CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

ATIVIDADES INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA EM TURMAS DE 7° ANO E 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Ludmila Maccali

Lajeado, maio de 2017

Ludmila Maccali

ATIVIDADES INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA EM TURMAS DE 7° ANO E 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, do Centro Universitário UNIVATES, como parte da exigência para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Dra. Marli Teresinha Quartieri
Coorientadora: Dra. Ieda Maria Giongo

Lajeado, maio de 2017.

Ludmila Maccali

ATIVIDADES INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA EM TURMAS DE 7° ANO E 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

A Banca Examinadora abaixo aprova a Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas, como parte da exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Profa. Dra. Marli Teresinha Quartieri - orientadora
Centro Universitário UNIVATES

Profa. Dra. Ieda Maria Giongo - coorientadora
Centro Universitário UNIVATES

Profa. Dra. Maria Madalena Dullius
Centro Universitário UNIVATES

Profa. Dra. Miriam Inês Marchi
Centro Universitário UNIVATES

Profa. Dra. Nélia Maria Pontes Amado
Universidade de Algarve

Lajeado, maio de 2017.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço primeiramente a Deus!
- A minha família por todo apoio, principalmente ao meu pai Antônio Maccali pelas sábias palavras e aconselhamentos sempre! A minha mãe Neusa Benelli pelo incentivo.
- Aos professores que fizeram parte do processo de formação do mestrado. Em especial a minha orientadora Marli Teresinha Quartieri, sempre disposta a ajudar dando orientações e conselhos que fizeram com que este trabalho fosse concluído com sucesso. A minha coorientadora Ieda Maria Giongo, por toda a contribuição e conversas acerca do andamento de todo o mestrado.
- Ao Alexandre Henrique Kolling, pelo amor e apoio, sempre incentivando minhas escritas e estudos.
- A Daniela Saldanha, a Bruna Santos e a Karina Krein, colegas bolsistas do Observatório, sempre dispostas a ajudar em tudo o que fosse possível.
- As minhas colegas de Bolsa Tatiane Bernstein e Elise Dente, pacientes e conselheiras, agradeço pelos momentos compartilhados durante essa caminhada e toda a amizade.
- Ao colega André Gerstberger (voluntário da pesquisa do Observatório), pelo auxílio durante a formatação deste trabalho, pelos textos fornecidos, pelos conselhos dados e não posso deixar de agradecer pelos momentos de descontração (muita descontração mesmo!) e pela amizade.
- A minha irmã de coração, amiga de uma vida a Juliete Simsen, que sempre me incentivou e nunca me deixou desistir, sempre presente em todos os momentos!
- Ao colega de trabalho e amigo Vanderlei Juver, pela ajuda e por todo o incentivo dado, sua amizade é muito importante!
- Aos professores e direção das escolas parceiras do Observatório que oportunizaram a realização da prática nas escolas;
- A Capes pelo apoio financeiro, que tornou possível a realização deste sonho.

RESUMO

O presente trabalho foi desenvolvido com alunos de duas escolas públicas de educação básica, localizadas no Vale do Taquari/RS, as quais são parceiras do programa Observatório da Educação, desenvolvido no Centro Universitário UNIVATES. O objetivo deste trabalho foi analisar as estratégias elaboradas por alunos do 7° e 9° anos ao realizarem atividades investigativas em grupo, e envolvendo concepções algébricas. Os aportes teóricos que sustentaram este trabalho estão alicerçados nas ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), os quais salientam que atividades de Investigação Matemática devem ser abertas, proporcionando aos estudantes a formulação de estratégias e conjecturas distintas para a resolução de atividades. Para elaboração das atividades, foram utilizadas as quatro concepções de Usiskin (1995). A pesquisa teve natureza qualitativa, do tipo estudo de caso. Serviram como instrumentos de coleta de dados o diário de campo da professora, atividades desenvolvidas pelos estudantes, fotografias e gravação de áudios das aulas ministradas. Durante a realização das práticas, os grupos utilizaram diferentes estratégias para resolução das atividades propostas, tais como desenhos e fórmulas. Os resultados apontaram que as atividades de Investigação Matemática proporcionam aos estudantes momentos de autonomia, cooperação e interesse pela descoberta. Salienta-se que a maioria dos assuntos abordados não era de conhecimento dos alunos, mas, com as atividades oportunizadas, conseguiram aprender diferentes conteúdos. Observou-se que os estudantes, dos dois níveis de escolaridade, gostam de ser desafiados durante as aulas e que por meio de atividades investigativas elaboram distintas estratégias para resolução das atividades .

Palavras-chave: Investigação Matemática. Concepções algébricas. Trabalho em grupo. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This essay was developed with students from two public schools of basic education, located in Vale do Taquari/RS, which are partners of the Observatory of Education program that has been developed at UNIVATES University Center. The aim of this essay was to analyze the strategies elaborated by students of 7th and 9th grades by realizing investigative activities in groups involving algebraic conceptions. The theoretical subsidy that sustained this essay are based on the ideas of Ponte, Brocardo and Oliveira (2009), whom jut that the activities of Maths Investigation must be opened providing to students the formulation of different conjectures and strategies for the activities' resolution. In order to the activities' preparation, were used the four Usiskin's conceptions (1995). The research was qualitied qualitative, in a type case study. As data collection instruments were used the teacher's journal, activities developed by the students, pictures and audio recordings of the classes given. The results showed that Math Investigation activities provide to students autonomy moments, cooperation and interest in discovery. During the practices realization, the groups used different strategies to solve the proposed activities, such as drawings and formulas. The results showed that the Math Investigation activities provide for students moments of autonomy, cooperation and interest in discovery. It was observed that the students like to be challenged during classes, and by using investigative activities, it is possible to see distinct strategies about different activities. Students, even being in different educational levels, were able to formulate strategies for the proposed activities. The students did not know most of the contents approached yet, but with the given activities, they managed to learn different contents.

Keywords: Maths Investigation, algebraic concepts, group activities, elementary school.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, o ensino da Matemática vem apresentando mudanças significativas, principalmente no que diz respeito às novas propostas metodológicas É importante destacar que essa disciplina é fundamental na formação integral do ser humano, buscando promover habilidades cognitivas nos educandos. Conforme a BNCC - Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2015), em uma sociedade é necessário ter o conhecimento matemático, além do apoio de outras áreas do conhecimento, como instrumento na realização de situações cotidianas, ou ainda para desenvolver habilidades de pensamento.

Diante disso, entendo a necessidade de um planejamento que auxilie no ensino e na aprendizagem dos estudantes, principalmente quando são trabalhados conteúdos que exigem mais atenção e participação. Ademais, observo na minha prática pedagógica que educandos têm, em especial, dificuldades na aprendizagem da álgebra. Segundo Gil (2008), são necessários métodos mais específicos para o ensino desse conteúdo, visto que exige abstração. É importante salientar que, ao trabalhar esses conceitos e procedimentos, em muitos casos pode-se dificultar a aprendizagem dos alunos, transformando a disciplina Matemática num desafeto.

