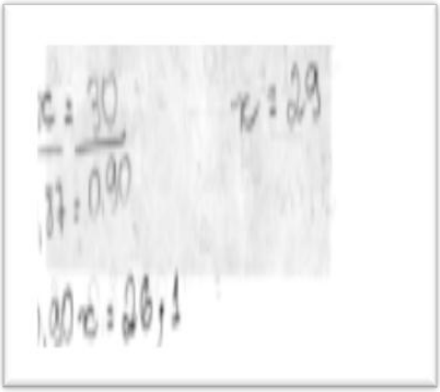


Fonte: Google Earth (2014).

A questão número oito tinha como objetivo fazer com que o aluno lesse, interpretasse e criasse estratégias de resolução para o problema a partir da exploração de conceitos básicos trigonométricos.

Ao contrário da questão anterior, vinte alunos deixaram a questão em branco e apenas dois responderam; logo, apesar da tentativa de resolução, não apresentaram, de forma completa, o desenvolvimento e o resultado esperados. A solução apresentada pelo aluno 16 (FIGURA 7) mostra que o erro ocorreu em função de não se tratar de um triângulo retângulo. Neste contexto, as relações do seno, cosseno e tangente não foram suficientes para a solução do problema proposto. Para isso, os educandos deveriam ter conhecimento das leis trigonométricas do seno e do cosseno que são aplicadas para um triângulo qualquer ou ter dividido o triângulo em triângulos retângulos para então utilizar as razões trigonométricas

Figura 7 - Solução desenvolvida pelo aluno 16 para a questão 8

Quadro A	Quadro B
	$\frac{X}{0,87} = \frac{30}{0,90}$ $0,90X = 26,1$ $X = 29$

Fonte: Banco de dado da professora pesquisadora.

Dessa forma, tornou-se evidente que a maioria dos alunos não atingiu todos os objetivos propostos para o teste inicial. Para Cury (2013, p. 01),

> As investigações apoiadas nos erros não têm o propósito de avaliar o aluno, mas de contribuir para compreender como ele se apropria de um determinado conhecimento e quais as dificuldades que ainda precisa superar até ser capaz de trabalhar com o conteúdo em questão.

De maneira geral, após o desenvolvimento do teste inicial, eram perceptíveis as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação aos conceitos trigonométricos no triângulo retângulo, evidenciando-se, assim, a presença de lacunas. Logo, havia a necessidade de estas serem preenchidas no sentido de superar as dificuldades observadas durante a pesquisa.

A fase da análise preliminar, na Engenharia Didática, é seguida pela da concepção e a priori. Vale salientar que cada uma delas pode ser retomada e aprofundada de acordo com as necessidades emergidas ao longo do desenvolvimento da pesquisa (ARTIGUE, 1988).

4.2 Segunda fase: concepção e análise a priori

A fase é mais dinâmica que a anterior, pois são definidas as variáveis didáticas do estudo em questão, ou seja, estratégias de ensino e resolução de atividades que têm o intuito de possibilitar a evolução do desempenho dos alunos envolvidos na pesquisa (POMMER, 2013). Envolve o planejamento, em que o professor pesquisador elabora suas estratégias didáticas considerando as variáveis globais e locais. Ressalta-se que, nela, o planejamento de pesquisa é focado no aluno.

A partir dos dados coletados, com as fragilidades observadas e registradas no diário da professora pesquisadora durante a aplicação do teste inicial, houve a necessidade de alguns conteúdos serem retomados. Em vista disso, conceitos, como os das relações trigonométricas no triângulo retângulo, ainda não dominados por parte da turma, foram revisados com o propósito de complementar o déficit de aprendizagem existente.

A revisão desses conceitos realizou-se por meio das questões do teste inicial, de forma oral, com exposição das soluções no quadro, explanados pelos alunos, auxiliados pela pesquisadora. Durante o processo, um deles comentou: *“professora, agora já sei diferenciar a relação seno, cosseno e tangente, antes eu fazia maior confusão e não sabia qual delas usar”* (A2). Os demais concordaram com a declaração do colega.

A análise a priori, tem como objetivo:

> [...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, ela fundamenta-se em hipóteses; será a validação destas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise a priori e a análise a posteriori (ARTIGUE, 1996, p. 205).

Após essa fase, elaborou-se uma sequência de atividades, que foi aplicada aos alunos, cujos resultados estão descritos na fase seguinte, que é da experimentação.

4.3 Terceira fase: experimentação

Conforme Machado (2002), a terceira fase da Engenharia Didática consiste na aplicação da sequência didática junto aos alunos com objetivo de verificar as ponderações levantadas na análise a priori. A fase da experimentação é a da prática, em que o professor pesquisador coloca em ação tudo o que foi planejado nas anteriores, e seu foco é a sequência didática. Para essa fase, foram colocadas em prática as atividades propostas na concepção da análise a priori.

A experimentação foi desenvolvida por meio de encontros no próprio horário de aula, ou seja, em duas manhãs. Salienta-se que, para a realização de algumas atividades, os alunos foram divididos em seis grupos de cinco componentes e nomeados G1, G2, G3, G4, G5 e G6. Outras aconteceram em duplas, denominadas D1, D2, etc..., para identificação e, ao mesmo tempo, visando ao anonimato.

A experimentação, para Machado (2002, p. 206), pressupõe:

> - a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa a população de alunos que participará da experimentação;
> - o estabelecimento do contrato didático;
> - a aplicação do instrumento de pesquisa;
> - o registro das observações feitas durante a experimentação.

Neste contexto, segue a sequência de atividades com as questões que envolveram conteúdos de trigonometria em triângulos quaisquer (leis dos senos, lei dos cossenos e cálculo de área), bem como as resoluções propostas pelos alunos e comentários. Após cada atividade, encontra-se o objetivo, o que se esperava alcançar, algumas estratégias utilizadas pelos participantes na resolução das situações e a análise realizada dos dados emergentes.

Atividade 1 - Travessia do rio da Ilha de Santana

Santana é uma cidade onde está localizado o Porto. Por existir um grande movimento de embarcações, é normal o trânsito de pessoas da região metropolitana para a ilha e vice versa, por diferentes rios dessa região. Neste sentido, pensou-se na elaboração de questões que levassem em consideração situações envolvendo o cotidiano dos alunos. Como exemplo, é apresentado o seguinte problema.

***Situação proposta**: A figura 8 mostra que existem duas embarcações atracadas nos portos B e C, respectivamente. A distância uma da outra é de 100 metros e ambas ficam no mesmo lado de um rio. Além disso, há o porto de Santana em A do outro lado do mesmo rio. Usando equipamentos apropriados, verificou-se que o ângulo A mede 30º e o B, 45º. Determine (aproximadamente) a distância que separa a embarcação que está no porto C do de Santana A.*

Figura 8 - Problema das distâncias na Ilha de Santana

Fonte: Google Earth (2014).

- Objetivo: Calcular a distância que separa a embarcação que está no porto C até o porto de Santana, aplicando a lei dos senos.

- O que se esperava alcançar: que os alunos lessem, interpretassem e resolvessem a situação- problema, utilizando conteúdos já estudados e uma estratégia própria.

Inicialmente, a atividade 1 da sequência didática seria realizada no laboratório de informática educativa (LIED), mas não foi possível por estar a escola, no período da pesquisa, em reforma. Assim, ocorreu em sala de aula, com auxílio do notebook e um data show, em que foi exibida a animação contida em um programa computacional Macromedia player, criada por um profissional da área de informática. O recurso tecnológico, usado como ferramenta pedagógica, tinha a função de incentivar o aluno na construção e aquisição do conhecimento.

Durante a exibição da animação, que representava o problema, a pesquisadora observou que a forma como foi exposta a situação chamou a atenção dos alunos. Estes ficaram atentos, olhando com certa admiração a apresentação. Ademais, a professora percebeu o interesse demonstrado pelos participantes em resolver logo a questão. Foi notável a participação e a interação entre eles para encontrar uma solução. E várias discussões surgiram em torno do problema, como, por exemplo, *"Temos que encontrar a largura do rio*" (D08); *"Qual das relações que vamos usar"* (D12)?; *"Que tal dividir o triângulo ao meio e encontrar a altura" (D10)*?.

O envolvimento da turma foi muito interessante, pois, a cada instante, a professora era chamada pelas duplas para responder a algumas perguntas, entre elas: “P*odemos chamar o lado AC de hipotenusa ou de cateto* “(D09)?;” Mas esse triângulo é diferente, não tem hipotenusa” (D07)!; E os comentários prosseguiram até o momento em que a pesquisadora solicitou a finalização da atividade.

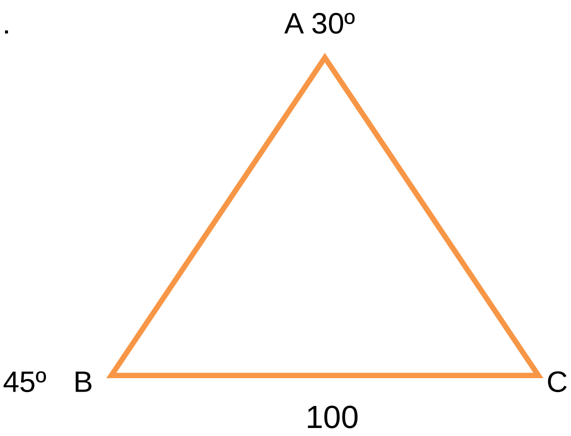
Destaca-se que a atividade proposta foi realizada em duplas, com duração de três horas aulas e teve como objetivo fazer com que o aluno calculasse a distância que separava a embarcação atracada no porto C até o de Santana (A), ponto de chegada. Em relação ao trabalho em grupo, Colaço (2004, p. 339) observa que os discentes, ao trabalharem juntos, “orientam, apoiam, dão respostas e inclusive avaliam e corrigem a atividade do colega, com o qual dividem a parceria do trabalho, assumindo posturas e gêneros discursivos semelhantes aos do professor”.

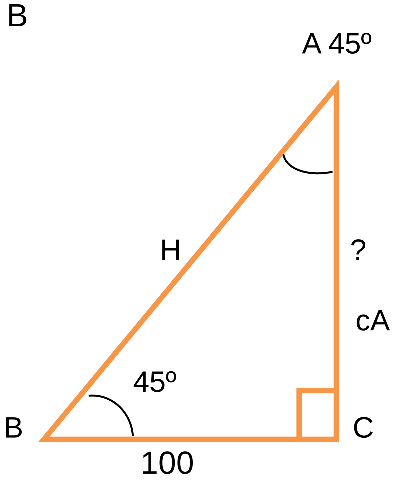
Concluída a atividade, a professora reuniu as duplas em um grande grupo, onde cada uma delas apresentou sua estratégia de resolução. Cabe destacar que todas foram registradas pela pesquisadora. Na Figura 9, a estratégia de resolução da dupla 05.

Figura 9 - Estratégia de resolução da dupla 05 para a Atividade 01

Quadro A

Quadro B





$$sen \frac{co}{H} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{100}{H}$$

$$\begin{array}{r} 1{,}7 \\ \times\ 1{,}7 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 2{,}89 \end{array}$$

$$\sqrt{3}H = 200$$

$$H = \frac{200}{\sqrt{3}}$$

$$H = \frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} \qquad H = \frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{9}} \qquad H = \frac{200\sqrt{3}}{3} \qquad H = 66{,}6\sqrt{3}$$

$$tg30º = \frac{100}{cA} \qquad 1 = \frac{100}{X} \qquad X = 100$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao tentar resolver o problema, a dupla 5 usou a seguinte estratégia de resolução: dividiu o triângulo, transformando-o em um triângulo retângulo, pois o problema tratava de um triângulo não retângulo e ela tinha como referência o conhecimento dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo. Isso facilitou a busca pela solução; depois realizou o cálculo para encontrar o valor da hipotenusa, aplicando a relação do seno de um ângulo; e, por fim, calculou o valor da tangente. Durante o processo, verificaram-se os seguintes erros:

a) Ao aplicar a relação seno do ângulo de 30º, o erro cometido esteve no valor atribuído a esse ângulo, que foi $\frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo o valor correto $\frac{1}{2}$.

b) No cálculo da tangente do ângulo de 30º, a dupla atribuiu o valor 1, enquanto o correto seria $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Analisando os resultados, a conclusão é de que a maioria das duplas tentou encontrar uma estratégia própria de resolução e, embora a solução não fosse a correta, algumas se aproximaram do resultado. Para isso, os alunos precisavam estender o conhecimento de trigonometria para um triângulo qualquer. Nesse caso, a solução poderia ser obtida por meio da divisão do triângulo em triângulos retângulos ou aplicando-se a lei dos senos. Como eles ainda não tinham conhecimento dessa lei, a pesquisadora procedeu de outra maneira.

A partir das soluções apresentadas à questão, a professora complementou as respostas, explicando, no quadro, que os comprimentos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Assim, ela foi demonstrando passo a passo a fórmula da lei dos senos. Em seguida, solicitou aos alunos que lessem em voz alta e escrevessem por extenso o significado da lei dos senos, utilizando a fórmula generalizada escrita no quadro. No Quadro 8, alguns resultados:

Quadro 8 - Escrita do significado da fórmula da lei dos senos por alguns alunos

Aluno	Significado
A09	A medida do lado **a** dividida pelo valor do seno do ângulo oposto a esse lado é igual à medida do lado **b** dividida pelo seno do ângulo oposto a esse mesmo lado são iguais.
A18	As razões referentes às medidas dos lados **a, b** e **c** e o seno dos ângulos opostos a esses lados são proporcionais.
A22	A medida do lado a sobre o seno A e a medida do lado b sobre o seno B, quando multiplicadas entre si, obtemos o resultado procurado.

