UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

O QUE $f'(x)$ NOS DIZ SOBRE $f(x)$: UMA ABORDAGEM COM USO DE TECNOLOGIA COMPUTACIONAL

Gisele Scremin

Lajeado, janeiro de 2019

Gisele Scremin

O QUE $f'(x)$ NOS DIZ SOBRE $f(x)$: UMA ABORDAGEM COM USO DE TECNOLOGIA COMPUTACIONAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade do Vale do Taquari - Univates, como exigência parcial para obtenção do grau de **Mestre em Ensino de Ciências Exatas.**

Orientadora: Prof. Drª Maria Madalena Dullius

Lajeado, janeiro de 2019

Dedico esta dissertação aos meus grandes exemplos e apoiadores de toda minha caminhada, meu filho Jonatam Palacios, esposo Jorge Luis Palacios Felix, meu pai Darci Luis Scremin e minha mãe Elvenia Angelina J. Scremin, pois tudo que conquistei até hoje foi porque vocês estavam ao meu lado me apoiando, incentivando, oferecendo forças para seguir em frente e não desistir nos momentos de angústia e dúvida.

Gisele Scremin

Janeiro/2019

AGRADECIMENTOS

Ao longo da caminhada de pesquisa, pude contar com o apoio de algumas pessoas que sempre estiveram ao meu lado e que são simplesmente especiais, além de ter a oportunidade de conhecer outras, que foram muito significativas, ambas me apoiaram e me incentivaram para eu chegar a alcançar mais um grande objetivo na vida: concluir o mestrado.

Agradeço de coração a todos que contribuíram para que o sonho se concretizasse, participando de alguma forma e em alguma etapa dessa importante conquista. Não terei como mencionar todos, porém não posso deixar de citar alguns.

Deus esteve sempre comigo, dando-me força, ânimo e, sobretudo, crença para não desistir, para persistir na luta por este sonho, que passou a ser, também, um objetivo de vida. A Ele, minha eterna gratidão.

Agradeço de modo especial ao meu filho Jonatam e ao meu esposo Jorge, que, embora muitas vezes privados de minha dedicação, estiveram ao meu lado sempre, acalmando o meu coração nos momentos difíceis e que, com carinho e palavras singelas, iluminaram meus dias. Obrigada pela parceria, pelo amor incondicional e pela vibração a cada etapa vencida na busca dessa vitória. Vocês me inspiram a viver e a conquistar novas metas.

Aos meus pais Darci e Elvenia, que com orgulho torceram pela minha conquista, sempre me poupando de situações que pudessem trazer preocupação, evitando, assim, que eu me desviasse do foco principal, obrigada. A educação por vocês proporcionada, suas orações e seus conselhos me fazem acreditar que é possível ir além.

A todos os familiares que auxiliaram de alguma forma para que esse sonho se concretizasse, em especial, irmão, avós, tios, tias, primos, primas, cunhada e sobrinhos, a minha gratidão.

Agradeço a todos os professores do curso, especialmente, a minha orientadora, professora Maria Madalena Dullius. Obrigado, mestre, por exigir de mim muito mais do que eu imaginava ser capaz de fazer. Manifesto aqui minha gratidão eterna por compartilhar a sua sabedoria, o seu tempo e a sua experiência.

A esta instituição tão imponente, bem como a todas as pessoas que a tornam assim tão especial, agradeço pelo ambiente propício à evolução e ao crescimento pessoal, educacional e profissional. Destaco que ao longo de todo meu percurso eu tive o privilégio de trabalhar de perto com os melhores professores, educadores e orientadores, sem os quais não seria possível estar aqui hoje com o coração repleto de orgulho.

Agradeço também, de modo especial, à escola de Ensino Fundamental Padre Traezel, a qual abriu suas portas para que eu pudesse realizar minhas atividades complementares e práticas pedagógicas, em uma parceria que deu certo e que nos enriqueceu. Assim, à direção, à coordenação pedagógica, às professoras, aos alunos, aos funcionários, enfim, a todos o meu sincero agradecimento.

RESUMO

A derivada é um dos conceitos fundamentais na aprendizagem da matemática universitária, sendo suporte na construção de outros conceitos mais avançados. Resultados da literatura nacional e internacional têm apontado que alunos têm apresentado dificuldades no aprendizado desse conceito que, em sua maioria, estão relacionadas à falta de compreensão conceitual. Neste sentido, a presente pesquisa, de cunho qualitativo, vinculada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES, alicerçada em estudos sobre a importância do uso de tecnologias computacionais em situações de ensino e aprendizagem de Matemática e de Cálculo, teve por objetivo desenvolver uma intervenção pedagógica para o ensino de derivadas através de atividades desenvolvidas com apoio do *software* Desmos, a fim de verificar as possíveis potencialidades do uso dessa ferramenta para as diferentes abordagens da Derivada. Durante o estudo, foram coletados dados por meio do registro das respostas das atividades realizadas pelos alunos (em papel), questionário de avaliação da proposta, áudios, fotos e diário de campo da pesquisadora. A intervenção foi desenvolvida em forma de Oficina Pedagógica junto a um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino da rede particular do Estado do Rio Grande do Sul. A análise de episódios indica que o uso de um ambiente informatizado pode contribuir para que os alunos se tornem mais ativos frente ao processo de ensino e de aprendizagem, sintam-se instigados a pensar, experimentar e testar aquilo que muitas vezes lhe é transmitido como um conhecimento pronto e acabado, também, sintam-se motivados a participarem e trocarem ideias, fazendo com que ocorra a socialização do conhecimento em construção. Como potencialidades do uso do *software* Desmos destacaram-se a visualização e a experimentação proporcionados através da manipulação dos gráficos, construção de tabelas, marcação e seleção de pontos, que foram mediados pelas atividades propostas e possibilitaram a compreensão da derivada de modo mais enriquecedor, principalmente em seus aspectos geométrico e gráfico.

Palavras-chave: Derivada. Ensino. Desmos.

ABSTRACT

The derivative is one of the fundamental concepts in the learning of university mathematics, being supported in the construction of other more advanced concepts. Results from the national and international literature have pointed out that students have presented difficulties in learning this concept, which, for the most part, are related to a lack of conceptual understanding. In this sense, the present qualitative research, linked to the Postgraduate Program in Teaching of Exact Sciences of the University of Vale do Taquari - UNIVATES, based on studies on the importance of the use of computational technologies in situations of teaching and learning of Mathematics and Calculus, wasaimed to develop a pedagogical intervention for the teaching of derivatives through activities developed with the support of the software Desmos, in order to verify the potential of the use of this tool for the different approaches of the Derivative. During the study, data were collected by recording the responses of the activities carried out by the students (in paper), the proposal evaluation questionnaire, audios, photos and field diary of the researcher. The intervention was developed in the form of a Pedagogical Workshop with a group of students of the Licenciatura degree in Mathematics of a Teaching Institution of the private network of the State of Rio Grande do Sul. The analysis of episodes indicates that the use of a computerized environment can help students become more active in the processes of teaching and learning, feel encouraged to think, experiment and test what is often passed on to them as a ready and finished knowledge, also, feel motivated to participate and exchange ideas, causing the socialization of knowledge under construction to occur. The visualization and experimentation provided through the manipulation of the graphs, the construction of tables, the marking and selection of points, which were mediated by the proposed activities, enabled the understanding of the derivative in a more enriching way, in its geometric and graphic aspects.

Keywords: Derivative. Teaching. Desmos.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho, vinculado ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES, e alicerçado em estudos sobre a importância do uso de tecnologias computacionais em situações de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial, visa propor e investigar uma abordagem alternativa para o conteúdo de derivadas, utilizando o *software* Desmos como ferramenta de apoio para o desenvolvimento das atividades propostas, em forma de Oficina Pedagógica direcionada a alunos de Licenciatura em Matemática, que cursam ou já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

A motivação de trabalhar com esse tema é decorrente de inquietações surgidas no decorrer de minha formação acadêmica, principalmente na graduação, como a quantidade expressiva do uso de técnicas para o ensino dos conceitos elencados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, o que me levou a questionar a aplicabilidade destes conteúdos. E também questionamentos surgidos ao acompanhar o trabalho de meu esposo como professor de disciplinas relacionadas à área de Matemática em cursos de graduação de uma Universidade Federal do RS, principalmente, da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, considerando o baixo desempenho e aproveitamento dos alunos e a dificuldade destes em compreender o conteúdo - conceito de derivada - considerado base da disciplina citada e de outras.

Estas inquietações me levaram a estudar e analisar o conceito de derivada de modo mais minucioso, pois quando questionada sobre o conceito e suas definições, percebi que não tinha domínio ou conhecimento suficiente sobre sua base conceitual, percebendo deste modo, a necessidade de ampliar meus conhecimentos e buscar modos de facilitar seu ensino e proporcionar melhoras em seu aproveitamento nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

Diante deste cenário, no ano de 2016 retomei a conclusão de minha especialização em TIC's aplicadas à Educação, pela Universidade Federal de Santa Maria, na modalidade Ead, e em 2017 iniciei o mestrado mencionado. Programas que oportunizaram a reflexão e a busca por metodologias e recursos que pudessem contribuir para a aprendizagem do conceito de Derivada.

Definido o tema de trabalho, tanto para a especialização quanto para o mestrado, e acreditando que o uso de tecnologias pode favorecer um ambiente mais dinâmico, motivador e capaz de promover melhor a compreensão de conceitos matemáticos, optamos pela busca e seleção de um s*oftware,* como recurso facilitador na aprendizagem do conceito derivada como inclinação da reta tangente a um ponto, taxa de variação instantânea e a análise do comportamento de funções através do gráfico da função derivada.

Após leituras de aprofundamento teórico acerca de tecnologias computacionais para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, notou-se que alguns *softwares* já vêm sendo explorados há muito tempo. Percebeu-se, então, a oportunidade associada à necessidade de testar algo novo, que explorasse gráficos e que fosse de fácil acesso e manuseio, pois muitos *softwares* requerem um aprofundamento maior referente a seus comandos e programação, o que muitas vezes pode prejudicar o andamento das atividades e da aula, além de pouco favorecer o seu uso devido à falta de tempo dos professores para realizar um aprofundamento sobre a tecnologia a ser utilizada.

Nesse sentido, como resultado da pesquisa inicial sobre os *softwares*, encontrou-se o *software* Desmos, ainda pouco conhecido e explorado, mas que mostrou potencial para uso em atividades de exploração de funções e gráficos, em um trabalho de dissertação de Olmo (2016) da Universidade Internacional de La Rioja, na Faculdade de Educação, de Madrid, em 2016. Em busca por mais informações sobre o Desmos e por meio da interação com suas ferramentas, foi possível perceber que seus comandos são acessíveis, de fácil compreensão e manuseio. Ainda, verificou-se que ele tem ótima saída de gráficos, permite explorar o gráfico de derivadas e demais funções, possibilita a construção de tabela de valores e marcação de pontos, sendo que mais detalhes do *software* podem ser encontrados no Anexo A.

Ademais, o recurso, além de ser gratuito, pode ser acessado em qualquer dispositivo que esteja *on-line*, ou utilizado como aplicativo em modo *off-line*, apresentando a vantagem de não requer a sua instalação ou condicionar à necessidade de cadastro. Os fatores citados foram decisivos na seleção do *software* para o desenvolvimento do projeto de intervenção.

Segundo Marin (2009), o uso de recursos computacionais, como *softwares*, nas aulas de Cálculo pode contribuir para a abordagem conceitual, além de expandir possibilidades de trabalho com diferentes abordagens e representações algébricas e geométricas, de modo rápido e articulado. O autor também afirma que a tecnologia possibilita a organização de situações pedagógicas com maior potencial de aprendizagem.

Desse modo, observando que as tecnologias são atrativas e estão presentes em nosso dia a dia, oferecendo a possibilidade de exploração de várias formas de representações como a algébrica, tabular, gráfica e simbólica para o conceito de derivada, essa pesquisa vem propor uma intervenção com uso do *software* Desmos, baseada na seguinte questão de pesquisa: **“Como o uso do *software* gráfico Desmos e as atividades poderão influenciar nas diferentes abordagens do conceito da Derivada? ”**

O objetivo principal desta pesquisa é investigar as potencialidades do uso do *software* gráfico Desmos para o ensino e a aprendizagem de Derivadas, tendo como público alvo alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino Privada do Estado do Rio Grande do Sul, sendo a intervenção aplicada em formato de Oficina Pedagógica durante a Semana acadêmica do Curso.

Como objetivos específicos, a pesquisa pretende:

- Desenvolver uma proposta de intervenção para o ensino e a aprendizagem de Derivadas com auxílio do *software* Desmos;
- Promover a integração dos aspectos gráficos, algébricos e geométricos do conceito da Derivada;
- Verificar as potencialidades do *software* Desmos para exploração do conceito de Derivada.

A utilização da Oficina Pedagógica no ensino de derivadas pode promover os objetivos almejados no que tange à compreensão do conceito da derivada e suas interpretações, pois, segundo Vieira e Volquind (2002), trata-se de uma metodologia fundamentada na realização de tarefas coletivas, por meio da promoção de investigação, ação e reflexão, de modo a integrar conhecimentos teóricos à sua aplicação.

Além disso, de acordo com Castellano e Coco (2006), as oficinas pedagógicas propõem que professores e alunos trabalhem juntos, sem que haja uma dicotomia hierárquica de papéis, haja vista que o conhecimento não é repassado do professor para o aluno, mas é construído pelo aluno no decorrer do processo de ensino e aprendizagem, o que ressalta sua importância no contexto de aplicação.

No desenvolvimento desta pesquisa, considerou-se o uso de recursos computacionais como ferramentas educacionais, as quais precisam ser vistas como apoio, como meios, que permitem realizar atividades de aprendizagem de forma diferente das empregadas anteriormente (POZO, 2004), possibilitando a criação de situações de aprendizagem ricas, complexas e diversificadas, proporcionando a melhora na qualidade de ensino e de aprendizagem.

Para tanto, como já referendado, realizou-se uma intervenção pedagógica com alunos matriculados no curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Particular do Estado do RS. A intervenção foi desenvolvida durante duas noites, com duração de quatro horas/aula por noite. Na ocasião da intervenção, os alunos receberam guias contendo atividades, acessavam o *software* Desmos, analisavam os gráficos já elaborados no *software* pela autora e realizavam as atividades propostas. Em seguida, ocorria a discussão sobre as atividades desenvolvidas, buscando, deste modo, a integração e socialização dos conceitos e teoremas estudados.

Dando continuidade, ao final da Oficina aplicou-se um questionário aos alunos, cujo foco foi a aprendizagem do conteúdo com auxílio do *software* Desmos, e também para que avaliassem aspectos do uso do *software* relacionadas a possíveis contribuições de seu uso para a aprendizagem do conceito, segundo a opinião dos mesmos.

Em relação à metodologia utilizada para realização desse estudo, aportou-se a de cunho qualitativo, de caráter exploratório. Os instrumentos para coleta de dados constaram de um questionário impresso, áudios e as atividades impressas realizadas pelos alunos, além do diário de campo da pesquisadora.

Concretizadas as considerações iniciais, destaca-se que esta dissertação está vinculada à linha de pesquisa de Tecnologias, metodologias e recursos didáticos para o ensino de Ciências e de Matemática. Sua composição compreende cinco capítulos, de modo que o capítulo da introdução, ora apresentado, aborda o problema de pesquisa - que estimulou a realização deste trabalho - e o contexto em que ele se insere, assim como os objetivos da pesquisa.

O segundo capítulo apresenta a Abordagem Teórica, com uma revisão de literatura dividida em quatro seções. Na primeira seção apresenta-se o estudo da derivada, trazendo-se, na segunda, uma reflexão sobre os principais problemas e dificuldades enfrentados no processo de ensino e aprendizagem do conceito de derivada, a fim de elencar as principais causas e os fatores relacionados à dificuldade de compreensão do conceito. Na terceira seção segue o estudo referente ao uso de recursos computacionais para o ensino e aprendizagem em Matemática e em Cálculo, uma vez que esse estudo foi norteador para o desenvolvimento do presente trabalho. Já na quarta seção segue uma pesquisa teórico–bibliográfica, realizada com intuito de se conhecer o que está sendo produzido e investigado em relação ao tema “Derivada”, com base em um levantamento de artigos completos publicados no Portal de Periódicos da CAPES, no período de 2011 a 2016, elencando-se as principais teorias, recursos e metodologias utilizadas nessas pesquisas.

O terceiro capítulo - Procedimentos Metodológicos - apresenta as características da pesquisa, o universo e a amostra pesquisados. No quarto capítulo - Descrição e Análise da Intervenção Pedagógica -, ocorre o relato dos dois encontros realizados junto aos alunos do curso de licenciatura em Matemática e efetua-se a apresentação dos resultados que emergiram da pesquisa. No quinto e último capítulo, tecem-se as Considerações Finais do estudo, destacando-se as conclusões e implicações da Intervenção Pedagógica desenvolvida.

2 ABORDAGEM TEÓRICA

No presente capítulo apresentam-se os pressupostos teóricos que norteiam esta dissertação, o que é realizado em quatro seções assim definidas: o estudo da derivada; problemas e dificuldades enfrentados no ensino e aprendizagem de derivadas; o uso de recursos computacionais no ensino e aprendizagem de Matemática e em Cálculo Diferencial e Integral; e mapeamento das pesquisas realizadas sobre derivadas nos últimos 6 anos.

Inicialmente cabe discorrer sobre o conceito de derivada, considerado um dos conceitos fundamentais do Cálculo, motivo pelo qual seu estudo está presente no currículo de diversos cursos de graduação, inserido em disciplinas relacionadas ao Cálculo, devido a sua aplicabilidade em diversas situações do cotidiano relacionadas ao movimento e à taxa de variação, por exemplo.

A derivada é um conceito que pode ser explorado por meio de diferentes representações ou focos, como: inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado; derivada como taxa de variação instantânea; e também, abordagem ao estudo do comportamento de funções através da derivada e problemas de maximização e minimização.

Na sequência, o uso de tecnologias para o ensino e a aprendizagem de Matemática será abordado levando-se em consideração o contexto da Educação Matemática e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, à qual pertence o conteúdo de derivadas.

Para concluir o referencial teórico, apresenta-se um mapeamento de estudos realizados sobre as derivadas, efetuado no portal de periódicos da Capes, por meio da análise de artigos completos publicados nos últimos seis anos, no qual busca-se levantar as teorias e metodologias utilizadas até o momento.

2.1 O estudo da derivada

A taxa de variação instantânea, a inclinação da reta tangente, a derivada como limite e a função derivada são as diversas interpretações do conceito de derivada. No entanto, o que atualmente vem sendo questionado pelos pesquisadores é se os universitários e também futuros professores têm conseguido compreender e aplicar esse conceito em suas diversas interpretações (PINO-FAN, GODINO e FONT, 2015). O que se tem diagnosticado tanto a nível nacional quanto internacional é a falta de compreensão e conexão entre estas interpretações e suas aplicações.

No que se refere especificamente à derivada, alguns trabalhos mais recentes desenvolvidos destacam que: há um ensino que prioriza, em geral, processos de construção e avaliação formal, em que os alunos derivam, integram e calculam limites, sem serem capazes de dar um sentido mais amplo às noções envolvidas, pois priorizam somente o aspecto algébrico do conceito (JUNQUEIRA; MANRIQUE, 2015; VRANCKEN; ENGLER, 2014).

Os alunos também apresentam dificuldade em relacionar os aspectos analíticos aos gráficos da função e suas derivadas (PINTO; VIANNA, 2012; SÁNCHEZ– MATAMOROS et al., 2013), demonstrando que o processo de ensino tem priorizado mais o estudo algébrico do que o estudo gráfico do conceito de derivada.

Frente a esse cenário, a presente subseção foi elaborada com o objetivo de apresentar o estudo do conceito de derivada em seus aspectos geométrico e gráfico, bem como alguns exemplos de aplicação em diferentes áreas, embasados na literatura de Anton (2000), Euclides (2009), Flemming (2006), Iezzi (2000), Stewart (2016), Sviercoski (1999), contribuindo, deste modo, para o aprofundamento teórico acerca do tema abordado neste trabalho.

Optou-se, primeiramente, por apresentar o conceito geometricamente, no qual a derivada no ponto $x = a$ de $y = f(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico desta função no ponto $(a, f(a))$, definida como o limite da inclinação da reta secante. A função que a cada ponto x associa a derivada neste ponto de $y = f(x)$ é chamada de função derivada de $f(x)$.

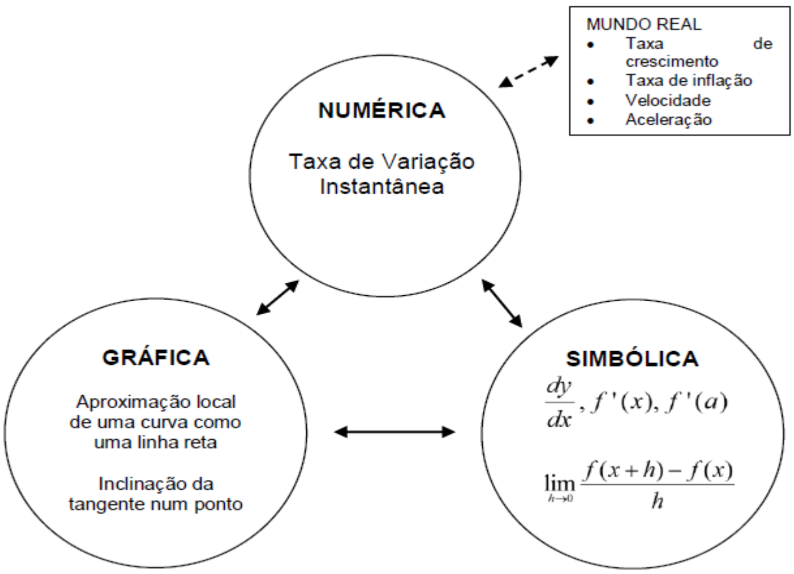
Em relação à representação gráfica do conceito de derivada, apresenta-se a análise do comportamento de uma função por meio do gráfico da função derivada, em que são determinados os intervalos de crescimento e decrescimento da função, bem como os pontos críticos dela**,** avaliando sua concavidade.

Para findar a subseção, são selecionados alguns exemplos de aplicação referentes ao conceito de derivada que demonstram a importância e a relevância do estudo desse tema em diferentes cursos de graduação, de modo a ampliar o conhecimento e possibilitar a interação entre conceito e aplicabilidade.

Derivada como inclinação da reta tangente a um ponto

Kendal (2001) realizou uma pesquisa por meio da qual destacou as representações gráfica, numérica e simbólica do conceito de Derivada, conforme se pode observar na Figura 1, mostrando que o desenvolvimento da noção desse conceito está intimamente ligado às habilidades de articulação entre suas representações.

Figura 1 – Mapa representações da Derivada



Fonte: Kendal (2001, p. 47)

Em sua tese, a autora, através do uso de uma CAS[1] nas aulas de Cálculo para o Ensino Médio, descobriu que o uso de múltiplas representações do conceito de Derivada é muito importante para o entendimento desse conceito, sendo que as partes gráfica e simbólica são muito úteis e importantes para vincular e enfatizar o conceito.

Diante dessa importância e relevância comprovada das representações do conceito, passa-se a abordar na sequência deste trabalho alguns dos conceitos que estão presentes na definição formal de derivada, como a equação de uma reta, cálculo do coeficiente angular da reta, limite de uma função para se chegar à exploração gráfica do conceito de Derivada.

Inclinação ou Coeficiente Angular de uma Reta

Um dos problemas do Cálculo Diferencial surgiu da necessidade de encontrar a inclinação ou coeficiente angular de uma reta $y = mx + b$ tangente a curva de uma função em um determinado ponto x_0. Para compreender esse processo, retomam-se

[1] Sistemas de Álgebra Computacional

alguns conceitos básicos relacionados à reta, partindo da seguinte questão: o que é inclinação de uma reta?

Dada uma reta r, por exemplo, pode-se determinar pelo menos uma equação do tipo $Ax + By + C = 0$, em que A, B e C são números reais, $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, denominada equação geral da reta, a qual é satisfeita por todos os pontos $P(x, y)$ pertencentes a_r(IEZZI, 2000).

Se $B \neq 0$, essa mesma reta pode ser representada da seguinte forma (IEZZI, 2000, p. 52):

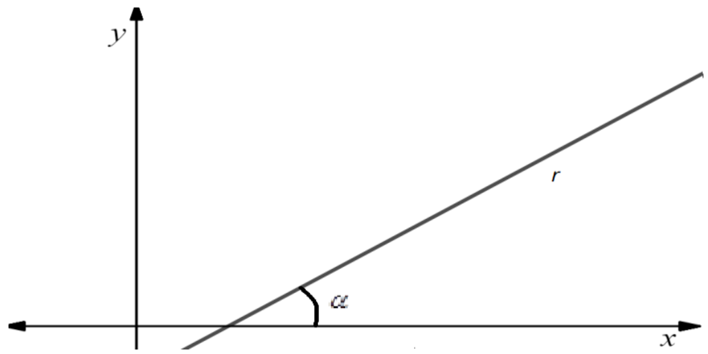
$$
\begin{aligned}
&Ax + By + C = 0\\
&By = -Ax - C\\
&y = (-\frac{A}{B})x + (-\frac{C}{B})\\
&\mathrm{y} = mx + b
\end{aligned}
$$

A equação $y = mx + b$ é denominada equação reduzida da reta, na qual a constante b chama-se coeficiente linear e representa a ordenada do ponto em que a reta encontra o eixo Oy.

A constante m é chamada “coeficiente angular” ou “inclinação da reta”, obtido por meio do cálculo da tangente trigonométrica do ângulo α que a reta determina com o sentido positivo do eixo OX, como pode ser observado no Gráfico 1.

$$m = \tan(\alpha) \text{ com } 0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$$

Gráfico 1 – Ângulo α formado entre a reta e o eixo X.



Fonte: Elaborado pela autora

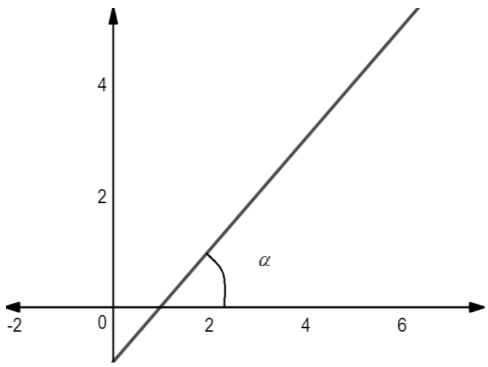
Na trigonometria, define-se tangente de um ângulo α $(\tan(\alpha))$ como sendo o quociente entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente a α .

$$tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Com $m = \tan(\alpha)$, tem-se:

1º Caso

Gráfico 2 – Ângulo Agudo

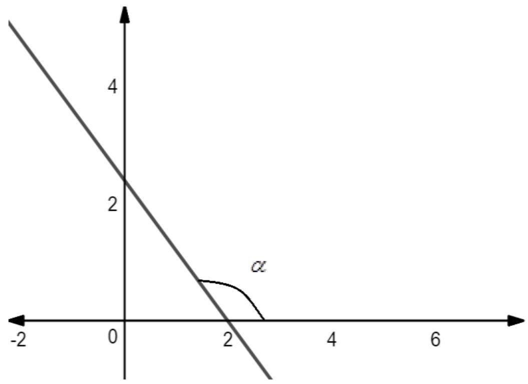


Se 0 ° < α < 90° então m > 0

(Função crescente)

2º Caso

Gráfico 3 – Ângulo Obtuso

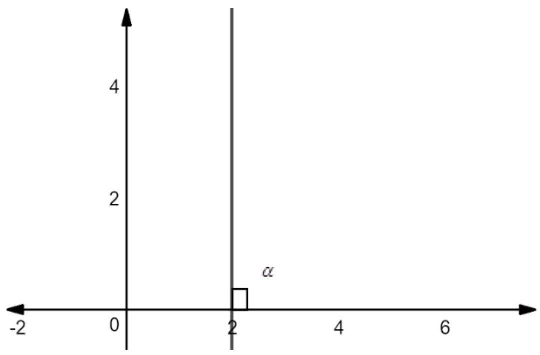


Se 90° < α < 180° então m < 0

(Função decrescente).

3º Caso

Gráfico 4 – Ângulo Reto

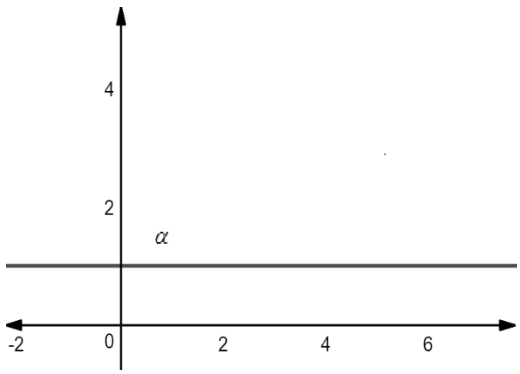


Se α = 90º então $\tan\alpha$ não é definida

m = ∄ (não é função).

4º Caso

Gráfico 5 – Reta paralela ao eixo x



Se $\alpha = 0^o \Rightarrow \tan\alpha = 0 \Rightarrow m = 0$

(Função Constante)

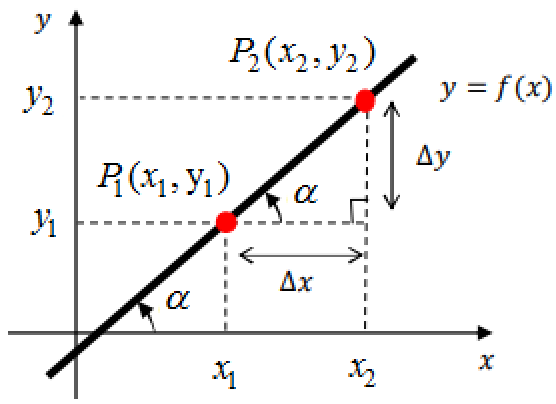
É possível calcular a inclinação de uma reta quando dela se conhece: dois pontos distintos; a equação geral; e a direção (por exemplo, sabe-se que a reta é paralela a uma reta dada).