Assim, recordo das aulas que tive no Ensino Médio, as quais possibilitaram um pensar diferenciado. A professora incentivava os educandos, utilizando em suas aulas atividades que desafiavam e despertavam interesse. Ao final de cada atividade realizada, desafiava a turma com exercícios ou problemas relacionados aos temas do cotidiano. Dessa forma, possibilitava, aos alunos, o desenvolvimento de diferentes habilidades de pensamento, conduzindo a correção dos exercícios e promovendo discussões e participação do grupo.

Frente a esse contexto, senti-me instigada a ingressar no ensino superior em 2007, no curso de Licenciatura em Ciências Exatas – Habilitação Integrada em Física, Matemática e Química. Minha carreira profissional iniciou no ano de 2009, quando trabalhei por dois anos em projetos no âmbito escolar de uma Prefeitura Municipal do Vale do Taquari/RS. Nessa ocasião, tive oportunidade de conhecer a realidade de escolas da cidade, interagindo diretamente com alunos.

Em 2012, já atuando como professora de Matemática na rede Estadual, concluí minha graduação. Senti o desejo e a vontade de aperfeiçoar minha prática pedagógica, pois percebi que as mudanças na educação são constantes. Sendo assim, a partir desse momento, comecei a traçar metas para minha formação contínua como docente.

Vivenciando o ambiente escolar e atuando como docente de Matemática, percebi a necessidade de buscar formação para aprimorar minhas práticas. Escolhi, então, o Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Univates, na intenção de oportunizar aos meus alunos um ensino mais significativo.

Em minhas pesquisas observei que, em relação ao ensino da Matemática, existem diversas tendências que podem possibilitar resultados promissores no ensino e na aprendizagem dos alunos, entre as quais a Modelagem Matemática, a Etnomatemática e a Investigação Matemática. Tais tendências estão sendo estudadas e problematizadas pela pesquisa do Observatório da Educação intitulado "Estratégias Metodológicas visando à Inovação e Reorganização curricular no campo da Educação Matemática no Ensino Fundamental", vinculada ao Centro Universitário UNIVATES, que foi aprovada pelo Edital 049/2012 e é financiada pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). No ano de 2013 atuei como voluntária desse projeto, tendo a oportunidade de ajudar uma mestranda em sua pesquisa no âmbito da Investigação Matemática.

O referido Observatório da Educação tem por objetivo problematizar e propor estratégias metodológicas, com vistas à implementação de práticas pedagógicas inovadoras e reorganização curricular da disciplina Matemática, em Escolas de

Educação Básica que possuem considerável distância entre o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) relativo à 4ª série/5º ano e à 8ª série/9º ano. A intervenção desse Programa ocorre em seis escolas parceiras da região do Vale do Taquari, desenvolvendo práticas inovadoras com alunos do ensino fundamental.

O grupo de pesquisadores é constituído por quinze bolsistas, sendo três deles alunos do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, estando eu incluída. Seis alunos são oriundos de cursos de graduação da Instituição e outros seis são professores de Matemática da Educação Básica da rede estadual do Rio Grande do Sul. Além desses participantes bolsistas, fazem parte desse projeto quatro professoras da Instituição, sendo uma delas a orientadora deste trabalho e outra, a coorientadora. Também há vários docentes voluntários que foram se agregando ao projeto.

Em relação às tendências discutidas e problematizadas pelo Observatório da Educação, pode-se salientar que, em uma Investigação Matemática, segundo Ponte; Brocado; Oliveira, (2009), o discente age como um matemático na formulação e reformulação de conjecturas, além de apresentar os resultados aos colegas. Quanto à Modelagem Matemática, segundo Bassanezi (2006), é uma metodologia ativa que é utilizada para a aquisição e regulamentação de modelos matemáticos. Uma modelagem abrange, principalmente a metodologia de mudar circunstâncias de realidade e transformá-las em problemas matemáticos cujas soluções precisam ser explanadas na dicção habitual.

Na Etnomatemática, segundo D'Ambrosio, (2013), procura-se compreender a história de diferentes povos, levando-se em consideração o interesse de diferentes grupos. Nesse contexto, Knijnik et al. (2013) salientam que o campo da Etnomatemática tem uma abordagem abrangente, considerando outras formas como Etnomatemática: a matemática presente em jogos infantis, a matemática exercitada por mulheres e homens para suprir às suas necessidades de sobrevivência.

Como bolsista mestranda do Observatório da Educação, e vinculada a esta pesquisa, fiz uso da Investigação Matemática para efetivação deste trabalho. Percebo que a tendência da Investigação ainda é pouco utilizada pelos educadores em suas aulas e que esta pode possibilitar ao educando desenvolver habilidades de pensamento, sendo responsável pelo seu próprio conhecimento.

A Investigação Matemática, segundo Lamonato e Passos (2011), está associada à ideia de procurar, questionar, querer saber. Em conformidade com essa ideia, os referidos autores ainda declaram que investigar é descobrir o que não se sabe e que, para investigar, é necessário estar curioso. Para esses autores, em uma Investigação Matemática, o professor deverá planejar questões abertas, que possibilitarão aos educandos a formulação de conjecturas acerca das atividades planejadas. Concomitante a isso, é necessário discutir e socializar as respostas formuladas pelos educandos, sendo que o professor age como mediador, auxiliando os educandos.

Assim, o tema deste trabalho consistiu no uso da Investigação Matemática para a resolução de atividades, envolvendo concepções da álgebra. Portanto, as quatro concepções algébricas que sustentaram as atividades desenvolvidas foram as de Usiskin (1995): a aritmética generalizada, a álgebra como processo na resolução de problemas, a álgebra como estudo das relações entre grandezas e a álgebra como estudo das estruturas. A aritmética generalizada, segundo o autor, trata de artifícios importantes na álgebra para o aluno explanar e generalizar. Na álgebra como processo de resolução de problemas, o aluno simplifica distintos problemas matemáticos. Em relação à concepção da álgebra como estudo de relações entre grandezas, os estudantes trabalham com variáveis. Por fim, a álgebra como estudo das estruturas aborda operações com números reais e polinômios.

Este trabalho aborda uma das três tendências problematizadas na pesquisa vinculada ao Programa Observatório da Educação e foi desenvolvido em duas das escolas parceiras, conforme mencionado anteriormente. Efetivei este trabalho porque senti necessidade, como educadora, de desenvolver, com os educandos, atividades que os desafiassem a pensar acerca dos conteúdos de álgebra. Além disso, pelo gosto pessoal sobre os conteúdos de álgebra, que exigem do docente um planejamento diferenciado para oportunizar aos seus discentes um ensino que faça sentido e que lhes seja mais significativo. Como profissional da área da matemática, posso destacar que a álgebra pode e deve ser trabalhada com os alunos de maneira diferenciada, utilizando distintas metodologias de ensino.