Fonte: Banco de dados da professora pesquisadora.

Diante dessas respostas, a professora percebeu que, apesar da tentativa de A22 apresentar uma solução, a fórmula não foi descrita corretamente. No entanto, a maioria conseguiu escrever o seu significado, usando uma linguagem própria, relatando que o comprimento dos lados e o valor dos senos dos ângulos opostos são proporcionais.

Pode-se inferir que a forma diferenciada como foi exibido o problema e a estratégia de resolução usada por cada grupo contribuíram na compreensão dos alunos por esse conteúdo. Como afirma Brousseau (1996, p. 54), “Se uma situação leva o aluno à solução como um trem em seus trilhos, qual é a sua liberdade de construir seu conhecimento? Nenhuma”. O autor ainda destaca que o professor exerce um papel importante quando estimula o discente a atuar sobre a situação, sem interferência explícita nem condução.

Atividade 2 - Travessia do rio do Igarapé da Fortaleza

O porto C (Igarapé da Fortaleza) está distante das embarcações A e B a 80 metros e 30 metros, respectivamente (FIGURA 10). Do porto C, observam-se as embarcações A e B tal que o ângulo BCA mede 120º. Determine a distância entre as embarcações A e B.

Figura 10 - Problema das distâncias no rio Igarapé da Fortaleza

Fonte: Google Earth (2014).

- Objetivo: Calcular a distância que separa as duas embarcações A e B, aplicando a lei dos cossenos.

- O que se esperava alcançar: que os alunos lessem, interpretassem e resolvessem a situação problema, utilizando estratégias próprias e conhecimentos já adquiridos.

O desenvolvimento da atividade 2 foi análogo à realização da 1 da Sequência Didática. Inicialmente, seria realizada no laboratório de informática educativa (LIED), mas não foi possível pois a escola, no período da pesquisa, encontrava-se em reforma, ocorrendo, portanto em sala de aula. Com auxílio do notebook e um Datashow, foi exibida a animação contida em um programa computacional que teve o apoio de um profissional da área de informática. A atividade proposta também foi realizada em duplas, com duração de três horas aulas, e consistiu em determinar a distância entre duas embarcações - A e B -, ambas situadas em um mesmo lado do rio e distante do porto C, localizado no outro lado do rio.

A animação se fez presente a partir da situação- problema, que visava facilitar a associação e comparação entre a imagem e o que estava inserido. Para que esta se tornasse facilitadora de aprendizagem, foi necessário que o educando associasse os dados do problema e estabelecesse relações que pudessem contribuir na construção de seu conhecimento. Apesar de ter sido anteriormente exibida uma animação na atividade 1, a expressão de admiração da turma ainda permanecia. Dois alunos (A15) e (A17) perguntaram: "*professora, legal esse programa, como que a senhora teve essa ideia"?* E as discussões entre os elementos das duplas prosseguiram, sempre uns respeitando as opiniões dos outros.

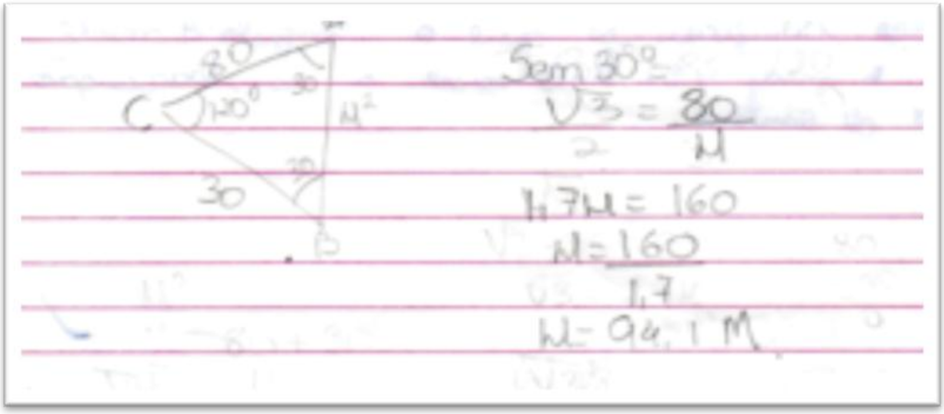
Concluída a atividade, a professora reuniu as duplas em um grande grupo, e cada uma delas expôs sua estratégia de solução, sendo todas anotadas pela pesquisadora. Como afirma Nunes (1999, p. 6),

> Em se tratando de uma instituição como a escola, locus privilegiado de formação humana, a busca da democracia pressupõe duas grandes tarefas: desenvolver nos educandos uma cultura participativa, valores éticos de solidariedade e atitudes coletivas na resolução de problemas.

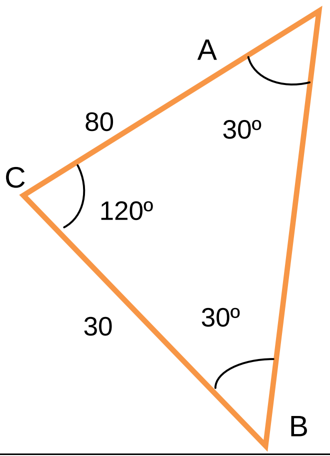
Nessa dinâmica de apresentação das estratégias de resolução, os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar coletivamente. Na Figura 11, uma estratégia com resolução da dupla 10.

Figura 11 - Estratégia de resolução da dupla 10 para a atividade 2

Quadro A



Quadro B



Sen30º=

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{80}{H}$$

$$1,7H = 160$$

$$H = \frac{160}{1,7}$$

$$H = 94,1M$$

Fonte: Dados da pesquisa da sequência de atividades.

Ao tentarem resolver a situação da estratégia apresentada pela dupla 10,os alunos estabeleceram a relação do seno de um ângulo de um triângulo retângulo como estratégia de resolução. Esse fato pode ser justificado em função do conhecimento já adquirido sobre a relação trigonométrica no triângulo retângulo. Contudo, o uso inadequado dessa relação comprometeu o resultado, pois os participantes consideraram a distância das embarcações A e B como a medida da hipotenusa e, para encontrar o valor dessa distância, calcularam o valor do seno do ângulo de 30º. Outro erro foi o valor atribuído ao seno do ângulo de 30º, pois usaram $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sendo o valor correto $\frac{1}{2}$. Nessa resposta, observa-se que os discentes não tiveram a percepção de que a figura representativa para o problema não se tratava de um triângulo retângulo.

Analisando os resultados, concluiu-se que nenhuma das duplas encontrou a resposta correta. Entretanto, todas tentaram apresentar alguma estratégia de resolução. Dentre as utilizadas, observou-se o uso das relações seno e cosseno do triângulo retângulo. Portanto, visualizaram a figura como sendo um triângulo retângulo. Também não tentaram dividir o triângulo qualquer em dois triângulos retângulos conforme o esperado. A solução correta seria dividir o triângulo não retângulo em dois triângulos retângulos e usar as relações trigonométricas, que nem um participante da investigação realizou. Além disso, poderia ser aplicada a lei dos cossenos, que, no caso, ainda não era conhecida pela turma.

Solucionada a questão, houve a socialização das estratégias utilizadas em grande grupo, onde cada dupla mostrou a sua forma de resolução. A professora comentou os equívocos das estratégias e complementou com a explicação do conteúdo (lei dos cossenos) no quadro. Assim, demonstrou a fórmula da lei dos cossenos e, posteriormente, solicitou aos alunos que lessem em voz alta e escrevessem por extenso o significado da citada lei, utilizando a fórmula generalizada no quadro. Algumas respostas estão escritas no Quadro 8.

Quadro 9 - Escrita do significado da lei dos cossenos por alguns alunos

Aluno	Significado
A06	O quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o produto destas medidas pelo cosseno do ângulo formado por esses lados.
A09	A medida de um lado do triângulo qualquer elevado ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos dois lados menos duas vezes a medida desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por esses lados.
A12	$a^2 + b^2 = c^2$

Fonte: Banco de dados da Professora Pesquisadora.

Vale ressaltar que os alunos, ao escreverem o significado da fórmula no quadro, procuraram explicar por meio de rabiscos de desenhos de triângulos, mostrando os lados a que se referiam. Embora ainda ocorressem erros na escrita do significado da fórmula por A12, observou-se que, ao fazê-lo, a dupla utilizou linguagem diferenciada.

Atividade 3 – Cálculo da área de uma região triangular

A aquisição da casa própria é sonho de algumas pessoas e pode acontecer de formas diferentes, por exemplo, comprando um apartamento, uma casa pronta, um chalé ou um terreno para posterior construção de uma casa do seu jeito. Na aquisição de um terreno, duas perguntas são básicas ao vendedor: qual o valor e a metragem. Por isso, a importância de saber como é realizado o cálculo de área de uma determinada região. As dimensões também são importantes, ou seja, a área do terreno deve permitir a construção de um bom imóvel. O ideal é contratar profissionais da área, como um arquiteto ou engenheiro para avaliá-lo.

***Situação Proposta**: Sabe-se que os lados de um terreno triangular medem 40m e 31m e o ângulo formado por eles é de 60º. Calcule a área dessa região.*

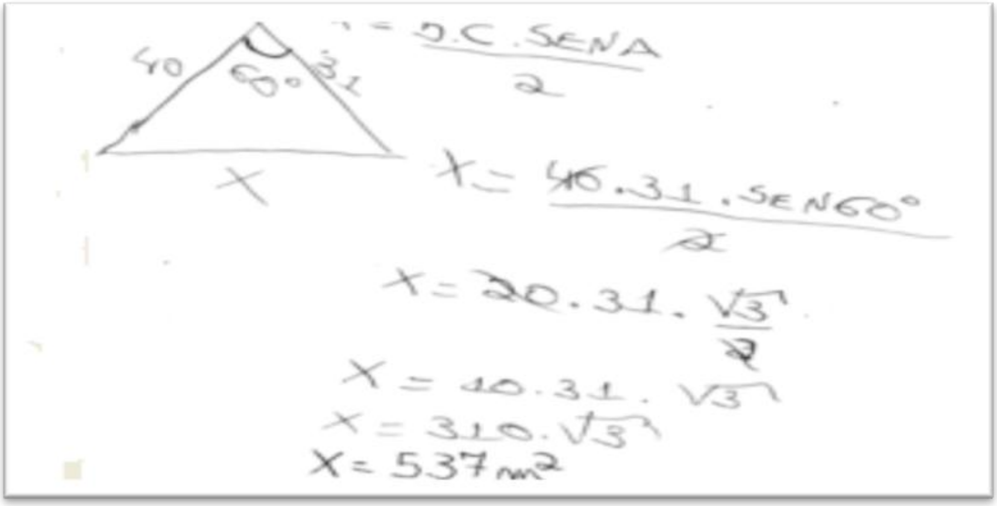
- Objetivo: Calcular a área de uma região triangular, sabendo-se a medida de dois lados do triângulo e o valor do ângulo por eles formado.

- O que se esperava alcançar: que os alunos calculassem a área, utilizando a fórmula de sen α.

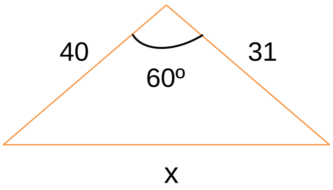
A situação proposta na atividade acima descrita teve duração de duas horas aulas e consistiu no cálculo da área de uma região triangular de um terreno, em que as medidas dos lados eram 40 e 31 metros e o ângulo formado por eles, 60º. Na situação proposta, observou-se que a maioria dos alunos, ao apresentar a solução para o problema, não evidenciou ter conhecimento do modelo matemático (fórmula) para o cálculo da área, exceto dois que resolveram corretamente. Embora usando estratégias diferenciadas, ambos resolveram a questão. Na Figura 12, a solução do problema da atividade 3 pelo aluno A15.

Figura 12 - Resolução da Atividade 3 da sequência de atividades por A15

Quadro A



Quadro B



$$X = \frac{b.c.senA}{2}$$

$$X = \frac{40.31.sen60^{o}}{2}$$

$$X = 20.31.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X = 10.31.\sqrt{3}$$

$$X = 310.\sqrt{3}$$

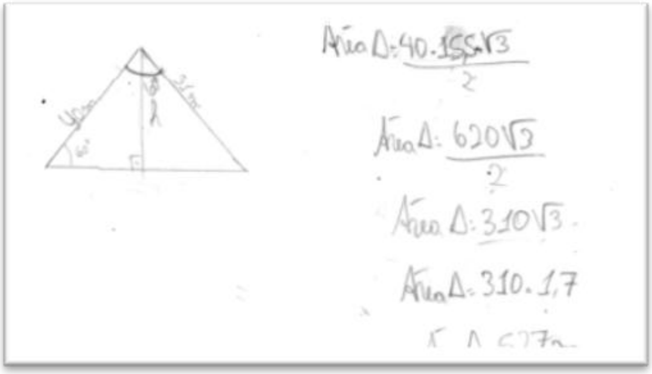
$$X = 537m^2$$

Fonte: Dados da sequência de Atividades.