Para calcular a inclinação α da reta conhecendo-se dois pontos distintos é necessário estabelecer algumas relações. Logo, sendo f uma função linear de equação $y = f(x)$, cujo gráfico é uma reta no plano x .Considere dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, sobre a reta e denote por Δx a diferença entre as coordenadas x desses pontos ($\Delta x = x_2 - x_1$), e por Δy a diferença entre as coordenadas y desses pontos ($\Delta y = y_2 - y_1$). Sabendo que a tangente trigonométrica da inclinação α da reta é igual ao coeficiente angular m tem-se:

$$m = \tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observe-se através do Gráfico 6 que, por semelhança de triângulos, qualquer valor que seja o Δx, encontra-se por correspondência da função linear f valores para Δy, tais que a relação $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ não se altera.

Gráfico 6 – Coeficiente angular da reta através de dois pontos



Fonte: Elaborado pela autora

A variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ permite encontrar a inclinação de uma reta, mas também é utilizada para se encontrar a velocidade escalar média, que é o resultado da razão entre o espaço total percorrido e o tempo total gasto para realização do percurso por um corpo ou objeto, e pode ser expresso pela relação $V_{EM} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, onde ΔS representa o espaço total percorrido e Δt o tempo gasto no percurso.

Vale recordar que uma grandeza escalar é aquela que seu valor numérico, junto a unidade de medida, é o suficiente para expressar uma grandeza física. Por exemplo: quando falamos que um carro viajou durante 4h e percorreu um trajeto de 350 km, podemos estimar que sua velocidade escalar média foi de 87,5 km/h.

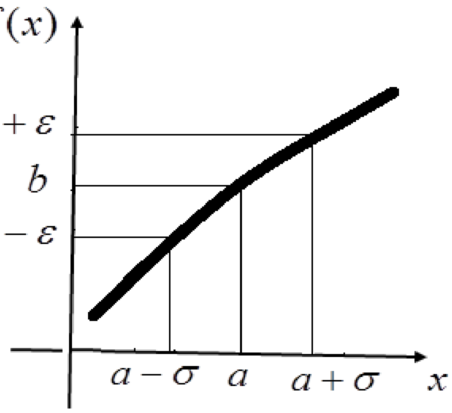
Limite de uma Função

No âmbito da aprendizagem, o conceito de limite também pode ser explorado em três representações:

1- Gráfica

Em observação ao Gráfico 7, considerando uma função $f(x)$, definida num intervalo I, temos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é o número b, se para todo $\varepsilon > 0$, existir, em correspondência, um número $\sigma > 0$, de modo que $x \neq a$ e $a - \sigma < x < a + \sigma \rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Assim, $\lim_{x \to a} f(x) = b$ (STEWART, 2016).

Gráfico 7 – Limite de uma função



Fonte: Elaborado pela autora

2- Simbólica

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a exceto possivelmente no próprio a, então diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos (STEWART, 2016)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\sigma > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \sigma$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

3- Numérica

Pode-se analisar o limite pela representação numérica, por exemplo: Para calcular o $\lim_{x \to 2} f(x) = x^2 - x + 2$, podem-se construir tabelas de valores como as apresentadas na Tabela 1, realizando as aproximações em torno de 2, pela sua direita e esquerda.

Tabela 1 – Representação numérica do limite em um ponto

x	$f(x)$
1,0	2,000000
1,5	2,750000
1,8	3,440000
1,9	3,710000
1,95	3,852500
1,99	3,970100
1,995	3,985025
1,999	3,997001

x	$f(x)$
3,0	8,000000
2,5	5,750000
2,2	4,640000
2,1	4,310000
2,05	4,152500
2,01	4,030100
2,005	4,015025
2,001	4,003001

Fonte: Elaborado pela autora

Logo, pela aproximação dos valores em torno de 2 pode-se determinar que o limite da função quando x tende a 2 é igual a 4.

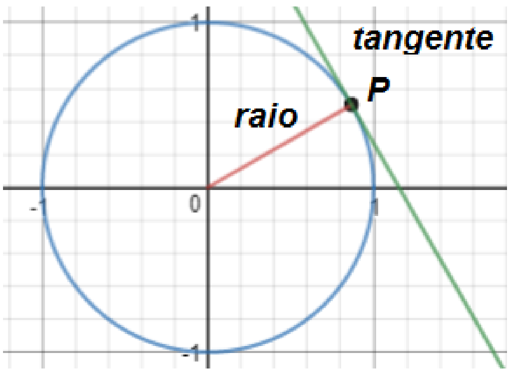
Reta tangente a uma curva

Retomado o conceito de inclinação de uma reta, prossegue-se com o conceito de reta tangente a uma curva, que foi um dos problemas que gerou muitos estudos no desenvolvimento do Cálculo Diferencial.

Para iniciar, destaca-se a reta tangente a uma circunferência. Vale retomar o conceito de tangente, palavra que provém do latim *tangente* e significa “que toca”. Euclides (2009, p. 151), no Livro III, define a reta tangente a um círculo como “uma reta que, tocando o círculo e sendo prolongada, não o corta”.

Ainda no corolário 18, do Livro III, o autor (2009, p. 168) demonstra que “caso alguma reta seja tangente a um círculo, e, a partir do centro até a junção, seja ligada alguma reta, a que foi ligada será perpendicular à tangente”, conforme demonstrado na Figura 2.

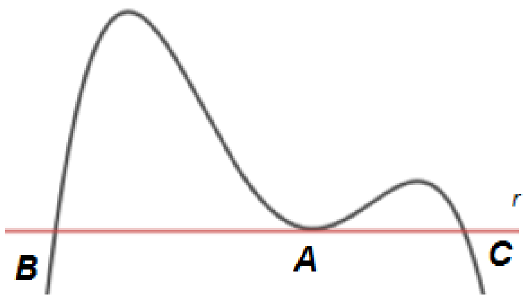
Figura 2 – Reta tangente a uma circunferência



Fonte: Elaborado pela autora

Para curvas mais complexas esta definição é inadequada. Na Figura 3, por exemplo, a reta r foi prolongada a partir do ponto A e interceptou a curva em outros dois pontos. Pode-se afirmar que a reta r é tangente à curva no ponto A, mas não nos outros dois pontos B e C (ANTON, 2000).

Figura 3 – Reta tangente à curva no ponto A

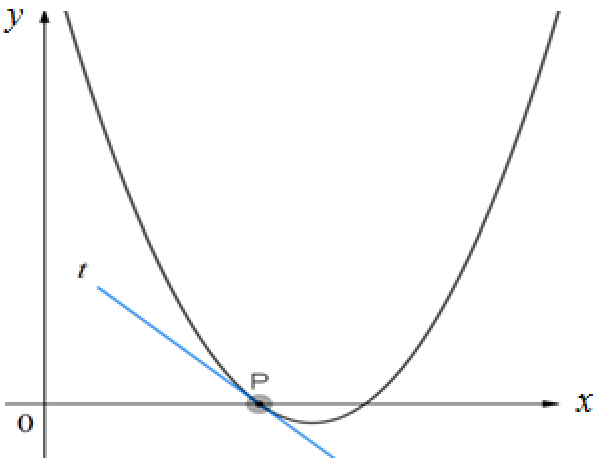


Fonte: Elaborado pela autora.

Para se obter uma definição de reta tangente que se aplique a demais curvas que não sejam círculos, é preciso ver a reta tangente de outra maneira (ANTON, 2000).

Tome-se f como uma função cujo gráfico $y = f(x)$ encontra-se representado abaixo (Gráfico 8). Manifesta-se interesse em encontrar a equação da reta tangente t à curva no ponto P do plano xy.

Gráfico 8 – Reta tangente a uma curva

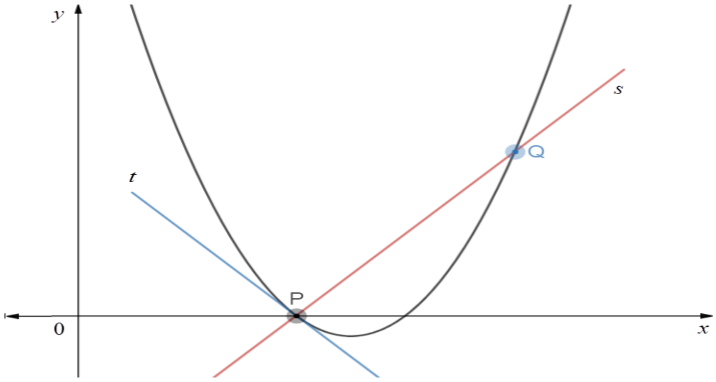


Fonte: Elaborado pela autora.

Pode-se encontrar a equação da reta tangente t assim que se sabe a sua inclinação m. Mas para calcular m é preciso de pelo menos dois pontos distintos. Para tanto tome-se agora o ponto $P(x_0, f(x_0))$ como um ponto fixo e trace-se outra reta que passa por P e por outro ponto pertencente à curva, obtendo, desse modo, uma reta *s* secante à curva da função.

Do intercepto entre a curva e a reta *s* obtém-se o ponto denominado $Q(x_1, f(x_1))$ sendo este um ponto móvel (variável) próximo de $P(x_0, f(x_0))$, como pode ser observado no gráfico 9.

Gráfico 9 – Reta tangente e reta secante à curva

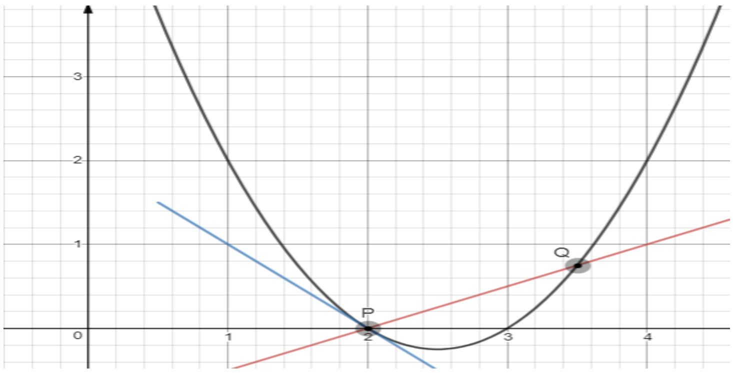


Fonte: Elaborado pela autora

Para a obtenção da inclinação da reta tangente t no ponto $P(x_0, f(x_0))$ em relação à curva da função, é preciso aproximar o máximo possível o ponto $Q(x_1, f(x_1))$ do ponto $P(x_0, f(x_0))$ e calcular a inclinação.

Para se calcular a inclinação da reta secante s temos : $m_{PQ} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Sabendo que P (2,0) e que o ponto Q inicial é (4,2), tem-se $m_{PQ} = \dfrac{2-0}{4-2} = 1$. Realizando a aproximação de Q em P, obtém-se um novo ponto Q (3.5,0.75) como pode ser observado no gráfico 10, e calcula-se a nova inclinação, $m_{PQ} = \dfrac{0.75-0}{3.5-2} = 0.5$.

Gráfico 10 – Aproximação de Q a P

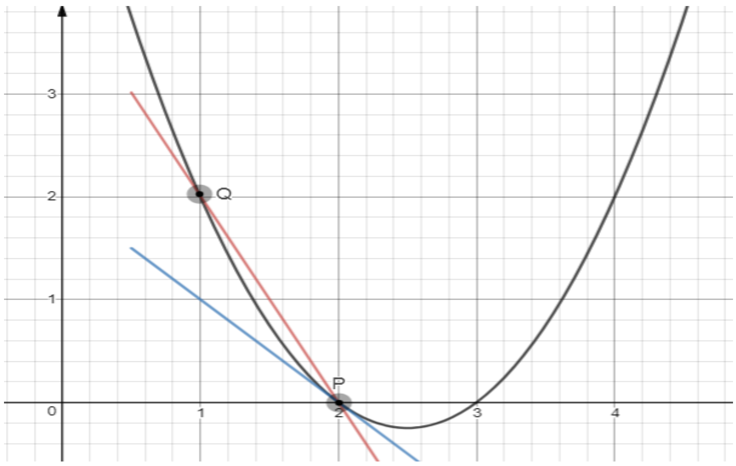


Fonte: Elaborado pela autora

Quanto mais próximo de P está chegando Q, mais aproximado o valor da inclinação a ser obtida para a reta tangente t à curva da função. Sendo assim, aproxima-se o máximo possível os dois pontos, obtendo Q (2.01, -0.01), logo tem-se que $m_{PQ} = \frac{2.01-0}{-0.01-2} = -0.99$. É possível afirmar que o valor aproximado da inclinação da reta tangente t é igual a -1.

Para confirmar o valor encontrado faz-se o mesmo procedimento de aproximação de Q em P, mas agora pela esquerda de P, admitindo Q inicial como sendo (1, 2), conforme pode ser visto no gráfico 11.

Gráfico 11 – Aproximação de Q em P pela esquerda.



Fonte: elaborado pela autora

Logo obtém-se a inclinação $m_{PQ} = \frac{2-0}{1-2} = -2$. Continuando a sequência de aproximações obtém-se o ponto mais próximo de P, sendo Q (1.99, 0.01), logo a inclinação de $m_{PQ} = \frac{1.99-0}{0.01-2} = -1.01$.

Então faz-se Q aproximar-se de P ao longo da curva da função ao obrigar x_1 tender a x_0. Se m_{PQ} tender a um número m, então define-se a tangente t como a reta que passa por P e tem inclinação m. (Isto implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P. (STEWART, 2016, p. 122).

Obtém-se, assim, a inclinação m da reta tangente t como sendo aproximadamente -1 para o ponto de tangência $P(2,0)$ em relação à curva da função $y = f(x)$.

Deste modo, define-se a reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$ como sendo a reta que passando por P tem inclinação

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Desde que o limite exista (ANTON, 2000, p. 178).

Mas, há outra expressão para a inclinação da reta tangente que é, às vezes, mais fácil de ser usada para cálculos. Se $h = x_1 - x_0$, então $x_1 = x_0 + h$ e, assim, a inclinação da reta secante PQ é

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ *Definição (1)*

Logo, a inclinação m da reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0)$ é a reta passando por P com inclinação

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ *Definição (2)*

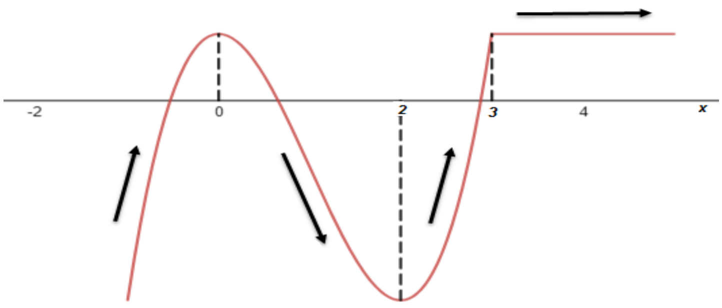
O valor de m é chamado de “ derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_0 ” e é denotado pelo símbolo $f'(x_0)$, é claro que m é o coeficiente angular ou inclinação da reta tangente t, portanto tem-se:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ *Definição de Derivada (3)*

2.1.1 Análise gráfica da função através da função derivada

Os termos crescente, decrescente e constante são usados para descrever o comportamento da função em determinado intervalo, à medida que se percorre o seu gráfico da esquerda para a direita. Observando o gráfico da função que está na Figura 4, pode-se descrever o seu comportamento como crescente no intervalo $]-\infty, 0[$, decrescente no intervalo $]0, 2[$, novamente crescente no intervalo $]2, 3[$ e constante no intervalo $]3, +\infty[$.

Figura 4 – Comportamento de uma função



Fonte: Elaborado pela autora

Porém, o comportamento de uma função também pode ser conhecido por meio da função derivada e seu gráfico, pois a derivada de uma função em um ponto pode ser interpretada como a inclinação (valor do coeficiente angular) da reta tangente ao seu gráfico nesse ponto, então é razoável esperar que informações sobre $f'(x)$ forneçam informações sobre $f(x)$.

Essa interpretação geométrica da derivada pode ser usada como recurso auxiliar no esboço de gráficos.

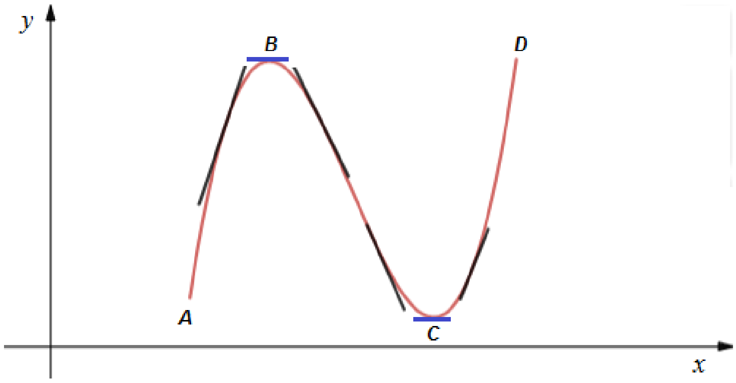
Por exemplo:

• pode-se usar a derivada para determinar os pontos onde a reta tangente é horizontal: nesses pontos o valor da derivada é zero e estes são considerados pontos críticos da função, possíveis ponto de máximo ou de mínimo;

• pode-se usar a derivada para encontrar os intervalos nos quais a inclinação da reta tangente é positiva ou negativa, e consequentemente a função é crescente e decrescente.

Para ver como a derivada de f pode dizer onde a função é crescente ou decrescente, observe-se a Figura 5. Entre A e B e entre C e D, as retas tangentes têm inclinação positiva e, portanto, $f'(x) > 0$. Entre B e C, as retas têm inclinação negativa e, portanto, $f'(x) < 0$. Assim, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa.

Figura 5 – Retas tangentes a curva de f



Fonte: Elaborado pela autora

Os extremos relativos de uma função, se houverem, ocorrem em pontos críticos, ou seja, aqueles nos quais $f'(x)=0$, ou seja, onde a inclinação da reta tangente é nula, ou ainda quando f é não-diferenciável (STEWART, 2016). No caso da Figura 5, estes pontos seriam B e C, pois neles a inclinação da reta tangente é nula. Mas é importante destacar que nem todo ponto crítico dá origem a um extremo relativo, pois há aqueles em que isto não ocorre.

Como às vezes é preciso distinguir os pontos críticos, nos quais $f'(x)=0$, daqueles onde f é não-diferenciável, chamam-se os pontos onde $f'(x)=0$ de pontos estacionários de f.

Para determinar se um ponto crítico de f é um extremo relativo, é preciso analisar a derivada primeira de f, em cada lado dos pontos críticos (STEWART, 2016):

a) Se o sinal da derivada for positivo à esquerda do ponto crítico e negativo à direita dele, o ponto é um máximo relativo.

b) Se o sinal da derivada for negativo à esquerda do ponto crítico e positivo à direita dele, o ponto é um mínimo relativo.

c) Se o sinal da derivada for o mesmo em ambos os lados do ponto crítico, o ponto não é máximo nem mínimo relativo.

Ao analisarem-se os pontos B e C da Figura 5, pode-se afirmar que B é um ponto de máximo, pois a sua esquerda f' é positiva e a direita f' é negativo. Já C é um ponto de mínimo, pois a sua esquerda f' é negativo e a direita f' é positivo. Ou seja, por meio do comportamento da derivada ao redor dos pontos críticos pode-se determinar o comportamento de f.

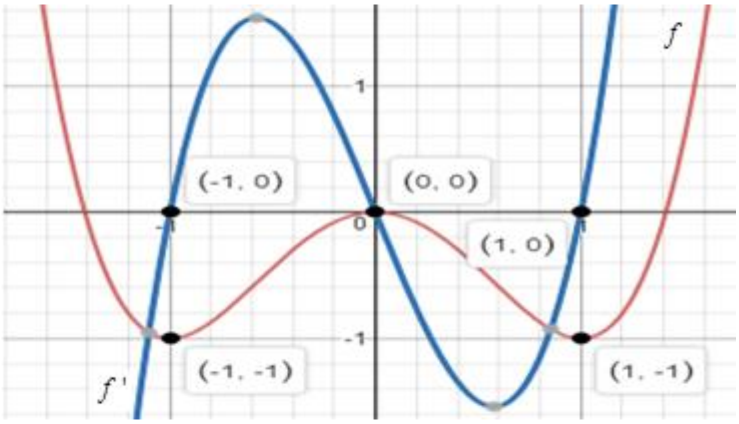
2.1.1.1 Análise gráfica da função através do gráfico da função derivada

Outro modo de se conhecer e determinar o comportamento de uma função é a por meio da análise do gráfico da derivada de primeira ordem. Para isso, é preciso iniciar realizando algumas comparações entre o gráfico da função e o gráfico de sua derivada primeira, de modo a estabelecer relações possíveis entre eles.

Em um gráfico da derivada primeira, obtém-se um eixo m, pois quando visualizam-se vários pontos no gráfico da derivada, a coordenada y de um ponto será denotada como a inclinação da função original, logo, as coordenadas do gráfico da derivada primeira têm como coordenadas (x,m).

Observe-se a Figura 6 com o gráfico da função f em vermelho e o gráfico de sua derivada primeira f' em azul. Analisando o gráfico f da esquerda para a direita, pode-se determinar o comportamento de f como sendo decrescente nos intervalos $]-\infty,-1[$ e $]0,1[$ e crescente nos intervalos $]-1,0[$ e $]1,+\infty[$, tendo como extremos relativos $(-1,-1)$ e $(1,-1)$, pontos de mínimo, e $(0,0)$ ponto de máximo.

Figura 6 – Gráfico da função e sua derivada primeira



Fonte: Elaborado pela autora

Em relação ao gráfico de f' podem-se determinar os intervalos onde a derivada primeira é positiva, ou seja, $f'(x) > 0$ como sendo aqueles onde o gráfico de f' está acima do eixo x. E os intervalos onde a derivada primeira é negativa, ou seja, $f'(x) < 0$ como sendo aqueles onde o gráfico de f' está abaixo do eixo x. Comparando os intervalos onde f é crescente e decrescente com intervalos onde o gráfico de f' é positivo ou negativo, percebe-se que f é crescente onde f' é positivo, e f é decrescente onde f' é negativo. Logo, através do gráfico de f' é possível identificar os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

Agora observem-se as coordenadas dos pontos de intercepto do gráfico de f' com o eixo x, onde se tem $(-1,0)$, $(0,0)$ e $(1,0)$. Estes pontos estão relacionados aos extremos relativos da função, o valor da coordenada x representa os possíveis pontos críticos da função, sendo que a coordenada y está relacionada ao valor da inclinação da reta tangente neste ponto, ou seja, derivada igual a zero. Comparando os extremos relativos de f com os pontos de intercepto de f' como eixo x podem-se estabelecer algumas relações a fim de identificar se os extremos relativos são pontos de máximo, mínimo ou nenhum dos dois.

Primeiramente, analisa-se o comportamento de f' ao redor do ponto (-1, 0), a fim de identificar se f' é positivo ou negativo. Deste modo pode-se afirmar que $f'(x) < 0$ antes de (-1,0) e $f'(x) > 0$ depois. Sabendo que, se $f'(x) < 0$ a função é decrescente, e que, se $f'(x) > 0$ a função é crescente, é possível afirmar que o ponto com coordenada $x=-1$ é um ponto de mínimo da função, devido ao comportamento de f passar de decrescente para crescente.

O segundo ponto a ser analisado é (0,0), para isto analisa-se novamente o comportamento de f' ao seu redor, onde se tem que antes de (0,0) $f'(x)>0$ e depois $f'(x)<0$. Sendo assim, f era crescente e passou a ser decrescente ao redor de (0,0) dando origem a um ponto de máximo em $x=0$. Já para o ponto (1,0), tem-se $f'(x)<0$ antes de (1,0) e $f'(x)>0$ depois. Desse modo, pode-se afirmar que a função passou de decrescente para crescente resultando em um ponto de mínimo em $x=1$.

Por meio da análise do gráfico da derivada primeira de f foi possível compreender o comportamento de f, bem como identificar os possíveis pontos críticos, o que pode auxiliar no esboço e compreensão do gráfico da função. No Cálculo, muitas das aplicações requerem a compreensão gráfica, a fim de poder solucionar problemas e realizar comparações. Desse modo, fica evidente a importância e a relevância do estudo gráfico da derivada, de modo a contribuir para a aprendizagem do conceito de maneira mais significativa e concisa.

2.1.1.1.1 Aplicações da derivada

Comumente, nas salas de aula, os alunos questionam sobre onde serão aplicados os conteúdos abordados e isso ocorre tanto no ensino básico, quanto no superior. Assim, mostrar a aplicabilidade faz com que os conteúdos se tornem mais significativos e interessantes, de modo a estimular os alunos e a desenvolver a contextualização daquilo que se ensina e se aprende.

Com o ensino de derivada não pode ser diferente, há necessidade de se trabalhar com problemas de aplicação relacionados a diferentes áreas do conhecimento. Por isso, nesta parte da pesquisa serão apresentados alguns problemas de aplicação do conceito de derivada em diferentes contextos. Nesse sentido, talvez a mais difundida aplicação das derivadas no ensino superior seja a de otimização de problemas, em que as derivadas são utilizadas para se obter a maximização ou a minimização de um determinado fenômeno, possibilitando resolver situações problemas de nosso cotidiano, como também, a taxa de variação instantânea.

Optou-se por selecionar, para apresentar na sequência, alguns problemas contemplando diferentes áreas de conhecimento, abordados em diferentes livros didáticos de Cálculo, entre eles: Anton (2000), Flemming (2006), Stewart (2016), Sviercoski (1999).

Problema 1- Economia (adaptado de ANTON, 2000)

De acordo com uma aplicação apresentada por Anton (2000), uma forma líquida de Penicilina fabricada por uma firma farmacêutica é vendida a granel a um preço de \$200 por unidade. Se o custo de produção (em dólares) para x unidades for $C(x) = 500.000 + 80x + 0,003x^2$ e se a capacidade de produção da firma for de no máximo 30.000 unidades em um tempo específico, quantas unidades de penicilina devem ser fabricadas e vendidas naquele tempo para maximizar o lucro?

Informações:

Quando se trata de economia, existem três funções importantes a se considerar que são:

$C(x)$ = custo total da produção de x unidades de um produto, durante certo período de tempo.

$R(x)$ = rendimento total da venda de x unidades de um produto, durante certo período de tempo.

$P(x)$ = lucro total obtido na venda de x unidades de um produto, durante certo período de tempo.

Elas são chamadas, respectivamente, função-custo, função-rendimento, função-lucro. Se todas as unidades produzidas forem vendidas, elas estarão relacionadas por

$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$[lucro] = [rendimento] - [custo]$$

<u>Solução</u>: Como o rendimento total na venda de x unidades é $R(x)=200x$, o lucro $P(x)$ sobre x unidades será

$$P(x)=R(x)-C(x)=200x-(500.000+80x+0,003x^2)$$

Como a capacidade de produção é de no máximo 30.000 unidades, x deve estar no intervalo [0, 30.000]. Logo, é preciso derivar a função lucro em relação a x para determinar os valores para x nos quais podem ocorrer o lucro máximo

$$\frac{dP}{dx}=200-(80+0,006x)=120-0,006x$$

Equacionando $\frac{dP}{dx}=0$ obtém-se

$$120-0,006x=0 \quad \text{ou} \quad x=20.000$$

Como este ponto crítico está no intervalo [0, 30.000], o lucro máximo deve ocorrer em um dos pontos $x=0$, $x=20.000$ ou $x=30.000$.

Substituindo-se estes valores em $P(x)$, obtém-se a Tabela 2, a qual nos mostra que o lucro máximo $P=700.000$ ocorre quando $x=20.000$ unidades forem fabricadas e vendidas no tempo especificado.

Tabela 2 – Resultados encontrados para o problema

x	0	20.000	30.000
$P(x)$	500.000	700.000	400.000

Fonte: Anton (2000, p. 347)

Problema 2 – Ciências Agrárias (SVIERCOSKI, 2014, p. 144- 145)

Considerando a produção de matéria seca de feijão $f(x)(g/vaso)$ em função da dose de fósforo $x(ppm)$, em que $0\le x\le 230$, dada, em [2], por

$$f(x)=6.575+0.0788x-0.000174x^2$$

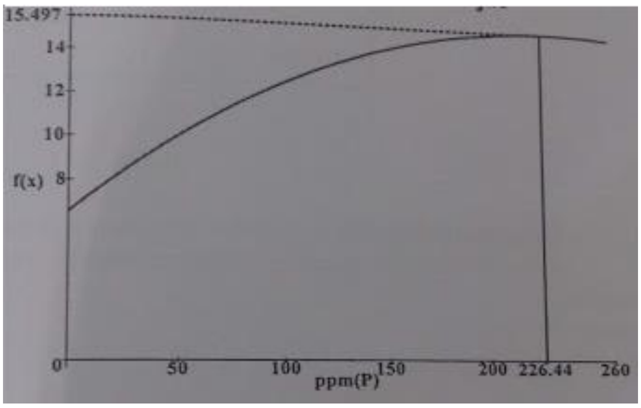
Encontre a dose de fósforo que dá a produção máxima.

Solução: Primeiro precisa-se encontrar o ponto crítico da função, isto significa, derivar a função e encontrar o ponto em que a inclinação da reta tangente é nula, ou seja, $f'(x) = 0$, o possível ponto de produção máxima ou mínima.

$$f'(x) = 0.0788 - 0.000348x = 0 \Rightarrow x = 226.44$$

Agora derivamos novamente a função, para determinar a derivada de segunda ordem, por meio da qual verificamos se o valor encontrado representa um máximo ou um mínimo local. Como $f''(x) = -0.000348$, então $f''(226.44) = -0.000348$, ou seja, $x = 226.44$ ppm é um ponto de máximo local, isto é, a produção máxima será de $f(226.44) = 15.497(g/vaso)$ como pode ser observado na Figura 7.

Figura 7 – Produção de matéria seca de feijão



Fonte: Sviercoski, 2014, p.145

Problema 3 – Ciências Médicas e Biológicas (FLEMMING, 2006, p. 180-181)

Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia de epidemia) é, aproximadamente, dado por

$$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$$

(a) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 4$?

(b) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 8$?

(c) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia?

Solução: A taxa com que a epidemia se propaga é dada pela razão de variação da função $f(t)$ em relação a t . Portanto, para um tempo t qualquer, essa taxa é dada por:

$$f'(t) = 64 - t^2$$

(a) No tempo $t = 4$, temos:

$$f'(4) = 64 - 16 = 48 \; .$$

Logo, no tempo $t = 4$, a moléstia está se alastrando à razão de 48 pessoas por dia.