As atividades desenvolvidas com ênfase na Investigação Matemática foram problematizadas e realizadas em grupo, pois os alunos têm necessidade de interagir e de discutir suas conjecturas. Além disso, percebo que é necessário discutir com os educandos como se deve proceder em um trabalho em grupo, pois diversas vezes, em minha prática pedagógica, me deparei com situações em que cada um desenvolvia uma parte do trabalho, sem socializar suas ideias acerca das atividades com seus colegas.

Diante deste contexto, foram escolhidas quatro turmas para o desenvolvimento da pesquisa, de duas escolas parceiras do programa do Observatório, do qual foi bolsista. Duas turmas do 7° ano e duas do 9° ano, pois os estudantes do 7° ano, na maioria das vezes, ainda não conhecem os conteúdos de álgebra, já os alunos do 9° ano já possuem conhecimento sobre a Álgebra.

O problema desta pesquisa consistiu na seguinte questão: Que estratégias são elaboradas pelos alunos de duas turmas de 7° e duas do 9° ano, ao realizarem atividades de Investigação Matemática envolvendo as concepções da álgebra?

Portanto, o objetivo geral consistiu em analisar as estratégias elaboradas por alunos do 7° e 9° anos ao realizarem atividades utilizando a Investigação Matemática e envolvendo concepções algébricas.

Estabeleci como objetivos específicos:

- Proporcionar aos alunos de 7° e 9° anos, tarefas de investigação matemática que contemplam as diferentes concepções de álgebra.

- Fomentar o trabalho em grupo durante a resolução de atividades de Investigação Matemática.

- Analisar as diferentes estratégias elaboradas pelos grupos de alunos ao resolverem as atividades investigativas.

Saliento que a pesquisa foi qualitativa e a coleta de dados ocorreu por meio de gravações de áudios, bem como com o diário de campo do professor e dos alunos.

No capítulo dois deste trabalho, descrevo aspectos que explicitam o conceito de Investigação Matemática, destacando a importância do uso de atividades desenvolvidas por meio da referida metodologia. Discuto ideias de alguns autores que apontam, em seus trabalhos, como se desenvolve uma aula utilizando a investigação, bem como deve ser o processo de acompanhamento, por parte do educador, durante a exploração das atividades investigativas.

Dando continuidade, ainda no capítulo dois referencio autores que enfatizam o trabalho em grupo em sala de aula e conceitos que se inter-relacionam com a importância de oportunizar o trabalho em grupo nas aulas. Também apresento ideias de autores que problematizaram, em seus livros e trabalhos, o conteúdo da álgebra. Neste contexto, faço análise de aspectos relevantes sobre as dificuldades encontradas tanto para alunos, quanto para professores no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem da álgebra.

No capítulo três explicito a metodologia escolhida para o desenvolvimento e efetivação deste trabalho. O estudo foi efetivado por meio de uma análise qualitativa, vinculando-se ao estudo de caso. Descrevo também como foi desenvolvida a intervenção pedagógica e quais os métodos que permitiram a análise dos dados obtidos.

No quarto capítulo desta dissertação, descrevo e analiso, à luz de referenciais teóricos, os resultados emergentes da pesquisa realizada, enfatizando as estratégias formuladas pelos estudantes durante a exploração das atividades. No quinto capítulo, descrevo minhas considerações acerca dos resultados emergentes, considerando os objetivos desta pesquisa.

As referências e os apêndices do trabalho estão citados logo após o quinto capítulo. No final, apresento o produto educacional oriundo deste trabalho, parte integrante para o Mestrado Profissional.

2 REVISÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresento aspectos relevantes sobre o ensino da álgebra e a Investigação Matemática em sala de aula, destacando a importância do trabalho em grupo e qual é a influência deste tipo de atividade para o ensino e a aprendizagem dos estudantes. Ademais, em cada seção, apresento dissertações ou teses de outros pesquisadores que realizaram trabalhos sobre o tema em discussão.

2.1 Ensino de álgebra

Em seus estudos, Ponte, Branco e Matos (2009) relatam que, historicamente, a origem da álgebra remete para a “normatização e a sistematização” de algumas técnicas para a resolução de problema. Esses autores salientam que essas técnicas eram utilizadas desde a antiguidade, “no Egipto, na Babilónia, na China e na Índia. O célebre papiro de Amhes/Rhind é um documento matemático cheio de técnicas de resolução de problemas com um marcado cunho algébrico [...]” (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 5).

Dessa forma, aos poucos é evidenciado o surgimento de conceitos de equações e álgebra, bem como a importância do ensino desse conteúdo na disciplina de Matemática. É importante ressaltar que a álgebra desapareceu como tema mais importante do currículo, após o período da matemática moderna, em Portugal. Em efeito:

> A Álgebra constitui um dos grandes ramos da Matemática, ao lado da Geometria e da Análise Infinitesimal. Em Portugal, até meados do século XX, tinha um lugar incontestado nos programas do ensino básico e secundário. No entanto, após o período da Matemática moderna, desapareceu como grande tema do currículo. Nos últimos anos, porém, começou a falar-se com insistência da sua importância. Subjacentes a estas mudanças estão diferentes visões da Álgebra, do que constitui o pensamento algébrico e do seu papel no ensino (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 5).

Corroborando com os autores citados, que ressaltam a importância do ensino da álgebra e seu marco na história, Usiskin (1995, p. 21) comenta:

> Já não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, pois ela é muito mais que isso. A álgebra continua sendo um veículo para a resolução de problemas, mas também é mais, ela é mais que isso. Ela fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para a caracterização e compreensão das estruturas matemáticas. Dados esses trunfos e a matematização crescente da sociedade, não é de surpreender que a álgebra seja hoje a área-chave de estudo da matemática da escola secundária e que essa posição de destaque provavelmente perdure por muito tempo.

Considerando a importância da álgebra elencada por Usiskin (1995), corrobora a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2015, p. 226), em sua segunda versão, quando destaca que o campo da Álgebra "[...] é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas". Ademais, é também importante para as relações que demandam "situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos" (Ibidem, p. 226).

O estudo desse conteúdo é considerado complexo nos anos finais do Ensino Fundamental, conforme aponta Gómez-Granell (1998, p. 29), para quem "um dos problemas mais importantes que o ensino de Matemática tem de enfrentar reside na enorme dificuldade que, para alunos e alunas, representa o domínio da linguagem matemática, especificamente da algébrica".

Algumas dificuldades podem ser superadas ao trabalhar-se com álgebra, oportunizando aos alunos espaços para pensarem e praticarem o mencionado conteúdo desde o início do Ensino Fundamental. Nessa linha argumentativa, Gil (2008, p. 43) expressa:

> É interessante que o estudo da Álgebra inicie nas séries iniciais do Ensino Fundamental de maneira informal, sendo trabalhada juntamente com aritmética, e assim quando o aluno chegar às séries finais, com mais facilidade estes tópicos serão ampliados e formalizados, dentro de uma proposta de sempre fazer uma relação do que se está aprendendo com conhecimentos já existentes.