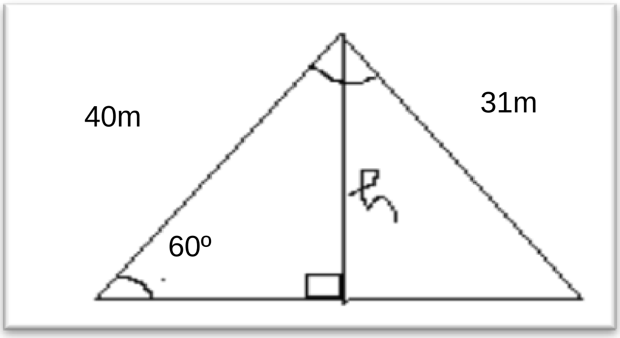
A resolução correta do problema apresentada por esse aluno se justifica pelo fato de, na época, estar em dependência nessa disciplina. Houve também uma aluna que encontrou o resultado, mesmo não tendo conhecimento da fórmula do cálculo da área de uma região triangular. Chamou a atenção da professora pela maneira como ela encontrou o resultado. A seguir, na Figura 13, a solução da aluna A12.

Figura 13 - Solução da Atividade 3 da sequência didática, por A12

Quadro A



Quadro B



$$\text{Área} = \frac{40.15{,}5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{620\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área} = 310.\sqrt{3}$$

$$\text{Área} = 310.1{,}7$$

$$\text{Área} = 527\text{m}$$

Fonte: Dados da sequência de Atividades.

Em sua maioria, os participantes apresentaram o resultado usando apenas a fórmula da área de um triângulo com a expressão $S = \frac{bxh}{2}$. Para a solução, consideraram a medida de um dos lados como a da altura, ignorando o ângulo fornecido no problema e fizeram o cálculo obtendo erroneamente o resultado da área. A exceção foi uma aluna que, intuitivamente, chegou a um resultado aproximado. Esta, ao ser interrogada pela pesquisadora como o conseguiu, dirigiuse ao quadro e, diante da professora e dos colegas, narrou sua estratégia de resolução, expondo-a no quadro.

> *Professora! Encontrei a resposta de outra maneira. Comparando com o resultado do meu colega, percebi que deu o mesmo valor. Vou explicar para a senhora como resolvi. Como eu já sabia a fórmula para o cálculo da área do triângulo, daí fiz um desenho para representar os dados do problema, formei um triângulo, porque falava de um terreno triangular e considerei a medida da base tendo 31 metros e a altura de um dos lados medindo 80 metros. Sabendo que a área de um triângulo é a metade do produto da medida da sua altura pela medida da sua base, então dividi a medida da base por dois e multipliquei esse resultado pela altura, mas percebi que tinha um ângulo de 60º, daí lembrei-me de usar o valor do seno deste ângulo, porque relacionei com o lado oposto a este ângulo, assunto visto anteriormente* (A12).

A aluna, ao resolver o problema, mesmo utilizando a estratégia incorreta, encontrou um resultado, tendo em vista que desconhecia o modelo matemático de resolução. Ficou perceptível que, no desenvolvimento de sua estratégia, ao representar os dados do problema numa figura geométrica, ela errou em relação ao desenho, pois, segundo os dados do problema, os lados medem 40 e 31 metros e o ângulo formado por eles é 60º e, na figura, esses dados não foram representados corretamente. Dessa maneira, a discente partiu de outras definições que já possuía e acabou, intuitivamente, resolvendo a questão por dedução.

Nesse momento, a professora aproveitou a discussão para complementar o pensamento matemático dos alunos e introduzir o conceito sobre a área de um triângulo qualquer. Explicou-lhes que há situações em que não são fornecidas as medidas da base e da altura do triângulo, sendo necessário empregar a fórmula definida de outra maneira. Utilizando um triângulo acutângulo, foi demonstrada a fórmula $S = \frac{a.b.\text{sen}\hat{C}}{2}$.

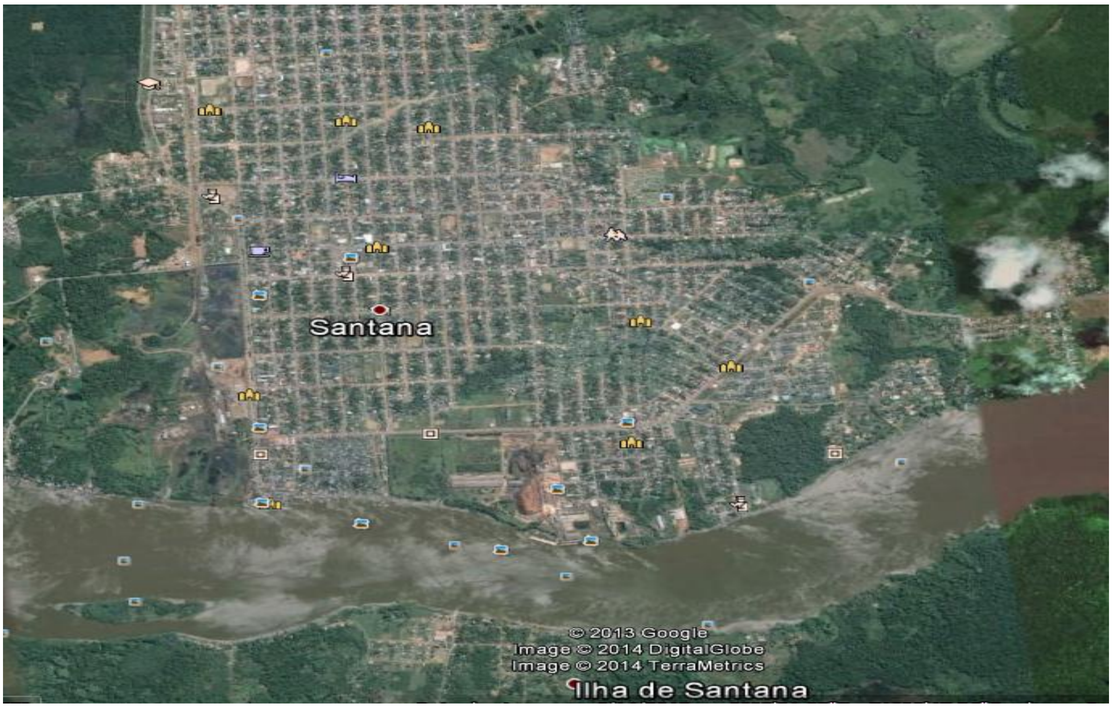
Após todo esse processo, os alunos concluíram o assunto, escrevendo por extenso o significado da fórmula da área demonstrada anteriormente pela pesquisadora, ou seja, que a área de qualquer triângulo é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado. O educando 13 fez o seguinte comentário, *“Ah! Quer dizer que quando não tiver base e nem altura, basta colocar no lugar da base, as medidas dos lados. E, para a altura, uso a relação do seno. Aí fica fácil encontrar a área de um triângulo qualquer”*. A percepção desse aluno em relação ao cálculo da área, partindo do conhecimento que já possuía, contribuiu para que os demais tivessem uma melhor compreensão sobre o estudo em questão.

Realizou-se ainda um breve comentário sobre a história da matemática, onde Boyer (2012) destaca que a geometria babilônica está relacionada com medições práticas. Com base em numerosos exemplos concretos, acredita-se que “os babilônios do período de 2000 a.C. estariam familiarizados com as regras gerais da área de várias figuras, entre elas, a área de um triângulo genérico” (BOYER, 2012, p. 356). Foi um momento de muito diálogo e assim concluiu-se esse conteúdo.

Atividade 4 - Aplicação da trigonometria

Santana está localizada no Estado do Amapá (FIGURA 14), teve um aumento populacional expressivo com a instalação de empresas para extração de minérios. Isso estimulou a vinda à referida localidade de profissionais de várias áreas do conhecimento, contribuindo para um superpovoamento, provocando um processo de urbanização desorganizada. Como essas pessoas precisavam de moradia, isso acabou gerando um problema para a população santanense. Então, solicitou-se aos alunos que buscassem na internet exemplos de aplicações da trigonometria na engenharia, topografia e arquitetura

Figura 14 – Localização de Santana – AP



Fonte: Google Earth (2014).

- Objetivo: verificar a aplicação da trigonometria em situações reais.

- O que se esperava alcançar: que os alunos apresentassem exemplos com aplicações de trigonometria.

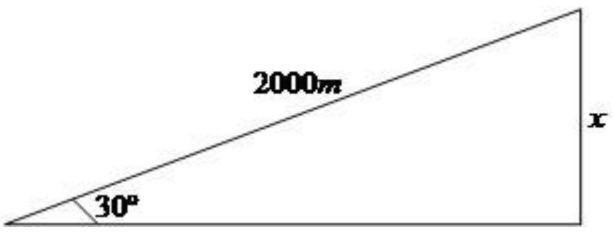
Essa atividade foi realizada em três horas aulas, organizada em 6 grupos de 5 alunos cada e teve como objetivo verificar, por meio de pesquisa em rede virtual, a aplicação da trigonometria em situações reais. O estudo ocorreu no laboratório de informática da escola durante o horário de aula da disciplina de Matemática. Esperava-se que os discentes, após a realização da investigação, expusessem aos demais colegas da turma exemplos pesquisados sobre o tema em questão.

Dos seis grupos, apenas um não apresentou o resultado da pesquisa no tempo estabelecido pela professora. As soluções coletadas na internet foram bastante diversificadas. Nas Figuras 15, 16, 17, 18 e 19, há exemplos de aplicação da trigonometria dos grupos 01, 02, 03, 04, e 05, respectivamente.

Figura 15 - Situação apresentada pelos alunos do G1

Ao decolar, um avião forma com a pista um ângulo de 30º. Determine a sua altura após ter percorrido a distância de 2000 metros.

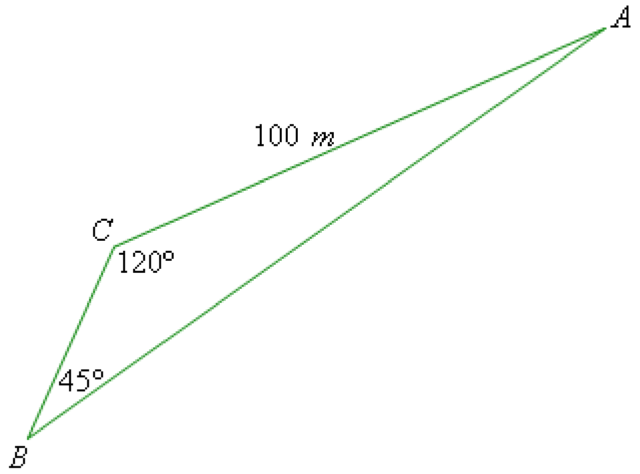
Observe esquema da situação:



Fonte: Banco de dados da professora pesquisadora.

Figura 16 - Situação apresentada pelos alunos do G2

Calcule o valor do segmento AB do triângulo representado pelo desenho a seguir:



Fonte: Banco de dados da professora pesquisadora.

Figura 17 - Situação apresentada pelos alunos do G3

Pesquisa de Matemática
Aplicações da Trigonometria

A **trigonometria**, palavra formada por três radicais gregos: **tri** (três), **gonos** (ângulos) e **metron** (medir), têm por objetivo o cálculo das medidas dos lados e ângulos de um triângulo. Medir distâncias é uma necessidade antiga da humanidade, facilmente atendida no caso de envolver pontos próximos. Basta verificar quantas vezes uma dada unidade de medida está contida no comprimento a ser medido. Este é o princípio dos instrumentos mais comuns para medir comprimentos: réguas, fitas métricas, trenas, etc.

Por que estudar Trigonometria?

Há situações, em que se deseja efetuar medidas envolvendo objetos que não são diretamente acessíveis. Atualmente, a trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como análise e a outros campos da atividade humana, como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topologia, a Engenharia Civil etc.

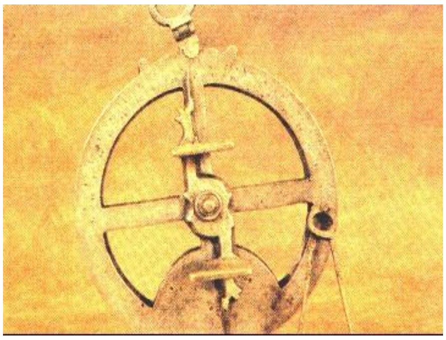
Observem algumas situações:

a. Você já parou para imaginar como os navegadores da antiguidade faziam para calcular a que distância da terra eles se encontravam enquanto navegavam?
b. Seria impossível medir a distância da Terra à Lua; porém, com a trigonometria, torna -se simples.
c. Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte. O trabalho dele é mais fácil quando ele usa recursos trigonométricos.
d. Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a trigonometria, ele demoraria anos para desenhar um mapa.

(Continua...)

(Conclusão)

Astrolábio (no passado)



Um dos mais antigos instrumentos científicos, que teria surgido no século III a.C. A sua invenção é atribuída ao matemático e astrônomo grego Hiparco.

Teodolito (no presente)

Instrumento geodésico, que serve para levantar plantas, medir ângulos reduzidos ao horizonte e distâncias.