(b) No tempo $t = 8$, temos:

$$f'(8) = 64 - 64 = 0$$

Portanto, no tempo $t = 8$ a epidemia está totalmente controlada.

(c) Como o tempo foi contado em dias a partir do 1º dia de epidemia, o 5º dia corresponde à variação de t de 4 para 5. Logo, o número de pessoas atingidas pela moléstia durante o 5º dia será dado por:

$$f(5) - f(4) = (64 \times 5 - \frac{5^3}{3}) - (64 \times 4 - \frac{4^3}{3})$$
$$= 320 - \frac{125}{3} - 256 + \frac{64}{3}$$
$$\cong 43$$

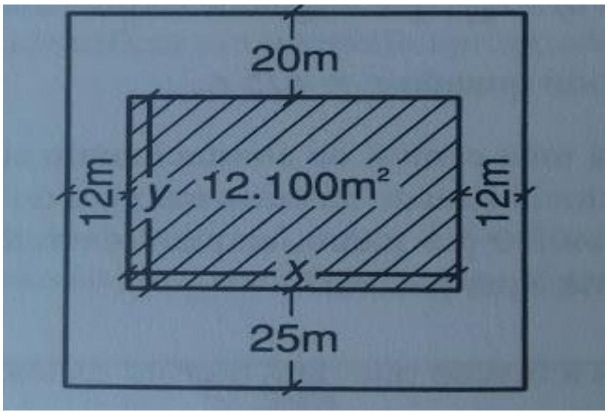
No item (a), viu-se que no tempo $t = 4$ (início do 5º dia), a epidemia se alastrava a uma taxa de 48 pessoas por dia. No item (c), calculou-se que durante o 5º dia 43 pessoas serão atingidas. Essa diferença ocorreu porque a taxa de propagação da moléstia se modificou no decorrer do dia.

Problema 4 – Geometria (FLEMMING, 2006, p. 220-221)

Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de 12.100 m². A prefeitura exige que exista espaço livre de 25 m na frente e 12 m em cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha área mínima na qual possa ser construído este galpão.

Solução: A Figura 8 ajuda a definir a função que vamos minimizar.

Figura 8 – Esboço do galpão



Fonte: Flemming, 2009, p. 220

Sabemos que $A = 12.100m^2 = x \times y$

A função que definirá à área do lote é

$$\begin{aligned} S &= (x+12+12)(y+25+20) \\ &= (x+24)(y+45) \end{aligned}$$

Isolando y em $12.100 = x \times y$, obtém-se, que $y = \dfrac{12.100}{x}$. Substituindo na função anterior, vem

$$S(x) = (x+24)(\frac{12.100}{x}+45)$$

Esta é a função que se quer minimizar.

Temos:

$$S'(x) = \frac{45x^2 - 290.400}{x^2}$$

Resolvendo a equação $\dfrac{45x^2 - 290.400}{x^2} = 0$, obtém-se que $x = \dfrac{44\sqrt{30}}{3}$ é um ponto crítico. (x é uma medida e, portanto, considere-se só o valor positivo.)

Tem-se que $S''(x) = \dfrac{580.800}{x^3}$ e, portanto, $S''(\dfrac{44\sqrt{30}}{3})$. Logo, $x = \dfrac{44\sqrt{30}}{3}$ é um ponto de mínimo. Fazendo $x = \dfrac{44\sqrt{30}}{3} \cong 80,33\,\mathrm{m}$, obtém-se que $y = \dfrac{12.100}{x} = \dfrac{12.100}{44\sqrt{30/3}} \cong 150,62m$ e então, a área mínima é obtida quando as dimensões do lote forem aproximadamente $(80,33+24)m \times (150,62+45)m$.

Problema 5 – Física (STEWART, 2016, p. 247)

O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 de abril de 1990 pelo ônibus espacial Discovery. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento em $t = 0$ até a ejeção do foguete auxiliar em $t = 126s$, é dado por

$$v(t) = 0,0003968t^3 - 0,02752t^2 + 7,196t - 0,9397$$

(Em metros/segundo). Usando este modelo, estime os valores máximo é mínimo absolutos da aceleração do ônibus entre o lançamento e a ejeção do foguete auxiliar.

Solução: São pedidos os valores extremos não da função velocidade dada, mas da função de aceleração. Assim, precisa-se primeiro derivar para encontrar a aceleração:

$$a(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}(0,0003968t^3 - 0,02752t^2 - 0,9397)$$
$$= 0,0011904t^2 - 0,05504t + 7,196$$

Aplicando-se, agora, o método do Intervalo Fechado à função continua a no intervalo $0 \le t \le 126$. Sua derivada é

$$a'(t) = 0,0023808t - 0,05504$$

O único número crítico ocorre quando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0,05504}{0,0023808} \approx 23,12$$

Calculando $a(t)$ no número crítico e nas extremidades, tem-se:

$$a(0) = 7,196 \qquad a(t_1) = 6,56 \qquad a(126) = 19,16$$

Assim, a aceleração máxima é cerca de 19,16 m/s², e a aceleração mínima é cerca de 6,56 m/s².

2.2 Dificuldades e problemas enfrentados no ensino de derivadas

O conceito de derivada é considerado um dos conceitos fundamentais do Cálculo, devido a sua importância para compreensão de outros conceitos, como a integral e as equações diferenciais, além de possuir diversas aplicações em diferentes áreas do conhecimento. “Com efeito, a derivada, na sua relação com as diversas áreas do conhecimento, é, sobretudo, taxa de variação instantânea (REZENDE, 2003, p. 350).

De acordo com a literatura, derivada é um conceito que possui diversas interpretações, entre elas: derivada como processo de limite, inclinação da reta tangente a uma curva em um determinado ponto, taxa de variação instantânea, derivada como função, além das aplicações e da relação com o comportamento de funções.

Apesar de suas aplicações e interpretações, o conceito de derivada tem sido um dos tópicos em que os alunos apresentam maior dificuldade de compressão, resultantes de diversas causas. Destarte, investigá-las é um dos objetivos fundamentais dos pesquisadores em Educação Matemática, de modo a dar ciência de suas causas e apontar caminhos para sanar as dificuldades (CATAPANI, 2001; BARBOSA, 2004).

Para tanto selecionamos algumas pesquisas que têm apontado tais dificuldades e suas causas, levando em consideração aquelas que tratassem especificamente da derivada, principalmente as relacionadas a compreensão do conceito e suas relações gráficas e geométricas. Neste caso, optamos em elencar as pesquisas mais citadas no contexto em estudo.

Como parte integrante da maioria dos cursos introdutórios de Cálculo, o conceito de derivada de uma função é usualmente abordado após a retomada do conteúdo de funções e a introdução do conceito de limites.

Normalmente, a introdução do conceito de derivada é realizada utilizando-se a ideia de reta tangente à curva de uma função e, na sequência, o cálculo de derivadas pela definição de limite e as regras de derivação, sendo os dois últimos pontos os que mais ocupam a atenção dos professores e dos alunos. Para concluir, estudam–se as aplicações das derivadas, o que envolve problemas de otimização, estudo do comportamento das funções e esboço de gráficos, conteúdos muitas vezes pouco explorados (GODOY, 2004; LEHMANN, 2011).

Entretanto, Rezende (2003, p. 350) observa que:

> Calcular exaustivamente derivadas de funções através das regras usuais de derivação não leva o aluno a construir efetivamente o significado desta operação. Interpretá-la tão somente como “coeficiente angular da reta tangente” significa ignorar o problema histórico essencial da “medida” instantânea da variabilidade de uma grandeza – esse foi, inclusive, o grande problema perseguido pelos filósofos escolásticos.

De acordo com o autor, há necessidade de explorar o conceito de derivada de modo a demonstrar que suas interpretações se complementam, e assim contribuir para a significação do conceito, bem como, demonstrar os diversos contextos a que se relaciona e se aplica, fazendo com que os alunos fortaleçam as redes de significação por meio da contextualização.

Além da necessidade de explorar o conceito em suas diversas interpretações, a pesquisa de Godoy (2004), que teve por objetivo investigar o conhecimento de alunos que já haviam passado por um curso de Cálculo, à luz da Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval, demonstrou que os alunos apresentam maior dificuldade nos registros gráficos do conceito de derivada, além de dificuldade de reconhecer no registro de representação simbólico $f'(x)$ o significado da derivada como coeficiente angular.

Orton (1983), ao estudar a compreensão dos alunos sobre diferenciação, evidenciou dificuldades na conceptualização geométrica de limite, ou seja, para interpretar a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado, como um limite das inclinações das retas secantes que passam por esse ponto de tangência. Em seu estudo, o autor evidenciou também dificuldades em utilizar apropriadamente as representações gráficas do conceito, ou seja, incapacidade de avaliar a taxa de variação instantânea de variação a partir do gráfico correspondente.

Tais dificuldades foram manifestadas igualmente por um grupo de professores estagiários que participaram da pesquisa conduzida por Almeida e Viseu (2002, p. 216-217), indicando que parecem estar associadas a:

> — uma capacidade visual demasiado pobre, a qual dificulta a identificação do tipo de uma função dado o seu gráfico;
>
> — a incapacidade de interligar múltiplas condições numa mesma questão;
>
> — a falta de capacidade de ligar a informação gráfica aos conhecimentos analíticos.

Rezende (2003, p.18) aponta também como causa para essas dificuldades a ênfase exagerada dada às técnicas, na maioria dos cursos de Cálculo, em que se exigem muito mais habilidades algébricas do aluno do que a compreensão do próprio significado explorado, ele destaca que

> O campo semântico das noções básicas do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de "infinito", de "infinitésimos" de "variáveis", do que com "fatoração de polinômios", "relações trigonométricas", "cálculos algébricos". É bem verdade, que o conhecimento destes últimos auxilia na árdua tarefa de calcular limites (derivadas, integrais etc.), mas é exatamente aí que se coloca nossa primeira questão fundamental: Qual é o curso de Cálculo que se quer? Aquele em que prevalece a técnica? Ou aquele em que se busca a construção de significados? Quando se fala de "falta de base", de que "base" se está falando?

É evidente que o procedimento algébrico do Cálculo é fundamental, mas o que se tem questionado em relação à aprendizagem desses conceitos está na sua aplicação e compreensão conceitual, como no caso da derivada. Alunos derivam funções sem ter conhecimento de sua aplicabilidade e de seus aspectos conceituais, o que acaba propondo um repensar do papel do Cálculo no ensino superior.

Os problemas de base conceitual têm chamado a atenção de pesquisadores quando relacionados ao conceito de derivada, como no caso de D'Avoglio (2002). Em sua pesquisa com alunos que já haviam estudado assunto, cujo objetivo consistia em verificar, por meio de um teste de sondagem, qual o nível de conhecimento desses alunos sobre o aspecto conceitual da derivada, identificou que alguns alunos confundem:

> a) derivada com reta tangente,
>
> b) derivada num ponto com a função derivada,
>
> c) derivada com regra para se achar derivada,
>
> d) reta tangente com coeficiente angular da reta tangente e também, que muitos apresentam dificuldade de expressão (D'AVOGLIO, 2002, p. 27).

A partir de sua pesquisa, como resultados, o autor apresentou evidências de que a introdução do conceito de derivada de uma função em um ponto, a partir do conceito de velocidade, contribui bastante para sua aprendizagem. Isso devido ao fato de que se leva em consideração um assunto familiar aos alunos, associado a seus conhecimentos prévios, despertando, assim, o interesse e participação do estudante.

Outra causa de dificuldades para a compreensão conceitual da derivada está relacionada ao próprio referencial teórico utilizado em sua abordagem, decorrente do desenvolvimento do pensamento científico. De acordo com Leme (2003, p. 32), “a História revela que a gênese da evolução da noção de derivada constituiu-se na busca por processos para resolução de problemas, caracterizando-se um modo predominantemente operacional”, porém, nos livros didáticos, o conceito de derivada tem sua característica estrutural abordada, apresentando-se, dessa forma, na contramão da evolução histórica, tornando mais difícil a sua compreensão.

Em livros didáticos ocorre, também, uma priorização da representação simbólica do conceito, o que acaba não propiciando uma adequada unificação semântica da derivada com seus aspectos gráfico e numérico (LEME, 2003). De acordo com Kendal (2001), as representações gráfica, numérica e simbólica do conceito de derivada são consideradas importantes para o desenvolvimento da noção de derivada e estão relacionadas às habilidades de articulações entre estas.

As discussões elencadas apontam no sentido da importância de práticas de ensino/aprendizagem do conceito de derivada que integrem simultaneamente abordagens gráficas e analíticas, de forma a evidenciar significados e relações, oportunizando, dessa forma, a aprendizagem desse conceito tão importante, tanto para o Cálculo, quanto para as demais aplicações.

2.3 O uso das Tecnologias Computacionais para o ensino e aprendizagem de Matemática

Nas últimas décadas, o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) tem crescido de maneira acelerada em toda sociedade, invadindo os espaços no campo familiar, profissional e social, o que acaba desencadeando mudanças nesses ambientes e, de modo especial, também no ambiente educacional. A presença de recursos tecnológicos cada vez mais modernos tem permitido novas formas de realizar ações, reinventando o modo com que o homem se relaciona com o mundo e com seu semelhante, e também potencializando novas formas de perceber e organizar situações de aprendizagem.

Diante do cenário atual, no qual os conhecimentos sobre informática e diferentes tecnologias se tornaram indispensáveis, o uso dessas ferramentas em salas de aula pode ser considerado inquestionável, pois conforme já colocava Rezende (2002, p. 01),

> na virada do século, não se trata mais de nos perguntarmos se devemos ou não introduzir as novas tecnologias da informação e da comunicação no processo educativo. Já na década de 80, educadores preocupados com a questão consideraram inevitável que a informática invadisse a educação e a escola, assim como ela havia atingido toda a sociedade. Atualmente, professores de várias áreas reagem de maneira mais radical, reconhecendo que, se a educação e a escola não abrirem espaço para essas novas linguagens, elas poderão ter seus espaços definitivamente comprometidos.

Desse modo, o uso didático das TICs (em especial do computador e das calculadoras gráficas) no ensino vem sendo discutido por diversos educadores e pesquisadores, tornando-se uma forte tendência dentro da Educação Matemática há algumas décadas.

O uso do computador para o ensino de Matemática também se destaca em três perspectivas diferentes, de acordo com Canavarro (1993, apud PONTE e RIBEIRO, 2000, p. 3),

> como elemento de animação, com a capacidade para melhorar o ambiente geral da aula; como elemento facilitador, permitindo realizar determinadas tarefas tradicionalmente realizadas à mão; como elemento de possibilidade, permitindo equacionar a realização de atividades que seriam difíceis de efectuar de outro modo.

Tais elementos podem contribuir para o ensino de conceitos considerados abstratos aos olhos dos alunos, pois as tecnologias permitem explorar diferentes contextos, como por exemplo, relacionar aspectos gráficos e algébricos de uma função por meio do uso de um *software* ou calculadora gráfica. Em relação à motivação e possibilidade, as tecnologias e a matemática, se utilizadas de modo inteligente, oportunizam a busca pelo conhecimento e despertam o interesse do aluno, uma vez que ele seja levado a pensar e construir os conceitos, passando a ser ativo no processo de aprendizagem e contribuindo para sua formação.

Além das perspectivas apresentadas, calculadoras gráficas e computadores podem ser utilizados no contexto da Educação Matemática, onde se pode destacar uma função de sua utilização

> no que diz respeito aos valores e atitudes, a calculadora e o computador são particularmente importantes no desenvolvimento da curiosidade e do gosto por aprender, pois proporcionam a criação de contextos de aprendizagem ricos e estimulantes, onde os alunos sentem incentivada a sua curiosidade Ponte & Canavarro (1997, p. 101).

Essa possibilidade de criação de espaços diferenciados para a aprendizagem com uso de tecnologias, conduz à reflexão sobre as ideias de Gravina e Santarosa (1998, p. 1), que trazem uma reflexão acerca do que significa “fazer matemática: experimentar, interpretar, visualizar múltiplas facetas, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e, enfim, demonstrar”.

Esse fazer matemática apontado pelas autoras pode ser explorado por meio do uso das tecnologias, mais especificamente, pelo uso de *softwares* e calculadoras gráficas, que, quando utilizados adequadamente, possibilitam a experimentação em conteúdos matemáticos, além de estimular a percepção visual dos alunos (BORBA e PENTEADO, 2001), auxiliando na construção de conceitos.

Outros autores, como Allevato (2005; 2008), Borba e Villareal (2005), Braga e Paula (2010), salientam que as possibilidades experimentais das tecnologias podem ser exploradas de tal modo a levar o aluno à elaboração e validação de conjecturas, contribuindo para o desenvolvimento de suas ideias e criação de novas conjecturas. O trabalho adequado com as tecnologias faz com que os alunos se tornem investigativos e participativos e não apenas receptivos.

2.3.1 O uso de Tecnologias Computacionais para o ensino e aprendizagem de Cálculo

O Cálculo Diferencial e Integral, é uma disciplina presente no currículo de muitos cursos superiores, por ser um ramo importante da matemática e seu campo de aplicações se entender em todos as áreas de conhecimento. Apesar de tantas aplicabilidades, as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem vem sendo foco de muitas pesquisas, como a de Junior, Bessa, Cezana (2015) por ser alvo de um grande número de reprovações, evasão e repetência. Algumas tendências na

Educação Matemática têm sido propostas na tentativa de minimizar os efeitos desta problemática, como a utilização de Recursos Tecnológicos, a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas, e demonstraram resultados positivos em relação a aprendizagem.

> Um dos caminhos que pode ensejar maior produtividade no processo de ensino e aprendizagem no Cálculo Diferencial e Integral I pode estar na diversificação das formas de abordagem de cada tema a ser apresentado, a partir do que se adapta a cada um destes, da condição intrapessoal e interpessoal de cada docente, do nível de aprofundamento desejado, etc. Assim, algumas opções viáveis podem ser encontradas, além da resolução de problemas que constituem a própria essência da Matemática, por meio da explicitação dos seus conceitos e de suas teorias através da história; e estas podem tornar-se um meio bastante estimulador, tanto para o professor como para o aluno, criando-se uma atmosfera que facilite a compreensão do saber matemático pelo contato com sua gênese e etapas de seu desenvolvimento; além disso, fazer uso da experimentação, das aplicações e do uso da computação (SILVA, 1994, p. 6).

Entre as estratégias apontadas por Silva (1994) para melhorar a qualidade de ensino e aprendizagem de Cálculo, o uso de programas computacionais vem sendo implementado desde a década de 1980, como uma das alternativas para superar a falta de sucesso acadêmico nas aulas de matemática, proposta apresentada pelo movimento “Calculus Reform”, que foi um movimento por meio do qual ocorreu a reforma de currículos e implantação de novas metodologias baseadas no construtivismo, como o trabalho com problemas e uso de calculadoras gráficas.

Desde então, pesquisas relacionadas ao uso de tecnologias para o ensino e aprendizagem de Cálculo vem sendo realizadas, com intenção de impulsionar mudanças no quadro educacional do ensino superior, relacionadas ao Cálculo. Objetiva-se, também, expandir metodologias e estratégias que têm demonstrado bons resultados frente à compreensão dos conceitos e melhora no aproveitamento dos alunos.

Entre as pesquisas realizadas no contexto apresentado, selecionou-se aquelas que apresentam relevância para estudo realizado, sendo citadas em diversos outros trabalhos que refletem o uso de TIC’s no ensino superior. Entre estas, elencamos as que refletem sobre as potencialidades presentes nas tecnologias utilizadas para promover o ensino e a aprendizagem de Cálculo; as que apontam vantagens e contribuições de seu uso; bem como o papel do professor frente às tecnologias. Sobre as contribuições e vantagens do uso de tecnologias no ensino e aprendizagem de Cálculo, algumas pesquisas podem ser apontadas, como Paranhos (2009), Alves e Reis (2010), Alves, Correia e Melo (2013), Marin (2009), entre outras.

Paranhos (2009) destaca que o uso de ambientes informatizados para o ensino e a aprendizagem de Cálculo pode promover mudanças na qualidade do aprendizado dos alunos, pois estes se tornam mais participativos e exploradores, acompanham o curso mais de perto e fazem mais perguntas. Isso, além de ajudar na criação de conjecturas e negociação de significados, facilitando a compreensão dos aspectos conceituais também do Cálculo.

De acordo com Alves e Reis (2010) e Alves, Correia e Melo (2013), entre as contribuições frente ao uso de recursos tecnológicos nas aulas de Cálculo estão: a possibilidade de visualização de propriedades, que tradicionalmente são manipuladas algebricamente; a abertura para conjecturas a partir de gráficos; e o ambiente dinâmico proporcionado pelo *software*, que contrasta os modelos geralmente estatísticos apresentados nos livros didáticos.

Em relação às vantagens do uso de tecnologias nas aulas de Cálculo, o grupo de professores participantes da pesquisa de Marin (2009) apontou que: os alunos aprendem melhor, pois, por meio do aspecto visual, encontram facilidade em compreender aquele conteúdo que anteriormente parecia algo tão longe da sua capacidade. Os professores envolvidos na pesquisa destacam que se proporciona a experimentação, através da qual pode-se buscar novas descobertas, observar propriedades, investigar, transformar, modificar e testar aquilo que antes somente era repassado ao aluno de maneira automática.

Diante da leitura e análise das pesquisas apresentadas até o momento, evidenciou-se a recorrência de alguns aspectos importantes presentes entre as vantagens e contribuições do uso de tecnologias computacionais para o ensino de Cálculo, como é o caso da experimentação, da investigação e da visualização.

Em relação à importância dos aspectos de experimentação e investigação, Alves, Correia e Mello (2013) destacam que o uso das tecnologias assegura ao aluno a oportunidade de testar, validar ou refutar conjecturas, tornando-o interativo e não apenas receptivo.

Outro aspecto evidenciado entre as pesquisas trata da visualização como parte dos processos de ensino e aprendizagem, Reis e Júnior (2016) salietaram a importância da imagem visual para a compreensão dos conceitos envolvidos na disciplina de Cálculo, e de sua interação com aspecto analítico.

> Ferramentas tecnológicas, se utilizadas de forma adequada, podem potencializar o uso dos recursos gráficos no ensino de Cálculo, estimulando a observação, a busca de regularidades e padrões e possibilitando, através da comparação com as outras formas de se representar uma função, o entendimento das ligações entre elas. O trabalho desenvolvido com a utilização desses recursos também pode contribuir para que os alunos apurem a percepção e, por consequência, desenvolvam habilidades que facilitem a construção gráfica por meio dos instrumentos tradicionais: lápis, papel e régua (COUY, 2008, p. 47).

A visualização gráfica gerada por *softwares* tem se mostrado uma ferramenta eficiente para o ensino de Cálculo e a exploração de conceitos muitas vezes abstratos para os alunos, pois, segundo Costa e Souza Júnior (2007), possibilitam ao aluno construir conceitos ou ainda ressignificar conceitos já estudados. Esta pode ser vista como um objeto a ser manipulado pelo aluno, a fim de explorá-lo e incorporá-lo como parte de um conceito. O uso de gráficos, além de possibilitar este manuseio, pode proporcionar apoio à resolução de problemas e à atribuição de significado a conceitos.

> A visualização tem um poderoso papel complementar, onde se pode destacar três aspectos: a visualização como apoio a resultados essencialmente simbólicos; uma maneira possível para resolver conflitos entre soluções simbólicas (corretas) e (incorretas) com intuições; como ajuda a reengajar e recuperar os fundamentos conceituais que podem ser facilmente contornados por soluções formais (ARCAVI, 2003, p. 222-223, tradução nossa).

O ensino e aprendizagem, segundo o referido autor, necessitam propiciar formas para que se possa melhor ver os conceitos matemáticos, por meio da exploração da visualização em sua totalidade, que além de contribuir na organização dos dados é um importante fator na condução do desenvolvimento analítico da solução. A visualização, portanto, pode ser considerada como parte integrante do próprio processo analítico da solução.

Pesquisas sobre visualização na aprendizagem de matemática, segundo Presmeg (2006), iniciaram-se lentamente, crescendo de uma base psicológica no final da década de 1970 e início dos anos de 1980. Tais estudos estão relacionadas a diversos ramos desta área e são multifacetadas, com raízes na matemática e envolvendo aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991).

No entanto, tais pesquisas ainda vêm sendo desenvolvidas, tanto no âmbito da educação básica, quanto no ensino superior, devido a sua importância neste processo. Algumas dessas investigações apontam a visualização na área da matemática como uma componente chave do raciocínio na resolução de problemas e atividades, bem como para fins ilustrativos (ARCAVI, 2003). Além disso, de acordo com Rösken e Rolka (2006), a visualização é considerada uma ferramenta poderosa para explorar problemas matemáticos, dar significado para conceitos matemáticos e estabelecer a relação entre eles.

O termo visualização, para Zimmerman e Cunningham (1991), é empregado para descrever os processos de produção ou o uso de representações geométricas ou gráficas de conceitos, princípios ou problemas matemáticos, seja desenhado à mão ou gerado por computador. Ainda, Fainguelernt (1999) considera a visualização como uma habilidade de perceber, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais. Partindo dessa definição, Santos (2009) destaca que o contato visual físico é necessário para que ocorra ou se promova o contato mental de um indivíduo.

No contexto da educação matemática, fazer uso da visualização, além de promover a intuição e o entendimento, possibilita uma abrangência maior dos assuntos matemáticos, permitindo aos alunos não somente aprenderem matemática, mas se tornarem capazes de fazer sua própria matemática (FLORES, 2012). A visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráfica (BRASIL, 1998).

Diante de diversas definições do termo visualização, tanto no âmbito da matemática, quanto da educação matemática, pode-se perceber que estão focadas na percepção e na manipulação de imagens visuais, e que a aprendizagem é resultado da interpretação dada às sensações e estímulos do meio ambiente, às ideias, imagens, expectativas e atitudes (FAINGUELERNT, 1999).

Em relação a trabalhos que utilizaram o processo de visualização para a aprendizagem de conceitos de Cálculo, pode-se mencionar Junior (2015), cuja experiência dissertada utilizou o *software* Geogebra para o ensino de conceitos relacionados à derivada junto a um grupo de professores do ensino superior, desenvolvendo atividades exploratórias de construção e interpretação de gráficos. Os resultados obtidos apontam que a visualização proporcionada pelo *software* contribuiu para uma ressignificação de diversos conceitos e propriedades de derivadas que são requisitados na construção de gráficos de funções reais, além de destacar, como fundamental nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, um equilíbrio entre os processos visuais e os processos algébricos.

Conforme destacado por Alves e Reis (2010) e Jover (2013), além dos aspectos mencionados, as tecnologias apresentam também potencialidades em seu uso, como a colaboração e interação que auxiliam na construção do conhecimento de maneira mais dinâmica.

Também Marin (2009), em sua pesquisa junto a um grupo de professores universitários sobre o uso de TIC nas aulas de Cálculo, levantou como potencialidade das tecnologias a possibilidade de realização de atividades antes impossíveis de serem feitas somente com papel e lápis, o que acaba proporcionando a organização de situações e atividades pedagógicas com maior potencial para aprendizagem, mas ressalta que para isso é necessário um aumento no tempo de dedicação do professor.

Outro aspecto importante ressaltado pelo autor em relação ao uso de tecnologia pelo professor está na necessidade de saída da zona de conforto (PENTEADO, 2000), entendida como aquela em que tudo é feito rotineiramente, na qual não ocorrem mudanças, tudo é controlado e previsível, para a entrada na zona de risco (PENTEADO; SKOVSMOSE, 2008), em que podem ocorrer novos fatos, há flexibilidade, incerteza e imprevisibilidade, que muitas vezes despertam o medo e a insegurança em uma prática docente.

Gravina e Santarosa (1998) também ressaltam a importância dos cuidados com a utilização de tecnologias em sala de aula, em especial para que as atividades não sejam limitadas à repetição de exercícios. As autoras destacam que o *software* não pode dificultar a realização de uma tarefa devido ao não conhecimento ou domínio de suas ferramentas e comandos.

Desse modo, é preciso que o professor tenha cuidado e atenção na seleção de um determinado *software* ou programa que deseja utilizar em suas aulas, pois há necessidade de analisar e optar por aquele que, prioritariamente, seja compatível com os objetivos traçados. Ainda, é importante que o professor também atente para o contexto de sala de aula, considerando o público alvo, o seu domínio de tecnologias, a acessibilidade aos meios e o contexto de aplicação.

Ademais, tendo conhecimento da realidade que circunda atualmente e da relação entre a educação e as tecnologias, optou-se, para realização desta proposta, por utilizar o *software* Desmos, que é semelhante a uma calculadora gráfica, em que é possível construir pontos, gráficos de funções (com ou sem restrições de domínio), cônicas e regiões do plano por meio de equações cartesianas, paramétricas ou polares, além de calcular expressões numéricas, resolver equações de primeiro e segundo graus com uma incógnita, derivadas e integrais de uma função. O *software* pode ser acessado por meio do computador ou de dispositivos móveis, tem um ambiente dinâmico - que proporciona a interação -, possui uma interface amigável, além de ser gratuito e multi-idiomas.

O *software* Desmos foi selecionado por ser um programa de fácil acesso e manuseio, gratuito, apresentar uma ótima saída gráfica e possibilitar o compartilhamento das atividades e dos gráficos, possibilitando deste modo o desenvolvimento de um trabalho mais dinâmico e com ótimo aproveitamento tanto pelo professor quanto alunos.

2. 4 Mapeamento dos trabalhos sobre derivadas

Realizou-se a revisão teórico-bibliográfica, com o intuito de conhecer o que está sendo produzido em relação ao tema derivadas, com base em um levantamento[1] de artigos completos publicados no Portal de Periódico da CAPES, utilizando critérios para a seleção dos trabalhos conforme apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 - Critérios para seleção dos artigos

Período de Publicação	2011 a 2016
Tipos	Recursos
Tipo de Recurso	Artigos Completos
Tópicos	Educação Matemática; Educação; Matemática; Cálculo; Engenharia
Palavras-chave	Teaching And Derivatives; Learning And Derivative; Enseñanza And Derivada; Aprendizaje And Derivada; Tecnología And Derivada; Ensino And Derivada; Aprendizagem And Derivada, Tecnologias And Derivadas

Fonte: Elaborado pela autora

A partir dos dados apontados, foram encontrados 424 trabalhos. Porém, após a leitura dos títulos e resumos, observou-se que, dos trabalhos encontrados, somente 21 contemplaram as características procuradas, as quais foram: o ensino e a aprendizagem de derivadas, o uso de recursos e metodologias diferenciadas para o ensino de derivadas.