Assim, dever-se-ia trabalhar com o conteúdo da álgebra desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, podendo-se utilizar diferentes perspectivas, como atividades investigativas, análises de gráficos, situações problemas, cálculos de áreas, relacionadas à geometria. Ademais, “[...] no *pensamento algébrico* dá-se atenção não só aos objetos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre estas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10, grifos do autor). Assim, ainda segundo os autores, para agenciar esse tipo de raciocínio, é necessário o estudo de modelos e legitimidades.

Ao considerar a importância do estudo da álgebra, a Base Nacional Comum Curricular remete que é de suma importância trabalhar com o conteúdo de álgebra desde os anos iniciais do ensino fundamental, pois pode contribuir para que os alunos desenvolvam “um tipo de raciocínio específico, denominado pensamento algébrico. Essa ideia, atualmente considerada, diferencia-se de uma ideia de álgebra escolar como um processo de manipulação de símbolos” (BRASIL, 2016, p. 278).

Em relação à pesquisa com o descritor Investigação Matemática e álgebra, encontrei o trabalho de Baccarin (2008). Em sua dissertação, intitulada “Investigação Matemática: uma análise da sua contribuição na construção de conceitos algébricos”, a autora investigou como ocorreu o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do sétimo ano, quando operavam com atividades de Investigação Matemática envolvendo o conteúdo de álgebra. O trabalho realizado pelos alunos foi em grupos, pois assim eles discutiam suas ideias com os demais colegas, e os que entendiam as questões ajudavam os que tinham alguma dificuldade. A autora preconizou:

> O que os participantes da pesquisa puderam observar é que, num ambiente investigativo, os alunos aprendem os conceitos científicos, modificando suas teorias próprias já existentes por outras melhores adaptadas às novas situações propostas no espaço da investigação em sala de aula. Isto

> acontece com a mediação do professor, do colega ou muitas vezes sozinho, quando o aluno começa a reelaborar seu próprio pensamento (BACCARIN, 2008, p. 74).

A autora salientou que seu estudo “evidencia algumas vantagens da aula investigativa na formação de conceitos algébricos” (BACCARIN, 2008, p. 82). Essa conclusão da autora fundamenta-se nas atividades realizadas, pois ela elenca que, quando o professor é mediador e os discentes trabalham em grupo, estes conseguem compreender os conceitos algébricos. Para a autora, a utilização de distintos momentos, como “resolução em grupo, exploração de problema, confronto de ideias, validação das resoluções, fez com que os alunos não adquirissem somente modelos, mas entendessem a Matemática de modo integrado” (BACCARIN, 2008, p. 82), proporcionando, dessa forma, que articulassem estratégias, raciocínios e conceitos.

Haja vista que os conceitos e pensamentos algébricos mostram-se importantes de acordo com os estudos realizados, Ponte, Branco e Matos (2009, p. 9), em um trabalho, salientaram que “podemos então dizer, que o grande objetivo do estudo da Álgebra nos ensinos básico e secundário é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos”. Os autores destacam que “[...] o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções” (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 10). Ainda para os autores, existem algumas vertentes fundamentais para o pensamento algébrico, elencados no Quadro 1.

Quadro 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; • Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; • Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	• Relacionar (em particular, analisar propriedades); • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	• Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: Adaptado de Ponte, Branco, Matos (2009).

Ponte, Branco e Matos (2009) realizaram diversas atividades investigativas que envolveram algumas concepções da álgebra. Essas atividades desenvolvidas pelos autores foram propostas com o intuito de desenvolver o pensamento algébrico nos alunos. Os autores concluíram que algumas tarefas podem desempenhar um papel fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, "desenvolvendo-se a partir de tarefas de cunho exploratório ou investigativo, seja em contexto matemático ou extra matemático" (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 15).

Partindo dos estudos realizados, é relevante destacar a importância dos processos de ensinar e de aprender álgebra na educação básica. Assim, apresento as quatro concepções da álgebra, segundo Usiskin (1995): aritmética generalizada, meio de resolver certos problemas, estudo de relações e estrutura. Tais concepções foram utilizadas na elaboração das atividades investigativas desenvolvidas na prática efetivada e analisada neste estudo.

A álgebra como aritmética generalizada refere-se a modelos que podem ser representados por meio de algumas variáveis (USISKIN, 1995). Nessa concepção, apresentam-se equações para generalizar questões matemática, sendo que "muitas vezes encontramos relações entre números que desejamos descrever matematicamente, e as variáveis são instrumentos utilíssimos nessa descrição" (USISKIN, 1995, p. 13).

Ainda em relação à concepção da aritmética generalizada, é pertinente destacar sua importância na matemática e na aritmética, no que diz respeito ao educando. Usiskin (1995, p. 13, grifos do autor) discorre que "dentro dessa concepção de álgebra, as instruções-chave para o aluno são *traduzir* e *generalizar.* Trata-se de técnicas importantes, não só para a álgebra, mas também para a aritmética". Um exemplo que pode ser associado a essa concepção é a "propriedade comutativa**:** o aluno deve ser capaz de perceber que a igualdade 3 + 5 = 5 + 3 continuaria valendo quaisquer que fossem os números reais (RIBEIRO, 2015, p. 4)".

Quanto à álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, Usiskin (1995, p. 15, grifos do autor) salienta que, na presente concepção, "as variáveis são ou *incógnitas* ou *constantes*. Enquanto as instruções-chave no uso de uma variável como generalizadora de modelos são traduzir e generalizar, neste caso as instruções-chave são simplificar e *resolver".*

Gomes (2013, p. 15) ressalta que, nessa concepção, o aluno precisa resolver problemas e versar com equações matemáticas, além de "dominar não apenas a capacidade de equacionar os problemas (isto é, traduzi-los para a linguagem algébrica em equações), como também precisa ter habilidades em manejar matematicamente essas equações até obter a solução". Nesse sentido, em estudos, Ribeiro (2015) salienta que, nesta concepção, têm-se problemas com incógnitas e com o intuito de resolver as situações problemas, valendo-se da linguagem algébrica. Usiskin (1995, p. 14) exemplifica essa concepção em seu livro: "Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é quarenta. Achar o número. Facilmente se traduz o problema para uma linguagem da álgebra. 5x + 3 = 40".

Em relação à álgebra como estudo de relações entre grandezas, conforme Usiskin (1995, p. 15, grifo do autor), "[...] neste caso, as variáveis variam". Ribeiro (2015) exemplifica essa concepção pensando em atividades que envolvam área de figuras geométricas, nas quais se tem alguma fórmula que pode se relacionar com o pensamento algébrico. Conforme Usiskin (19995, p. 16):

> Dentro dessa concepção, uma variável é um agrupamento (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (isto é representa um número do qual dependem de outros números). Só no contexto dessa função existem as noções de variável independente e variável dependente. As funções surgem quase imediatamente, pois necessitamos de um nome para os valores que dependem de um argumento ou parâmetro x.