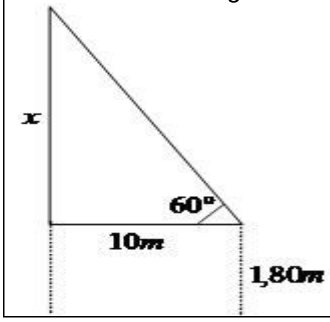
Pode-se dizer que foi a astronomia a grande impulsionadora da trigonometria, pois o astrônomo grego Hiparco (190 a.C – 125 a.C) estabeleceu pela primeira vez relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

Na Grécia antiga, entre os anos de 190 a.C. e 125 a.C., viveu Hiparco, um matemático que construiu a primeira tabela trigonométrica. Esse trabalho foi muito importante para o desenvolvimento da astronomia, pois facilitava o cálculo de distâncias inacessíveis, o que lhe valeu o título de PAI DA TRIGONOMETRIA

Fonte: Banco de Dados da Professora Pesquisadora.

Figura 18 - Situação apresentada pelos alunos do G4

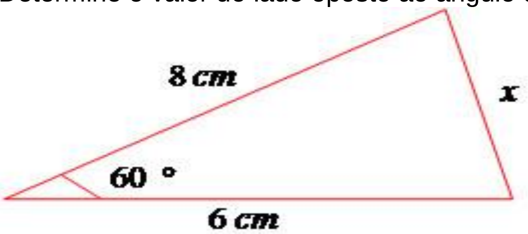
Uma pessoa de 1,80 m está a uma distância de 10 metros de uma torre. Sabe-se que ela observa a torre sob um ângulo de 60º. Determine a altura da torre.



Fonte: Dados da professora pesquisadora.

Figura 19 - Situação apresentada pelos alunos do G5

Determine o valor do lado oposto ao ângulo de 60º. Observe figura a seguir:



Fonte: Dados da professora pesquisadora.

Entre os resultados coletados pelos grupos de alunos, dois deles apresentaram situações - problema envolvendo trigonometria no triângulo retângulo e dois, exercício de aplicação em um triângulo qualquer. Houve ainda um que mostrou o contexto histórico de aplicação da trigonometria. Enquanto os alunos expunham a pesquisa, a professora observava que, mesmo após trabalhar o conteúdo com situações cotidianas e ter estabelecido a diferença entre exercício e situação- problema, alguns grupos não conseguiam encontrar a última.

Diante dessas percepções, a professora aproveitou para fazer, em grande grupo, alguns questionamentos sobre a diferença entre exercício e situação - problema, usando os resultados apresentados pela turma. Assim, interrogou qual dos resultados representava uma situação- problema e o que caracterizava uma situação. Nesse momento, os alunos 05, 11 e 20 se manifestaram, respondendo conforme consta no Quadro 10.

Quadro 10 - Respostas dos alunos ao questionamento da professora

Aluno	Respostas dos questionamentos da professora
A5	Dos grupos 1 e 4, não sei como explicar o que é uma situação, mas sei que as duas são situação problema (risos).
A11	Só sei explicar que o grupo 3 não apresentou nem uma coisa e nem outra, porque na história não está pedindo para calcular nada.
A20	Eu sei que do grupo 2 e 5 é um exercício de aplicação, porque está pedindo para encontrar direto o valor do x

Fonte: Banco de Dados da Professora Pesquisadora.

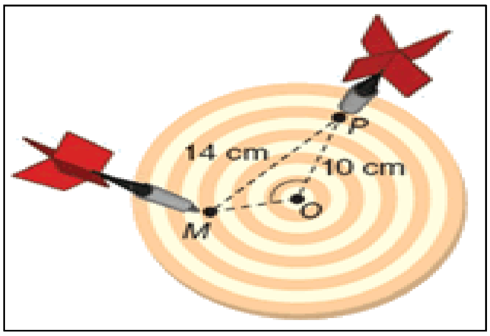
Ao socializar os resultados coletados com os demais colegas dos grupos, a professora percebeu que, quando a pesquisa era usada como atividade investigativa, levava o aluno a uma: “[...] motivação para fazer interpretações próprias, iniciando a elaboração. Uma coisa é manejar textos, copiá-los, decorá-los, reproduzi-los. Outra é interpretá-los com alguma autonomia, para saber fazê-los e refazê-los (DEMO, 2000, p. 23)”.

Demo comenta que a pesquisa deve despertar o interesse do aluno em buscar informações que favoreçam o processo de construção e reconstrução do conhecimento.

Atividade 5 - Atividade Complementar: calculando distância e altura

Situação Proposta 1 (Unesp): *Paulo e Marta estão brincando de jogar dardos. O alvo é um disco circular de centro O. Paulo joga um dardo, que atinge o alvo num ponto, que vamos denotar por P; em seguida, Marta joga outro dardo, que atinge um ponto denotado por M, conforme a figura. Sabendo-se que a distância do ponto P ao centro O do alvo é PO = 10 cm, que a distância de P a M é PM = 14 cm e que o ângulo POM mede 120º, determine a distância, em centímetros, do ponto M ao centro O (FIGURA 20)*.

Figura 20 – Problema da distância do alvo e o dardo



Fonte: Banco de Dados da Professora Pesquisadora.

- Objetivo: Determinar a distância do segmento $\overline{MO}$, no triângulo $P\hat{O}M$.

- O que se esperava alcançar: que o aluno aplicasse a lei dos cossenos, apossando-se de outros conceitos já estruturados.

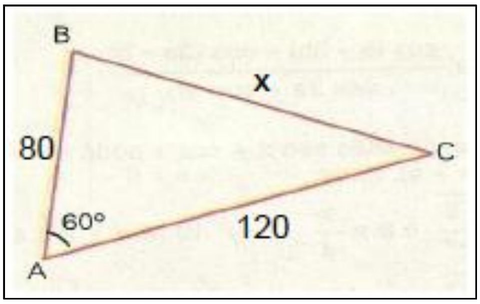
Situação Proposta 2 (UNIRIO): *Considerando os lados de um triângulo 3, 4 e 6, quanto vale o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo?*

- Objetivo: Representar geometricamente os dados do problema e calcular o valor do cosseno do maior ângulo interno desse triângulo.

- O que se esperava alcançar: que o aluno usasse a lei do cosseno, apoderando-se de outros conceitos já estruturados.

Situação Proposta 3 (UNIRIO): *Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala (Ver Figura 21). Sabe-se que AB = 80 km e AC = 120 km, onde A é uma cidade conhecida, como mostra a figura. Calcule a distância entre B e C, em km:*

Figura 21 – Problema da distância entre a cidade B e C



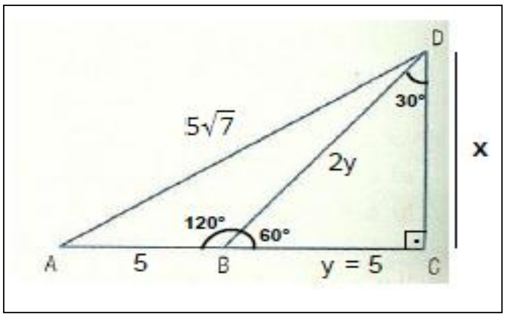
Fonte: Banco de Dados da Professora Pesquisadora.

- Objetivo: Determinar a distância entre duas cidades, representadas por B e C.

- O que se esperava alcançar: que o aluno aplicasse corretamente a lei do cosseno.

Situação problema 4 (PUC – MG) – *Na figura 22,* $AB = 5dm$, $AD = 5\sqrt{7}\text{dm}$, $AD = 5\sqrt{7}\text{dm}$*, DBC = 60º e DCA = 90º. Qual é a medida de CD, em decímetros?*

Figura 22 – Problema da medida de um CD



Fonte: Banco de Dados da Professora Pesquisadora.

- Objetivo: Determinar a distância do segmento $\overline{CD}$.

- O que se esperava alcançar: que o aluno soubesse escolher quais os conceitos já estruturados deveriam ser usados para resolver a questão.

Essas atividades foram desenvolvidas em três horas aulas e realizadas em duplas. Tiveram como objetivo aplicar as leis trigonométricas estudadas a fim de esclarecerem as dúvidas pertinentes a esse conteúdo. Com a exploração e investigação, desejava-se que os alunos aplicassem, de forma autônoma, as leis dos senos e dos cossenos, bem como diferenciassem o uso das relações do triângulo retângulo das do não retângulo, apoiando-se em conceitos estudados.

O desenvolvimento das referidas atividades envolveu o uso da calculadora para facilitar os cálculos e o da tabela trigonométrica, identificar os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos. Era perceptível a falta de habilidade por parte dos alunos no manuseio da tabela, haja vista não saberem procurar os valores que deveriam ser usados na solução das questões propostas. Entretanto, com a utilização dessas ferramentas, tiveram a oportunidade de comparar os valores dos ângulos encontrados.

Durante a resolução das questões, constatou-se que a maioria dos alunos, ao resolver a primeira questão, que consistia em calcular a distância entre dois pontos, chegou ao resultado aplicando a lei dos cossenos, pois o problema fornecia a medida de dois lados e um ângulo. Houve, entretanto alguns que, apesar de terem aplicado a lei dos cossenos, erraram os cálculos matemáticos.

A segunda questão da atividade consistiu na aplicação da lei dos cossenos visando encontrar o valor do maior ângulo interno de um triângulo dado. A metade da turma apresentou dificuldade em montar um esquema matemático da questão, que exigia leitura e interpretação minuciosa para descobrir qual estratégia deveria ser usada. Nesse processo de resolução, a professora foi muito solicitada pelas duplas para esclarecimento das dúvidas. Diante disso, surgiram alguns comentários, conforme descritos no Quadro 11.

Quadro 11 - Comentários dos alunos das duplas em relação à segunda questão

Aluno	**Dupla**	**Comentário**
A1	D2	*Tem que desenhar um triângulo?*
A6	D8	*Que lado fica o maior ângulo?*
A12	D9	*É um triângulo retângulo?*

Fonte: Dados da pesquisadora.

Como visto anteriormente em outras atividades, comprovou-se a necessidade de os alunos utilizarem imagens para representarem os dados.

> A visualização contida numa atividade cognitiva adequada é um fator essencial para a compreensão intuitiva. As representações visuais, por um lado contribuem para a organização das informações em representações sinópticas, constituindo um fator importante de globalização. Por outro lado, o aspecto concreto das imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto evidência e imediação (FAINGUELERNT, 1999, p. 42).

De acordo com a autora, a visualização de imagens pelos alunos facilita a compreensão na resolução de problemas de forma intuitiva.

As questões três e quatro consistiram em encontrar a distância entre dois pontos e ambas apresentaram uma imagem representativa. Diante do exposto, verificou-se que a maioria dos alunos resolveu corretamente as questões, apesar de a quatro conter muitas informações e exigir maior interpretação para buscar a estratégia de solução. A socialização das soluções foi muito importante para o esclarecimento das dúvidas mais pertinentes.

> Dificuldades originadas no ensino inadequado ou insuficiente, seja porque a organização do mesmo não está sequenciado ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes, seja porque os conteúdos não se ajustam as necessidades ao nível de desenvolvimento do aluno, ou não estão adequado ao nível de abstração ou não se treinam as habilidades prévias, seja porque a metodologia é pouco motivadora e eficaz (SANCHEZ, 2004, p. 74)

Durante a aplicação e exploração da sequência didática, observou-se que a presença de situações-problema contextualizadas envolvendo a realidade do estudante contribuíram para despertar o interesse, a participação, a cooperação e a *interação da turma nas aulas de* matemática, em particular da trigonometria em triângulos não retângulos. Nesse sentido, Nuñez (2004, p. 148): “[...] como características da situação-problema, consideramos a necessidade de representar algo novo na atividade intelectual do estudante e a possibilidade de motivar a atividade deste na tarefa de busca e construção do conhecimento”.

Inicialmente, o papel da pesquisadora no processo de construção e aquisição do conhecimento foi o de levar o aluno à busca de estratégias de resolução de uma situação que, a princípio, não se encontrava no enunciado do problema. Além disso, no desenvolvimento dessa estratégia, ele daria sua contribuição usando conhecimentos já estabelecidos. Diante das soluções encontradas, a professora efetivamente contribuiu com seus conhecimentos. Percebeu-se também que, quando os dados da situação - problema tinham uma figura geométrica representativa, favoreciam a compreensão do discente na interpretação para encontrar tal solução.

Uma das dificuldades apresentadas pelos discentes em relação à elaboração de situações - problema evidenciou-se tanto na linguagem escrita quanto no uso da linguagem matemática. Alguns até tentaram expor verbalmente uma situação, mas ao representá-la através da escrita, os erros de expressão foram constantes. Nesse aspecto, Rabelo (1995, p. 81) ressalta que

> [...] para que o aluno se torne um bom formulador e resolvedor de problemas é preciso, igualmente, inseri-lo num bom e variado referencial de textos matemáticos, através dos quais ele poderá ler interpretar, analisar e produzir textos que constituam desafios matemáticos.

O trabalho em grupo foi muito produtivo, onde os valores da cooperação, afetividade, respeito, entre outros, estiveram presentes. Durante a busca por estratégias para dar uma resposta correta às situações- problema apresentadas nas atividades da sequência didática, estabeleceu-se uma relação de amizade entre os alunos e a professora pesquisadora. Tais fatos demonstram que ninguém aprende sozinho e a sala de aula é um local de construção do conhecimento.