O Quadro 2 a seguir sintetiza os artigos encontrados, oferecendo um panorama em relação ao título, autor, ano de publicação e periódico. Para serem mencionados posteriormente, os artigos foram designados por Ai, com i = 1,2,3...21.

Quadro 2 - Trabalhos analisados sobre o ensino de derivadas

Item	Título (autores e ano)	Periódico
1	An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. (MAHARAJ, 2013)	South African Journal of Education
2	Análisis según el Modelo Cognitivo APOS* del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada. (URQUIETA; CARRILLO; ANDRADE, 2014)	Bolema
3	Evaluación de una estrategia didáctica para la apropiación del concepto "derivada de una función". (TELLES; ROMERO, 2016)	Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo - RIDE

4	Los Mapas Conceptuales: una Técnica para el Análisis de la Noción de Derivada en un Libro de Texto. (GORDILLO; PINZÓN; MARTÍNEZ, 2016)	Formación Universitaria
5	Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas. (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2015)	Bolema
6	Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. (BISOGNIN; BISOGNIN, 2011)	Educação Matemática em Pesquisa
7	Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. (VRANCKEN; ENGLER, 2014)	Bolema
8	Assessing conceptual understanding in mathematics: Using Derivative Function to Solve Connected Problems. (ORHUN, 2013)	Turkish Online Journal of Distance Education-TOJDE
9	Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra. (GONÇALVES; REIS, 2013)	Bolema
10	Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. (SIYEPU, 2015)	International Journal of STEM Education
11	Derivative, maxima and minima in a graphical context. (RIVERA-FIGUEROA; PONCE-CAMPUZANO, 2012)	International Journal of Mathematical
12	Using Short Video Lectures to Enhance Mathematics Learning – Experiences on Differential and Integral Calculus Course for Engineering Students. (KINNARI-KORPELA, 2015)	Informatics in Education
13	The Mathematical Work with the Derivative of a Function: Teachers’ Practices with the	Bolema

	Idea of "Generic". (PANERO; ARZARELLO; SABENA, 2016)	
14	Introducing Derivative via the Calculus Triangle. (WEBER, TALLMAN, BYERLEY, THOMPSON, 2012)	Mathematics Teacher
15	Discrete or continuous? – A model for a technology-supported discrete approach to calculus. (WEIGAND, 2015)	ZDM: Mathematics Education
16	Algunos Indicadores del Desarrollo del Esquema de Derivada de una Función. (MATAMOROS; GARCÍA; LINARES, 2013)	Bolema
17	Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada. (PINO-FAN; GODINO; MOLL, 2011)	Educação Matemática em Pesquisa
18	Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. (HONG; THOMAS, 2015)	Mathematics Education Research Journal
19	Is the derivative a function? If so, how do we teach it? (PARK, 2015)	Educ Stud Math
20	Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra. (VERHOEF; COENDERS; PIETERS; SMAALEN; TALL, 2014)	Professional Development in Education
21	Students' evolving meaning about tangent line with the mediation of a Dynamic Geometry environment and na Instructional Example Space. (BIZA, 2011)	Technology, Knowledge and Learning

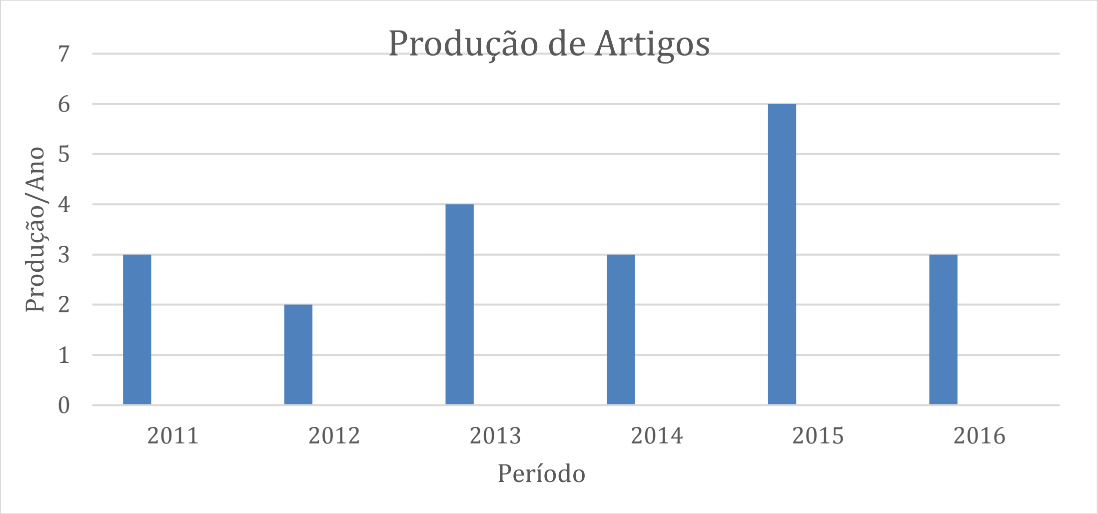
Fonte: Elaborado pela autora

Por meio dos dados levantados, pode-se destacar os países em que estão sendo realizadas pesquisas relacionadas ao ensino de derivadas e suas aplicações, demonstrando a importância do tema, seja a nível nacional ou internacional. Dentre os países com publicações encontradas na pesquisa estão: África do Sul (3), Chile

(1), México (3), Colômbia (1), Brasil (2), Argentina (1), Turquia (1), Finlândia (1), Grécia (1), Itália (1), Alemanha (1), Espanha (2), Coreia (1), Estados Unidos (1) e Holanda (1).

O número de artigos selecionados por ano de publicação pode ser visto no Gráfico 12, que abarca o período dos últimos 5 anos, demonstrando que o número de pesquisas cresceu até 2015, mas em 2016 ocorreu uma diminuição nas pesquisas, mesmo este sendo um tema de grande relevância no mundo acadêmico.

Gráfico 12 - Número de Artigos/Ano



Fonte: Elaborado pela autora

Dando continuidade ao estudo, concentraram-se esforços em explorar os textos dos artigos, procurando entender seus objetivos e destacar os referenciais teóricos e os procedimentos utilizados no decorrer dos trabalhos. Isso com o intuito de agrupá-los em categorias que pudessem contribuir na apresentação de um retrato mais preciso a seu respeito, bem como identificar os estudos que mais se aproximam dos interesses estabelecidos para o estudo cujo relato é o objeto do presente relatório, ou seja, aqueles que discutem o ensino de derivadas com uso de tecnologias.

Para melhor compreender os estudos que atualmente estão sendo desenvolvidos em relação à aprendizagem de derivadas, buscou-se elencar as principais teorias que foram utilizadas de base para a realização de cada trabalho (QUADRO 3).

Quadro 3 - Teorias utilizadas nos artigos analisados

Artigos (ITEM)	**Principais Teorias**
A1, A2, A10, A16	Teoria APOS (DUBINSKY e MCDONALD ,2001)
A3	Processo de assimilação e acomodação (PIAGET, 1977)
A4	Mapas Conceituais (NOVAK, CAÑAS, 1988)
A5, A17	Enfoque ontosemiótico (EOS) do conhecimento e da instrução matemática (GODINO; BATANERO; FONT, 2007)
A6	Imagem de conceito e definição de conceito (TALL e VINNER,1981)
A7	Linguagem e Pensamento variacional (CANTORAL et al., 2003)
A8	Conhecimentos conceituais (TURKER, 1981; VINNER,1989; TALL, 1991)
A9	Investigações matemáticas (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006) Importância da visualização e do uso de *software* (COUY, 2008)
A13	Processo de genética, através do modelo do MWS (KUZNIAK e RICHARD, 2014) e as ferramentas semióticas descritas pelo pacote semiótico (ARZARELLO, 2006).
A14	Cálculos de THOMPSON (1994, 2008)
A15	Abordagem discreta (HANS-GEORG WEIGAND, 2016)
A18	Pensamento matemático avançado (FAMT) (STEWART e THOMAS 2007; THOMAS e STEWART 2011): três mundos da matemática (TWM; TALL 2004a, 2004b, 2008, 2013) e a Teoria APOS (DUBINSKY e MCDONALD 2001)

A19	Abordagem cognitiva (SFARD, 2008).
A20	Modelo Interligado de Crescimento Profissional (IMPG) (CLARKE e HOLLINGSWORTH'S, 2002)
A21	Zona de desenvolvimento proximal (ZDP) (VYGOTSKY, 1978)

Fonte: Elaborado pela autora

Entre os trabalhos selecionados, o trabalho A11 constou da análise de livros didáticos e o A12, do desenvolvimento e aplicação de vídeos curtos como auxílio para as aulas de Cálculo, de modo que não apresentaram uma teoria base para o desenvolvimento de seus estudos.

Em análise aos artigos, o exercício de tradução e leitura possibilitou a identificação de dois tipos de pesquisas - as teóricas e as empíricas - e algumas características comuns que permitiram o agrupamento dos artigos em categorias e subcategorias. Nesse quesito, ressalta-se que os critérios para identificação e seleção adotados neste trabalho podem ser diferenciados, uma vez que os critérios aqui estabelecidos levaram em consideração o objetivo da pesquisa e podem ser efetuados de outra maneira.

No Quadro 4 estão descritas as categorias e subcategorias elaboradas pela autora.

Quadro 4 - Distribuição dos artigos em categorias e subcategorias

CATEGORIA	SUBCATEGORIA/DESCRIÇÃO	NÚMERO DE ARTIGOS
B – Trabalhos de Natureza Empírica	B_1 – Trabalhos que analisam e abordam a prática docente	3
	B_2 – Trabalhos que utilizam teorias cognitivistas para análise das concepções apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem	9

	B_3 – Trabalhos que utilizam tecnologias como recurso educacional	5
C – Trabalhos de Natureza Teórica	Trabalhos que apresentam abordagens diferenciadas para o ensino de Derivadas	4
Total	________	**21**

Fonte: Elaborado pela autora

No agrupamento efetuado, a primeira categoria - categoria B - é constituída por trabalhos que apresentaram algum tipo de investigação empírica, ou seja, trabalhos que apresentam alguma experiência de ensino realizada com alunos e /ou professores. Essa categoria está subdividida em três subcategorias. Cabe destacar que a pesquisa empírica provém de uma prática, de um experimento ou observação para a coleta de dados, e serve para ancorar e comprovar, no plano da experiência, o que foi apresentado conceitualmente ou, em outros casos, a observação e experimentação empíricas fornecem dados para sistematizar uma teoria. Os trabalhos desta categoria estão agrupados nas subcategorias B_1; B_2 e B_3.

Inicialmente, na subcategoria designada B_1, foram reunidos os trabalhos cujo objetivo foi o de analisar e considerar as práticas docentes relacionadas ao ensino de derivadas, podendo-se citar os trabalhos A4, A13 e A19. Em A4, a estratégia de ensino utilizada foi a construção de ***mapas conceituais*** por professores, referente aos seguintes conteúdos: limites, o conceito de derivada desde a noção de reta tangente e da velocidade instantânea. Por meio desse trabalho realizou-se um comparativo com mapas conceituais baseados em livro texto, neste caso o livro de Stewart (2008), com a finalidade de identificar obstáculos no uso da terminologia matemática elencada em muitos livros textos. O estudo realizado em A13 teve por objetivo analisar o papel do professor na gestão da gênese semiótica dos processos cognitivos do Espaço de Trabalho Matemático (MWS) e no processo de visualização, com ênfase no momento de mudança da derivada de um ponto específico x_0 para a derivada como função global da variável x. Como resultado, apresentou-se a importância de conduzir cuidadosamente o passo do símbolo x_0 para o símbolo global x. Neste caso, o conceito foi apresentado como um exemplo significativo que, se bem conduzido, pode se tornar um recurso para o entendimento do conceito.

O estudo realizado em A19 examinou como professores (instrutores) definiram a derivada em um ponto usando o conceito de limite e passaram para a derivada de uma função em um intervalo, sob uma ótica cognitiva, por meio do uso de filmagens das aulas em duas turmas de Cálculo. Vários resultados se destacaram, entre os quais, o uso de vários mediadores visuais sem conexões explícitas entre elas, o que foi observado em diversas aulas. O estudo também forneceu exemplos de que a experiência de muitos professores os cega às dificuldades que seus alunos têm em aprender o que parece óbvio, demonstrando a desconexão entre a narrativa do professor e as habilidades dos alunos em aprender.

Na subcategoria B_2, foram agrupados os trabalhos de natureza empírica que utilizaram teorias cognitivistas para analisar as concepções apresentadas pelos alunos nos processos de ensino e aprendizagem de derivadas e suas aplicações (A1, A2, A3, A5, A6, A7, A8, A10 e A16), conforme elencado no Quadro 2, sobre as principais teorias utilizadas.

Grande parte dos artigos encontrados utilizou da ***teoria APOS*** (Ação- Processo - Objeto e Esquema) como suporte teórico, a qual consiste em uma teoria cognitivista que visa compreender como ocorre a construção de conhecimentos matemáticos. Segundo essa teoria, um indivíduo precisa ter estruturas mentais apropriadas para dar sentido a um determinado conceito matemático. As ações, processos, objetos e esquemas necessários para compreender um conceito são o que se apresenta como estruturas mentais. Logo, destaca-se, então, que para um aluno construir ou compreender um conceito é necessário que ele tenha um esquema pré-existente. No caso de derivadas, alguns conceitos ou esquemas pré-existentes são necessários, podendo-se citar: as manipulações algébricas e funções, conforme apontado no trabalho A1.

O trabalho A1 salientou também a necessidade de se dedicar mais tempo para auxiliar os alunos a desenvolverem as estruturas mentais nos níveis de processo, objeto e esquema, o que envolve abordagens verbais e gráficas para aplicações do conceito de derivada. Ainda, em A2 foi possível diagnosticar que o conceito de derivada em um ponto não é compreendido no nível de ação, pois os alunos demonstraram ter dificuldades para ampliar seus conhecimentos acerca da abordagem geométrica do conceito, bem como apresentaram dificuldades em discriminar sentenças verdadeiras de falsas, quanto às propriedades da derivada relacionadas a sua monotonicidade e à concavidade de uma função.

A dificuldade relacionada à compreensão dos aspectos geométrico e gráfico do conceito de derivada muitas vezes ocorre, pois, o aluno não possui uma imagem de conceito relacionada a esse conteúdo. Segundo Tall e Vinner (1981), o aluno pode aprender de maneira significativa, à medida que tem oportunidade de criar diferentes imagens conceituais referentes a um determinado conteúdo matemático, em que a representação gráfica pode contribuir significativamente para a construção desta imagem conceitual. No trabalho A6, as autoras destacaram algumas das dificuldades encontradas pelos alunos frente à exploração gráfica de derivadas,entre as quais pode-se mencionar: dificuldades em análises do intervalo a partir da derivada primeira e segunda; nas análises dos zeros da derivada 1ª e 2ª; nos pontos onde a derivada 1ª não existe; da existência da derivada 1ª e a continuidade de funções.

Em algumas pesquisas relacionadas nesta subcategoria (A3, A7, A8), salienta-se a necessidade de ligação entre diferentes representações do mesmo conceito, para sua compreensão e explicação. Em A7, trabalhou-se a taxa de variação em diferentes problemas, em que a sequência didática utilizada proporcionou a motivação aos alunos e mobilizou suas concepções, proporcionando o conhecimento sobre derivada.

No caso das derivadas, faz-se necessária a ligação entre problemas, interpretação gráfica, numérica e analítica e os conhecimentos prévios dos alunos, de modo que o conhecimento conceitual adquira significado e aplicabilidade. Constatação análoga percebeu-se no trabalho A10 que, por meio de aplicação de testes após a discussão do conteúdo pelo professor, buscou analisar os erros cometidos pelos alunos em particular, na derivação de funções trigonométricas. Por meio deste trabalho, destacou-se que os erros exibidos pelos alunos eram conceituais e processuais, de interpretação e extrapolação linear.

Outro trabalho (A16) desta subcategoria caracterizou alguns indicadores do desenvolvimento do esquema de derivada por estudantes do ensino superior, utilizando os níveis inter, intra e trans do desenvolvimento de um esquema proposto por Piaget e Garcia, relacionados à equivalência lógica entre diferentes elementos matemáticos utilizados pelos alunos para resolver um problema. Para coleta de dados, os autores fizeram uso de questionários com atividades envolvendo a exploração gráfica do conceito de derivada e a resolução de um problema, além de uma entrevista. Foi possível destacar que dentro dos elementos matemáticos que formam a noção de derivada tem-se distinguido dois blocos: um vinculado às ideias e significados que norteiam a definição de derivada e outro vinculado às propriedades que têm a forma de implicações, implicação contrária e equivalência.

As pesquisas inseridas na subcategoria B_3, (A9, A12, A18, A20, A21) analisam, implementam e discutem o uso de tecnologias, como ferramenta educacional capaz de contribuir para o aprendizado de conceitos envolvendo Derivadas. Como principal recurso tecnológico, utilizaram-se os *softwares*, podendo-se citar: Geogebra (A9, A20), Dynamic Geometry (A21) e CAS calculator (A18). No trabalho A12 foram utilizados vídeos de curta duração.

Em um dos trabalhos (A9), o uso do *software* foi destacado, pois possibilitou a investigação e experimentação matemática, principalmente no aspecto de visualização, contribuindo para a ressignificação dos conhecimentos e criação de um ambiente de aprendizagem diferenciado. Em outro (A20), o *software* em parceria com a metodologia de lições japonesas, método através do qual os professores estudam colaborativamente as próprias práticas através da observação de pares, avaliação e revisão, demonstra a importância da incorporação conceitual e não somente do simbolismo operacional, pois a tecnologia tem a capacidade de proporcionar maior e mais fácil as múltiplas representações de conceitos, anteriormente trabalhados somente de modo algébrico e numérico.

Em A12, o uso de vídeos de curta duração para o ensino de derivadas, demonstra ser um método positivo, pois por meio da possibilidade de assistir no momento mais adequado. Ainda, o aluno tem a possibilidade de rever quantas vezes forem necessárias, possibilitando a internalização e a compreensão dos conceitos, levando-se em consideração a capacidade e a limitação de cada sujeito. De acordo com a pesquisa, os alunos com baixa proficiência em matemática tiveram mais tempo para pensar e repetir as explicações assistidas. Assim, de maneira geral os vídeos são um recurso adequado para apresentar um conteúdo matemático.

Na categoria C, foram reunidos os trabalhos de natureza teórica. Nessa categoria se encontram os trabalhos que apresentam discussões e novas abordagens para o ensino de derivadas (A11, A14, A15, A17). A pesquisa desenvolvida em A17, buscou realizar uma síntese de conhecimentos sobre a derivada, relativos ao componente epistémico do conhecimento didático matemático, conhecimento este necessário para a prática docente. Para a realização da pesquisa, os autores utilizaram o enfoque ontosemiótico (EOS) da cognição e instrução matemática, enfocada em diversos trabalhos de Godino e seus colaboradores.

O trabalho A17, realizou-se por meio da análise documental, em que foi possível descrever nove configurações epistêmicas identificadas ao longo do período histórico de derivadas, assim organizadas: [1] A tangente na matemática Grega; [2] Sobre a variação na Idade Média; [3] Métodos algébricos para encontrar tangentes; [4] Concepções cinemáticas para o traçado de tangentes; [5] As ideias intuitivas de limites para o cálculo de máximos e mínimos; [6] Métodos infinitesimais no cálculo de tangentes; [7] O Cálculo de Fluxiones; [8] O cálculo de diferenciais e [9] A derivada como limite.

Essa importante pesquisa de reconstrução do significado global de derivada, mostra

> a necessidade de se conhecer em profundidade o significado dos objetos matemáticos que fazem parte de um determinado conteúdo, a fim de ter-se condições para estabelecer critérios para a seleção de problemas e práticas de matemática a serem incluídos nos planos e processos de formação segundo as necessidades sociais e profissionais de um determinado grupo de pessoas a quem se destina. No caso das derivadas, o seu significado global é peça chave para o conhecimento didático-matemático do professor (PINO-FAN; GODINO, MOLL, 2011, p. 175, tradução nossa).

Outras pesquisas como A11, A14 e A15 demonstraram ou analisam métodos para a conceituação de derivada e suas aplicações. Em A11 foi apresentada a exploração gráfica do conceito de derivadas e dos máximos e mínimos de uma função, fazendo uma ponte entre contexto gráfico e provas formais. Tal contexto foi discutido por meio da análise de livros didáticos, a fim de salientar a importância desse trabalho e saber de suas limitações e implicações no trabalho docente.

Já a pesquisa A14 propôs uma abordagem que se baseia na pesquisa de Cálculos de Thompson (1994, 2008), que introduz o conceito de derivada de maneira que mantém a centralidade na taxa de mudança como suporte conceitual, através do triângulo de Cálculo. Acredita-se que essa abordagem facilita os entendimentos da derivada, fornecendo exemplos de sua utilidade. A intenção da abordagem foi a de “permitir que os alunos visualizem a mudança em uma função devido à mudança em seu argumento” (WEBER et al, 2012, p. 4).

Outra abordagem apresentada como alternativa para a aprendizagem dos conceitos relacionados à derivação foi apresentada por A15, tratando-se de um projeto em andamento, designado: “ABC - Uma abordagem discreta dos conceitos básicos do cálculo”. Por meio da proposta de abordagem discreta espera-se que

> o aluno elabore o conceito de derivada local de uma função em um ponto e dê uma chance de uma melhor compreensão do processo de aproximação, devido à possibilidade de construção gradual deste processo. Mas também se espera que a apresentação paralela de sequências (Ou funções discretas) e suas sequências de diferenças (Ou funções) permitem também uma compreensão bem fundamentada do conceito de uma função derivada (global) (WEIGAND, 2016, p. 2585, tradução nossa).

O uso de diferentes abordagens tem se mostrado uma alternativa para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos no Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente em Derivadas. Como se pode observar nesta categoria, as alternativas são advindas de diferentes abordagens, mas que tem por objetivo despertar o interesse e promover a aprendizagem dos alunos, para que estes tenham condições de analisar e resolver problemas matemáticos que abordam o conceito de derivadas.

Por meio da leitura, tradução e análise dos artigos encontrados foi possível mapear os principais enfoques de pesquisa relacionados ao tema Derivadas: 1- preocupação com o cognitivo do aluno- estruturas e conhecimento; 2- Análise da prática docente – papel do professor e condições; 3- Abordagem teórica e propostas didáticas; 4- Metodologias aplicadas – TIC’s.

Um ponto importante a ser destacado em relação aos trabalhos analisados refere-se ao fato de que as pesquisas apresentam contextos variados, não se tratando somente de alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática, mas de diferentes cursos, como os das áreas de Engenharia e de Ciências, demonstrando a importância do tema por sua aplicação em diferentes áreas do conhecimento.

Devido às aplicações da derivada em problemas variados, percebeu-se que ainda é recorrente a dificuldade dos alunos em analisar, interpretar e resolver problemas que requerem um domínio matemático relacionado ao conceito de derivadas. Tal dificuldade está relacionada à inexistência ou falta de abordagem unificada dos conceitos de derivada, os quais precisam ser expressos de forma geométrica, gráfica, numérica e algébrica, e podem ser explorados de diversas formas, com metodologias e recursos didáticos apropriados.

Outro ponto que merece atenção é a análise em torno do conhecimento prévio dos alunos, ou seja, da estrutura mental de cada indivíduo, pois segundo pesquisas neste trabalho apresentadas, um aluno necessita de estruturas mentais adequadas para incorporação de um novo objeto a ser trabalhado. Esse aspecto precisa ser considerado quando se propõe o ensino de um conteúdo muitas vezes desconhecido ou que contempla um número expressivo de outros conceitos, como no caso de derivadas.

Em relação ao domínio do conteúdo pelo professor, apontou-se a necessidade de conhecimento global sobre o conceito derivadas, destacando que o professor selecionará a abordagem de acordo com o curso e seus objetivos, levando em consideração o desenvolvimento científico e tecnológico de seus alunos.

Percebeu-se, ainda, com este mapeamento que as dificuldades existentes no ensino e na aprendizagem de Derivadas, evidenciadas pelos altos índices de reprovação nos cursos iniciais de Cálculo, constituem a principal motivação para realização dos trabalhos analisados.

Este estudo revelou, ademais, que há uma gama de questões a serem investigadas e que é necessário, ainda, que novos trabalhos sejam realizados levando-se em conta o ensino e a aprendizagem de elementos de Derivadas e suas aplicações no Ensino Superior.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

> O pesquisador não é somente quem sabe acumular dados mensurados, mas, sobretudo quem nunca desiste de questionar a realidade, sabendo que qualquer conhecimento é apenas recorte.
>
> Demo, 2004.

Este capítulo está dividido em três seções, nas quais são apresentadas as características e as ações metodológicas adotadas na elaboração e no desenvolvimento da investigação proposta. Sendo assim, descrevem-se a caracterização da pesquisa, os sujeitos envolvidos e o contexto da pesquisa, a intervenção pedagógica, os procedimentos e os instrumentos utilizados para a coleta e a análise de dados.

3.1 Caracterização da pesquisa

Atendendo aos objetivos com o desenvolvimento desta pesquisa, optamos por uma metodologia de pesquisa qualitativa que possibilita a atuação e a intervenção do professor em sala de aula, atuando como pesquisador. Segundo Denzin e Lincoln (2006), busca-se na pesquisa qualitativa estudar as coisas em seus cenários naturais, envolvendo uma abordagem interpretativa do mundo. Uma das características desta abordagem é a investigação com pequenos grupos, favorecendo a qualidade, mas podendo definir a amostra a ser utilizada na pesquisa.

Godoy (1995, p. 58) explicita algumas características principais de uma pesquisa qualitativa, as quais embasam também este trabalho:

> Considera o ambiente como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento chave; possui caráter descritivo; o processo é o foco principal de abordagem e não o resultado ou o produto; a análise dos dados foi realizada de forma intuitiva e indutivamente pelo pesquisador; não requereu o uso de técnicas e métodos estatísticos; e, por fim, teve como preocupação maior a interpretação de fenômenos e a atribuição de resultados.

Segundo Vieira e Zouain (2005), a pesquisa qualitativa atribui importância fundamental aos depoimentos dos atores sociais envolvidos, aos discursos e aos significados transmitidos por eles, o que permite desvelar a realidade sob o olhar do sujeito pesquisado e não apenas do pesquisador.

Nessa perspectiva, tanto os participantes quanto o pesquisador são valorizados e passam a estabelecer uma relação de colaboração, de modo que “[...] não se pode, no processo de investigação, deixar de valorizar a imersão do pesquisador no contexto, em interação com os participantes, procurando apreender o significado por eles atribuído aos fenômenos estudados” (ALVES, 1991, p. 55). Para Creswel (2007), a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto, ou seja, o interesse do pesquisador ao estudar um determinado problema está em verificar “como” ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas, portanto, é mais participativa e menos controlável, sendo que os participantes podem direcionar o rumo em suas interações com o pesquisador.

Para elaborar as atividades, realizar a intervenção e analisar os resultados, buscou-se o auxílio de teóricos que utilizaram tecnologias para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), discutem sua importância e relevância e utilizam estes recursos computacionais como fontes promotoras de aprendizagem e de um espaço pedagógico mais dinâmico e interativo (PARANHOS, 2009; MARIN, 2009, entre outros).

Logo, este estudo se caracteriza como exploratório e descritivo, haja visto que buscou investigar as potencialidades do uso de atividades apoiadas ao uso de um *software* no contexto educacional, no qual os participantes (pesquisados) tiveram oportunidade de expressar seu pensando diante de um tema, objeto ou conceito, neste caso, a derivada.

3.2 Sujeitos e Contexto da pesquisa

Como contexto de investigação e público para desenvolvimento da proposta, contou-se com um grupo de alunos matriculados no Curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Particular do Estado do Rio Grande do Sul, na região Noroeste do Estado. O estudo envolveu 17 estudantes da faixa etária entre 20 a 24 anos, pertencentes desde o 2º até 7º semestre do Curso.

O curso de Licenciatura em Matemática na Instituição em que se efetuou o estudo conta atualmente com diversos laboratórios: Laboratório de Ensino de Matemática, que é um espaço de produção de atividades de ensino e articulação com as Disciplinas do Curso e com as Escolas de Educação Básica; Laboratório de Multimídias, equipado com TV, retroprojetor, vídeo e computadores; Laboratório Virtual de Matemática e Laboratório de Informática, espaço com *softwares* específicos do curso.

A matriz curricular do curso agrega as disciplinas de Pré-Cálculo, ofertada no segundo semestre, Cálculo I no terceiro semestre, Cálculo II, Cálculo III e Cálculo IV sucessivamente nos semestres que seguem. Atualmente em todo curso há 54 alunos regularmente matriculados, que podem, além de frequentar as aulas regulares, participar de projetos de extensão em diversas áreas, como a de práticas colaborativas e interativas de Matemática, o uso de informática para o ensino de matemática na Educação Básica, entre outros.

O curso também conta o Núcleo de Formação de Professores, cujas disciplinas que o estruturam são distribuídas entre os diferentes âmbitos de formação, propostos nas respectivas Diretrizes Curriculares, incluindo disciplinas de Formação Geral e

Humanista, Formação Geral do Professor, Formação nas Áreas de Conhecimento e aquelas da Formação Específica.

Nessa Universidade, a autora desta dissertação buscou parceria para o desenvolvimento da intervenção, pois conhecia a instituição e não se encontrava em sala de aula naquele período, sendo necessária a colaboração e parceria para o desenvolvimento desta proposta.

Para a intervenção, não foram selecionados alunos, sequer uma turma em específico, por se tratar do oferecimento de uma Oficina Pedagógica pertencente à Semana Acadêmica do Curso, para a qual os alunos se inscreveram de acordo com a disponibilidade de tempo e/ou interesse, fazendo com que o público alvo fosse misto, composto por alunos de diferentes semestres do curso.