Ramos (2011, p. 20), nesse sentido, salienta que "[...] concepção de álgebra como estudo de relações entre grandezas pode começar com fórmulas, a maior diferença entre esta concepção e a anterior é que, nesse caso, as variáveis realmente variam". Exemplifica-se essa afirmação com um problema mensurado por Usiskin (1995, p. 15-16):

> O que ocorre com o valor de 1/x quando x se torna cada vez maior?
> [...] Não pedimos o valor de x, portanto x não é uma incógnita. Não pedimos ao aluno que traduza. Há um modelo a ser generalizado, mas não se trata de um modelo que pareça com aritmética. [...] Trata-se de um modelo fundamentalmente algébrico.

A concepção da álgebra como estudo das estruturas é importante para Usiskin (1995, p. 18), pois "[...] reconhecemos a álgebra como o estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios". Ramos (2011, p. 22), por sua vez, ressalta que algumas atividades que podem ser abordadas, nessa concepção, relacionam-se aos conteúdos de "[...] produtos notáveis, fatoração, operações com monômios e polinômios [...]". O autor ainda salienta que, "Nessa concepção, o que caracteriza a variável é o fato de ser pouco mais do que um símbolo arbitrário" (Ibidem, 2011, p. 22).

Para resumir as concepções algébricas, Usiskin (1995) formulou um quadro que dá suporte aos estudos (Ver Quadro 2).

Quadro 2 – Concepções resumidas conforme Usiskin

Concepção da álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: adaptado de (USISKIN, 1995, p. 20).

Usiskin (1995) parte do pressuposto de que as diferentes concepções da álgebra se relacionam com as suas finalidades. O autor ainda ressalta sobre a importância do ensino dessas concepções na escola. Esta importância também é salientada por Silva, Ibrahim e Resende (2013, p. 118), quando preconizam:

> Consideramos que as concepções de álgebra e de educação algébrica são fundamentais para o professor quando organiza as suas atividades de ensino, assim como para os envolvidos na definição dessas avaliações sistêmicas. A álgebra pode ser percebida como uma ferramenta para tornar o pensamento mais eficiente, uma ferramenta para resolver problemas não só no campo da matemática, mas como em outras ciências. No entanto, ela deve ser percebida como um campo da matemática que possui elementos que a caracterizam como um corpo de conhecimentos, socialmente reconhecido.

Nessa perspectiva considerando a importância da álgebra no ensino da matemática, na próxima seção apresentam-se referenciais teóricos acerca da tendência de Investigação Matemática. A referida tendência foi utilizada para a elaboração das atividades desta dissertação.

2.2 Investigação Matemática em sala de aula

A Investigação Matemática é uma tendência vinculada a métodos diferenciados de ensinar e aprender, pois possibilita aos alunos descobrir e formular suas hipóteses acerca de atividades propostas pelo educador. Segundo Lamonato e Passos (2011), investigar associa-se à ideia de procurar, questionar, querer saber. Assim, no campo da Investigação Matemática, compete ao professor proporcionar atividades nas quais os alunos possam averiguar e descobrir soluções para determinadas situações.

O docente, ao utilizar atividades de investigação, não apresenta uma resposta pronta, mas sim, planeja situações, pensando em circunstâncias em que o aluno seja capaz de descobrir seus próprios conceitos. Nesse contexto,

> o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização das provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e professor (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23).

Uma Investigação Matemática é decorrente de quatro momentos principais que são mediados pelo professor. O início de uma atividade de investigação está vinculado ao planejamento das atividades. Posteriormente, compete aos educandos formular e testar conjeturas referentes a essas atividades investigativas. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 20):

> Podemos dizer que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Assim, é importante que as questões investigativas sejam abertas, isto é, devem possibilitar que os discentes formulem várias conjecturas (hipóteses) para elaborar suas respostas. Pode ser que todos os educandos cheguem às mesmas conjecturas, mas podem, também, chegar a conjecturas distintas. Corroboro com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 23) quando destacam que as atividades investigativas são atividades abertas. Segundo esses autores, “a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser diferentes”.

Ao professor compete conduzir a atividade de Investigação, assumindo uma postura mediadora, sempre instigando e desafiando o aluno na realização das atividades propostas. É tarefa do educador apoiar os alunos nos caminhos a serem seguidos. Segundo Lamonato e Passos (2011, p. 65), com o apoio e influência do professor, “a investigação na sala de aula pode ser desencadeada e assim permanecer. Porém, se os alunos não tiverem seu apoio e acompanhamento, a exploração iniciada não pode prosseguir para as demais etapas”.

Ainda alicerçada em como o professor deve conduzir uma atividade de investigação, destaco a posição de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 36) com relação a teste e formulação das conjecturas. Para esses autores:

> O professor precisa estar atento para todo esse processo de formulação e teste de conjecturas, para garantir que os alunos vão evoluindo na realização de investigações. Desse modo, cabe-lhe colocar questões aos alunos que os estimulem a olhar em outras direções e os façam refletir sobre aquilo que estão a fazer.

A participação do professor como mediador deve ser efetiva durante as atividades de Investigação, que devem ser diferenciadas e desafiadoras, tanto para o professor quanto para o aluno. O ambiente em que estes estão inseridos deve ser acolhedor para ambos, possibilitando, para o educando, momentos para expressar sua opinião e relatar suas conjecturas. “A tarefa é tornar possível que alunos e professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora” (SKOVSMOSE, 2008, p. 37). Assim, é necessário proporcionar momentos nos quais os educandos apresentem seus resultados para a turma e para o professor.

Compete também, ao educador, avaliar as atividades realizadas durante a Investigação Matemática. A avaliação é um instrumento que auxilia o professor em tomadas de decisões importantes, pois é por meio dela que pode perceber se o aluno está aprendendo. Em efeito:

> Os resultados das avaliações dos alunos servem para informar o próprio aluno, o professor, os pais, escola e a comunidade, acerca do seu progresso nos diferentes domínios da aprendizagem. Além disso, fornecem dados para que o professor avalie o seu próprio desempenho docente, podendo auxiliar na tomada de decisões dos envolvidos (aluno e professor, por exemplo), visando modificar ou ajustar o modo de estudar (do aluno) ou planejar o ensino (do professor) (MENDES, 2009, p. 169).

Ademais, é importante permitir que os grupos de trabalho apresentem, aos colegas, as conjecturas formuladas, haja vista que, por meio de apresentações orais, o professor poderá avaliar a compreensão das atividades e as estratégias elaboradas pelos alunos. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 125) expressam que, quando os estudantes apresentam as estratégias e conjecturas oralmente, é possível avaliar diversas situações que incluem “[...] as atividades e valores, a compreensão do processo de investigação, a pertinência das estratégias, os processos de raciocínio, o uso de conceitos, as competências de cálculo e a capacidade de comunicação oral”.

Engajada nesses pressupostos teóricos, a seguir apresento algumas dissertações que potencializaram estudos referentes à Investigação Matemática. Estes trabalhos foram encontrados no portal da CAPES utilizando como descritor “Investigação Matemática e Ensino Fundamental”, entre os anos de 2008 e 2015.

São cinco dissertações desenvolvidas com alunos do Ensino Fundamental, de autoria de Reginaldo (2012), Brum (2012), Avi (2012), Balke (2011) e Schmitt (2015).