4.4 Teste final

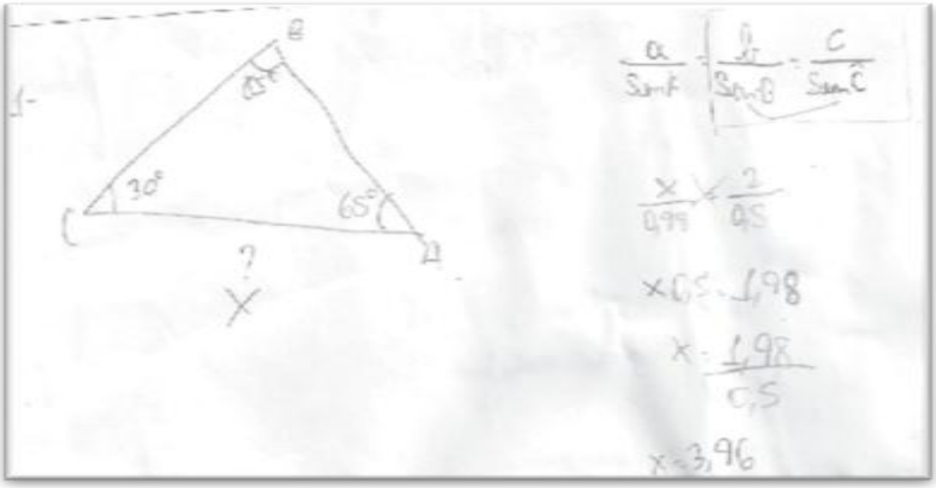
O teste final, realizado individualmente, teve duração de duas horas aulas e foi composto de cinco questões, contendo problemas para aplicação das relações trigonométricas num triângulo qualquer (APÊNDICE D). O resultado permitiu analisar o desempenho dos alunos após todas as etapas da sequência de aulas. A seguir, as questões com descrição e análise dos resultados

Questão 1. (Revista Brasil Escola) – Um construtor deseja calcular a distância do ponto A ao ponto C, pontos onde será construída uma ponte. Entretanto, ele não possui nenhuma ferramenta que meça essa distância, mas conhece alguns conteúdos matemáticos e teve a seguinte ideia. “Como eu possuo uma ferramenta que calcula ângulos, conseguirei determinar o comprimento desta ponte”. Com isso ele marcou um ponto B distante 2 km do ponto A. Mediu o ângulo $A\hat{B}C$ *encontrando 85°e o ângulo* $B\tilde{A}C$ *obtendo 65°. O construtor acredita que com essas informações será possível calcular o comprimento da ponte. Se sim, calcule o comprimento desta ponte.*

Nessa questão, esperava-se que a turma, partindo das informações dadas, calculasse, corretamente, o comprimento de uma ponte construída sobre um rio, utilizando a lei dos senos. De todos os que responderam ao teste, somente três erraram a questão; dois a deixaram em branco e vinte e cinco a resolveram de forma precisa. Na Figura 23, encontram-se os cálculos do aluno A 7.

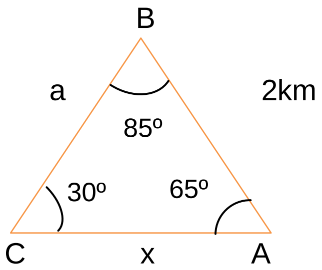
Figura 23 – Resolução do aluno A7 para a atividade 1 do teste final

Quadro A



Quadro B

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B}=\frac{c}{\text{sen}C}}$$



$$\frac{b}{\text{sen}B}=\frac{c}{\text{sen}B}$$

$$\frac{X}{0{,}99}=\frac{2}{0{,}5}$$

$$0{,}5X=1{,}98$$

$$X=\frac{1{,}98}{0{,}5}$$

$$X=3{,}96$$

Fonte Dados da professora pesquisadora.

Ao resolvê-la, a maioria dos alunos encontrou o resultado aplicando corretamente a lei dos senos. A professora percebeu que, para a solução do problema, inicialmente, os discentes fizeram um esquema para representar os dados fornecidos. Nestes, têm-se dois ângulos e a medida de um dos lados. Cavalcanti (2001, p. 127) pontua a importância da utilização do desenho “como recurso de interpretação do problema e como registro da estratégia de solução”.

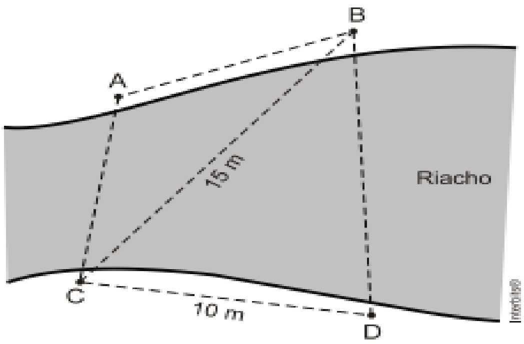
Para a solução da citada questão, o aluno, inicialmente, necessitava ter conhecimento dos conceitos básicos de trigonometria para poder estabelecer corretamente a lei de aplicação. As respostas mostraram que a representação geométrica facilitou a leitura e a interpretação do problema. De forma geral, a maioria não demonstrou lacunas na compreensão da linguagem matemática de termos ou expressões existentes no enunciado do problema. Para Solé (1998, p. 128):

> As lacunas na compreensão podem ser atribuídas ao fato de [o aluno] não conhecer alguns dos elementos mencionados, ou ao fato de o significado atribuído pelo leitor não ser coerente com a interpretação do texto. Também podem existir diversas interpretações possíveis para a palavra, frase ou para um fragmento, e então a dificuldade reside em ter que decidir qual a mais idônea. Quando os problemas situam-se em nível do texto em sua globalidade, as dificuldades mais comuns referem-se à impossibilidade de estabelecer o tema, de identificar o núcleo da mensagem que se pretende transmitir ou à incapacidade de entender por que sucedem determinados acontecimentos.

Quanto às respostas incorretas, estas ocorreram porque esses alunos não souberam diferenciar as duas leis de aplicação (senos e cossenos).

Questão 2. (UNICAMP - 12) – Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura 24. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela abaixo, obtidos com a ajuda de um teodolito.

Figura 24 – Problema a distância entre pontos situados à margem de um riacho



Visada	Ângulo
$A\hat{C}B$	$\pi/6$
$B\hat{C}D$	$\pi/3$
$A\hat{B}C$	$\pi/6$

Fonte: Dados da professora pesquisadora.

a) Calcule a distância entre A e B.

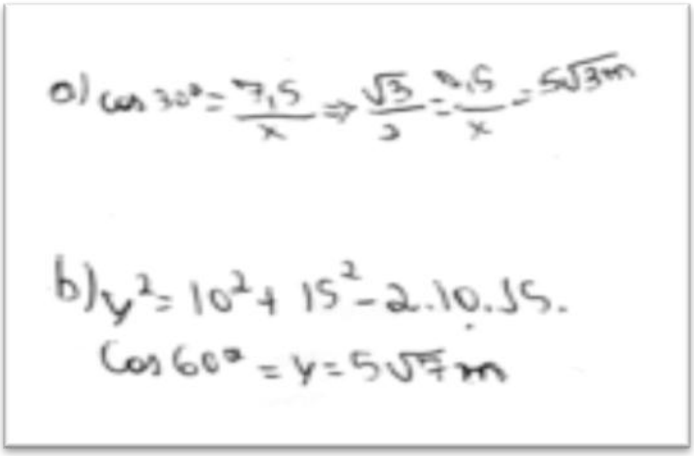
b) Calcule a distância entre B e D.

Com essa questão, supunha-se que os alunos fossem capazes de, a partir das definições das relações trigonométricas no triângulo, usar corretamente essas relações para aplicar a lei trigonométrica correspondente a cada item da questão.

Ao observar as respostas, constatou-se o alto índice de acertos, ou seja, vinte e cinco alunos apresentaram resultado correto; dois não resolveram a questão e três não aplicaram corretamente as leis trigonométricas.

Figura 25 - Resposta da questão 2 do teste final, por A1

Quadro A



Quadro B

a) $\text{Cos}\,30^o = \dfrac{7,5}{X}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{7,5}{X}$

$X = 5\sqrt{3}\text{ m}$

b) $y^2 = 10^2 + 15^2 - 2.10.\cos 60^o$

$y = 5\sqrt{7}\text{ m}$

Fonte: Banco de dados da pesquisa.

Para solucionar a questão 2, no item a, deveria ser aplicada, por definição, a lei dos senos no triângulo $A\tilde{C}B$, calculando, assim, a distância entre os pontos A e B. Observou-se que, nessa situação, a estratégia usada por A1 foi calcular o cosseno de 30^o; para isso, considerou esse triângulo como sendo retângulo e dividiu a medida do lado BC ao meio. Portanto, o aluno apresentou dificuldades, já que não distinguiu o triângulo retângulo do não retângulo.

Entretanto, na resolução do item b, A1 aplicou adequadamente a lei dos cossenos no triângulo $A\tilde{C}B$ para calcular a distância entre os pontos B e D. Cabe inferir que, talvez, o erro, no item a, tenha ocorrido porque o triângulo ACB tinha um formato quase retângulo, enquanto que, no BCD, essa semelhança não acontecia. Aqui, novamente, destaca-se a importância da representação, conforme já comentado anteriormente. Em relação à visualização: “[...] é qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo figuras, desenhos, diagramas, etc. que contribuem para criar ou transformar imagens mentais e construir o raciocínio visual” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 9-10).

O autor destaca que as práticas da observação, descrição, representação e análise de figuras geométricas contribuem na formação das imagens mentais que fundamentam o pensamento geométrico (GUTIÉRREZ, 1996). Em consonância com o citado pesquisador, acredita-se que a formação da imagem mental favorece a interpretação das informações na resolução de problemas matemáticos.

Durante o processo de aprendizagem, a professora ainda observou que o trabalho com resolução de problemas em sala de aula oportunizou ao aluno pensar nas possibilidades para encontrar com segurança a solução do problema. Nesse sentido, Dante (2000, p. 15) complementa que:

> Mais do que nunca precisamos de pessoas ativas e participantes, que deverão tomar decisões rápidas e, tanto quanto possível, precisas. Assim, é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas de comércio, economia, administração, engenharia, medicina, previsão do tempo e outros da vida diária. E, para isso, é preciso que a criança tenha, em seu currículo de matemática elementar, a resolução de problemas como parte substancial, para que desenvolva desde cedo sua capacidade de enfrentar situações problema.

Segundo o autor, quando o professor trabalha com resolução de problemas matemáticos tem com objetivo “fazer o aluno pensar produtivamente”.

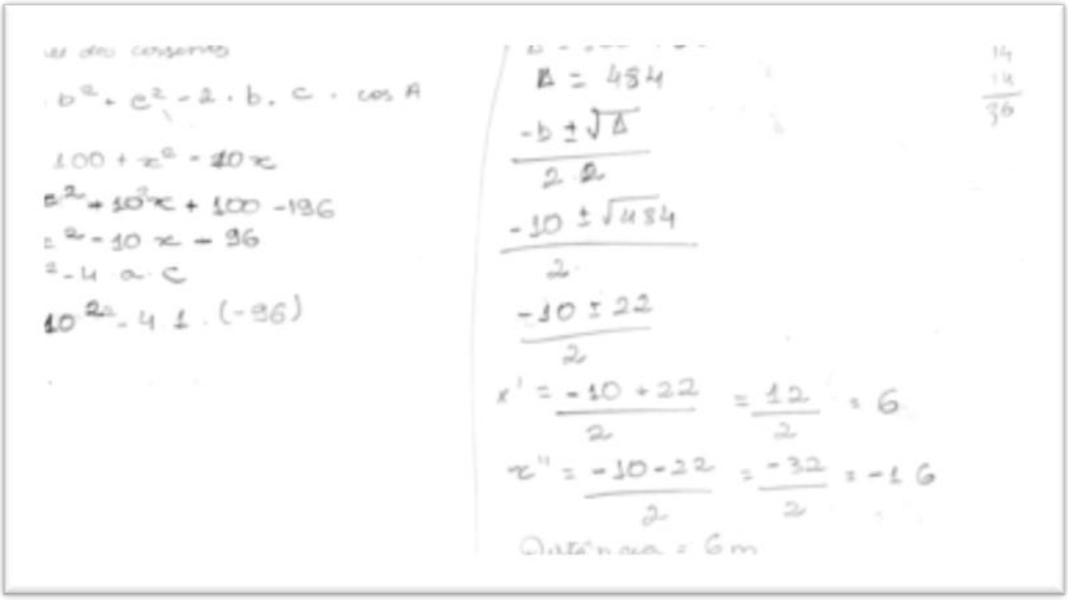
Questão 3. A arte circense exibe grandes espetáculos. Entre eles,, encontra-se um número representado pelo atirador de facas, considerado muito interessante. Em sua exibição, o objetivo desse atirador é acertar o alvo no centro da região circular de um disco que vamos denotar por O. Ao atirar a primeira faca, atinge o alvo num ponto denotado por P; em seguida, atira a segunda e atinge o alvo em outro ponto denotado por M. Sabendo que a distância do ponto P ao centro O do *alvo é PO = 10 cm, que a distância de P a M é PM = 14 cm e que o ângulo PÔM mede 120º, represente essa situação usando um esquema e calcule a distância, em centímetros, do ponto M ao centro O.*

A questão número três objetivou o cálculo da distância entre os pontos M e O. Com isso, almejava-se que os alunos representassem a situação - problema por um esquema e, a partir de conceitos já definidos, aplicassem corretamente a lei dos cossenos.