Desse modo, a oficina pedagógica foi desenvolvida no laboratório de Informática da Instituição, durante duas noites, dias 24 e 25 de maio de 2018, como parte da Semana Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática, totalizando 8 h/aula. O desenvolvimento das atividades contou com registros escritos, fotográficos e de áudio. Os alunos realizaram as atividades individualmente, em folhas impressas e também discussões em grupo sobre as respostas obtidas, de modo a promover a socialização do conceito estudado e sanar possíveis dúvidas surgidas no decorrer do desenvolvimento das atividades.

No primeiro encontro compareceram 17 alunos, enquanto no segundo compareceram 6 alunos. O número de participações foi afetado devido à Greve instaurada pelos caminhoneiros, realizada justamente neste período, o que ocasionou falta de transporte aos alunos, refletindo assim no número de participações, pois os alunos se deslocam de outras cidades para a realização do Curso a noite.

Dos 17 participantes da primeira noite de Oficina, 7 eram do sexo masculino e 10 do sexo feminino. Por tratar-se de uma oficina aberta a todos os alunos do Curso de Licenciatura, realizamos o levantamento sobre a atual situação dos alunos no Curso, no sentido de identificar o semestre ao qual pertenciam. Por meio dos dados obtidos elaborou-se o Quadro 5 que segue abaixo.

QUADRO 5 – Situação dos alunos por semestre.

SEMESTRE	QUANTIDADE DE ALUNOS
1º	3
3º	4
4º	1
5º	4
6º	1
7º	4

Fonte: Elaborado pela autora

3.3 A proposta de Intervenção

Como referendado anteriormente, o presente estudo se realizou em duas etapas em que, primeiramente realizou-se a elaboração e organização das atividades a serem desenvolvidas com apoio do Desmos. Nessas atividades são relacionadas a definição da derivada como inclinação da reta tangente à curva de uma função em um determinado ponto; como taxa de variação instantânea, além de explorar o comportamento gráfico de uma função por meio da análise do gráfico de sua derivada.

Na segunda etapa, realizou-se a aplicação das atividades na oficina pedagógica de modo presencial, durante o segundo semestre do ano letivo. A pesquisadora utilizou o recurso tecnológico de forma expositiva dialogada (*data show*) e durante a sequência didática cada aluno usou o computador com acesso ao *software* Desmos para realizar as atividades. Na sequência (QUADRO 6) apresenta-se uma síntese das atividades que compuseram a Oficina Pedagógica, seus respectivos objetivos e tempo de duração aproximado. Destacamos que A1 refere-se à atividade 1, A2 à atividade 2 e assim sucessivamente, até a atividade 4.

Quadro 6 – Atividades da Intervenção Pedagógica e Objetivos

ATIVIDADES	OBJETIVOS	DURAÇÃO
A1: Derivada como inclinação da reta tangente a um ponto	Compreender a relação entre a reta secante e a reta tangente a uma curva, utilizando o conceito de limite através da exploração gráfica; Conceituar derivada como sendo a inclinação da reta tangente a uma função em um determinado ponto	2 horas e 30 minutos

A2: Derivada como taxa de variação instantânea	Relacionar a taxa de variação instantânea com a derivada.	1 hora e 30 minutos
A3: Inclinações positiva, negativa e nula da reta tangente à curva de uma função.	Diferenciar inclinações positivas, negativas e nulas da reta tangente a uma função e relacionar ao comportamento da função.	1 hora e 45 minutos
A4: Comportamento da função através da análise da derivada.	Compreender a relação entre o crescimento e decrescimento de uma função pela análise da derivada; Identificar os pontos de máximo e mínimo de uma função através do gráfico da derivada.	2 horas e 15 minutos

Fonte: Elaborado pela autora

A proposta dessa investigação foi proporcionar um ambiente dinâmico e mais motivador aos alunos, buscando o desenvolvimento de atividades que envolvam as representações numéricas e gráficas referentes ao conceito de derivada e também a sua interpretação gráfica. As atividades (APÊNDICES A, B, C, D) foram desenvolvidas com auxílio do *software* Desmos (ANEXO A), disponível no endereço https://teacher.desmos.com/ .

Ressalta-se que a escolha do *software* Desmos, se deu devido a este ser um programa livre, disponibilizado gratuitamente na *internet,* com acesso por qualquer aparelho eletrônico para trabalho *on-line*, ou como aplicativo para trabalho *off-line*, sendo que este possibilita o trabalho colaborativo, possui comandos acessíveis e simples, tendo a disponibilidade de construção de gráficos, marcação de pontos, construção de tabelas, controle deslizante, entre outras opções. Também possibilita a visualização do gráfico da função derivada.

3.4 Instrumentos da coleta de dados

A coleta de dados foi realizada através da observação participante, pois atuou-se como professora pesquisadora. Esse método possibilita ao pesquisador aprender mais sobre as atividades das pessoas em seu contexto natural, através da observação e da participação nas atividades (KAWULICH, 2005). Há, também, a possibilidade de o pesquisador compartilhar experiências não somente observando, mas interagindo com os participantes, e utilizando-se de alguns instrumentos para o registro e coleta de dados, como:

- Fotos, áudio e posterior transcrição dos áudios de cada encontro, gerando material escrito para posterior análise. Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 201) afirmam que o uso desses instrumentos "[...] permitem registrar, com mais acuidade, eventos importantes que farão parte do material de análise da pesquisa". Ressaltam, ainda, a necessidade de familiarização dos envolvidos com os equipamentos utilizados.

- Questionário individual impresso (APÊNDICE E) aplicado no final da Oficina, pelo qual buscou-se a opinião dos participantes sobre a utilização de tecnologia como auxílio para o ensino de derivadas e como forma de validar as atividades propostas. O questionário, composto de perguntas abertas e fechadas, cuja escolha deve-se pelo ao fato das vantagens apresentadas frente a sua aplicação em pesquisas, tais como:

> Mais tempo para responder e em hora mais favorável; há mais uniformidade na avaliação, em virtude da natureza impessoal do instrumento; obtém respostas mais rápidas e mais precisas; há maior liberdade nas respostas, em razão do anonimato; mais segurança, pelo fato de as respostas não serem identificadas; menos risco de distorção, pela não influência do pesquisador; obtém respostas que materialmente seriam inacessíveis (MARCONI e LAKATOS, 2002, p. 52).

- Registro das resoluções nas folhas de atividades. Estas foram recolhidas, reproduzidas e devolvidas aos alunos. Esse instrumento foi o que possibilitou uma análise mais pormenorizada das respostas e das dificuldades apresentadas pelos alunos.

- O diário de campo, como recurso científico, consiste em uma forma de registro de observações, comentários e reflexões para uso individual do pesquisador para posterior análise, uma forma de complementação das informações sobre o cenário onde a pesquisa se desenvolve e em que estão envolvidos os sujeitos, a partir do registro de todas as informações que não sejam aquelas coletadas em contatos e entrevistas formais (TRIVIÑOS, 1987). Sua utilização pode levar à reflexão sobre os acontecimentos ocorridos e não requerer conhecimento aprofundado para seu devido uso.

O processo de análise e discussão dos dados coletados esteve ancorado nos pressupostos da análise de conteúdo, que de acordo com Bardin (2009) tem por objetivo a manipulação de mensagens (conteúdo e expressão deste conteúdo). Trata-se de

> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção [...] destas mensagens (BARDIN, 2009, p. 42)

Neste caso segundo Richardson (1999) a análise de conteúdo fará a descrição do texto, segundo a forma apresentada, isto é, os símbolos empregados, as palavras, frases, temas e expressões, na tentativa de verificar as tendências dos textos ou respostas e a adequação do conteúdo em estudo.

Ressalta-se que a análise e interpretação dos dados é um processo constante, o que leva a reflexão continua sobre os dados e é nitidamente parte das demais atividades do processo, como a coleta de dados e a formulação da questão de pesquisa (CRESWELL, 2007).

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

> A Matemática não é uma ciência cristalizada e imóvel; ela está afetada por uma contínua expansão e revisão dos seus próprios conceitos. Não se deve apresentar a Matemática como uma disciplina fechada, homogênea, abstrata ou desligada da realidade. Ao longo do tempo, ela esteve ligada a diferentes áreas do conhecimento, respondendo a muitas questões e necessidades do homem, ajudando-o a intervir no mundo que o rodeava. Porém, mesmo com tal importância, a disciplina da Matemática tem às vezes uma conotação negativa que influencia os alunos, alterando mesmo o seu percurso escolar. Eles sentem dificuldades na aprendizagem da Matemática e muitas vezes são reprovados nesta disciplina, ou então, mesmo que aprovados, sentem dificuldades em utilizar o conhecimento “adquirido”, em síntese, não conseguem efetivamente terem acesso a esse saber de fundamental importância (SANTOS et al, 2007).

O presente capítulo, apresentado em três seções, dedica-se à descrição das atividades da Intervenção Pedagógica e à análise dos dados obtidos por meio das atividades e do questionário de avaliação e validação das atividades respondido pelos participantes.

Assim, apresentamos inicialmente uma breve descrição das atividades realizadas pelos participantes, além de observações pertinentes feitas no decorrer do desenvolvimento, que foram registradas em nosso diário de campo.

Ressalta-se que as atividades foram elaboradas de forma a promover a participação ativa dos alunos e possibilitar um ambiente de diálogo e discussão.

Dessa forma, seria possível que os alunos vivenciassem processos característicos proporcionados pelo uso da tecnologia, como a experimentação e a investigação em conteúdos matemáticos, além de estimular a percepção visual dos alunos (BORBA e PENTEADO, 2001), auxiliando na construção e ressignificação de conceitos.

Outro aspecto importante das atividades propostas é o possível estabelecimento de relações entre os conhecimentos já construídos e as atividades realizadas, além da possibilidade de estabelecer relação entre as representações algébricas e geométricas envolvidas no conceito de derivada. Considerou-se que as atividades foram adequadas para que os participantes estabelecessem essas relações, principalmente através do uso da visualização proporcionada pelo Desmos que além de promover a intuição e o entendimento, possibilita uma abrangência maior dos assuntos matemáticos, permitindo aos alunos não somente aprenderem matemática, mas se tornarem capazes de fazer sua própria matemática (FLORES, 2012).

Na análise dos dados, tendo em vista preservar a identidade e a integridade dos sujeitos envolvidos na pesquisa, foram utilizadas letras a fim de identificar e diferenciar os alunos que participaram da intervenção pedagógica. Utilizou-se a letra E para indicar os estudantes, completando com números os 17 participantes da pesquisa, como E1, E2, E3,..., E17.

4.1 Descrevendo as atividades

Desenvolver uma abordagem alternativa para explorar a diferentes representações da derivada, utilizando como ferramenta de apoio o *software* gráfico Desmos foi o principal objetivo do trabalho junto aos alunos. Elaborou-se, para tanto, uma oficina pedagógica, cujo desenvolvimento será apresentado nesta seção

Cientes do intuito da prática, iniciou-se o trabalho solicitando aos alunos o acesso ao *software Desmos,* para que pudessem interagir com o aplicativo, conhecer seus principais comandos e ferramentas, de modo a proporcionar um primeiro contato com essa ferramenta, além de expor o motivo de sua utilização na atividade.

Após essa exposição inicial, tendo conhecimento de que o público alvo da Oficina era misto, sendo que alguns já haviam cursado a disciplina de Cálculo I, indagou-se sobre a real importância do estudo do Cálculo na graduação e, em especial do aprendizado do conceito de Derivada. Para que estudar Cálculo? E derivada? A partir desse questionamento, passou-se a ver alguns exemplos de aplicação da derivada, como no caso do estudo da inclinação de uma rampa em formato de curva e a questão de inclinação variada em uma função, exemplos para contextualizar a atividade inicial.

Ressaltou-se, ainda, a necessidade de estudo gráfico e geométrico do conceito de derivada, pois atualmente pesquisas têm evidenciado um trabalho mais algébrico diante deste conceito, o que acaba resultando em problemas de interpretação e integração dos aspectos gráfico e geométrico. Enfim, procurou-se dar aos alunos um panorama sobre a oficina pedagógica da qual participariam.

A seguir, foram transcritas as atividades que compõem a Oficina Pedagógica e registrou-se mais detalhadamente, logo abaixo de cada uma, os objetivos pretendidos com sua realização, bem como a imagem dos gráficos utilizados na proposta. Tendo em vista que o desenvolvimento das atividades teve um "impacto" semelhante nos alunos, escolheu-se a resposta de pelo menos um aluno[2]para demonstrar a solução apresentada e as possíveis contribuições de seu desenvolvimento.

Atividade A1 - Derivada como inclinação da reta tangente a um ponto (APÊNDICE A)

Objetivos e Análise da Atividade A1

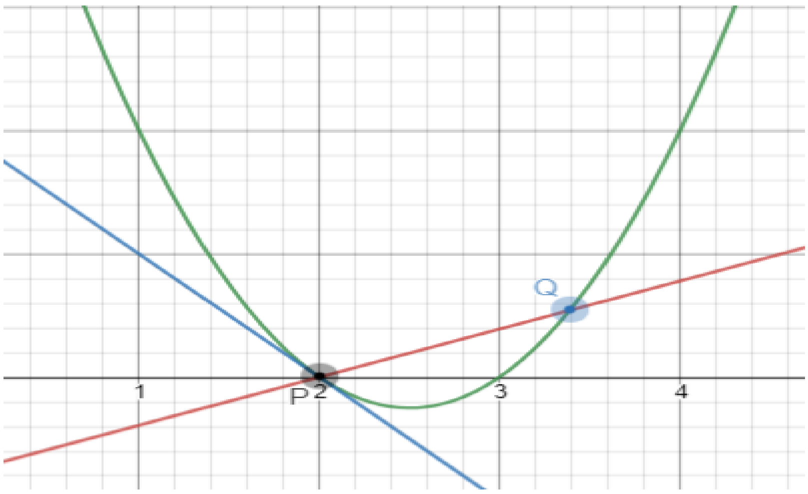
Esta atividade foi elaborada com a pretensão de que os alunos estabelecessem relações e/ou ressignificassem o conceito matemático expresso pela definição apresentada nos livros de Cálculo Diferencial e Integral como:

[2] Nas respostas dadas pelos alunos, preservamos a linguagem usada por eles.

> Se $P(x_0, f(x_0))$ é um ponto do gráfico de uma função f então a reta tangente ao gráfico de f em P, também chamada de reta tangente ao gráfico de f em x_0, é definida como sendo a reta que passa por P com inclinação
>
> $$m_{tg} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$
>
> Contando que este limite exista. Se o limite não existir, então concordamos que não há nenhuma reta tangente ao gráfico em P (ANTON, 2000, p. 178).

Os objetivos frente ao desenvolvimento da atividade foram os seguintes: compreender a relação entre a reta secante e a reta tangente a uma curva; estimular a percepção visual do conceito de limite e inclinação da reta tangente; relacionar aproximações com o conceito de limite; conceituar derivada como inclinação da reta tangente a um ponto da função. Durante a realização da Atividade 1, os alunos utilizaram o Gráfico 13, composto pela curva de uma função e duas retas.

Gráfico 13 – Retas e Curva da função correspondente a Atividade A1



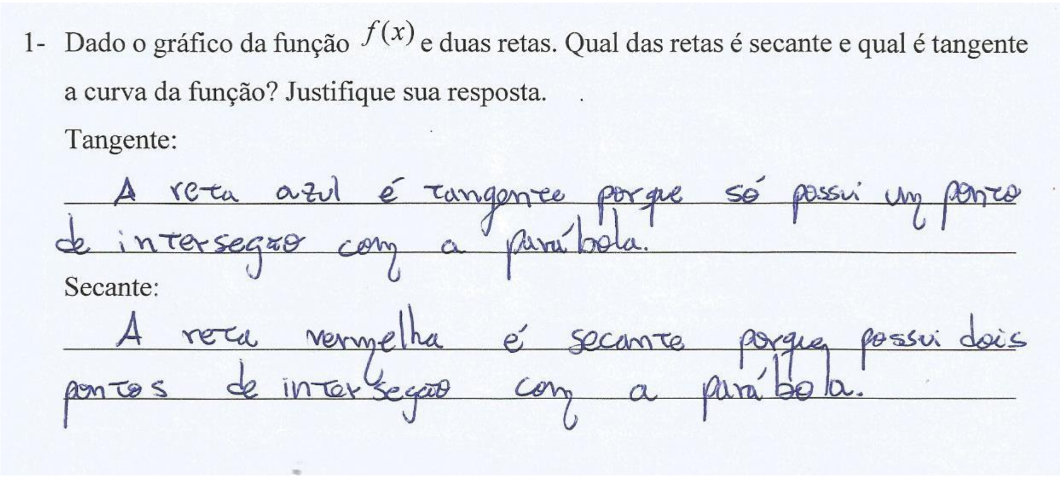
Fonte: Arquivo pessoal da autora

Como a base para o trabalho estava na compreensão de que a inclinação da reta tangente a um ponto da curva da função é encontrada por meio do limite da inclinação da reta secante, os alunos iniciaram a atividade tentando diferenciar a reta tangente da reta secante à curva. Diante dessa parte da atividade alguns alunos sentiram dificuldade para diferenciar ponto de tangência do ponto de intersecção.

Algumas das respostas apresentadas a esta questão, como mostra a Figura 9, evidenciam a falta de domínio referente a conceitos matemáticos mais elementares, como no caso dos termos tangente e intercepto, o que nos levou a retomar estes conceitos para que os alunos pudessem acompanhar o desenvolvimento das atividades.

De acordo com Frescki e Pigatto (2009), tais dificuldades podem estar relacionadas à inabilidade de explorar esses conteúdos de maneira mais rigorosa, pois ocorre uma tendência de quase sempre “decorar” e aplicar fórmulas de modo “artificial” em detrimento de um entendimento mais amplo e significativo do conceito, isso já no ensino básico, o que acaba provocando dificuldades e problemas para a construção de outros conceitos matemáticos.

Figura 9 – Resposta apresentada para diferenciação entre retas do aluno E15


1- Dado o gráfico da função $f(x)$ e duas retas. Qual das retas é secante e qual é tangente a curva da função? Justifique sua resposta.

Tangente:

A reta azul é tangente porque só possui um ponto de interseção com a parábola.

Secante:

A reta vermelha é secante porque possui dois pontos de interseção com a parábola.

Fonte: Atividade do aluno E15 (2018)

Para contribuir no entendimento do que é um ponto de tangência propôs-se aos alunos o uso do “zoom” do *software* Desmos sobre o ponto pertencente à reta que, parecia não cortar a curva da função, a fim de que percebessem que o critério de tangência está relacionado a um contato com a curva e não um corte (intercepto).

Tal procedimento auxiliou-os na diferenciação entre ponto de tangencia e de intercepto relacionados às retas e à curva da função, pois possibilitou a exploração visual daquilo que usualmente é expresso somente por definições ou material impresso, fato que nos leva a corroborar com a ideia de Alves e Reis (2010) que expressam que o ambiente dinâmico proporcionado pelo *software* contrasta os modelos geralmente estatísticos apresentados nos livros didáticos e a possibilidade de visualização de propriedades.

Na sequência, foram retomados os dados necessários para expressar a equação de uma reta, em que os alunos ressaltaram a necessidade de se obter dois pontos pertencentes à reta ou a inclinação dela para sua obtenção. Quando indagados sobre como calcular a inclinação da reta tangente à curva, perceberam que havia necessidade de se obter outro ponto para poder calcular a inclinação, o que foi obtido através da reta secante.

Para dar continuidade, selecionaram os pontos denominados P e Q pertencentes às retas e começaram a realizar as aproximações do ponto Q ao ponto P, pela direita e pela esquerda do mesmo, de modo a calcular a inclinação da reta tangente por meio da aproximação da inclinação da reta secante, utilizando tabelas, sendo essa uma forma de representação adotada nessa parte da atividade, como pode ser observado na Figura 10.

Figura 10 – Resposta à atividade A1 apresentada pelo aluno E2

4- Complete a tabela com os valores do ponto P, Q e m conforme o ponto Q se aproxima ao ponto P .

Aproximação pela direita de P		
P	Q	m
(2 , 0)	(3.58 , 0,916)	0,5797
(2, 0)	(3,26, 0,328)	0,2603
(2,0)	(3,01 , 0.01)	0,0099
(2,0)	(2,74 , -0,192)	− 0,2594
(2,0)	(2,01 , -0,01)	−1

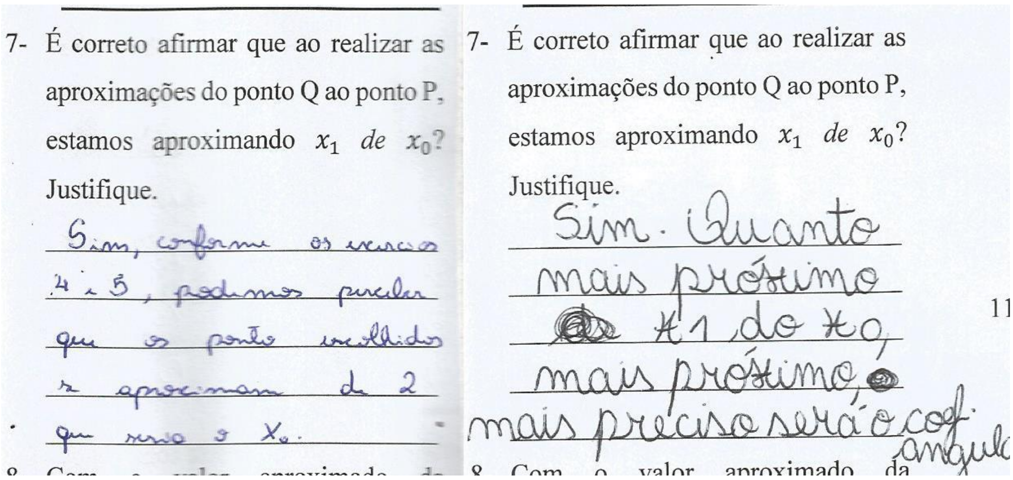
5- Faça o mesmo procedimento agora pela esquerda de P, mova o ponto Q iniciando em (1,2) até se aproximar o máximo possível de P, complete a tabela:

Aproximação pela esquerda de P		
P	Q	m
(2,0)	(1,2)	2/-1 = −2
(2,0)	(1.255, 1.3)	− 1.7449
(2,0)	(1.49 , 0.77)	− 1.5098
(2,0)	(1.73 , 0.343)	− 1.2703
(2,0)	(1.9 , 0.11)	− 1,1

Fonte: Atividade Aluna E2 (2018)

Além dos cálculos realizados na tabela, propôs-se algumas análises referentes aos termos x_0 e x_1 pertencentes aos pontos P e Q, a fim de que os alunos estabelecessem relações presentes em definições de Cálculo, como no caso da definição da derivada como processo de limite, tanto por meio da análise dos valores pertencentes à tabela construída, quanto pelos pontos pertencentes ao gráfico da função, atividade que foi realizada com êxito por todos os alunos, como pode ser observado nas respostas da Figura 11.

Figura 11 – Respostas à atividade A1 dos alunos E6 e E13


7- É correto afirmar que ao realizar as aproximações do ponto Q ao ponto P, estamos aproximando x_1 *de* x_0? Justifique.

Sim, conforme os exercícios 4 e 5, podemos perceber que os pontos escolhidos se aproximam de 2 que seria o x_0.

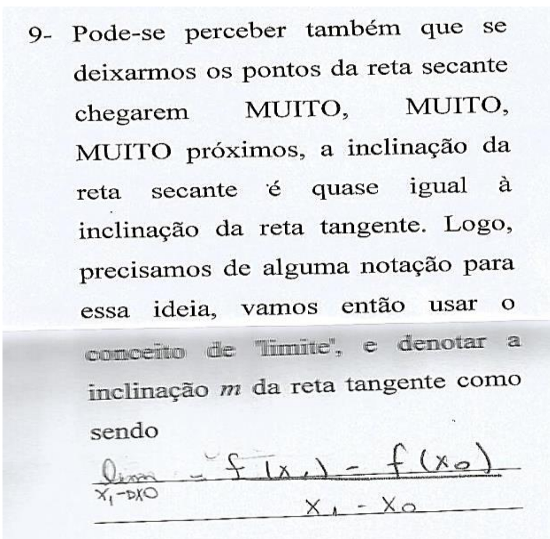
7- É correto afirmar que ao realizar as aproximações do ponto Q ao ponto P, estamos aproximando x_1 *de* x_0? Justifique.

Sim. Quanto mais próximo o x_1 do x_0, mais próximo, mais preciso será o coef. angular

Fonte: Atividade dos alunos E6 e E13 (2018)

Pelas respostas obtidas à atividade A1, deduziu-se que os alunos foram capazes de perceber e relacionar que a inclinação da reta tangente à curva no ponto P é obtida por meio do limite da inclinação da reta secante, com $x_1 \to x_0$, como pode ser percebido na Figura 12, na resposta apresentada por alunos que ainda não haviam cursado Cálculo I.

Figura 12 – Resposta à Atividade A1 apresentada pelo aluno E1


9- Pode-se perceber também que se deixarmos os pontos da reta secante chegarem MUITO, MUITO, MUITO próximos, a inclinação da reta secante é quase igual à inclinação da reta tangente. Logo, precisamos de alguma notação para essa ideia, vamos então usar o conceito de "limite", e denotar a inclinação m da reta tangente como sendo

$$\lim_{x_1 \to x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Fonte: Atividade aluno E1 (2018)

O êxito frente ao desenvolvimento da atividade A1 pode ser atribuído a aspectos como a investigação e experimentação proporcionados pelo uso do *software* Desmos e do guia de atividades, o que acabou possibilitando aos alunos o entendimento e/ou ressignificação do conceito de derivada como processo de limite da inclinação da reta secante, que antes parecia algo abstrato e longe de sua capacidade (através do aspecto visual), corroborando, deste modo, com Marin (2009), que destaca tais contribuições do uso de tecnologias para as aulas de Cálculo.

Atividade A2 - Derivada como taxa de variação instantânea (APÊNDICE B)

Objetivos e Análise da Atividade A2

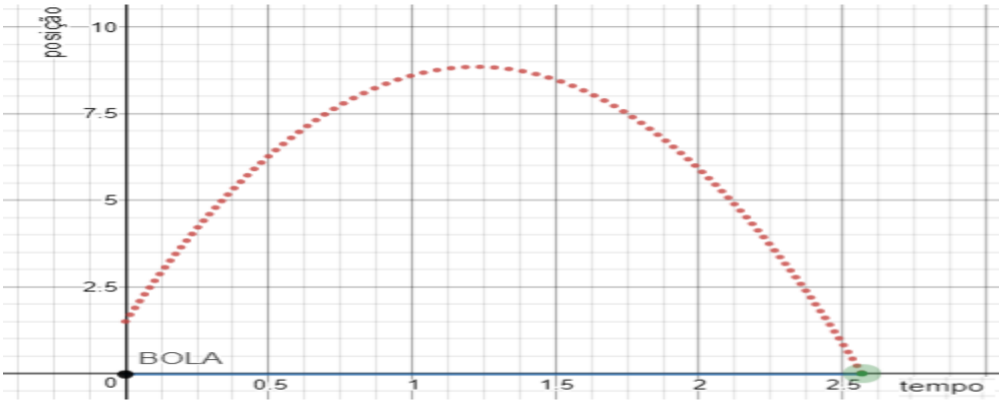
Esta atividade foi elaborada com a pretensão de que os alunos observassem e compreendessem a relação existente entre a taxa de variação média e a inclinação da reta secante, também a taxa de variação instantânea e a inclinação da reta tangente, por meio da exploração de um exemplo de aplicação e do gráfico que representa a trajetória percorrida por uma bola. Levaram-se em consideração algumas definições e teoremas para a elaboração da atividade proposta, tais como:

Se $y = f(x)$, então a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$ é a inclinação m_{PQ} da reta secante ao gráfico de f, que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, isto é, $m_{PQ} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ (ANTON, 2000, p. 173).

Se $y = f(x)$, então a taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto x_0 é a inclinação m_{tg} da reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto x_0, isto é, $m_{tg} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ (ANTON, 2000, p. 174).

Para trabalhar o conceito de taxa de variação média e instantânea utilizou-se um exemplo de aplicação referente à trajetória de uma bola, no qual os alunos puderam visualizar o comportamento dessa bola pelo controle deslizante acionado no Desmos (Gráfico 14).

Gráfico 14 – Trajetória da bola

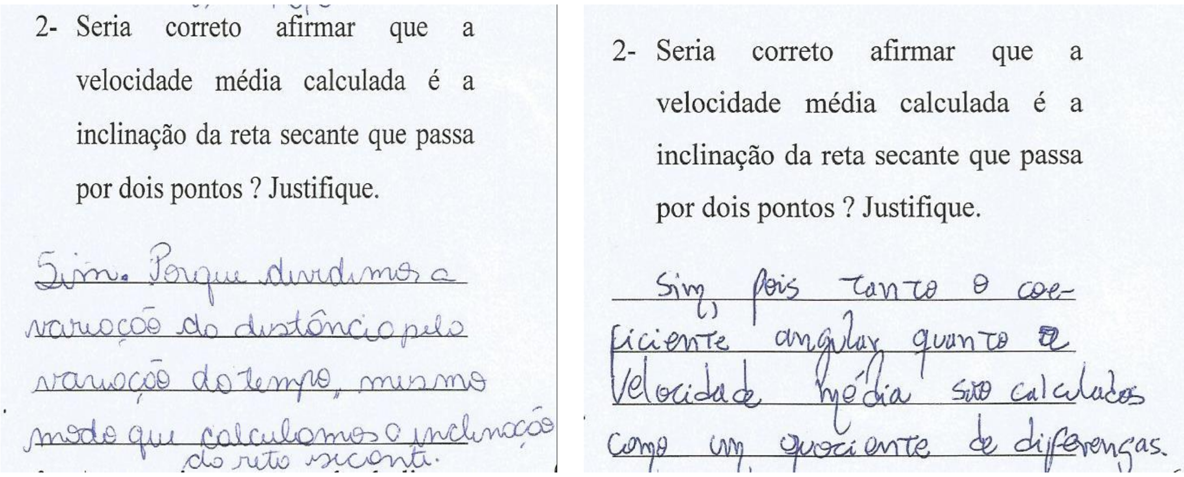


Fonte: Elaborado pela autora a partir do *software* Desmos

Após a visualização da trajetória, a primeira atividade buscou retomar o conceito de velocidade média de um corpo ou objeto, pela observação do plano cartesiano (x, y) no qual foi esboçado o gráfico da trajetória da bola e admitiu-se (x) como sendo o tempo e (y) como sendo a posição, além da retomada verbal referente ao cálculo da velocidade média de um carro em um determinado percurso, de modo com que todos pudessem chegar à definição formal da velocidade média.