Schmitt (2015) realizou sua intervenção, intitulada "Abordando geometria por meio da investigação matemática: um comparativo entre o 5º e 9º anos do Ensino Fundamental", vinculada ao PPGECE (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas) da UNIVATES e com o objetivo de "investigar as conjecturas apresentadas por alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental advindas de atividades de investigação matemática envolvendo geometria" (SCHMITT, 2015, p. 13). As atividades realizadas pela autora foram desenvolvidas em grupos de trabalho "numa tentativa de proporcionar momentos de socialização de aprendizagem e troca de saberes" (SCHMITT, 2015, p. 40).

A análise de dados de Schmitt (2015) ocorreu a partir de filmagens, diários de campo dos alunos e da referida autora, além da observação participante. A autora preconizou, durante a realização de atividades, a escrita matemática, ou seja, salientou a necessidade da escrita dos alunos durante as discussões das tarefas em grupo. Concluiu em sua pesquisa, que "as atividades oriundas da tendência Investigação Matemática proporcionaram momentos de autonomia aos alunos no que diz respeito a sua formação discente" (SCHMITT, 2015, p. 91). Mesmo trabalhando com alunos de diferentes graus de escolaridade, a autora salientou que todos realizaram as atividades propostas, cada um à sua maneira. Em efeito:

> Percebi que existem algumas noções de conceitos e fórmulas que foram mais predominantes no 9º ano do que no 5º ano, tais como fórmulas da área e perímetro de figuras geométricas. Apesar de os alunos do 9º ano relutarem em utilizar fórmulas, eles demonstravam sabê-las. Eles também pensavam em estratégias ou fórmulas para tentar resolver as questões, tais como para calcular a área de quadrados e retângulos, e o volume dos cubos. Os alunos do 5º ano limitavam-se a contar quadradinhos e cubinhos, sendo que poucos alunos tentavam alguma estratégia diferente (SCHMITT, 2015, p. 92).

Reginaldo (2012), em sua dissertação, intitulada "Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática", preconizou atividades de Investigação Matemática realizadas com alunos de três turmas do 9° ano do Ensino Fundamental, elencando como objetivo: "identificar e compreender como se desencadeia e se desenvolve a argumentação matemática dos alunos em uma atividade investigativa” (REGINALDO, 2012, p. 21). A pesquisa de Reginaldo (2012) está engajada em pressupostos teóricos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), além das ideias de Skovsmose (2000), entre outros pensadores que foram suporte teórico ao seu trabalho de mestrado. A referida investigação foi de cunho qualitativo, valendo-se de relatórios produzidos pelos alunos, gravações de áudio e vídeo, além de anotações em um diário de campo.

A autora promoveu cinco atividades que foram pensadas e discutidas em grupos de trabalhos em cada turma pesquisada. O conteúdo enfatizado foi a geometria. Com essas atividades, Reginaldo (2012) concluiu que intervenções pedagógicas utilizando investigação matemática proporcionam aos alunos momentos para argumentar e expor suas ideias. Além disso, a autora ressaltou que é necessária uma mudança de postura do professor, tornando as aulas de matemática mais dinâmicas e proporcionando aos educandos atividades nas quais possam desenvolver suas habilidades de argumentação.

Brum (2012), em sua pesquisa de mestrado “Atividades investigativas para o ensino de matemática para alunos de 5º série do Ensino Fundamental”, verificou as contribuições das atividades investigativas na aprendizagem de alunos de uma 5ª série do Ensino Fundamental, em relação ao conteúdo de sequências numéricas. As atividades planejadas pela autora foram desenvolvidas em uma 5ª série de uma escola municipal, em uma turma constituída por 28 alunos que realizaram, em grupos, o trabalho proposto. A autora proporcionou momentos de socialização entre a turma, para que cada grupo pudesse formular conjecturas referentes a sequências de figuras e a sua repetição. Assim, em sua prática, mediou as aulas, deixando os educandos exporem, para turma, suas conjecturas, orientando-os para que conseguissem refletir acerca das atividades realizadas.

Brum (2012) analisou os dados obtidos, baseando-se em anotações realizadas em um diário de campo e em relatórios registrados pelos grupos de trabalho. A autora concluiu, com seu trabalho, que atividades investigativas proporcionam um desafio tanto para o aluno, quanto para o professor. Além das análises das conjecturas formuladas pelos grupos de trabalho, salientou, durante sua prática, a importância da discussão das atividades com os colegas:

> Os alunos também aprenderam a trabalhar em grupo. No início não havia um entrosamento entre os colegas era cada um por si, ou então ficavam esperando um fazer e os outros depois copiavam. A professora, então, esclareceu que essa questão do trabalho em grupo que era uma troca, uma ajuda mútua e que era para todos os integrantes exporem suas ideias, suas conclusões para os demais colegas e juntos discutirem e chegarem a um consenso. A partir daí então o trabalho em grupo melhorou, inclusive as conversas e brincadeiras que não estavam dentro do tema proposto diminuíram (BRUM, 2012, p. 112-113).

Avi (2012) potencializou o trabalho em grupo durante a intervenção de sua pesquisa “Aprendizagens matemáticas desenvolvidas em ambiente de investigação estatística”, realizando sua prática com alunos de uma 8ª série do Ensino Fundamental. A questão norteadora de seu trabalho foi: “Quais são as aprendizagens mobilizadas por atividades de investigação estatística e articuladas pelas linguagens dos alunos, nos processos interativos de significação de conceitos estatísticos e matemáticos?” (AVI, 2012, p. 16). Seu estudo procurou verificar quais aprendizagens matemáticas eram mobilizadas em situações de investigação estatística.

Para responder sua questão norteadora e alcançar o objetivo de sua pesquisa, Avi (2012) filmou e gravou todos os encontros realizados com doze alunos, participantes de forma voluntária, que realizaram atividades utilizando Investigação Matemática. O conteúdo abordado foi a estatística, e a autora elaborou atividades que foram desenvolvidas em dez encontros. Utilizou exercícios impressos que deveriam ser lidos e resolvidos pelos grupos de trabalho, formulando e elaborando conjecturas. Também foram realizadas atividades, utilizando recursos computacionais.

Como conclusão de seu trabalho, Avi (2012) salientou que proporcionar aos alunos atividades investigativas oportuniza a elaboração de estratégias e argumentação acerca destas, potencializando a aprendizagem do educando. A autora enfatizou, em suas conclusões, a importância da Investigação Matemática, pois esta fomenta o trabalho em grupo, propiciando momentos para discussões e interação entre os alunos.

> As atividades investigativas podem ser consideradas potenciais para o desenvolvimento de aprendizagens matemáticas, haja vista que a **aprendizagem pode ser promovida através de atividades que estimulem a interação entre os alunos e entre professor-aluno**, concebendo que a aprendizagem humana é socialmente constituída e a

> interação em sala de aula pode dar conta da possibilidade para o desenvolvimento de funções até então não desenvolvidas, ampliando o desenvolvimento atual a fim de potencializá-lo (AVI, 2012, p. 99, grifos da autora).