A essa questão, vinte e quatro alunos a responderam corretamente inserindo o esquema e calculando pela lei dos cossenos; quatro não a resolveram e dois apresentaram respostas incorretas. Na Figura 26, a resolução da questão 3 do teste final pelo aluno 13.

Figura 26 - Resolução da questão 3, do teste final pelo aluno A13

Quadro A



Quadro B

(Lei dos cossenos) $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$

$$196 = 100 + X^2 + 10X$$

$$0 = X^2 + 10X + 100 - 196$$

$$0 = X^2 + 10X - 96$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 10^2 - 4.1.(-96)$$

$$\Delta = 100 + 384$$

$$\Delta = 484$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$\frac{-10 \pm \sqrt{484}}{2}$$

$$\frac{-10 \pm 22}{2}$$

$$x` = -\frac{10+22}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x`` = \frac{-10-22}{2} = \frac{-32}{2} = -16$$

Distância = 6m

Fonte: Banco de dados da pesquisa.

Após análise da questão 3, percebeu-se que os objetivos foram alcançados, pois os alunos realizaram as etapas propostas para a solução. Segundo Perrenoud (2000, p. 25),

> A competência em educação é faculdade de mobilizar diversos recursos cognitivos – que incluem saberes, informações, habilidades operatórias e principalmente as inteligências – para, com eficácia e pertinência, enfrentar e solucionar uma série de situações ou de problemas.

Neste contexto, pode-se inferir que um aluno competente é o que enfrenta os desafios e procura encontrar caminhos utilizando o que aprendeu durante os processos de ensino e de aprendizagem. Além disso, para ele, as informações apresentadas foram significativas.

Questão 4. Um triângulo possui lados medindo 5 cm e 8 cm, respectivamente. Sabendo que o ângulo formado por eles mede 30º, determine a área dessa figura.

A questão quatro consistia em determinar a área de um terreno e, com isso, esperava-se que os alunos calculassem a área da região usando a fórmula da área de um triângulo qualquer.

Observou-se que 90% dos alunos mostraram domínio no uso da fórmula para o cálculo da área; 6% não resolveram a questão corretamente embora o conteúdo tenha sido explorado nas discussões em sala de aula; 4% a deixaram em branco. Na Figura 27, está representada a resolução do problema da questão 4 do teste final pelo aluno A10.

Figura 27 - Resposta da questão 4 do teste final, por A10

Quadro A

Quadro B

$$A = \frac{a.c.senb}{2}$$

$$A = \frac{8.5.0,5}{2}$$

$$A = \frac{40.0,5}{2} = \frac{20}{2}$$

A= 10cm

Fonte: Banco de dados da pesquisadora.

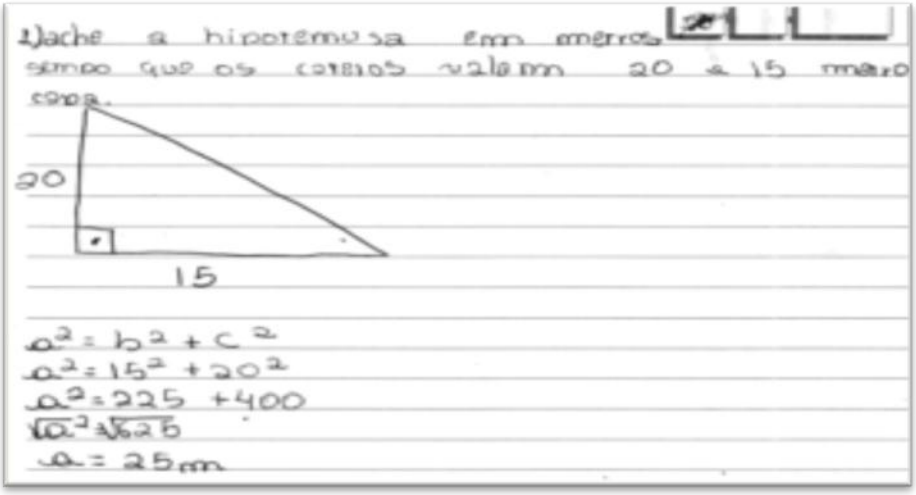
Diante do número de acertos na resolução desse problema pelos alunos, pode-se inferir que houve entendimento do conteúdo.

Questão 5. Crie e resolva uma situação problema a partir de dados reais, utilizando a trigonometria para resolvê-la.

Nessa questão, conjecturava-se que os alunos elaborassem uma situação-problema que envolvesse situações reais e, ao resolvê-la, utilizassem a trigonometria. Dos vinte e cinco participantes que apresentaram um problema com solução, apenas alguns estabeleceram relação com situações reais. Deixaram-na em branco três, e dois elaboraram o problema da mesma forma que A18, porém com a solução incorreta. Na Figura 28, aparece o problema elaborado por A18.

Figura 28 - Situação Problema da questão 5, do teste final apresentada por A3

Quadro A



Quadro B

5. Ache a hipotenusa em metros sendo que os catetos valem 20 e 15metros cada.

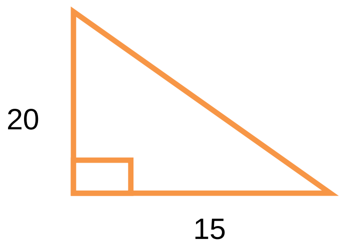
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 15^2 + 20^2$$

$$a^2 = 225 + 400$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{625}$$

a = 25 m



Fonte: Dados do teste final.

Com os resultados da questão 5, percebeu-se que os alunos tiveram dificuldades em criar problemas com aplicação em situações reais. O fato demonstra que o resultado não foi o esperado. Nesta perspectiva, percebeu-se que "o conhecimento matemático ganha significado, quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução" (BRASIL, 2008, p. 106).

Após a aplicação do teste final, comparando esses resultados coletados com o teste inicial, verificou-se uma melhora significativa quanto ao entendimento dos conteúdos de trigonometria em um triângulo qualquer, conforme demonstrado pelo Gráfico 1, na fase da validação.

A partir dos resultados obtidos durante a aplicação da sequência didática, pode-se atestar que os objetivos da pesquisa foram alcançados. Trabalhando a sequência de ensino a partir de situação - problema, edifica-se a relação entre teoria e experimentação e finaliza-se com sua validação (ALMOULOUD, 2008, p. 76).

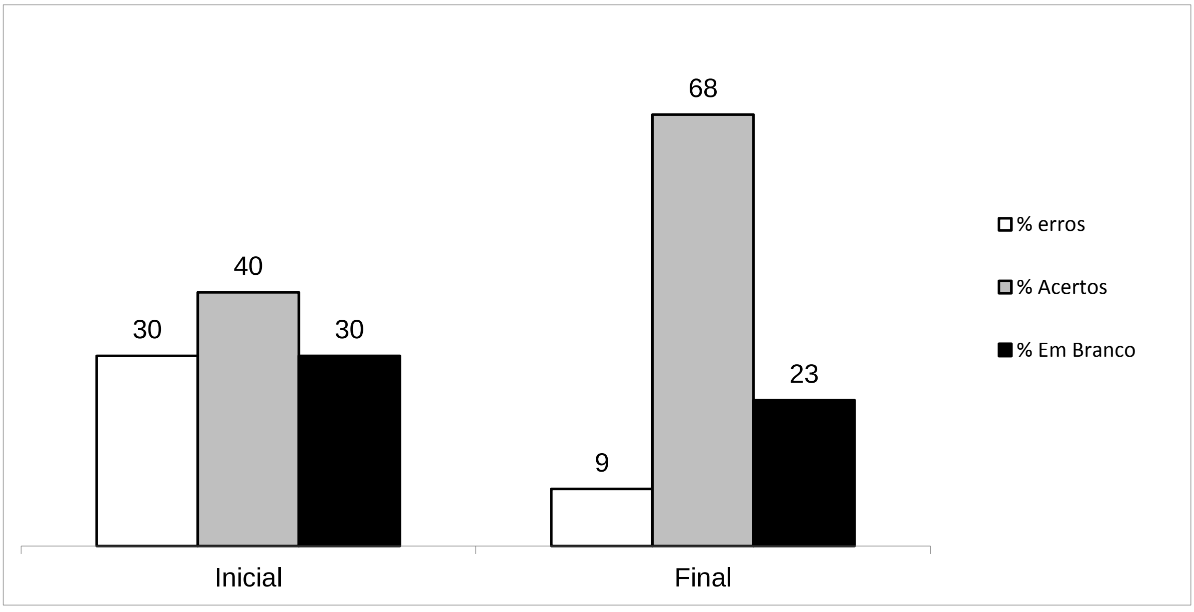
4.5 Quarta Fase: Validação

Na fase da validação, é fundamental que se verifique, após o levantamento dos dados obtidos da análise a priori e da aplicação da sequência didática, o que realmente o aluno produziu, a forma como desenvolveu seu raciocínio e organizou o pensamento matemático para chegar à solução das questões propostas.

A pesquisadora, ao finalizar a aplicação da sequência didática, que foi desenvolvida seguindo os preceitos da Engenharia Didática, aplicou um teste final, coletou os dados a fim de verificar a validação da sequência aplicada. Para a comprovação dessa fase, realizou-se uma análise comparativa entre o teste inicial e o final.

A análise dos resultados da aplicação da sequência didática mostrou melhora no desempenho dos alunos, o que pode ser observado no Gráfico 1 abaixo.

Gráfico 1 - Comparativo entre os testes inicial e final



Fonte: A autora, a partir do resultado dos testes.

O Gráfico 1 apresenta, simultaneamente, o resumo dos dados dos testes inicial e final, representando, em valores percentuais, o número de erros, acertos e em branco. Observa-se que as respostas incorretas, no teste inicial, foram 30%; no final, 9%. Inicialmente, houve 40% de acertos; no final, 68%. Em relação às questões em branco, no começo, foram 30%; no final, 23%. Sobre a redução destas, acredita-se que parte dos alunos adquiriu confiança em respondê-las devido ao aumento do conhecimento adquirido durante as etapas da sequência didática desenvolvida na intervenção pedagógica.

Pode-se inferir, com a redução das questões resolvidas incorretamente e as deixadas em branco, que o aluno, mesmo correndo o risco de cometer erro, tentou responder corretamente. Quando o discente apresenta a estrutura de pensamento sistematizada e suficiente para selecionar estratégias de resolução, a conscientização sobre o erro pode auxiliar a atingir um nível de desenvolvimento superior, conforme comenta Cury (2013). Nesse aspecto, o trabalho do professor diante dos erros dos alunos é fundamental para os processos de ensino e de aprendizagem.

Assim, pela comparação dos resultados dos testes inicial e final, percebeu-se que houve uma melhora no desempenho da turma. A partir dessa constatação, pode-se inferir que a maioria dos conteúdos foi compreendida pelos alunos.

Portanto, na 4ª etapa ou fase, ocorreu a análise a posteriori e validação da pesquisa. De acordo com Pommer (2013), ela se caracteriza pelo levantamento dos dados recolhidos e na confrontação com a análise a priori, permitindo a interpretação dos dados levantados. Assim, após a aplicação e exploração da sequência de atividades, os dados obtidos com as produções dos alunos em sala de aula e fora dela foram recolhidos e comparados. E, por meio do resultado dessa análise e dos decorrentes entre os testes inicial e final, verificou-se que a Engenharia Didática contribuiu para a melhoria dos conhecimentos e superação dos problemas de aprendizagem dos alunos, permitindo a validação interna do objetivo da pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho, produzido durante o Curso de Pós-Graduação *stricto sensu* do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, Centro Universitário UNIVATES, e realizado em uma escola estadual no Município de Santana, Estado do Amapá, com a turma do 2º ano do Ensino Médio, objetivou investigar a produtividade de uma sequência didática relacionada ao tema trigonometria em triângulos quaisquer a partir da Engenharia Didática. A finalidade foi observar e analisar como ocorria o processo de aprendizagem dos alunos. Durante o processo, procurou-se relacionar o assunto matemático com o cotidiano dos alunos, mostrando a importância e a aplicabilidade da trigonometria, facilitando, assim, a compreensão dos conceitos envolvidos.

A pesquisa propôs uma intervenção pedagógica a partir da metodologia da Engenharia Didática. Foram abordados conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo e no triângulo não retângulo.

Para a realização do trabalho, aplicou-se um teste inicial com o objetivo de verificar quais as dificuldades e os conhecimentos que os alunos possuíam em relação à trigonometria no triângulo retângulo. Pelos dados, constatou-se que eles ainda apresentavam dificuldades na aprendizagem, sobretudo em questões relacionadas aos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo, como, por exemplo, aplicar corretamente as leis trigonométricas e pequenos erros de cálculos matemáticos.

Após o teste inicial, elaborou-se uma sequência de ensino embasada nos princípios da Engenharia Didática para o estudo da trigonometria em um triângulo qualquer. A sequência contou com cinco atividades sobre trigonometria, que envolveram pesquisa bibliográfica, resolução de problemas e exploração dos mesmos. Os conceitos explorados foram leis dos senos, lei dos cossenos e o cálculo da área de um triângulo qualquer.

No período da prática, uma das dificuldades encontradas foi em relação à estrutura física da escola, que se encontrava parcialmente em reforma, onde apenas dois blocos funcionavam, com turmas alternadas de acordo com um horário especial proposto pelo corpo técnico, garantindo, assim, que nenhuma série ficasse sem aula. Esse fato comprometeu o término da pesquisa no tempo previsto, além de interferir num melhor desempenho dos alunos.