Diante da revisão do conceito de velocidade média, buscou-se, pela segunda atividade, estabelecer uma comparação entre as expressões matemáticas utilizadas para o cálculo da inclinação da reta secante e o cálculo da velocidade média a partir dos dados utilizados, a fim de que os alunos percebessem a relação existente entre os conceitos. Observou-se que eles não tiveram dificuldade em fazê-la, e pelo registro de três alunos apresentados na Figura 13, percebe-se que relacionaram a taxa de variação média com a inclinação da reta secante adequadamente.

Figura 13 – Resposta à Atividade A2 apresentada pelos alunos E3, E4


2- Seria correto afirmar que a velocidade média calculada é a inclinação da reta secante que passa por dois pontos ? Justifique.

Sim. Porque dividimos a variação da distância pela variação do tempo, mesmo modo que calculamos a inclinação da reta secante.

2- Seria correto afirmar que a velocidade média calculada é a inclinação da reta secante que passa por dois pontos ? Justifique.

Sim, pois tanto o coeficiente angular quanto a velocidade média são calculados como um quociente de diferenças.

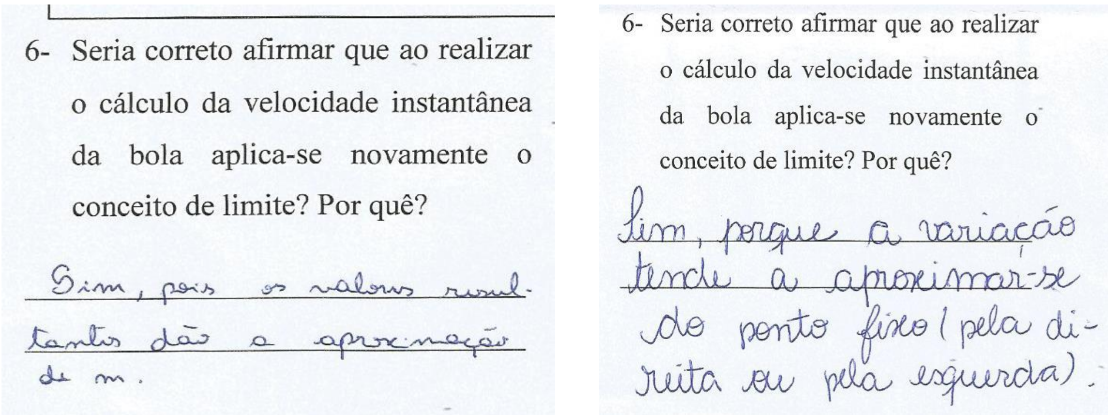
Fonte: Atividade dos alunos E3, E4

Na sequência, os alunos acionaram novamente o controle deslizante para que a bola percorresse sua trajetória e, em dado momento, solicitou-se que parassem o controle e anotassem o ponto onde a bola parou. Com o ponto anotado, os alunos construíram o gráfico da trajetória, marcaram o ponto no gráfico e traçaram uma reta tangente a esse ponto. Traçada a reta, os alunos partiram para o cálculo da velocidade da bola naquele instante, realizando as aproximações ao redor desse ponto.

Na realização dos cálculos de aproximação, alguns alunos tiveram dificuldade por se tratar de números decimais, precisaram de um tempo a mais para conclusão dessa etapa, o que acabou subtraindo tempo para o fechamento da Atividade A2. Porém, ao mesmo tempo, foram trocando ideias e ajudando-se para que todos pudessem acompanhar o andamento da oficina.

Pelo registro de alguns dos alunos, pôde-se observar que eles chegaram à conclusão esperada, ou seja, de que a taxa de variação instantânea (velocidade instantânea) em um ponto é a inclinação m da reta tangente ao gráfico no ponto x_0, e de que foi utilizado o processo de limite para sua resolução. A Figura 14 comprova essa evidência.

Figura 14 – Resposta à Atividade A2 dos alunos E6, E7


6- Seria correto afirmar que ao realizar o cálculo da velocidade instantânea da bola aplica-se novamente o conceito de limite? Por quê?

Sim, pois os valores resultantes dão a aproximação de m.

6- Seria correto afirmar que ao realizar o cálculo da velocidade instantânea da bola aplica-se novamente o conceito de limite? Por quê?

Sim, porque a variação tende a aproximar-se do ponto fixo (pela direita ou pela esquerda).

Fonte: Atividade dos alunos E6, E7

O desenvolvimento da atividade A2, demonstrou que o uso de tecnologia pode possibilitar a organização de situações e atividades pedagógicas diferenciadas com maior potencial de aproveitamento pelos alunos, capaz de simular trajetórias para serem exploradas, a fim de proporcionar a visualização dinâmica do movimento, contribuindo para sua significação, corroborando, desse modo, com Marin (2009).

Atividade A3 - Inclinações positiva, negativa e nula da reta tangente à curva de uma função. (APÊNDICE C)

Objetivos e Análise da Atividade A3

Com a realização desta atividade oportunizou-se aos alunos a análise do comportamento de algumas funções pela inclinação da reta tangente à curva. Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela informa para qual direção a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que informações sobre $f'(x)$ forneçam informações sobre $f(x)$.

O principal objetivo da atividade foi investigar relações possíveis entre o comportamento da função do ponto de vista do crescimento/decrescimento e os pontos críticos por meio da inclinação da reta tangente, ou seja, da derivada, trabalhando seus aspectos gráfico e tabular.

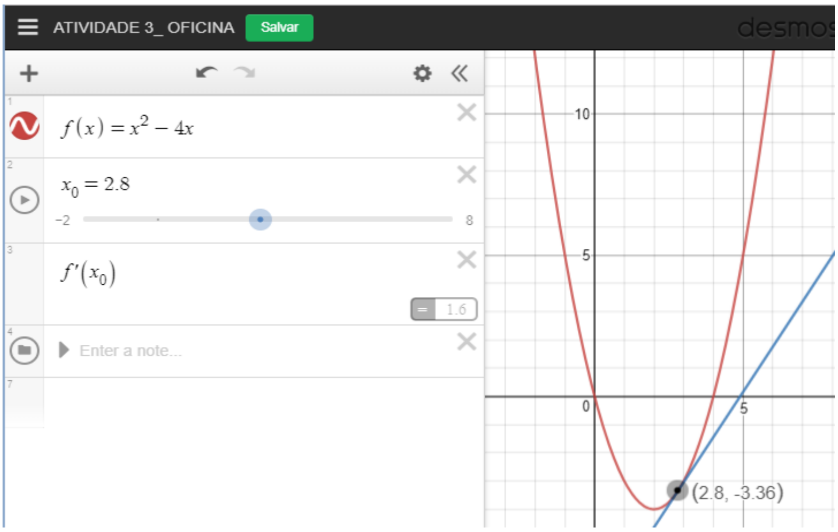
Levaram-se em consideração para elaboração da atividade os seguintes teoremas e definições:

> Definição: Seja f definida em um intervalo e x_1 e x_2 dois pontos nesse intervalo:
>
> f é crescente no intervalo se $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$
>
> f é decrescente no intervalo se $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$
>
> f é constante no intervalo se $f(x_1) = f(x_2)$ para todos os pontos x_1 e x_2 (ANTON, 2000, p. 290).

> Teorema: Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado [a,b] e diferenciável no intervalo aberto (a,b),
>
> Se $f'(x) > 0$, para todo valor de x em (a, b), então f é crescente em $[a, b]$.
>
> Se $f'(x) < 0$, para todo valor de x em (a, b), então f é decrescente em $[a, b]$.
>
> Se $f'(x) = 0$ para valor de x em (a, b), então f é constante em $[a, b]$ (ANTON, 2000, p. 291).

A Atividade A3 iniciou-se pela construção de uma tabela de valores para a função $f(x)$, com o objetivo de analisar o comportamento da função e definir seus intervalos de crescimento e decrescimento, além do ponto onde ocorreu a mudança de comportamento. Na sequência, pela movimentação da reta tangente à curva da função $f(x)$ (Gráfico 15), para obtenção do valor da derivada em cada ponto e da construção da tabela para $f'(x_0)$, ocorreu a análise dos valores da inclinação da reta tangente, a fim de estabelecer as relações possíveis com o comportamento da função.

Gráfico 15 – Gráfico utilizado na Atividade 3



Fonte: Elaborado pela autora a partir do *software* Desmos

Notou-se, com a realização da atividade A3, que os alunos compreenderam e identificaram as relações existentes entre a derivada e a função original no que tange ao aspecto gráfico, identificando os intervalos de crescimento e decrescimento da função pela verificação da inclinação da reta tangente a alguns pontos pertencentes à curva, bem como o ponto em que ocorre a mudança de comportamento da função, no qual a derivada é nula, aspectos que podem ser observados através das respostas obtidas de um aluno, disponível na Figura 15.

Figura 15 – Respostas do aluno E1 para a atividade A3

0	−4
1	−2
2	0
4	4
5	6
6	8

a) Nos intervalos onde $f(x)$ é crescente. Os valores da inclinação $f'(x_0)$ são positivos ou negativos?

Positivos

b) Nos intervalos onde $f(x)$ é decrescente. Os valores da inclinação $f'(x_0)$ são positivos ou negativos?

Negativo

c) No ponto onde ocorre a mudança de comportamento de $f(x)$, determine o valor da inclinação da reta tangente neste ponto e a posição da reta em relação ao eixo x.

Nula. Paralelo ao eixo x.

4- Podemos relacionar o comportamento da função $f(x)$ com sua derivada. Volte ao gráfico e compare os intervalos onde $f(x)$ é crescente e decrescente com os intervalos onde a derivada $f'(x)$ é positiva e negativa. Complete a tabela com as conclusões obtidas.

Sobre os intervalos (ou valores) em que a derivada $f'(x)$:	***Sobre a função $f(x)$***
$f'(x) > 0$	Crescente
$f'(x) < 0$	Decrescente
$f'(x) = 0$	Ocorre uma mudança de comportamento

Fonte: Atividade do aluno E1 (2018)

Diante da resposta percebe-se que o uso de tabelas e do gráfico da função possibilitou a descoberta das relações, as quais, na disciplina de Cálculo I, foram trabalhadas apenas algebricamente com os alunos. Aponta-se que a comparação entre os intervalos onde a função é crescente e decrescente, com os intervalos onde a inclinação da reta tangente à curva é positiva, negativa e nula mostraram-se válidas e auxiliaram na aprendizagem do conceito em estudo.

Atividades A4 - Comportamento da função por meio da análise da derivada. (APÊNDICE D)

Objetivos e Análise da Atividade A4

Mediante a realização da atividade A4, cabe destacar que os alunos tiveram a oportunidade de estabelecer relações entre o gráfico da derivada e da função. Entre os objetivos dessa atividade estavam: estimar pontos de máximo e mínimo relativos através da observação gráfica, verificando se os valores estimados se confirmam pela aplicação do procedimento algébrico; compreender a relação entre a função e sua derivada graficamente.

Para a elaboração dessa atividade levaram-se em consideração os seguintes teoremas e definições:

> Definição: Uma função f tem um **máximo relativo** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0, no qual $f(x_0)$, é o maior valor, isto é, $f(x_0) \geq f(x)$para todo x no intervalo. Analogamente, se diz que f tem um **mínimo relativo** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0, no qual $f(x_0)$ é o menor valor, isto é, $f(x_0) \leq f(x)$para todo x no intervalo. Quando f tiver um máximo ou um mínimo relativo em x_0, se diz que f tem um **extremo relativo** em x_0 (ANTON, 2000, p. 299).

Todo extremo relativo é um ponto crítico c de $f(x)$, mas nem todo ponto crítico é um extremo relativo. O ponto crítico da função é aquele no qual a derivada é nula $f'(x) = 0$, nos pontos onde a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ é horizontal, ou $f'(x)$ = ∄, em quinas, descontinuidades ou pontos onde a reta tangente é vertical, e precisa ser analisado:

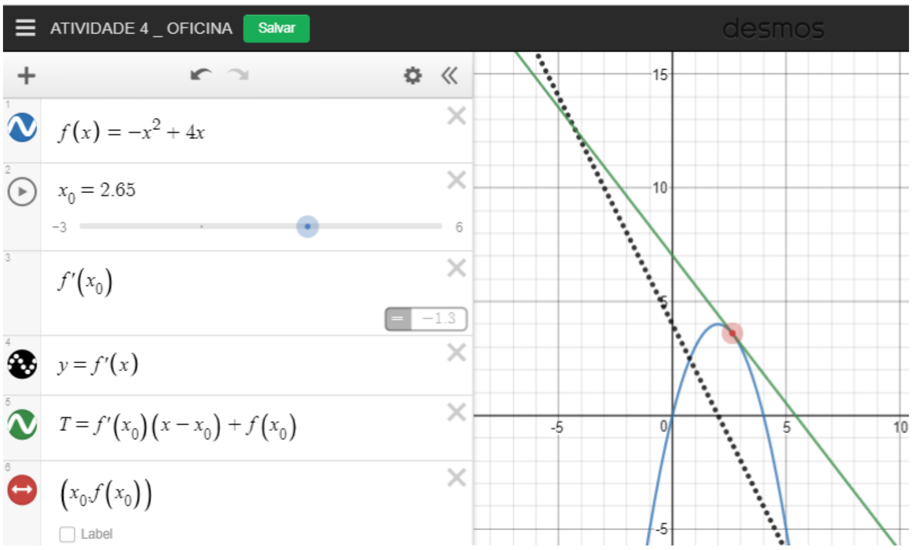
(a) Se $f'(x)$ for positiva à esquerda do ponto crítico c e negativo à direita dele, o ponto é um máximo relativo.

(b) Se $f'(x)$ for negativo à esquerda do ponto crítico c e positivo à direita dele, o ponto é um mínimo relativo.

(c) Se $f'(x)$ for o mesmo em ambos os lados do ponto crítico c, o ponto não é máximo nem mínimo relativo.

Em realização à atividade, os alunos utilizaram o gráfico da derivada para compreender o comportamento da função original (Gráfico 16), determinando os intervalos onde o gráfico de $f'(x)$ era positivo, negativo e os pontos onde interceptava o eixo x. A análise ao redor dos pontos de intercepto com o eixo x possibilitou o reconhecimento da derivada nula para obtenção dos pontos críticos da função. Em sua aplicação, conforme o trabalho se desenvolvia, os alunos tiravam dúvidas referentes à interpretação gráfica da função, estabelecida através do gráfico da função derivada, de modo a aprofundar o conceito em estudo, demonstrando interesse e participando ativamente da realização das atividades.

Gráfico 16 - Gráfico utilizado na Atividade A4



Fonte: Elaborado pela autora

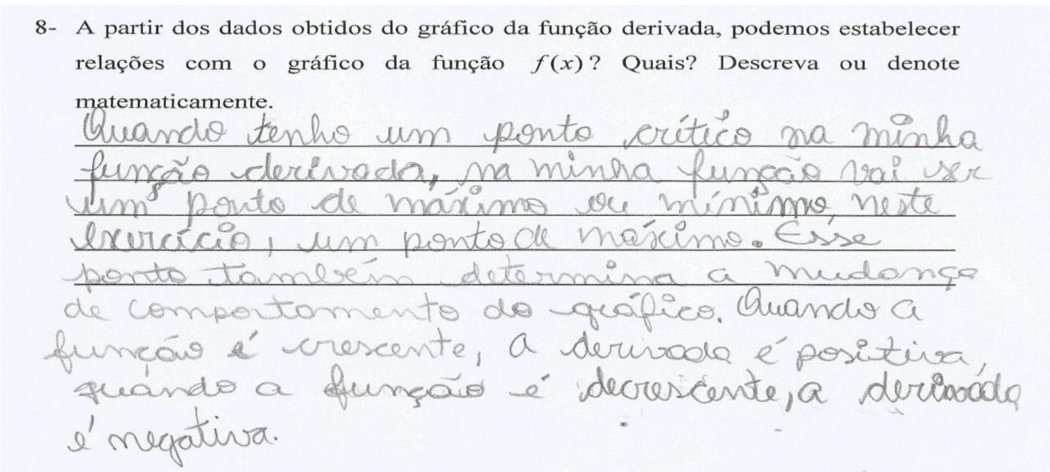
No desenvolver dessa atividade, os alunos começaram a perceber e evidenciar que o processo algébrico ensinado na disciplina de Cálculo I, referente à necessidade de igualar a zero a função derivada primeira para a obtenção dos possíveis pontos críticos da função está relacionada aos pontos de intercepto do gráfico da função derivada com o eixo x, que nada mais é do que as raízes da função derivada.

Diante das considerações acima citadas, corrobora-se com Couy (2008) no que tange à utilização de ferramentas tecnológicas para potencializar o uso dos recursos gráficos no ensino de Cálculo para estimular a observação, a busca por regularidades e padrões, a fim de estabelecer relações. Da mesma forma, Reis e Junior (2016) destacam a importância do uso da imagem visual para a compreensão dos conceitos envolvidos no Cálculo e de sua interação com o aspecto analítico.

Diante dessa abordagem, aproveitou-se também para relacionar o procedimento algébrico de derivação da função a fim de estabelecer relações gráficas pertinentes, indagando-se os alunos sobre qual seria a função originada da derivação de uma função quadrada. Ao questionamento, os alunos apontaram que seria uma função de 1º grau, ou seja, linear, de modo que, solicitou-se a atenção para o gráfico da função derivada que estavam analisando, para que percebessem que o procedimento algébrico pode ser interpretado graficamente, ou seja, uma função quadrática quando derivada origina uma função linear, uma função cúbica derivada origina uma função quadrática, e assim por diante.

Conforme a Figura 16, pôde-se constatar que os alunos conseguiram concluir que o gráfico da derivada define o comportamento da função original, determinando seus intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximo ou de mínimo. Da mesma forma, que perceberam que o procedimento algébrico referente ao cálculo de pontos críticos está relacionado à análise gráfica da função derivada, o que possibilita melhor entendimento de todo processo matemático referente ao estudo do comportamento de funções através da derivada.

Figura 16 – Resposta à Atividade A4 do aluno E2



8- A partir dos dados obtidos do gráfico da função derivada, podemos estabelecer relações com o gráfico da função $f(x)$? Quais? Descreva ou denote matematicamente.

Quando tenho um ponto crítico na minha função derivada, na minha função vai ser um ponto de máximo ou mínimo, neste exercício, um ponto de máximo. Esse ponto também determina a mudança de comportamento do gráfico. Quando a função é crescente, a derivada é positiva, quando a função é decrescente, a derivada é negativa.

Fonte: Resposta à atividade A4 do aluno E2

Após o término das explorações, passou-se para a etapa de discussões finais. O grupo, junto com a pesquisadora, ressaltou e refletiu sobre uma série de situações que, vivenciadas durante a aplicação da Oficina, acabaram motivando e tornando mais significativa a aprendizagem do conceito de derivada. Nessa análise reflexiva foram realçados alguns pontos importantes: os alunos sentiram-se inseridos no processo de aprendizagem, pois propiciou-se sua participação ativa o que, consequentemente, deixou-os motivados a descobrir; ocorreu a possibilidade de estudar o objeto e estabelecer relações a fim de reconstruir o conceito estudado, dando sentido à aprendizagem; o trabalho gráfico aliado ao aspecto algébrico proporcionou a ressignificação de conceitos, como no caso da velocidade instantânea, do cálculo dos pontos críticos de uma função pela sua derivada, da definição de derivada pelo processo de limite.

Durante a realização das atividades, observou-se que os alunos se mostravam atentos às exposições realizadas pela pesquisadora quanto ao uso do *software* Desmos, demonstrando interesse e autonomia ao explorar a variação de funções e sua derivada e, também, ao fazer conjecturas, o que se atribui à riqueza dos conceitos e às representações gráficas que o recurso apresenta. A possibilidade de trabalhar em um ambiente informatizado também favoreceu o desenvolvimento das atividades, visto que os alunos puderam vivenciar e desenvolver habilidades utilizando um computador, recurso pertencente ao cotidiano dos envolvidos.

Neste sentido, o ambiente computacional, mais especificamente o *software* Desmos, contribuiu para a criação de um espaço mais dinâmico, capaz de proporcionar vantagens e incentivos para que os alunos trabalhassem com disposição e interesse. Esse aspecto da percepção dos estudantes foi demonstrado por meio das indagações e contribuições realizadas no decorrer do desenvolvimento das atividades, corroborando com o evidenciado por Paranhos (2009), diante do uso de ambiente informatizado nas aulas de Cálculo, experimentados na prática ora descrita.

As afirmações de Ponte e Canavarro (1997) vão ao encontro das observações feitas durante a Intervenção Pedagógica, uma vez que descrevem que o tipo de ambiente propiciado desenvolve a curiosidade e o gosto por aprender, visto que proporciona a criação de contextos de aprendizagem ricos e estimulantes, em que os alunos sentem despertada a sua curiosidade e incentivada a descoberta.

Descritas as atividades, tratar-se-á, na próxima seção, da análise do questionário aplicado aos alunos após a Intervenção Pedagógica, realizando-se, também, algumas considerações frente à realização das atividades propostas na Oficina.

4.2 Analisando o Questionário

Além das atividades realizadas pelos participantes, descritas anteriormente, outra fonte de dados de nossa pesquisa foi um Questionário de Avaliação e Validação das Atividades (APÊNDICE E), o qual foi respondido individualmente pelos alunos, após a realização das atividades.

Para elaboração do questionário buscou-se contemplar duas atividades relacionadas ao conceito estudado na Oficina, além de perguntas sobre o uso do *software* Desmos e sobre as atividades propriamente ditas, com a intenção de verificar a validade da proposta desenvolvida. O questionário foi realizado por 6 alunos de diferentes semestres do curso de Licenciatura em Matemática, participantes da Oficina nas duas noites.

Na sequência, apresentam-se as respostas obtidas referentes ao uso do *software* Desmos e às atividades. A primeira questão estava relacionada à apresentação de alguma dificuldade no uso do Desmos. Dos seis participantes, todos responderam que não houve dificuldade em manusear o *software* e ainda ressaltaram: "não tive dificuldades pois o mesmo é muito dinâmico e de fácil interação (ALUNO E1); não, muito simples e prático (ALUNO E2); achei um *software* bom, prático e de fácil manejo (ALUNO E3); Houve um estranhamento inicial, mas achei a maioria dos comandos bem intuitivos (ALUNO E4)".

Em relação a esse "estranhamento" apontado por um dos participantes, buscou-se saber a que aspecto se referia o termo empregado. Ao que o estudante relatou ter estado inseguro no início da oficina, principalmente quanto aos comandos e funções do Desmos, no entanto, já no desenvolvimento da atividade A1, ele percebeu que os comandos eram simples e de fácil compreensão e manejo.

Considerando as respostas obtidas no conjunto dos questionários, percebe-se que a seleção do objeto para o desenvolvimento da intervenção foi adequada, visto que se levou em consideração cuidados apontados por Gravina e Santarosa (1998) frente ao uso de tecnologias em sala de aula, como a facilidade de domínio das ferramentas e comandos do *software* utilizado, de modo que todos pudessem interagir e manusear os gráficos, construir tabelas, selecionar pontos e mover retas sem dificuldades.

A segunda questão buscou saber se as atividades realizadas haviam auxiliado na compreensão do conceito de Derivada, e por quê. Em sua elaboração, foram previstas algumas opções para a resposta a essa pergunta. Assim, encaminhou-se a resposta em relação à contribuição ter sido positiva – sim -, negativa - não -, ou em alguns aspectos - um pouco. Entre as respostas, todos os seis alunos responderam que sim, que houve realmente contribuições.

Como justificativa à resposta afirmativa, obteve-se as seguintes considerações: “pois aprofundaram ainda mais o conteúdo discutido em Cálculo I e me fizeram compreender de uma forma diferente e facilitada conceitos que tinha dificuldade quando fiz a matéria (ALUNO E6)”; “a visualização e a construção possibilitam uma aprendizagem muito maior do que apenas a teórica (ALUNO E3)”; “a visualização, gráfica em conjunto com a análise do gráfico e dos dados obtidos, facilitam a compreensão (ALUNO E4)”; “uma visão mais enfática a conceitos que muitas vezes passam despercebido (ALUNO E5)”; “porque possibilitou compreender o que o gráfico da função derivada diz da função (ALUNO E2)”; “pois possibilitou estabelecer relações com outros conteúdos, como função de 1º e 2º grau, que já tenho mais domínio (ALUNO E1)”.

Ao analisar as respostas transcritas, percebe-se que o termo visualização é mencionado e enfatizado, demonstrando a importância desse aspecto no desenvolvimento das atividades, o que contribuiu para reengajar e recuperar os fundamentos conceituais da derivada, muitas vezes explorado de maneira tradicional e somente no aspecto algébrico.

No que tange à manipulação de imagens visuais proporcionadas pelo uso de ferramentas tecnológicas, nesse caso do Desmos, ratificou-se om estudo de Couy

(2008), quando esta afirma que ao adquirir um caráter exploratório, as imagens visuais permitem com que o aluno analise, interprete, descubra variantes e compreenda o conteúdo matemático, suas características e propriedades, estimulando a descoberta. Esse foi um aspecto oportunizado no trabalho de aplicação prática, salientado pelos participantes.

Para dar sequência, apresentam-se as questões referentes ao conceito abordado na Oficina, as quais foram analisadas levando-se em consideração as atividades desenvolvidas e o apontamento de que, de acordo com a literatura revista, os estudantes têm apresentado baixo aproveitamento na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

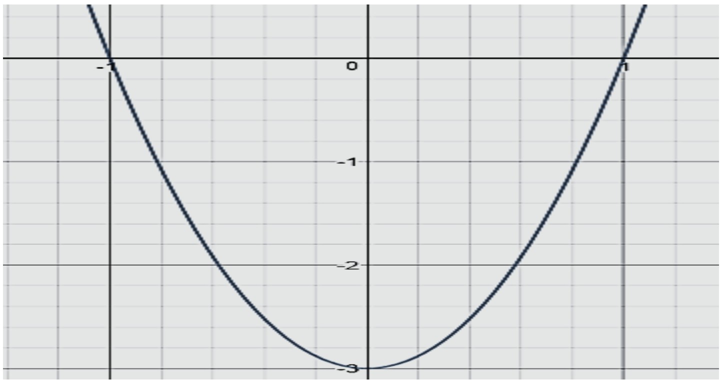
Questão 3. Defina o(s) conceito(s) de Derivada.

O objetivo dessa questão foi fazer com que o aluno, usando a conjectura elaborada nas atividades 1 e 2, definisse com suas palavras ou matematicamente o conceito de Derivada, amparado também em suas experiências.

Pelas respostas obtidas, verificou-se que houve aproveitamento do conteúdo estudado, pois dos 6 alunos, quatro responderam que a derivada está relacionada com uma taxa de variação em um determinado ponto da função; um respondeu que pode ser entendida como a inclinação da reta tangente aos pontos da função; enquanto outro descreveu como sendo a que determina função crescente, decrescente, pontos críticos, pontos de máximo ou de mínimo, pontos de inclinação.

Diante das respostas, fica evidente que o trabalho gráfico e de aplicação elucidou nos alunos a representatividade do conceito e de seus aspectos, como a taxa de variação instantânea, o comportamento da função e a inclinação da reta tangente a uma curva, dessa forma contribuindo para a aprendizagem do conceito de modo mais eficiente e com significado mais amplo do que se fosse trabalhado somente por seu aspecto algébrico.

Questão 4. Observe o gráfico da função derivada $f'(x)$ e determine:



a) O(s) intervalo(s) onde a função $f(x)$ é crescente.

b) O(s) intervalo(s) onde a função $f(x)$ é decrescente.

c) O(s) ponto(s) onde a função $f(x)$ possui inclinação da reta tangente igual a zero.

d) Esboce o gráfico da função $f(x)$ com os dados obtidos anteriormente.

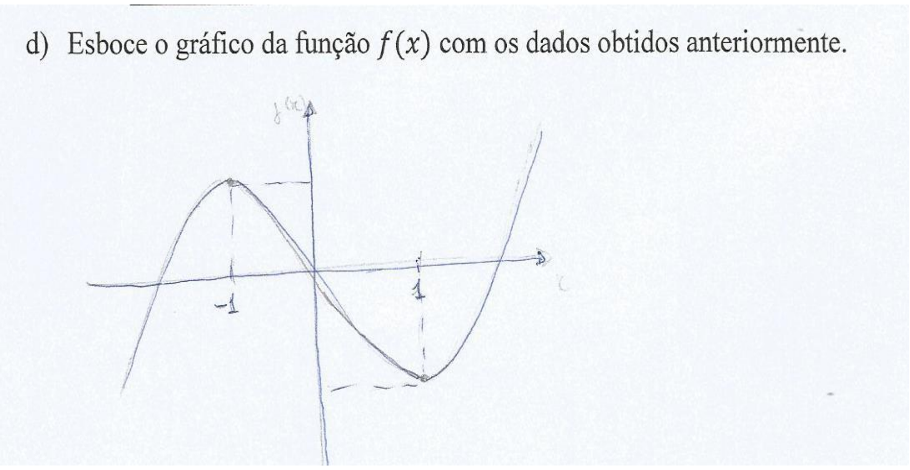
O objetivo dessa questão foi fazer com que o aluno, pelo fráfico da função derivada, determinasse o comportamento da função original, identificando seu intervalo de crescimento, decrescimento e pontos críticos. As atividades A3 e A4 da Oficina relacionaram o comportamento da função através da análise do gráfico da função derivada, partindo dos pontos de intercepto com o eixo x e da análise da inclinação da reta tangente à curva da função. Também era esperado que o aluno tivesse condições de esboçar o gráfico de $f(x)$ a partir dos dados obtidos do gráfico da função derivada.