Balke (2011), em sua pesquisa de mestrado “Investigação matemática: tratamento da informação no Ensino Fundamental”, desenvolveu atividades com alunos de uma 8° série, abordando o conteúdo tratamento de informação. Com uma abordagem qualitativa, a autora filmou quatorze aulas que foram desenvolvidas, para posterior estudo dos dados. A análise das conjecturas formuladas pelos alunos mostrou que sua participação em aulas com metodologias diferenciadas pode facilitar a aprendizagem. A autora salientou que atividades investigativas podem potencializar a apropriação de significados dos conteúdos, na medida em que os alunos interpretam e formulam suas conjecturas.

De acordo com estudos realizados na análise das dissertações, nas atividades que desenvolvi enfatizei o trabalho em grupo, o que, de acordo com as leituras realizadas, na Investigação Matemática é utilizado como metodologia durante a intervenção. Destaco também que, diferentemente dos demais trabalhos, abordei as concepções algébricas de acordo com Usiskin (1995) em minhas atividades. Durante os estudos dos referenciais, evidenciei que este conteúdo foi pouco trabalhado ao realizar-se Investigação Matemática.

Na próxima seção, destaco a importância do trabalho em grupo. Referencio esta seção, pois, durante os estudos sobre a Investigação Matemática, evidenciou-se fortemente o trabalho em grupo durante a realização de atividades investigativas. De acordo com os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), proporcionar momentos em pequenos grupos para discussão das estratégias é importante, pois podem auxiliar na formulação e reformulação dos registros durante cada atividade.

2.3 Trabalho em grupo

Durante a realização das atividades de Investigação Matemática em sala de aula, pesquisas apontam a necessidade dos discentes interagirem com seus colegas. O exercício em grupo potencializa o envolvimento de todos, pois, em determinadas situações, viabiliza discussões sobre os trabalhos desenvolvidos.

Nessa perspectiva, Ponte, Brocardo, Oliveira (2009, p. 30) preconizam que o trabalho cooperativo "potencializa o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa, o que numa fase inicial pode ser complicado em termos de autogestão do grupo". Ainda para os autores, trabalhos em grupos são importantes, pois "muitas vezes, um ou dois alunos tomam a liderança e levam o grupo a centrar-se em certas ideias, facilitando, assim, o trabalho conjunto" (Ibidem, p. 30).

Além disso, o trabalho em grupo possibilita momentos de discussões, nos quais um aluno pode auxiliar outro que possui dificuldades. Compete destacar que se faz necessária a formação de pequenos grupos, pois, dessa forma, o educando sente-se mais confortável para tirar suas dúvidas com os demais colegas, enriquecendo, assim, a sua aprendizagem. Para Deaquino (2008, p. 37):

> Uma discussão em pequenos grupos é uma técnica de implementação de aprendizagem que permite aos aprendizes compartilhar experiências e ideias na busca de solução de problemas. O ambiente dos pequenos grupos é menos ameaçador, fazendo com que eles se sintam mais confiantes e confortáveis para expor e discutir ideias, chegando com maior facilidade a uma posição consensual, se esse for o objetivo.

O trabalho em grupo pode ser favorável, principalmente em atividades que exigem a formulação das conjecturas, pois um aluno pode auxiliar o outro na elaboração das mesmas. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2015, p. 223), é essencial, ao aluno,

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Haja vista que o trabalho em grupo é importante, é necessário intervir durante atividades alicerçadas nesse contexto, auxiliando os educandos e orientando-os em como proceder durante o trabalho cooperativo. Costa (2010, p. 6) ressalta em sua dissertação: "Difícil é encontrar cooperativismo e envolvimento em todo o processo de construção do trabalho". Diante disso, é importante desenvolver habilidades e atividades que proporcionem a interação entre os alunos. O autor preconiza que "em anos de realização de trabalhos em grupo, estes na verdade não são realizados verdadeiramente em grupo, mas sim individualmente, os alunos acabam saindo com uma visão distorcida sobre o que é e como realizá-lo" (COSTA, 2010, p. 6-7). Nesse contexto, compete ao docente planejar atividades que exijam o envolvimento de todos os integrantes do grupo.

Em consonância com o trabalho de Costa (2010), que elenca as dificuldades da realização do trabalho em grupo, Bonals (2003, p. 17) salienta que, embora não "tenhamos nos dado conta da conveniência do trabalho em grupo, também estamos tomando consciência das dificuldades que tal tarefa supõe". Para o autor, também é importante perguntar quais são os fatores que originam as dificuldades de trabalhar em grupo, pois assim se pode encontrar soluções para resolvê-las.

Nessa perspectiva, corroboro com Bonals (2003, p. 16), para quem "trabalhar em grupo se aprende com a prática, quando existem condições adequadas". Dessa forma, o professor pode planejar atividades que possibilitem o trabalho em grupo, ou seja, permitam a realização de trabalhos cooperativos em que todos os integrantes possam se envolver com a atividade proposta. Ainda para o autor, é necessário ter condições adequadas para garantir o andamento do trabalho em grupo:

> - Um *agrupamento* incorreto, em certas ocasiões, impede uma adequação da dinâmica de trabalho, que pode afetar no mesmo tempo, a resolução satisfatória das tarefas.
> - Um manejo inadequado da *dinâmica de turma como grupo* não repercute nos agrupamentos, mas pode afetar negativamente a resolução em grupo das tarefas programadas.
> - Uma escolha pouco feliz das *tarefas* gera, em muitas ocasiões, disfuncionalidade na dinâmica (BONALS, 2003, p. 20, grifos do autor).

Em relação ao trabalho em grupo, a dissertação de mestrado realizada por Carmo (2011), intitulada "Olhar docente sobre o trabalho em grupo e a pedagogia social: uma contribuição", destacou aspectos favoráveis acerca dessa dinâmica, relatando possibilidades de atividades que favoreçam um bom trabalho em grupo. A autora ressaltou como objetivo de pesquisa, "apontar a atividade em grupo como uma estratégia possível de administrar conflitos de socialização escolar" (CARMO, 2011, p. 8). Para alcançar esse objetivo, a autora realizou pesquisas com professores e alunos, verificando, assim, a importância do relacionamento entre discentes e docentes, e incentivando a prática de atividades em pequenos grupos. Sobre realizar um trabalho em grupo, a autora preconizou:

> Quando a classe toda está envolvida em um trabalho em grupo, é interessante que todos os alunos façam parte. O fato de deixar alguns alunos isolados pode ser prejudicial ao aluno e aos demais. Conversar com o aluno, identificar o problema, ajudá-lo é o verdadeiro papel do professor (CARMO, 2011, p. 62).

Nessa perspectiva, para que haja um trabalho em grupo que oportunize momentos de discussões durante a realização das tarefas e para que este seja efetivado com sucesso, o profissional envolvido deve planejá-lo e estar preparado para que os resultados sejam promissores. Para Carmo (2011), o educador é agente no âmbito educacional, pois utiliza diversas metodologias durante o ano letivo, mas, para que estas funcionem, é necessário preparo e planejamento. Só assim obterá um resultado adequado e, diante de alguma situação difícil, será possível solucionar o problema.