Nas percepções realizadas em sala de aula, observaram-se algumas dificuldades em relação aos conceitos relacionados com a trigonometria, em particular, a trigonometria em triângulo qualquer, tais como:

- lacunas em relação à trigonometria do triângulo retângulo: foi possível perceber, através da resolução das questões, que havia conceitos ainda não estruturados;

- erros no uso das fórmulas e, consequentemente, na resolução dos cálculos: essa dificuldade foi observada em situações- problema onde havia a ausência de desenho representativo;

- problemas de leitura e interpretação da situação – problema, ocasionando erros de desenhos e de uso de fórmulas;

- dificuldades em elaborar situações - problema: mesmo que a professora já houvesse explicado que tipo de situações seria interessante, os alunos acabaram elaborando apenas exercícios, ou seja, problemas-padrão. Quanto a estes, pode-se inferir que era hábito da turma resolvê-los no decorrer das aulas e não situações-problema relacionadas ao seu cotidiano.

- problemas na escrita por meio do uso de termos matemáticos: no momento de escrever, a turma demonstrou dificuldades em explicar o significado de cada uma das leis estudadas. Além disso, afirmavam não ter o hábito de escrever nas aulas de matemática.

No entanto, o trabalho docente, apoiado nos pressupostos da Engenharia Didática através das situações didáticas, possibilitou investigar a problemática envolvendo os processos de ensino e aprendizagem da trigonometria em triângulos quaisquer, bem como os aspectos que ocorriam na construção e aquisição do conhecimento dos alunos. A aplicação da Engenharia Didática também contribuiu para o avanço da aprendizagem do discente em relação ao tema abordado, o que pode ser constatado nos resultados encontrados e demonstrados no teste final. É incontestável, portanto, ter havido uma melhora significativa, pois, no teste inicial, a turma apresentou um percentual de 30% de erros; 40% de acertos e 30% de respostas em branco relacionadas às questões de trigonometria no triângulo retângulo. Já no final, o número foi de 9%; 68% e 23%, respectivamente. Em relação à trigonometria em triângulos não retângulos, o decréscimo dos erros, entre os testes inicial e final, foi de 21%.

Percebeu-se também que, após a intervenção pedagógica, os alunos se sobressaíram melhor nas questões 1, 2 e 4, que consistiam em aplicar as leis dos senos e dos cossenos e calcular a área do triângulo não retângulo. De acordo com os resultados obtidos, constatou-se que houve uma aprendizagem satisfatória do conteúdo trabalhado. Apesar disso, fez-se necessária a retomada de alguns conceitos da trigonometria em triângulo não retângulo, relacionados com a aplicação das leis trigonométricas, o cálculo de área do triângulo e a elaboração de situações-problema.

Salienta-se que a sequência didática foi desenvolvida em duplas ou em pequenos grupos, de modo que os educandos tivessem oportunidade de ler, interpretar, analisar e aplicar as leis trigonométricas na resolução dos problemas propostos, além de proporcionar a troca de ideias, respeito às opiniões alheias e o desenvolvimento da capacidade de argumentação. Em relação ao trabalho realizado em grupo, ocorreu a participação e o envolvimento de cerca de 70% dos estudantes, enquanto os demais (30%) esperavam pela resolução dos colegas. O fato, talvez, justifica a resistência de muitos professores em adotar essa prática. Mesmo assim, acredita-se que esta estimula o desenvolvimento de habilidades no processo de aprendizagem do estudante.

É importante destacar que os que trabalharam em grupo não demonstraram nenhuma dificuldade em tal dinâmica pois esta já era uma prática usada pela professora titular. Na busca de solução para as atividades, houve momentos de muita interação entre os alunos, que chamavam a pesquisadora sempre que alguma dúvida surgia, possibilitando-os, dessa forma, a participar da construção do seu próprio conhecimento.

Outro fator importante a ser considerado foi a socialização, durante a investigação, das estratégias dos alunos na resolução das situações apresentadas. Considerou-se pertinente a contribuição da turma, suas ideias, a procura de esclarecimento quanto às dúvidas, a argumentação e interação com os demais colegas do grupo no sentido de melhorar a intervenção.

A Engenharia Didática pode ser um importante recurso para os professores que trabalham com as disciplinas de Matemática no Nível Médio, por ser uma metodologia de investigação e produtora de situações de ensino, cujo foco está na aprendizagem do educando e na melhoria da qualidade da aula, na qual o docente se transforma em professor engenheiro.

A metodologia de pesquisa baseou-se em realizações didáticas em sala de aula, contemplou uma sequência de atividades com problemas que permitiu aos alunos criarem estratégias de resolução às situações propostas a partir de conhecimentos já adquiridos, bem como a construírem os conceitos relacionados com a trigonometria. Foi um importante recurso que a professora utilizou no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo da trigonometria em triângulo não retângulo.

Ao término da dissertação, a pesquisadora constatou que, ao utilizar a Engenharia Didática na sua prática pedagógica em sala de aula, com a finalidade de investigar como se dava o processo de aprendizagem do aluno, pôde diagnosticar e compreender as dificuldades que os discentes apresentavam durante as resoluções de situações propostas. Ademais, as reflexões sobre os procedimentos dessa teoria empregados na produção de uma didática de aula organizada e articulada, levou-a a adquirir uma nova postura diante do processo do ensino da disciplina Matemática. Percebeu-se que à medida que a metodologia foi sendo empregada, a investigação passou a ter uma dupla função, pois ao mesmo tempo em que se investigou as dificuldades dos alunos, a mesma serviu de aprendizagem também para a pesquisadora. Assim, concluiu-se que a Engenharia Didática torna-se, de acordo com suas fases, um processo contínuo de construção de conhecimento e investigação metodológica. Desse modo, a investigação favoreceu a construção e aquisição do conhecimento dos alunos e a melhoria da qualidade de aula da pesquisadora. Finaliza-se, pois afirmando que não existe uma “receita” ou “fórmula” pronta de como dar uma aula, mas sim a busca constante de novas metodologias que possibilitem uma melhor aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. **Engenharia Didática:** características e seus usos em trabalhos. REVEMAT: Anped, v. 3, p. 62-77, 2008.

ARANTES, P. P. C. V. **As razões trigonométricas no triângulo retângulo e as rampas de acesso**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de São Carlo, São Carlo, 2013.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 193-217.

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique. Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BORTOLI, Gládis. **Um Olhar Histórico nas Aulas de Trigonometria:** Possibilidade de uma Prática Pedagógica Investigativa. Lajeado: UNIVATES, 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Blucher 1996.

BOYER, C. B. **Tópicos de Historia da Matemática** – Cálculo. Traducão de Hygino H. Domingues, São Paulo, 2006-2013.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, p. 135, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 10 out. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE:** Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: Ensino Fundamental: matrizes de referência, tópicos descritores. Brasília: MEC/SEB, Inep, 2008. 193 p.

BRASIL. **PCN +:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 01 out. 2013.

BRIGUENTI, Maria José Lorenção. **Ensino e aprendizagem da trigonometria:** novas perspectivas da educação matemática. Disponível em: <http://www.proem.pucsp.br/teses/Briguen.html>. Acesso em: 03 dez. 2007.

BRITO, A. de J.; MOREY, B. B. Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. **Revista Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, n. 01, p. 65-70, jan./jun. 2004. Disponível em: <http://webp.usf.edu.br/edusf/publicacoes/RevistaHorizontes/Volume_05/uploadAddress/horizontes-8%5B6288%5D.pdf>. Acesso em: 09 nov. 2013.

BROLEZZI, A. C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na História da Matemática e no ensino de Matemática**. 1996. 88f. Tese de doutoramento. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, cap. 1. p. 35-113, 1996.

CAPES. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Disponível em: <http://www.capes.gov.br/>. Acesso em: 09 nov. 2013.

CAVALCANTI, Cláudia. Diferentes formas de resolver problemas. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas:** Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COLAÇO, V. de F. R. Processos interacionais e a construção de conhecimento e subjetividade de crianças. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Porto Alegre, v. 17, n. 3, p. 333-340, 2004.

COSTA, N.M.L. A História da Trigonometria. **Educação Matemática em Revista - Revista da SBEM** (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) - Ano 10, São Paulo, p. 60 - 69, 01 mar. 2003.

COSTA, S. S. C.; KLEIN, M. E. Z. **O ensino de trigonometria subsidiado pelas teorias dos campos conceituais de Gérard Vergnaud e da Aprendizagem Significativa de David Ausubel**. In: III MOSTRA DE PESQUISA DA PÓS-GRADUAÇÃO PUCRS, 2008. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/online/IIImostra/EducacaoemCienciaseMatematica/61997%20-%20MARJUNIA%20EDITA%20ZIMMER%20KLEIN.pdf>. Acesso em: 13 nov. 2013.

CURY, H. N. **O Papel do Erro na Aprendizagem de Matemática**, 2013. Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Palestra/PA%20-%2013.doc>. Acesso em: 03 nov. 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática**. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Tese de Livre Docência, 1988.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática:** 1ª a 5ª series. 12. ed. São Paulo: Ática, 2000.

DEMO, Pedro. **Desafios Modernos da Educação**. São Paulo: Vozes, 2000

DIONIZIO, F. Q.; BRANDT, C. F. **Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria**. In: X CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO: PUC/PR, nov. 2011. Disponível em: <http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/4728_2885.pdf>. Acesso em: 09 nov. 2013.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. Educação Matemática: **Representação e Construção em geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics:** an educational approach Dordrecht: Reidel, 1987.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, cap. 2, p. 26-35, 1996.

GOOGLE EARTH. Disponível em: <http://www.google.com.br/intl/pt-BR/earth/>. Acesso em: 03 nov. 2014.

GUTIERREZ, Angel. **Visualization in 3-Dimensional Geometry:** In Search of a Framework. University of Valence, Spain, 1996. Disponível em: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2014.

HESS, R.I. Momento do diário e diário dos momentos. 2006. In: **Tempos, narrativas e ficções:** a invenção de si. Porto Alegre: EDIPUCRS. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/XSalaoIC/Ciencias_Humanas/Educacao/71433-LARISADAVEIGAVIEIRABANDEIRA.pdf>. Acesso em: 11 nov. 2014.

LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 1. Coleção do Professor de Matemática 6BM, Rio de Janeiro, 1995.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. **Educação Matemática:** uma introdução. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. Engenharia didática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.). **Didática da Matemática:** Uma Introdução. 1. ed. São Paulo: EDUC, v.1, p.197-208, 1999.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

MOREIRA, M. A. **Pesquisa em Ensino: Aspectos Metodológicos**. Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências. Porto Alegre, 2003.

MORESI, E. (Org). **Metodologia da Pesquisa**. Brasília: UNB. 2003. Disponível em: <http://www.inf.ufes.br/~falbo/files/MetodologiaPesquisa-Moresi2003.pdf>. Acesso em: 10 out. 2013.

NASPOLINI, Ana Tereza. **Didática de português:** Tijolo por tijolo: Leitura e Produção Escrita. São Paulo: FTD, 1996.

NUNES, José H. Introdução. In: NUNES, José Horta (Org.) **Papel da memória**. Campinas: Pontes, 1999.

NUNÊZ, Isauro Beltrán. RAMALHO, Betania Leite (Orgs.). O uso de situações-problema no ensino de ciências. In: **Fundamentos do ensino-aprendizagem das Ciências Naturais e da Matemática:** O novo Ensino Médio. Porto Alegre: Sulina, p. 145- 171, 2004.

OLIVEIRA, F. C. **Dificuldades no Processo Ensino e Aprendizagem de Trigonometria por Meio de Atividades**. Dissertação de Mestrado – UFRN. 2006. Disponível em: <http://www.bdtd.ufrn.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=1299>. Acesso em: 10 dez. 2013.

OLIVEIRA, J. E. M. **A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e sua aplicações contemporâneas**. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2013.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PANIZZA, M. **Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais:** análise e propostas. Porto Alegre, Artmed, 2006.

PERRENOUD, Philippe. **10 Novas Competências para ensinar***.* Porto Alegre. Artes Médicas, 2000.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula:** Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo: Tabs, p.72, 2013.

PORTO, R. T.; NOVELLO, T. P. **Estágio Supervisionado:** Uma proposta metodológica para o ensino de Trigonometria. In: EREMATSUL, XVI EDIÇÃO. 2010. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/comunicacoes/33ROBSONTEIXEIRAPORTO.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2014.

RABELO, Edmar Henrique. **Produção e interpretação de textos matemáticos:** um caminho para um melhor desempenho na resolução de problemas. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Educação, Campinas: UNICAMP, p. 209, 1995.

ROUSSEAU, jean-jacques. Google. Disponível em: <https://www.google.com.br/#q=jean-jacques+rousseau+>. Acesso em: 11 nov. 2014.

SANCHEZ, Jesús Nicasso Garcia. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTOS, T. S.; SILVA, A. Q.; CUBAS, D. T. M.; OLIVEIRA, L. A. **Conversão de Medidas de ângulos no Ciclo Trigonométrico com o jogo Batalha Naval**. III EIEMAT. 1º ENCONTRO NACIONAL PIBID-MATEMÁTICA, 01 a 03 agosto, 2012. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/PO/PO_Santos_Tatiana_Silva_dos.pdf>. Acesso em: 11 out. 2013.