Diante das respostas obtidas para a identificação dos intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x)$ e seus pontos críticos, itens a, b e c da questão A4, pôde-se perceber que cinco dos seis alunos responderam corretamente. Um dos alunos, no entanto, não identificou corretamente os intervalos, e os pontos críticos, fato que pode ser atribuído a um equívoco decorrente da falta de atenção na leitura da questão, pois o estudante utilizou o gráfico como sendo da função original e não da função derivada.

Conforme respostas apresentadas - e demonstrado na Figura 17 -, referente ao item d da questão, a qual solicitava o esboço do gráfico da função $f(x)$ a partir dos dados obtidos do gráfico da função derivada, todos os alunos resolveram a contento, uma vez que conseguiram traçar o esboço, demonstrando domínio do conteúdo em estudo, validando a abordagem utilizada durante a Oficina.

Logo, pode-se corroborar com ideias de Marin (2009) sobre a expansão de possibilidades de trabalho com diferentes abordagens e representações algébricas e geométricas, de forma rápida e articulada e com ótimo aproveitamento pelos alunos possibilitada pelo uso de tecnologias, assim como a possibilidade de o professor explorar de modo diferenciado o conteúdo, privilegiando a compreensão e a interpretação.

Figura 17 – Resposta ao Item d pelo aluno E3



Fonte: Questionário aluno E3

4.3 Analisando a Intervenção Pedagógica

A partir da descrição realizada por meio de observações, do confronto com o referencial teórico-bibliográfico e, também, das respostas dadas ao questionário, podem ser elencadas como potencialidades emergentes do uso do Desmos e das atividades em nossa pesquisa:

1) A visualização e investigação como formas de potencializar as diferentes abordagens do conceito de derivada.

No referencial teórico trabalhado no Capítulo 2, destaca-se a importância da visualização como parte dos processos de ensino e aprendizagem de matemática. Na perspectiva de Rösken e Rolka (2006), a visualização é uma ferramenta poderosa para explorar problemas e dar significado a conceitos matemáticos e à relação entre eles. Dessa forma, sua utilização em sala de aula é vista como um recurso facilitador e, ao mesmo tempo, motivador aos alunos.

Assim, diante desse contexto elaboraram-se as atividades da pesquisa utilizando recursos gráficos não estáticos, a fim de proporcionar a exploração de propriedades e as relações existentes para elucidação do conceito de derivada, tendo como recurso as imagens manipuladas no *software* Desmos. Considerou-se, também, as ideias de Borba e Penteado (2001), no que tange ao uso da tecnologia computacional como estímulo para a percepção visual do aluno.

Para o desenvolvimento das atividades, que desempenharam um papel investigativo, a manipulação dos recursos gráficos como as retas no caso da Atividade A1, além de proporcionar a interação com o objeto em estudo, possibilitou aos alunos a comprovação da relação existente entre o conceito de limite e a inclinação da reta, contribuindo para a conceptualização da derivada como o processo de limite da inclinação da reta secante.

Na atividade A2, explorou-se a trajetória de uma bola, através da sua movimentação por meio do recurso de controle deslizante acionado no Desmos. Essa ação de movimentação permitiu explorar a ideia de velocidade média e instantânea, provocando reflexões acerca dos dois conceitos em estudo. Frente a essa atividade, alguns alunos afirmavam não compreender a velocidade instantânea, mas ao finalizá-la sentiram-se realizados, pois conseguiram compreender seu significado e a relação com a derivada em um ponto.

Percebeu-se, pelas observações realizadas e respostas obtidas no questionário, que os alunos alcançaram facilidade em compreender o conceito ou então ressignificar os conhecimentos que já possuíam por meio do aspecto visual proporcionado pelo Desmos. Essa ocorrência permite corroborar com Marin (2009), que apontou a facilitação como sendo uma das vantagens do uso de recursos computacionais para as aulas de Cálculo, o que também proporciona a experimentação, a descoberta e a investigação daquilo que foi repassado ao aluno na forma de conteúdo pronto e acabado.

Tratando-se de uma Oficina pedagógica, as interações promovidas durante a realização das atividades, sendo elas verbais ou não, evidenciam que este tipo de trabalho permite que os alunos explorem ideias e estratégias que podem promover o desenvolvimento do pensamento matemático (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006).

Nas atividades A3 e A4 utilizaram-se outros recursos presentes no Desmos, como a construção de tabelas, marcação de pontos e construção do gráfico da derivada. Essas práticas consistiram, também, em oportunidade para que os alunos manipulassem diferentes formas de representações e, a partir delas, buscassem traçar relações e compreender seus significados, como no caso da inclinação da reta tangente à curva de uma função, em que a manipulação da reta tangente e a construção da tabela de valores, levaram ao confronto dos dados para obtenção dos intervalos de crescimento e decrescimento da função.

No caso da Atividade A4, os alunos realizaram a análise tanto do gráfico da função, quanto do gráfico da função derivada, à disposição na mesma tela, de modo a conduzir à interpretação do comportamento da função através do gráfico da derivada. Procedimentos algébricos são muito explorados para estabelecer essas relações, porém a compreensão gráfica do conceito muitas vezes não é estabelecida, dificuldade recorrente que motivou a proposição dessa atividade.

Nesse sentido, a manipulação dos gráficos permitiu a compreensão dos procedimentos algébricos estudados na disciplina de Cálculo I, possibilitando também uma retomada na questão de aplicações da derivada, como no caso do cálculo de áreas máximas e mínimas, ou seja, problemas envolvendo otimização.

Percebeu-se que a experiência de análise gráfica pelo do uso do Desmos e das atividades possibilitou a exploração dos conceitos, muitas vezes abstratos aos olhos dos alunos. Isso porque a manipulação das imagens proporcionou a interpretação de propriedades matemáticas, o que, corroborando com Reis e Júnior (2016), destacam a importância da imagem visual para a compreensão dos conceitos envolvidos na disciplina de Cálculo e da interação desses conceitos com aspecto analítico.

Novamente, segundo Costa e Souza Júnior (2007), com a utilização de tecnologias se possibilita ao aluno construir conceitos ou então ressignificar conceitos já estudados que possam estar relacionados à visualização.

No questionário aplicado aos participantes, objetivou-se identificar as contribuições das atividades para uma ressignificação dos conhecimentos em relação ao conceito de derivada, por meio do qual os alunos destacaram que o uso da visualização como recurso pedagógico facilitou a compreensão/ressignificação do conceito de derivada e suas diferentes abordagens, o que foi promovido através do uso dos gráficos e atividades guiadas.

Ficou claro nos depoimentos que as atividades elaboradas com o propósito de investigação e análise dos gráficos contribuíram para as diferentes abordagens do conceito de derivada e, é claro, para ressignificação desse conceito. Considera-se que essas contribuições foram proporcionadas pelo ambiente investigativo, dinâmico e motivador criado pelo uso do Desmos e das atividades, em que os alunos foram levados a: analisar gráficos, elaborar conjecturas, testar e validar suas afirmações, verbalizar suas ideias, registrar matematicamente os resultados e justificar seu pensamento (OLIVEIRA, SEGURADO e PONTE, 1999).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> Ler significa reler e compreender, interpretar. Cada um lê com os olhos que tem. E interpreta a partir de onde os pés pisam. Todo ponto de vista é a vista de um ponto. Para entender como alguém lê, é necessário saber como são seus olhos e qual é sua visão de mundo. Isso faz da leitura, sempre uma releitura.
>
> Leonardo Boff

A presente pesquisa propôs uma intervenção pedagógica diferenciada, voltada ao trabalho com o conceito de derivada, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Para tanto foi elaborada e desenvolvida uma Oficina Pedagógica, em um ambiente informatizado, com o apoio de uma ferramenta tecnológica, o *software* Desmos.

Conforme apresentado na Introdução, a motivação do presente trabalho se deu em observação à dificuldade de compreensão do conceito de derivada e ao alto índice de reprovação e à evasão na disciplina de Cálculo. Os apontados foram verificados em interlocuções com alunos da graduação, episódios vivenciados pelo esposo da pesquisadora, como professor universitário, e pelo interesse de contribuição por parte da pesquisadora nesta área.

Preocupados em elaborar uma proposta didática que fosse, além de diferenciada, realmente efetiva e com possibilidade de aproveitamento por outros professores desta área, buscou-se em pesquisas bibliográficas argumentos que fundamentassem este trabalho. Constituiu-se então, o Capítulo 2, no qual foram registrados estudos acerca da derivada, dificuldades e problemas enfrentados em sua abordagem, bem como estudos relativos ao uso de tecnologias para o ensino e aprendizagem de Matemática e de Cálculo. Assim, foram vários os referenciais que colaboraram para a elaboração e realização da pesquisa.

Convencionalmente, o conteúdo de derivadas é explorado mais algebricamente, enfocando as regras de derivação e algumas aplicações, notoriamente debruçado em exercícios de repetição. O trabalho de conceptualização da derivada em seus aspectos gráfico e geométrico nem sempre é explorado, mesmo estando presente em quase todo livro didático.

Ainda, a persistência dos métodos tradicionais também no ensino superior frente às alternativas inovadoras de ensino se deve a vários fatores, sendo o mais relevante: a acomodação do professor em sua “zona de conforto”, na qual o ensino é previsível e controlável (PENTEADO, 2000).

Em geral, também os professores costumam apontar como causa do insucesso na aprendizagem de Cálculo, como sendo falta de fundamentação matemática provinda do ensino básico e de atitudes de despreparo dos alunos frente à organização para os estudos. É o que se apresenta na literatura atualmente.

Diante das constatações, e conscientes das dificuldades enfrentadas pelos alunos e professores no ensino e aprendizagem deste conceito, propôs-se a Intervenção Pedagógica descrita na seção 3.3 do Capítulo 3, sobre a qual, na continuidade, são feitas considerações.

Ao elaborar essa prática, pensou-se em colaborar na produção de um material didático que auxilie os docentes do ensino superior e motive a integração, em sua metodologia, de um recurso tecnológico, como o *software* Desmos, a fim de possibilitar um ensino que promova a aprendizagem conceitual da derivada. Selecionou-se, entre os vários *softwares* gráficos disponíveis, aquele que atendesse ao desenvolvimento do conteúdo de forma dinâmica e motivadora aos alunos, e que promovesse a descoberta de conhecimentos matemáticos através da investigação, sendo de fácil manuseio e comandos acessíveis.

Deste modo, optou-se pelo Desmos, que permite experimentar e explorar por meio de gráficos, retas tabelas, pontos e recursos dinâmicos, as relações e definições da derivada. Diante do fato de alguns gráficos e recursos estarem prontos para uso nas atividades, o tempo de trabalho foi maximizado, fazendo com que os alunos tivessem tempo para visualizar, interagir e analisar as representações gráficas, construindo e ressignificando o conceito em estudo. Assim, corrobora-se com Couy (2008), quando afirma que ferramentas tecnológicas, se utilizadas de forma adequada, podem potencializar o uso dos recursos gráficos no ensino de Cálculo, estimulando a observação, a busca de regularidades e padrões, contribuindo para o entendimento de suas relações.

À guisa de conclusão do presente trabalho, então, retoma-se a questão de investigação que guiou esta pesquisa:

Como o uso do *software* gráfico Desmos e das atividades poderão influenciar nas diferentes abordagens do conceito de derivada?

Visando responder tal questão, foi traçado como objetivo verificar as potencialidades do uso do *software* Desmos para o trabalho com estas abordagens, por meio da articulação dos aspectos gráfico, geométrico e algébrico do conceito. O objeto subjacente foi constituído pelo estudo da derivada e o uso de tecnologias para os processos de ensino e aprendizagem da derivada e suas interpretações geométrica e gráfica.

Assim, a partir de agora, intenta-se apresentar alguns aspectos de respostas à questão de investigação, ou seja, desvendar algumas contribuições e potencialidades do desenvolvimento das atividades com auxílio do *software* Desmos relacionadas às diferentes abordagens do conceito de derivada, conteúdo pertencente à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

1) A contribuição para a ressignificação do conceito de derivada, em especial em seus aspectos gráfico e geométrico.

A pesquisa apontou que a realização das atividades com o Desmos contribuiu para a ressignificação desse conceito, inicialmente construído em sala de aula, principalmente em sua base conceitual, a partir da oportunidade de reflexão e descobertas oportunizadas em um ambiente diferenciado, em que os alunos tiveram papel ativo no processo de aprendizagem.

Mesmo os alunos tendo cursado a disciplina de Cálculo I, ficou evidente que o conceito de derivada não havia sido bem explorado e compreendido por eles. Na troca de experiências, os alunos externaram que este tipo de atividade é muito agradável e que os leva a conhecer o objeto de estudo e interagir como mesmo, oportunizando a interiorização do conceito.

Reafirma-se, então, a crença de que o uso de tecnologias, alicerçadas em atividades bem elaboradas, pode contribuir para a construção e ressignificação de conceitos fundamentais do Cálculo, de modo a demonstrar suas relações e importância da Matemática Universitária.

2) Contribuição para a criação de um ambiente mais dinâmico, motivador e complementar a aulas tradicionais

Desenvolver as atividades em um espaço como a Oficina Pedagógica, contribuiu para a criação de um ambiente para discussões, deduções, descobertas, troca de conhecimentos e informações, além da colaboração, o que nem sempre é possível em uma aula tradicional, na qual o professor conduz todo o processo.

Esse aspecto foi percebido por todos os participantes, que destacaram que o uso desse tipo de ambiente, principalmente da discussão em grande grupo contribuíram para melhor exploração do conceito em estudo.

Reafirma-se, então, a crença de que o uso de recursos tecnológicos pode oportunizar um ambiente mais dinâmico e que complementa a sala de aula e outros métodos de ensino.

Fica evidente que o trabalho com atividades de visualização gráfica utilizando o *software* Desmos para o ensino de derivadas proporciona importantes contribuições para os processos de ensino e de aprendizagem, tais como: a possibilidade de análise e comparação dos resultados obtidos algebricamente com os gráficos, corroborando com aspectos citados por Arcavi (2003); alunos mais participativos devido à necessidade de realização das atividades para compreensão do conteúdo em estudo; ampliação da possibilidade de atividades variadas nas quais os alunos podem trabalhar com diferentes representações tais como tabelas, gráficos e expressões algébricas de forma mais articulada, corroborando com Machado (2008).

Ao concluir este trabalho, reitera-se que o uso de atividades associadas ao *software* Desmos demonstraram a possibilidade de substituir metodologias tradicionais por metodologias mais ativas, centradas no aluno e na preocupação com sua aprendizagem e seu aproveitamento, na disciplina de Cálculo I. Sua prática é capaz de promover um ganho a todos, em especial por provocar a descoberta das soluções ao invés de trazê-las prontas e apenas demonstrar.

Reiterando, o resultado da prática de atividades com perfil investigativo foi enriquecedor, de modo que se destaca um trabalho mais constante, envolvendo a exploração gráfica dos conceitos, como auxílio para os cálculos, de maneira a desenvolver o senso crítico e analítico dos alunos. Pode-se inferir que a inclusão de recursos tecnológicos possibilitou alunos pensantes, questionadores e participativos, os quais foram constantemente desafiados para encontrar soluções matematicamente aceitáveis.

Com a realização desta pesquisa, adotamos um olhar sob o uso de recursos computacionais na Educação Matemática e sugerimos algumas ações de continuidade para este estudo:

a) O uso de recursos computacionais no ensino superior precisa ser visto como ferramentas de apoio aos processos de ensino e aprendizagem, forma de incentivar e estimular os alunos, fazendo da sala de aula um ambiente mais dinâmico, promovendo a interação e a socialização dos conhecimentos;
b) Retomada de conceitos da Matemática básica com uso do Desmos para explorar os diferentes tipos de funções e suas representações (gráfica, tabular, algébrica) na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral;
c) O uso do *software* Desmos para desenvolver outros conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, como a Integral e o Teorema Fundamental do Cálculo, pelo uso de simulações e gráficos, possibilitando ao aluno a descoberta de relações apresentadas em teoremas e definições.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes. M. W. de; FATORI, Luci. H; SOUZA, Lucian. G. S. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. **Revista Ciência e Tecnologia**, [S.l.], v. 10, n. 16, jan. 2010. Disponível em: <http://www.revista.unisal.br/sj/index.php/123/article/view/17>. Acesso em: 20 set. 2017.

ALMEIDA, Conceição; VISEU, Floriano. Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. **Revista Portuguesa de Educação**, vol. 15, núm. 1, 2002, pp. 193-219. Universidade do Minho Braga, Portugal.

ALVES, Alda. J. **O planejamento de pesquisas qualitativas em educação**. Cadernos de Pesquisas. Fundação Carlos Chagas. São Paulo: Cortez, n. 77, p. 53-61, 1991. Disponível em: http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/cp/arquivos/797.pdf . Acesso em 02 out. 2017.

ALVES, Alceu. D.; CORREIA, Luisa. M de B; MELO, Enilson. de R. Explorando os conceitos iniciais da disciplina de cálculo diferencial e integral: utilizando o software Geogebra. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Retrospectivas e Perspectivas: XI ENEM, Curitiba/PR. **Anais...** Curitiba, 2013. Disponível em: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/61_1994_ID.pdf . Acesso em: 30 Jan. 2017

ALVES, Davis. O.; REIS, Frederico da S. Ensino de Funções, Limites e Continuidade em Ambientes Educacionais Informatizados: Uma proposta para cursos de Introdução ao Cálculo. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador – BA. **Anais** do X ENEM. Recife – PE: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010. v. 1. p. 1-10.

ALLEVATO, Norma. S. G. Associando o computador à resolução de problemas fechados: Análise de uma experiência. 2005. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. UNESP: Rio Claro/SP, 2005. Disponível em: < http://200.145.6.238/handle/11449/102164>. Acesso em: 20 abr. 2017.

ALLEVATO, Norma. S. G. Utilizando animação computacional no estudo de funções. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 1, n. 2, p. 111-125, 2010. Disponível em http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/ viewFile/13/15 . Acesso em: 20 Mar. 2017.

ANTON, Harold. **Cálculo**, Um Novo Horizonte - Vol. 2, 6ª edição. Editora Bookman, 2000.

ARCAVI, Abraham. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics**, n. 52, p. 215-241, 2003.Disponível em: <

https://pdfs.semanticscholar.org/e6a3/fc53cbab17d0339f3132ee9705e88ea14d1c.pdf>. Aceso em: 12 abr. 2017.

BARBOSA, Marcos. A. **O insucesso no ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.** 2004. 102f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifica Universidade Católica do Paraná (PUC-PR), Curitiba, 2004. Disponível em: http://www.biblioteca.pucpr.br/tede//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=291. Acesso em: 05 dez. 2017.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís A. Reto e Augusto Pinheiro. 5ed. Lisboa: Edições 70, 2009.Disponível em: < https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4295794/mod_resource/content/1/BARDIN%2C%20L.%20%281977%29.%20An%C3%A1lise%20de%20conte%C3%BAdo.%20Lisboa_%20edi%C3%A7%C3%B5es%2C%2070%2C%20225..pdf>. Acesso em: 23 mai. 2017.

BORBA, Marcelo. C. **Educação Matemática a Distância Online: Balanço e Perspectivas.** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, 2011.

BORBA, Marcelo. C.; PENTEADO, Miriam. G. **Informática na Educação**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, Marcelo, de C.; PENTEADO, Miriam. G. Pesquisas em Informática e Educação Matemática. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n.36, dez 2002.

BORBA, Marcelo. C.; VILLARREAL, Monica. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.** v. 39, New York: Springer, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/ pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 04 ago. 2017.

CANAVARRO, Ana. P. Concepções e práticas de professores de Matemática: Três estudos de caso. **Tese** de Mestrado (Universidade de Lisboa). Lisboa: APM, 1993.

CATAPANI, Elaine. C. Cálculo em serviço: um estudo exploratório**. Bolema,** Rio Claro, ano 14, nº 16, p. 48-62, 2001. Disponível em: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10616/7004>. Acesso em: 03 out. 2018.

CASTELLANO, Santiago; COCO, Mauro.L. Hacia una conceptualización teórica de la modalidad taller. **UNIrevista,***1*(3), pag.1-10, 2006. Disponível em:<https://ies28sfe.infd.edu.ar/aula/archivos/repositorio/0/80/Taller_como_modalidad_operativa.pdf> Acesso em: 16 mai. 2018.

COSTA, Patrícia. O.; SOUZA JÚNIOR, Arlindo. J. Tecnologia de Informação e Comunicação no ensino de Cálculo. **FAMAT em Revista**, n. 9, p. 431-440, 2007. Disponível em:

http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_Revista_09.pdf. Acesso em: 01 mar. 2017.

COUY, Lais. **Pensamento visual no estudo da variação de funções**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), Belo Horizonte, 160 f, 2008. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_CouyL_1.pdf>. Acesso em: nov. 2017.

CRESWEL, John. W. **Projeto de pesquisa: método qualitativo, quantitativo e misto.** 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/696271/mod_resource/content/1/Creswell.pdf . Acesso em: 03 out. 2017.

D'AVOGLIO, Armando.R. **Derivada de uma função num ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito**. 2002. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002. Disponível em:< https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11161>. Acesso em: 13 jun. 2018.

DENBEL, Dejene. G. Some Conceptual Difficulties of Students on Derivation. **Journal of Educational and Management Studies**, JEMS, 2015. Disponível em:< http://jems.science-line.com/attachments/article/34/J.%20Educ.%20Manage.%20Stud.,%205(4)%20211-214,%202015.pdf>.Acesso em: 12 nov. 2017.

DENZIN, Norman. K.; LINCOLN, Ivonna. S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, Norman. K.; LINCOLN, Ivonna. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa qualitativa**: teorias e abordagens. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 15-41.

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009.

FAINGUELERNT, Estela K. **Educação Matemática: representação e construção em geometria.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 2ª ed. Campinas, SP: Autores Associados, Coleção formação de professores, 2007.

FLEMMING, Diva Marília et al. **Cálculo A: Funções, limite, derivação, integração.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FLORES, Cláudia R.; WAGNER, Débora R.; BURATTO, Ivone. C.F. **Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas.** Revista Educação Matemática e Pesquisa. v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012.

FRESCKI, Franciele. B.; PIGATTO, Priscila. Dificuldades na aprendizagem de cálculo diferencial e integral na educação tecnológica: proposta de um curso de nivelamento. In: Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia,2009, Ponta Grossa. **Anais.**..Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 910-917. Disponível em:< http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/10%20Ensinodematematica/Ensinodematematica_artigo6.pdf>. Acesso em 05 nov. 2018.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GUIMARÃES, Oswaldo. L. C. Cálculo diferencial e integral: do algebrismo às representações múltiplas. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25, 2002, Caxambu. **Anais.** Caxambu: ANPED, 2002. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/calculo.pdf. Acesso em: 01 nov. 2017.

GODOY, Arilda. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. In: **Revista de Administração de Empresas**. São Paulo: v.35, n.2, p. 57-63, abril 1995. Disponível em:file:///C:/Users/jorge/Documents/GISELE/Aulas%20mestrado%2012017/Base%20Diss/38183-75982-1-PB.pdf . Acesso em: 03 out. 2017.

GODOY, Luis.F.S. **Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo,106 p, 2004. Disponível em: < https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11164>. Acesso em: 03 mai. 2018.

GRAVINA, Maria. A.; SANTAROSA, Lucila. M. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 4., 1998, Brasília. **Anais...** Brasília: RIBIE, 1998. Disponível em: <lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342413933117.PDF>. Acesso em: 03 ago. 2017.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar: geometria analítica**. 4ª ed. Vol. 7. São Paulo: Atual, 2000.

JOVER, R.S.R. Cálculo diferencial: uma experiência de ensino utilizando os aplicativos Geogebra e Graphmatica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas: XI ENEM, Curitiba/PR. **Anais...** Curitiba,2013. Disponível em: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/954_957_ID.pdf. Acesso em: 30 de Jan. 2017.

JUNIOR, José F.G; BESSA, Vagner R.; CEZANA, Miguel J. Um estudo sobre o baixo índice de aprovação nas disciplinas de cálculo da universidade federal de viçosa - campus rio Paranaíba. **Revista Iluminart,** São Paulo, v. 7, n. 13, p. 100-111, 2015. Disponível em http://revistailuminart.ti.srt.ifsp.edu.br/index.php/iluminart/article/viewFile/270/265>. Acesso em: 15 abr. 2017.

JUNQUEIRA, Sonia. M da S.; MANRIQUE, Ana. L. Mapas conceituais e sujeitos da experiência em aulas de Cálculo 1. **Rev. Prod. Disc. Educ. Matem.**, São Paulo, v.4, n.1,2015. Disponível em: < https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/22976/16650>. Acesso em 15 out. 2017.

KENDAL, Margaret. Teaching and learning introductory differential calculus with a computer algebra system. **PhD thesis**, 275 p, 2001. Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne. Disponível em: < https://minervaaccess.unimelb.edu.au/bitstream/handle/11343/39021/66477_00001525_01_margaret_kendal.pdf?sequence=1>. Acesso em: 07 jul. 2018.

KAWULICH, Barbara. B. **Participant observation as a data collection method.** Forum: Qualitative Social Research [On-line journal]. v. 6, n. 2, art. 43, 2005. Disponível em: <http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/466/997>. Acesso em: 23 ago. 2017.

LEIBNIZ, Gottfried.W. **Frases de Gottfried Wilhelm Leibniz**. Disponível em: <https://www.pensador.com/frases_de_gottfried_wilhelm_von_leibniz/>. Acesso em: 10 out. 2018.

LEHMANN, Monique. S. **Proposta de uma sequência didática para a conceptualização de derivada como taxa de variação instantânea.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Severino Sombra: Vassouras, 98 f, 2011. Disponível em: < http://docplayer.com.br/39795168-Sequencia-didatica-para-conceitualizacao-de-derivada-como-taxa-de-variacao-instantanea.html>. Acesso em 11 jun. 2017.

LEME, Jayme do C.M. **Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada.** 2003. 89 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em:< https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11166>. Acesso em: 14 jul. 2018.

MACHADO, Rosa Maria**. A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP**. 2008. 288p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/251984. Acesso em: 10 ago. 2017.

MARIN, Douglas. **Professores de Matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior.** 2009. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009. Disponível em:< https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91117/marin_d_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 12 mai. 2017.

MARCONI, Marina de A.; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002, 5ª ed. Disponível em: https://pt.scribd.com/doc/237629448/tecnicas-de-pesquisa-marconi-lakatos-pdf. Acesso em: 04 dez. 2017.

OLIVEIRA, Hélia. M.; SEGURADO, M. Irene; PONTE, João. P. **Tarefas de investigação em Matemática: histórias da sala de aula.** In: ABRANTES, P. *et. al.* (Orgs.). Investigações matemáticas na aula e no currículo. Lisboa: Projeto MPT e APM, p. 189-206, 1999.

ORTON, Anthony. Students' understanding of differentiation. **Educational Studies in Mathematics**, 14, 235-250, 1983.disponível em: < https://www.researchgate.net/publication/226893531_Students'_understanding_of_differentiation>. Acesso em 03 mai. 2018.

PARANHOS, Marcos. M. **Geometria dinâmica e o cálculo diferencial e integral**. 2009. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em:< https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11408/1/Marcos%20de%20Miranda%20Paranhos.pdf>. Acesso em: 23 mai. 2017.

PENTEADO, Mirian. G. **Possibilidades para a formação de professores de Matemática.** In: PENTEADO, M. G; BORBA, M. C. (Orgs.). A Informática em Ação: formação de professores, pesquisa e extensão. 1. ed. São Paulo: Olho Dágua. 2000, p. 23- 34.

____________; SKOVSMOSE, Ole. **Riscos trazem possibilidades**. In: SKOVSMOSE, O. (Org). Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica. 1 ed. Campinas: papirus, 2008, p.41-50.

PINO-FAN, Luis. D.; GODINO, Juan. D; FONT, Vicenç. Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 60-89, abr. 2015. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8544/6607 Acesso em: 23 abr. 2017.

PINTO, Gisela. M. F.; VIANNA, Claudia. C. S. Compreensão gráfica da derivada de uma função real em um curso de Cálculo semipresencial**. Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de Janeiro (RJ), v. 2, n. 3, p. 74-90, 2012. Disponível em: file:///C:/Users/jorge/Downloads/1999-7700-1-PB.pdf . Acesso em 20 out. 2017.

PONTE, João. P.; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, João. P.; CANAVARRO, Ana. P. **Matemática e Novas Tecnologias**. Lisboa: Universidade Aberta, 1997.

POZO, Juan. I. A sociedade da aprendizagem e o Desafio de converter informação em conhecimento. **Revista Pátio**, ano 8, agosto/outubro 2004. Disponível em: < http://www.franciscoqueiroz.com.br/portal/phocadownload/NovasTecnologias/a%20sociedade%20da%20aprendizagem%20e%20o%20desafio%20de%20converter%20informao%20em%20conhecimento.pdf>. Acesso em: 27 jul. 2018.

PRESMEG, Norma. Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. In: HANDBOOK OF RESEARCH ON THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (pp. 205–235). Disponível em: <http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/pmeVisualizationFinalAPA.pdf >. Acesso em: 01 abr. 2017.

REIS, Frederico da S.; JUNIOR, José C.M. As contribuições da visualização proporcionada pelo Geogebra à aprendizagem de funções derivadas em Cálculo I. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades: XII ENEM, São Paulo/SP. **Anais.**.. São Paulo, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/8057_3666_ID.pdf . Acesso em: 30 mai. 2018.

REZENDE, Flavia. As novas tecnologias na prática pedagógicas sob a perspectiva construtivista. Ensaio-Pesquisa em Educação em Ciências. v. 2. n. 1, 2002. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/epec/v2n1/1983-2117-epec-2-01-00070.pdf>. Acesso em: 04 ago. 2018.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** 2003. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/pt-br.php. Acesso em: 10 dez. 2017

RÖSKEN, Bettina; ROLKA, Katrin. **A picture is worth a 1000 words – the role of visualization in mathematics learning**. In: PROCEEDINGS 30TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, pp. 457–464. PME, Prague (2006). Disponível em: < https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496934.pdf#page=465>. Acesso em 24 mar. 2017.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, Gloria; GARCÍA, Mercedes; LLINARES, Salvador. Algunos Indicadores del Desarrollo del Esquema de Derivada de una Función. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 27, n. 45, p. 281-302, abr. 2013. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5080/5526 Acesso em: 09 abr. 2017.

SANTOS, Josiel Almeida, Kleber Vieira França e Lúcia S. B. dos Santos. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo,2007.

SILVA, Benedito. A**. Componentes do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo: Saber, Aluno e Professor**. In: Anais do IV SIPEM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009.

SILVA, J. F. **Questões metodológicas do ensino de Cálculo Diferencial e Integral I.** Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará, 1994.

STEWART, James. **Cálculo**. Vol. 1, São Paulo: Thompson Learning. Ed. 7ª, 2016.

SVIERCOSKI, Rosangela. F. ***Matemática Aplicada às Ciências Agrárias***. Editora UFV, 1999.

TRIVIÑOS, Augusto. N. da S**. Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 2008. p. 31-79. Disponível em: <http://www.hugoribeiro.com.br/biblioteca-digital/Trivinos-Introducao-Pesquisa em_Ciencias-Sociais.pdf> . Acesso em: 03 out. 2017.

VRANCKEN, S.; ENGLER**,** A. Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 449-468, abr. 2014. Disponível em:http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8663/6096 . Acesso em: 25 abr. 2017.

VIEIRA, Marcelo. M. F.; ZOUAIN, Deborah. M. **Pesquisa qualitativa em administração:** teoria e prática. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2005. Disponível em:

<http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1415-65552007000200013<. Acesso em: 02 out. 2017.

VIEIRA, Elaine; VOLQUIND, Léa. **Oficinas de ensino. O que? Por quê? Como?** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002. Disponível em: < https://books.google.com.br/books>. Acesso em: 23 abr. 2018.

VILLARREAL, Monica. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.** 1998. 387f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

ZIMMERMANN, Walter. CUNNINGHAM, Steve. Editors' introduction: **What is mathematical visualization?** In: VISUALIZATION IN TEACHING AND LEARNING MATHEMATICS, p. 1– 8, 1991. Mathematical Association of America, Washington. Disponível em: < https://pdfs.semanticscholar.org/4633/9bd5e52c9f6785b70ef1e62812f5f02b1ec7.pdf> Acesso em 02 abr. 2017

APÊNDICES

APÊNDICE A - ATIVIDADE A1

Acesse a seguinte página https://www.desmos.com/calculator/98dhngrfpz para iniciar as atividades.

1- Dado o gráfico da função $f(x)$ e duas retas. Qual das retas é secante e qual é tangente a curva da função? Justifique sua resposta.

Tangente:

____

Secante:

____

2- Que dados são necessários para calcular a equação da reta secante e da reta tangente a esta curva?

____

____

3- Agora selecione os pontos de intercepto e de contato destas retas, sendo que o ponto de contato seja comum as duas retas, definido como $P(x_0, f(x_0))$ e o ponto de intercepto móvel como $Q(x_1, f(x_1))$

____

Calculando a inclinação da reta tangente a partir de uma reta secante.

A inclinação da reta secante que passa pelos pontos P e Q é definida por

$m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. No gráfico clique sobre o ponto Q e arraste em direção a P.

4- Complete a tabela com os valores do ponto P, Q e m conforme o ponto Q se aproxima ao ponto P.

Aproximação pela direita de P		
P	Q	*m*

5- Faça o mesmo procedimento agora pela esquerda de P, mova o ponto Q iniciando em (1,2) até se aproximar o máximo possível de P, complete a tabela:

Aproximação pela esquerda de P		
P	Q	*m*

6- Observe os valores encontrados para a inclinação m da reta a direita e a esquerda de P, estes estão se aproximando de que valor?

____

____

7- É correto afirmar que, ao realizar as aproximações do ponto Q ao ponto P, estamos aproximando x_1 *de* x_0? Justifique.

____

____

8- Com o valor aproximado da inclinação encontrado, escreva a equação da reta tangente.

____

9- Pode-se perceber também que se deixarmos os pontos da reta secante chegarem MUITO, MUITO, MUITO próximos, a inclinação da reta secante é quase igual à inclinação da reta tangente. Logo, precisamos de alguma notação para essa ideia, vamos então usar o conceito de 'limite', e denotar a inclinação *m* da reta tangente como sendo

____

10- Agora, por que não podemos deixar x_1 ser igual a x_0? Tente arrastar o ponto Q no gráfico até que ele esteja em cima de P, o que acontece?

____

11- O que aconteceria se você tentasse calcular a inclinação da reta tendo (x_0, y_0) igual a (x_1, y_1)?

APÊNDICE B - ATIVIDADE A2

PROBLEMA: Uma bola é lançada diretamente no ar. Esta foi jogada de uma altura de cerca de 1, 5 metros e demora cerca de 2,57 segundos para chegar ao chão. Sua trajetória pode ser vista no Desmos, acessando a seguinte página https://www.desmos.com/calculator/yhpswq8xnw.

1- Como podemos calcular a velocidade média da bola neste trajeto?

2- Seria correto afirmar que a velocidade média calculada é a inclinação da reta secante que passa por dois pontos? Justifique.

3- Agora acione o controle deslizante para t. E quando solicitado pause o tempo. Anote o ponto (tempo, distância).

4- Represente o gráfico da trajetória percorrida pela bola e marque o ponto anotado no item 2.

5- Calcule a velocidade atingida pela bola no ***instante*** (ponto) selecionado no item 2. Lembre-se de utilizar os conceitos já estudados anteriormente.

6- Seria correto afirmar que, ao realizar o cálculo da velocidade instantânea da bola, aplica-se novamente o conceito de limite? Por quê?

APÊNDICE C - ATIVIDADE A3

1- Observe o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x$ e em seguida construa no Desmos uma tabela com os seguintes valores para x:

x	y
-1	
0	
1	
2	
4	
5	
6	

Através dos dados obtidos na tabela e do gráfico determine:

a) Os intervalos onde $f(x)$ é crescente.

____

b) Os intervalos onde $f(x)$ é decrescente.

____

c) O ponto em que o comportamento de $f(x)$ passa de crescente/decrescente ou decrescente/crescente.

____

2- Mova o ponto preto pertencente à reta tangente sobre a curva da função $f(x)$, analise os valores da inclinação $f'(x_0)$ e anote na tabela:

x	$f'(x_0)$
-1	
0	
1	
2	
4	
5	
6	

a) Nos intervalos onde $f(x)$ é crescente, os valores da inclinação $f'(x_0)$ são positivos ou negativos?

____

b) Nos intervalos onde $f(x)$ é decrescente, os valores da inclinação $f'(x_0)$ são positivos ou negativos?

____

c) No ponto onde ocorre a mudança de comportamento de $f(x)$, determine o valor da inclinação da reta tangente neste ponto e a posição da reta em relação ao eixo x.

____

3- Podemos relacionar o comportamento da função $f(x)$ com sua derivada. Volte ao gráfico e compare os intervalos onde $f(x)$ é crescente e decrescente com os intervalos onde a derivada $f'(x)$ é positiva e negativa. Complete a tabela com as conclusões obtidas:

Sobre os intervalos (ou valores) em que a derivada $f'(x)$:	***Sobre a função $f(x)$***
$f'(x) > 0$	
$f'(x) < 0$	
$f'(x) = 0$	

APÊNDICE D - ATIVIDADE A4

Vamos analisar o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x$, para isto acesse a seguinte página https://www.desmos.com/calculator/a5fdmzlgf9.

1- Observe o gráfico de $f(x)$ e determine o ponto onde a inclinação da reta tangente é igual a zero (derivada igual a zero).

____

Estes pontos são chamados pontos críticos de f(x) e precisam ser analisados, pois são candidatos a ponto de máximo ou de mínimo de $f(x)$. Para isto, vamos verificar o que acontece com a derivada ao redor destes pontos.

2- Mova a reta tangente a curva de $f(x)$ e analise a inclinação $f'(x_0)$, no entorno do ponto crítico. Considere c como ponto crítico.

$f'(x_0)$ antes	c	$f'(x_0)$ depois

3- Será considerado ponto de máximo relativo quando $f'(x) > 0$ á esquerda de c e $f'(x) < 0$ á direita. Logo, tem-se algum ponto de máximo relativo nesta função?

____

4- Será considerado ponto de mínimo relativo quando $f'(x) < 0$ á esquerda de c e $f'(x) > 0$ á direita. Logo, tem – se algum ponto de mínimo relativo ?

____

5- No caso em que $f'(x)$ for o mesmo em ambos os lados de c, então c não será nem ponto de máximo nem de mínimo. Há algum ponto que se aplique essa definição?

____

6- Agora vamos traçar o gráfico da função derivada $f'(x)$. Clique sobre o ícone da reta tangente para ocultá-la, em seguida clique sobre $y = f'(x)$ para visualizar o gráfico da função derivada de f.

7- Através do traçado do gráfico da função derivada determine:

a) Em quais intervalos a função $f'(x)$ é positiva (ou seja, está acima do eixo x)?

____

b) Em quais intervalos a função $f'(x)$ é negativa(ou seja, está abaixo do eixo x)?

____

c) Em que valores a função intercepta o eixo x ? Estes valores podem ser relacionados à função $f(x)$? Em que casos?

____

8- A partir dos dados obtidos do gráfico da função derivada, podemos estabelecer relações com o gráfico da função $f(x)$? Quais? Descreva ou denote matematicamente.

____

____

APÊNDICE E - QUESTIONÁRIO

1- Teve alguma dificuldade ao utilizar o *Software*? Quais?

____

____

2- As atividades auxiliaram na compreensão do conceito de Derivada? Por quê?

( ) Sim ( ) Não ( ) Um pouco

____

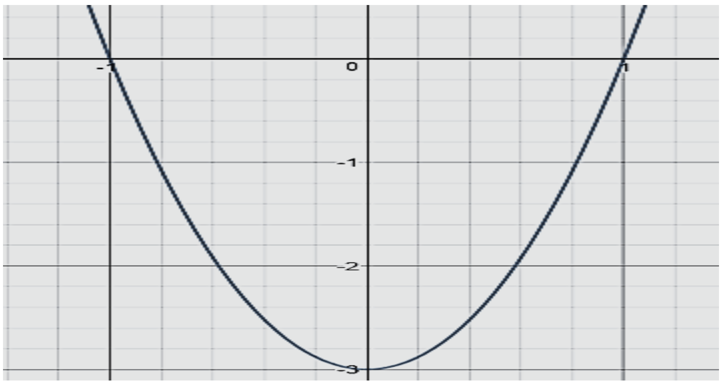
____

3- Agora, defina o (s) conceito (s) de Derivada.

____

____

4- Observe o gráfico da função derivada $f'(x)$ e determine:



a) O(s) intervalo(s) onde a função $f(x)$ é (são) crescente(s).______________________________

b) O(s) intervalo(s) onde a função $f(x)$ é(são) decrescente(s):

____

c) O(s) ponto(s) onde a função $f(x)$ possui inclinação da reta tangente igual a zero:

____

d) Esboce o gráfico da função $f(x)$ com os dados obtidos anteriormente.

APENDICE F - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

A pesquisadora Gisele Scremin, acadêmica regular do curso de pós-graduação em nível Strictu Sensu em Ensino de Ciências Exatas, promovido pela Universidade do Vale do Taquari, UNIVATES sob orientação da Profª Drª Maria Madalena Dullius, realizará a pesquisa intitulada: " O que $f'(x)$ nos diz sobre $f(x)$: uma análise gráfica", que tem por objetivo investigar as potencialidades do uso do *software* gráfico Desmos para as diferentes abordagens do conceito de derivada.

Para a obtenção desse objetivo serão propostas atividades exploratórias, que serão trabalhadas com apoio do *Software* Desmos. As atividades serão realizadas junto aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, através de uma oficina ministrada pela pesquisadora com duração de 8 horas/aula, sob orientação da Profª Drª Maria Madalena Dullius.

Os dados dessa pesquisa estão sob sigilo ético, sendo que em nenhum momento serão mencionados os nomes dos participantes. A participação não oferece risco ou prejuízo ao participante. Se, a qualquer momento, o(a) participante resolver encerrar sua participação na pesquisa, terá toda a liberdade de fazê-lo, sem que isso lhe acarrete qualquer prejuízo ou constrangimento.

A pesquisadora compromete-se a esclarecer qualquer dúvida ou questionamento, que eventualmente os participantes venham a ter, no momento da pesquisa ou posteriormente através do e-mail – gisele23scremin@gmail.com .

Agradecemos pela colaboração.

Gisele Scremin – Pesquisadora
Universidade do Vale do Taquari- UNIVATES

Estando ciente das informações que foram fornecidas neste termo, eu____R.G. nº_______________, concordo em participar desta pesquisa.

____

Assinatura do aluno

Cidade/RS – maio de 2018

ANEXOS

ANEXO A – Descrição do *Software* Desmos

O *software* ou aplicativo Desmos (https://www.desmos.com/), é uma calculadora gráfica *online*, criado na mesma linha de aplicações como, por exemplo, o Geogebra. Vamos ver suas características mais importantes, assim como funcionalidades que apresenta, como o que podemos fazer com esta ferramenta.

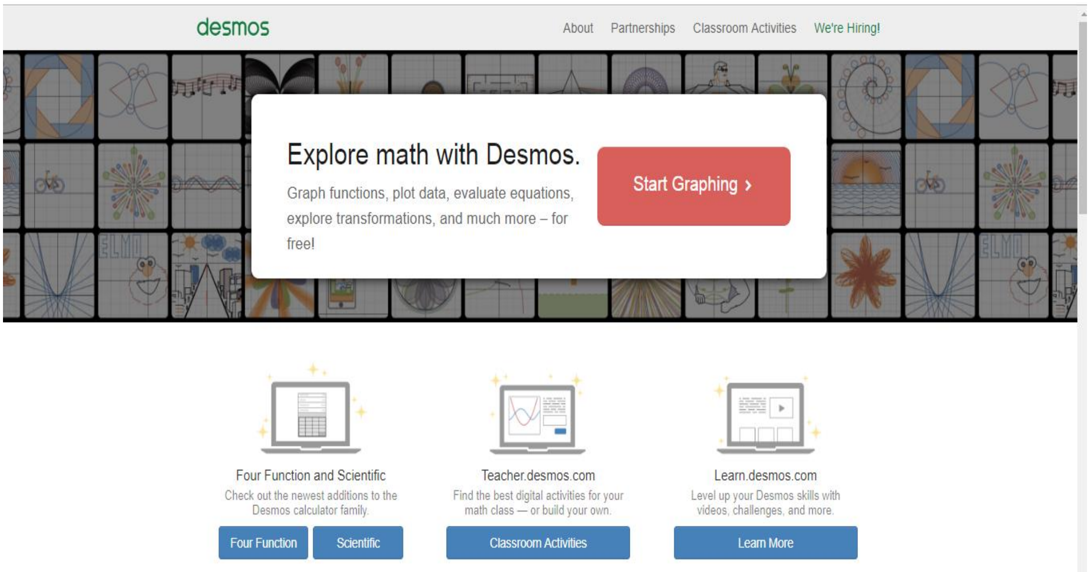
Entre as características mais importantes do Desmos destacamos:

- Se trata de uma ferramenta online, ou seja, acessível por um simples navegador de internet, ou baixado como aplicativo para trabalhos off-line;
- Se pode ter acesso de qualquer dispositivo móvel: notebook, tablet, smartphone;
- Não requer instalação, desde que esteja conectado a internet;
- Não requer usuário para ser utilizada, porém possui a opção de utilização de usuário do Google e, neste caso pode-se salvar e imprimir os trabalhos realizados;
- É multi-idioma;
- Funciona como plataforma de trabalho colaborativo, isso quer dizer, que permite a contribuição de novas atividades que podem ser realizadas por qualquer usuário.

Funcionalidades

Acesso a ferramenta: para acessar o Desmos basta tomar a seguinte direção https://www.desmos.com onde veremos uma página como esta

Figura 1 – Página inicial do Desmos



Fonte: https://www.desmos.com

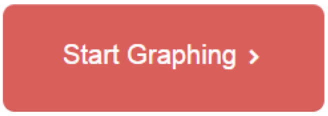
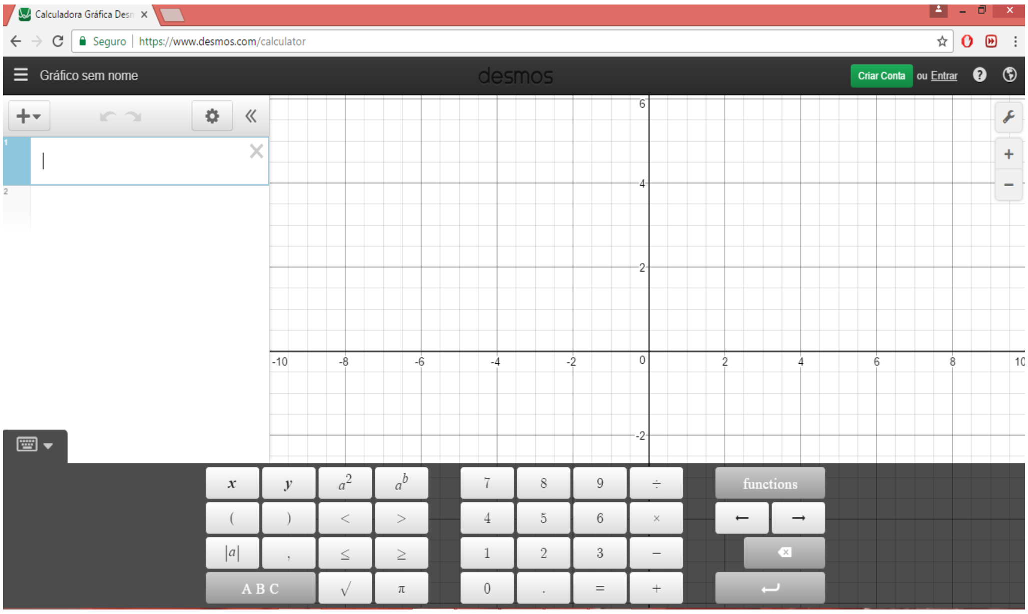
Clicando sobre o ícone  teremos acesso a calculadora gráfica

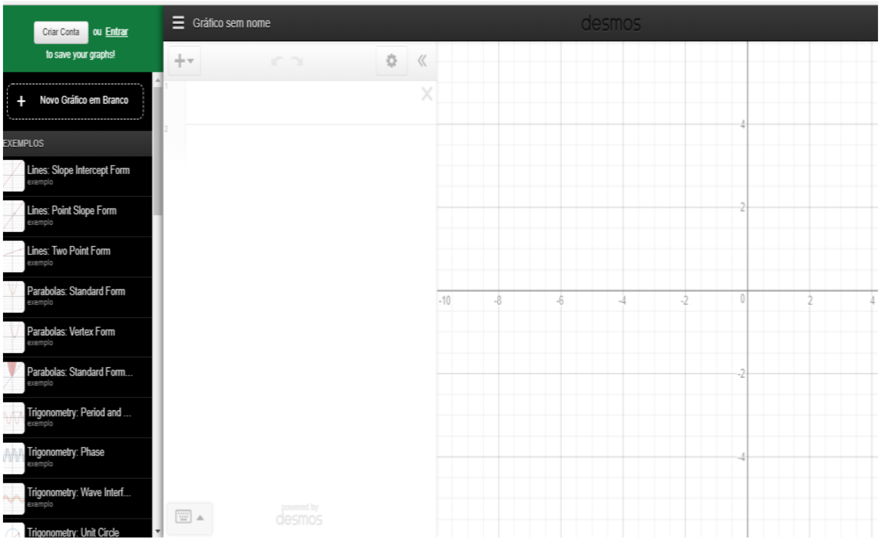
Figura 2 – Acesso a calculadora gráfica



Fonte: https://www.desmos.com/calculator

No canto superior esquerdo, ao clicarmos sobre o ícone  se pode selecionar exemplos já criados para trabalhar com distintos conceitos.

Figura 3 – Exemplos definidos



Fonte: https://www.desmos.com/calculator

Se voltarmos a pressionar uma das linhas horizontais abaixo do ícone 

, a coluna de exemplos desparece.

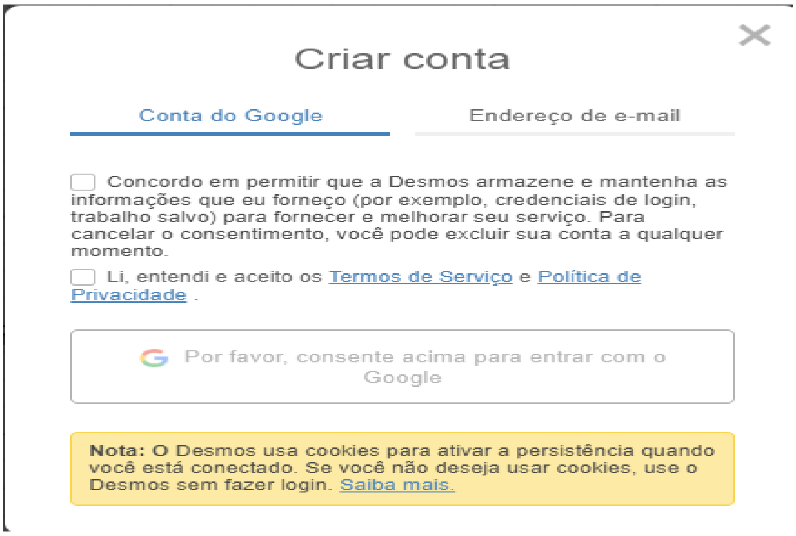
Seguindo no canto superior direito da tela, veremos o seguinte ícone 

que nos permite criar um usuário para acessar a ferramenta, permitindo salvar e compartilhar os gráficos construídos no ambiente Desmos.

O usuário pode ser criado a partir da conta do Google (usuário do gmail), clicando sobre 

, basta selecionar as opções abaixo e consentir a entrada através do Google.

Figura 4 – Usuário com conta no Google



Fonte: https://www.desmos.com/calculator

Caso você não tenha conta no Google, poderá realizar o cadastro de usuário através de outro e-mail, na aba  preencher as informações necessárias, selecionar as opções abaixo e criar conta (Figura 5).

Figura 5 – Cadastro de usuário

Fonte: https://www.desmos.com/calculator

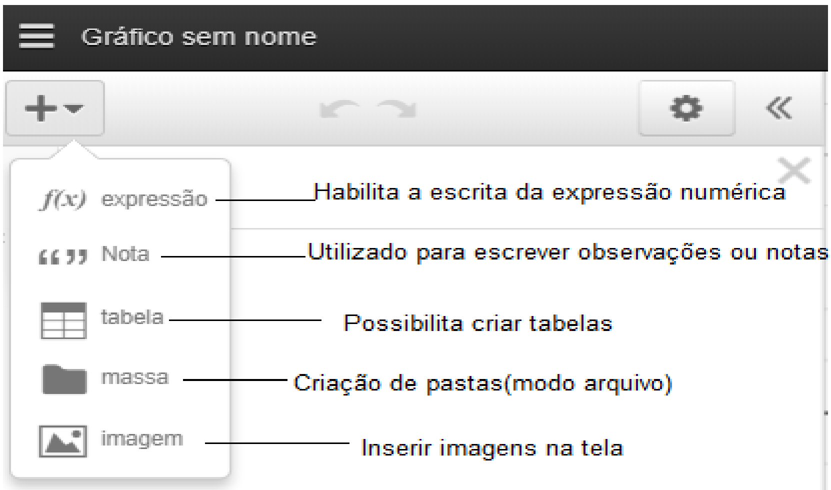
Ainda no canto superior direito da tela, no ícone  é possível selecionar o idioma do Desmos (Figura 6).

Figura 6 – Seleção de idioma

Fonte: https://www.desmos.com/calculator

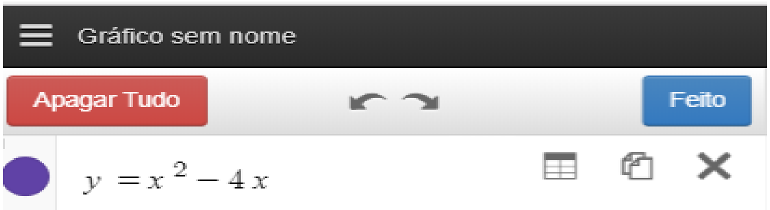
Se clicarmos sobre o ícone  que aparece no canto superior direito, aparecerão as seguintes opções (Figura 7):

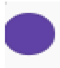
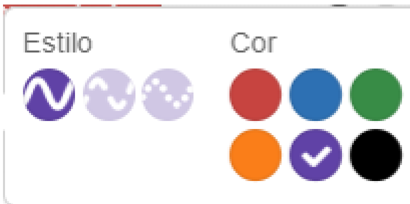
Figura 7 – Opções de inserção



Fonte: https://www.desmos.com/calculator

As flechas que aprecem mais à direita permitem anular (desfazer) ou refazer o que tinha sido apagado.

Já o ícone  mostra as possibilidades de edição dos gráficos já construídos 

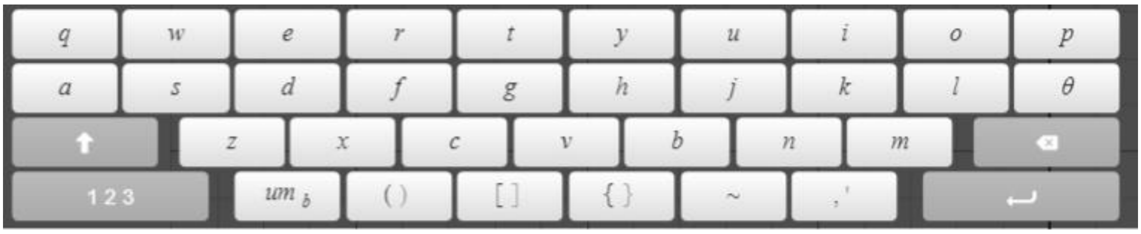
, como inserir tabela , duplicar a expressão  e apagar . Se pressionar o ícone  ao lado da expressão se pode alterar o estilo e cor do gráfico de saída. 

. Após realizar as alterações clique em “Feito” para concluir.

No canto inferior esquerdo se tem o seguinte ícone , ao clicar sobre o mesmo habilita-se o teclado que possibilita a inserção de dados e expressões numéricas

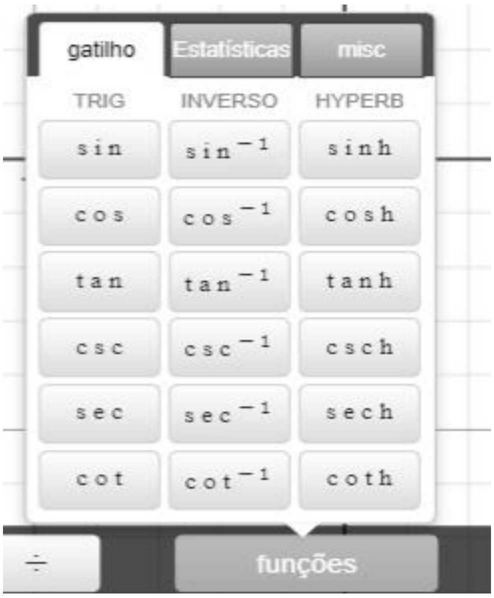
Vale destacar aqui os seguintes botões:

que passa do teclado numérico para alfabético.



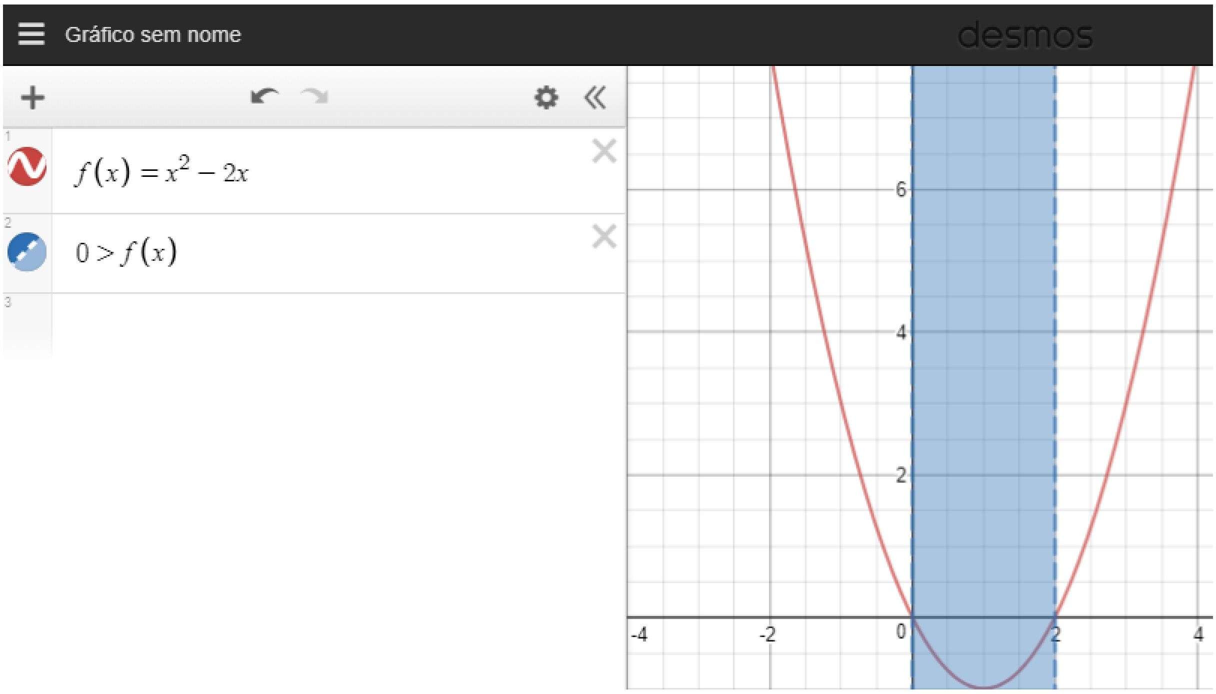
E o botão 

, que permite o uso de funções trigonométricas, estatísticas e outras funções matemáticas mais comuns.



A escrita de funções, equações ou inequações deve ser feita nas linhas numeradas do lado esquerdo da tela. A saída dos gráficos, pontos, retas se dará na parte direita da tela, onde se pode ver a malha quadriculada numerada, como pode ser observado na Figura 8.

Figura 8 – Escrita de funções e saída de gráficos



Fonte: https://www.desmos.com/calculator