SILVA, M. F. **Trigonometria, Modelagem e Tecnologias:** um estudo sobre sequência didática. Dissertação Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Pontifícia Católica de Minas Gerais, Minas Gerais, 2011.

SOLÉ, I. **Estratégias de leitura**. Tradução de Cláudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SOUZA, C. A.; VICTER, E. das F.; LOPES, J. R. **Uma breve história da Trigonometria e seus conceitos fundamentais**. Mesquita, RJ: Ed. Entorno, p. 86, 2011.

TEIXEIRA, P. J. M; PASSOS, C. C. M. **Um Pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau**. Zetetiké: FE/Unicamp, v. 21, n. 39, jan./jun. 2013.

THOMAZ, T. C. **Não Gostar de Matemática:** que fenômeno é esse? Caderno de Educação/UFPel, Pelotas, n. 12, 1999.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Termo de Concordância da Direção da Instituição de Ensino

TERMO DE CONCORDÂNCIA DA DIREÇÃO DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO

Ao senhor (a) Diretor da Escola Estadual José Barroso Tostes – Santana Estado do Amapá.

Autorizo a mestranda Ivana Maria Nascimento dos Santos, aluna regularmente matriculada no Curso de Pós-graduação *Stricto Sensu,* Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, do Centro Universitário UNIVATES de Lajeado, RS, para coletar dados neste estabelecimento de ensino, para a realização de sua pesquisa de Mestrado, intitulada: "PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS QUAISQUER A PARTIR DA ENGENHARIA DIDÁTICA". O objetivo geral desta pesquisa é investigar processos de ensino e de aprendizagem na trigonometria em triângulos quaisquer com vistas ao aprendizado de alunos 2º ano do Ensino Médio.

O presente estudo se justifica pela necessidade constante de se produzir conhecimento na área de ensino e aprendizagem em Matemática. Da mesma forma, os conhecimentos produzidos podem ser utilizados no dia-a-dia pelo professor no sentido de melhorar sua prática, levando o aluno a aprender os conteúdos de forma efetiva.

Tenho ciência que a coleta de dados pretende ser realizadas por meio de observações, questionários, filmagens de aulas e atividades junto aos alunos do 2º ano do Ensino Médio nesta instituição.

Pelo presente termo de concordância declaro que autorizo a realização da pesquisa prevista na Escola Estadual José Barroso Tostes – Santana Estado do Amapá.

Data_____/____/_____

____

Direção da Escola

____

Ivana Maria Nascimento dos Santos

Mestranda em Ensino de Ciências Exatas – UNIVATES

APÊNDICE B - Termo de Consentimento Livre Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

Com o intuito de alcançar o objetivo proposto para este projeto: “investigar processos de ensino e de aprendizagem na trigonometria em triângulos quaisquer a partir da Engenharia Didática com vistas ao aprendizado de alunos 2º ano do Ensino Médio, nos processos de ensino e de aprendizagem” que será desenvolvido na Escola Estadual José Barroso Tostes – Santana Estado do Amapá, venho por meio deste, convidar-lhe a participar da pesquisa que faz parte da dissertação de mestrado desenvolvida no programa de Pós Graduação *Stricto Sensu,* Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, tendo como Orientadora a Professora Dra. Angélica Vier Munhoz e Coorientadora a Professora Dra. Marli Teresinha Quartieri.

Deste modo, no caso de concordância em participar desta pesquisa ou deixar participar (alunos menores), ficará ciente de que a partir da presente data:

- Os direitos da entrevista respondida (questionários), dos apontamentos registrados no diário de campo e das filmagens de aulas realizada pelo pesquisador, serão utilizados integral ou parcialmente, sem restrições.

- Estará assegurado o anonimato nos resultados dos dados obtidos, sendo que todos os registros ficarão de posse do pesquisador por cinco anos e após esse período serão extintos.

Será garantido também:

- Receber a resposta e/ou esclarecimento de qualquer pergunta e dúvida a respeito da pesquisa.

- Poderá retirar seu consentimento a qualquer momento, deixando de participar do estudo, sem que isso traga qualquer tipo de prejuízo.

Assim, mediante termo de Consentimento Livre e Esclarecido, declaro que autorizo minha participação nesta pesquisa, por estar esclarecido e não me oferecer nenhum risco de qualquer natureza. Declaro ainda, que as informações fornecidas nesta pesquisa podem ser usadas e divulgadas neste curso Pós-graduação *stricto sensu,*

Mestrado Profissional Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário, bem como nos meios científicos, publicações eletrônicas e apresentações profissionais.

Pesquisadora: Ivana Maria Nascimento dos Santos ivanameri@bol.com.br	Participante da pesquisa

Lajeado, Março de 2015

APÊNDICE C - Teste Inicial

TESTE INICIAL

1) O que você entende por trigonometria?

2) O que já estudou ou leu sobre trigonometria?

3) Cite dificuldades em relação ao tema trigonometria.

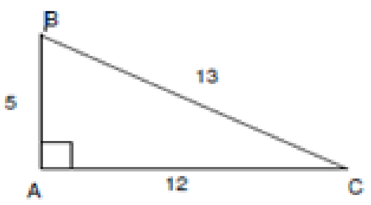
4) Expectativas em relação às aulas com o conteúdo trigonometria.

5) (Escola Adventista, 2013) Um navio, navegando em linha reta, vai de um ponto B até um ponto A. Quando o navio está no ponto B, é possível observar um farol situado num ponto C de tal forma que o ângulo $A\hat{C}B$ mede 60º. Sabendo que o ângulo $C\hat{A}B$ é reto e a distância entre os pontos A e B é de 9 milhas, calcule a distância, em milhas do ponto A ao farol.

6) Escreva uma situação-problema na qual, para resolvê-la, é necessário utilizar uma das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

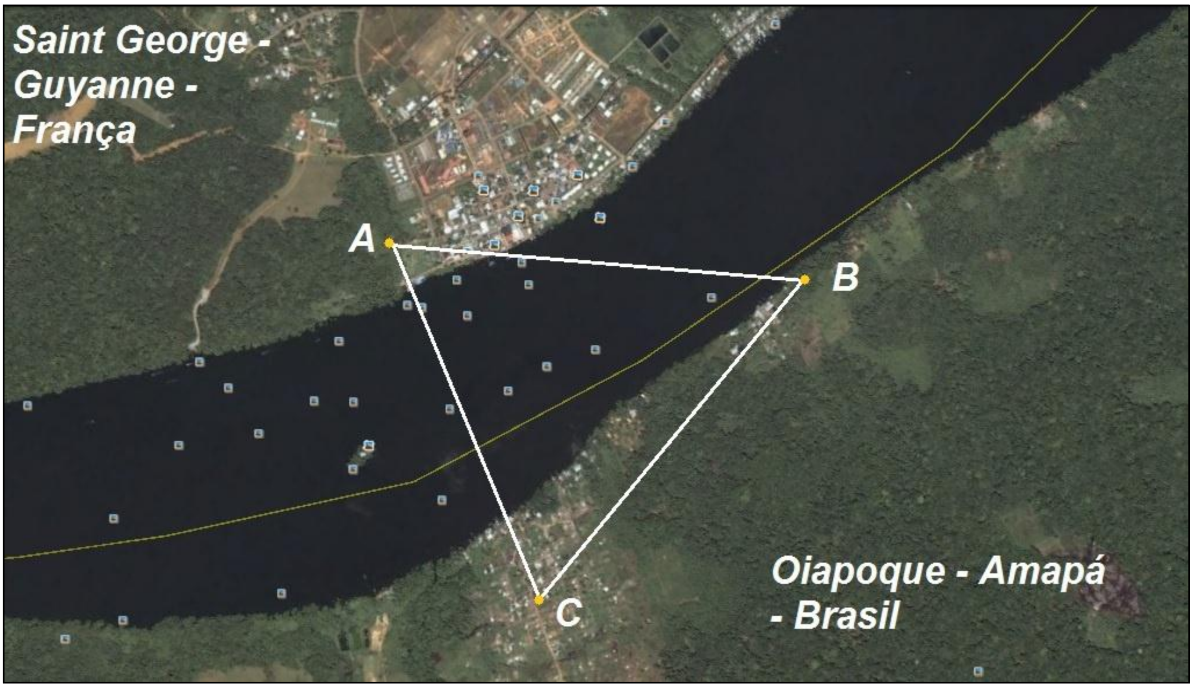
7) Observe a figura e determine:

a) sen B; cos B; sen C; cos C



8) A fronteira entre Brasil e França é a linha que limita os territórios do Brasil e Guiana Francesa. Para unir o estado do Amapá (pontos B e C) e a Guiana Francesa (ponto A) será construída uma ponte sobre o rio Oiapoque-AP. Considerando a figura para representar a situação, temos os seguintes dados: ângulos $C\hat{B}A$ = 59º e *AB* = 57º*.* Sabendo que $B\hat{A}C$ mede 30 m, indique, em metros, a distância *AB.*

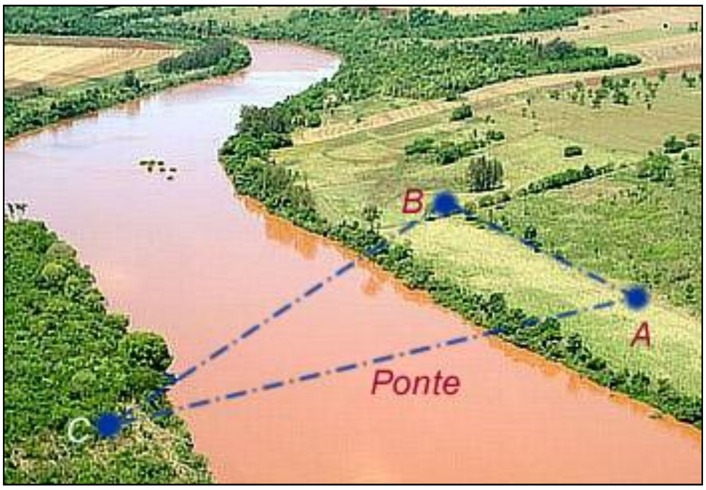
(Dado: use as aproximações sen 59º= 0,87 e sen 64º= 0,90)



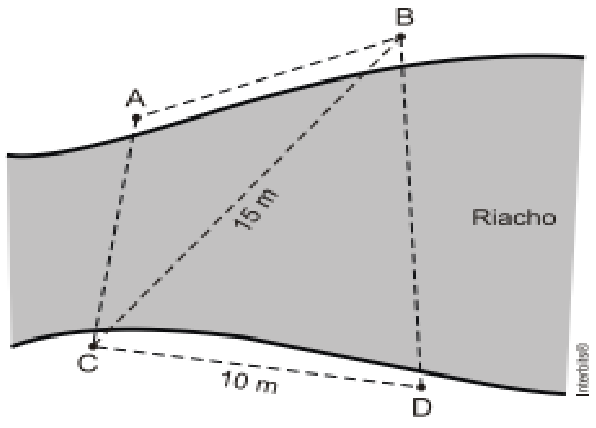
APÊNDICE D - Teste final envolvendo problemas de aplicação das leis trigonométricas (lei do seno, lei do cosseno e área de um triângulo qualquer)

TESTE FINAL ENVOLVENDO PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DAS LEIS TRIGONOMÉTRICAS (LEI DO SENO, LEI DO COSSENO E ÁREA DE UM TRIÂNGULO QUALQUER)

1) (Revista Brasil Escola) – Um construtor deseja calcular a distância do ponto A ao ponto C, pontos onde será construída uma ponte. Entretanto, ele não possui nenhuma ferramenta que meça essa distância, mas conhece alguns conteúdos matemáticos e teve a seguinte ideia. “Como eu possuo uma ferramenta que calcula ângulos, conseguirei determinar o comprimento desta ponte”. Com isso ele marcou um ponto B distante 2 km do ponto A. Mediu o ângulo $A\hat{B}C$ encontrando 85°e o ângulo $B\hat{A}C$ obtendo 65°. O construtor acredita que com essas informações será possível calcular o comprimento da ponte. Se sim, calcule o comprimento desta ponte.



2) (UNICAMP - 12) – Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela abaixo, obtidos com a ajuda de um teodolito.



Visada	Ângulo
$A\hat{C}B$	$\pi/6$
$B\hat{C}D$	$\pi/3$
$A\hat{B}C$	$\pi/6$

a) Calcule a distância entre A e B.

b) Calcule a distância entre B e D.

3 – A arte circense exibe grandes espetáculos, como exemplo tem um número bem interessante representado pelo atirador de facas. Em sua exibição o objetivo desse atirador é acertar o alvo no centro da região circular de um disco que vamos denotar por O. Ao atirar a primeira faca atinge o alvo num ponto denotado por P, em seguida atira a segunda e atinge o alvo em outro ponto denotado por M. Sabendo-se que, a distância do ponto P ao centro O do alvo é PO = 10cm, a distância de P a M é PM = 14cm e o ângulo PÔM mede 120º. Represente essa situação usando um esquema e calcule a distância, em centímetros, do ponto M ao centro O.

4 – Um triângulo possui lados medindo 5 cm e 8 cm, respectivamente. Sabendo que ângulo formado por eles mede 30º, determine a área dessa figura.

5 – Crie e resolva uma situação-problema, a partir de dados reais utilizando a trigonometria para resolvê-la.