Além da preparação e do planejamento realizado pelo educador, quanto mais atividades são desenvolvidas no contexto cooperativo, mais os discentes aprendem a conviver. Carmo (2011, p. 68) infere que, com o trabalho cooperativo, há "melhora das habilidades sociais, o aluno poderá ser beneficiado e alguns vão aprender a lidar com a necessidade de aprender a compartilhar, aprender a aceitar ideias e posicionamentos de outros, aprender a trocar conhecimentos". Infere-se ainda que:

> As atividades de investigação constituem uma boa oportunidade para os alunos **trabalharem em grupo.** Deste modo, mais facilmente se conjugam ideias e se ultrapassam dificuldades. O grupo aumenta também a confiança em enfrentar novos problemas e promove a discussão entre alunos (BRUNHEIRA; FONSECA, 1995, p. 17, grifo do autor).

Utilizando os pressupostos teóricos apresentados neste capítulo, no próximo descrevo a proposta metodológica efetivada. As atividades enfatizam as quatro concepções da álgebra de Usiskin (1995), a Investigação Matemática e o trabalho em grupo. Ademais, tais situações foram formuladas com o intuito de que os alunos desenvolvessem espírito cooperativo e investigativo.

3 METODOLOGIA

Esta investigação foi desenvolvida dando ênfase a procedimentos metodológicos que visaram à pesquisa qualitativa, com características do estudo de caso. De acordo com Gibbs (2009), os dados qualitativos podem dar suporte à análise dos resultados obtidos, pois esses dados não incluem cálculos e nem medições, mas sim análises de diálogos, descrições de atividades, além de diferentes formas de comportamento.

Em uma pesquisa qualitativa, “o pesquisador enriquece sua narrativa com trechos de entrevistas, excertos de suas anotações, vinhetas, exemplos de trabalhos de alunos [...]” (MOREIRA, 2011, p. 51). Para este autor, em uma pesquisa qualitativa pode-se adotar o estudo de caso, o qual, de acordo com Fiorentini, Lorenzato (2012, p. 109-110), é recomendado “para confirmação ou reformulação do problema e, sobretudo, quando se quer estudar algo singular, que tenha um valor em si mesmo”. Ademais, os autores expressam que:

> O estudo de caso busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização. Por isso, o estudo de caso tende a seguir uma abordagem qualitativa. Mas isso não significa abandonar algumas quantificações necessárias. Essas quantificações podem ajudar a qualificar melhor uma análise (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 110).

Considerando a importância da observação direta para análise qualitativa dos dados emergentes, Yin (2010, p. 136) preconiza que, “como o estudo de caso deve ocorrer no ambiente natural do “caso”, você está criando a oportunidade para observações diretas”. Durante a efetivação da prática pedagógica, realizei observações diretas, analisando como os alunos exploravam as questões e, principalmente, quais as estratégias que utilizavam em cada situação, procurando identificar a maneira como realizavam os trabalhos em grupos. Ademais, analisei as gravações efetivadas em sala de aula. Após as atividades efetivadas, proporcionei aos educandos momentos de discussões e socialização em grande grupo.

> Um investigador de estudo de caso deve ter uma versatilidade metodológica não exigida, necessariamente, para o uso de outros métodos e seguir determinados procedimentos formais para assegurar o *controle de qualidade*, durante o processo de coleta de dados (YIN, 2010, p. 152, grifos do autor).

Neste trabalho, analisei as resoluções das atividades propostas, minunciosamente. Durante a análise dos dados emergentes, separei as estratégias utilizadas pelos estudantes de acordo com suas semelhanças.

Também foi utilizado o diário de campo do professor e dos alunos. Em relação ao diário de campo, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 119), este é "um dos instrumentos mais ricos de coleta de informação durante o trabalho de campo. É nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos". Nessa perspectiva, no meu diário de campo, fiz anotações referentes as falas importantes durante as conversas com os estudantes, bem como algumas explanações acerca de como a aula transcorria e como os alunos realizavam as tarefas solicitadas. Ainda segundo os autores, Fiorentini e Lorenzato (2007), é importante que os registros sejam feitos durante os momentos de observações, para melhor compreensão das estratégias elaboradas pelos estudantes.

Para a gravação de voz, utilizei quatro gravadores, sempre distribuídos em diferentes grupos, para conseguir obter o maior número de informações possível. Além disso, efetivei alguns registros por meio de fotografias. De acordo com Brum (2012, p. 19), para as observações do professor, nas atividades investigativas, "podem ser utilizados os recursos tecnológicos, gravadores e câmara fotográfica, para auxiliá-lo no momento da avaliação".

Posteriormente à realização das atividades, recolhi as folhas de respostas preenchidas pelos grupos de estudantes, para analisar quais estratégias foram elaboradas e como os alunos detalhavam a sua escrita. Segundo Morais (1999, p.

2), esta é uma forma de “análise, conduzindo a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas; ajuda a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum”.

Esta pesquisa, alicerçada nas concepções da álgebra, foi desenvolvida com alunos do 7° e 9° anos do Ensino Fundamental de duas escolas públicas do Vale do Taquari-RS, uma denominada escola “A”, e a outra denominada escola “B”. A escolha dessas turmas ocorreu porque os alunos do 7° ano ainda não haviam efetivado seus estudos acerca do conteúdo de álgebra, enquanto os do 9° ano possuíam alguns conhecimentos sobre esse conteúdo. O objetivo foi analisar as estratégias de resolução decorrentes de atividades fundamentadas na Investigação Matemática, com foco nos conteúdos da álgebra, em diferentes níveis de escolaridade. Compete salientar que não sou a professora titular das turmas.

No Quadro 3, descrevo o número de alunos de cada uma das turmas onde ocorreu a prática pedagógica.

Quadro 3 – Número de alunos por turma

Turma	**Escola A**	**Escola B**
7° ano	18 alunos	22 alunos
9° ano	25 alunos	26 alunos

Fonte: da autora, 2017.

Inicialmente entreguei, para a Direção de ambas as escolas, a Declaração de Anuência, solicitando autorização para a realização desta prática (APÊNDICE A). Para os estudantes também entreguei o termo de consentimento livre e esclarecido (APÊNDICE B), no qual expus, aos alunos e responsáveis, os objetivos e a metodologia da prática a ser desenvolvida. Nesse termo, também solicitei autorização do uso da voz.

As atividades propostas foram realizadas em grupos de até quatro integrantes, possibilitando que os estudantes socializassem e discutissem suas ideias, bem como formulassem e descrevessem as conjecturas de resolução. Os grupos de trabalho foram organizados, inicialmente, de acordo com a afinidade entre os educandos. A cada aula, quando necessário, houve trocas dos grupos de trabalhos, oportunizando a interação entre todos.

A prática foi desenvolvida em sete encontros com cada uma das turmas. Cada encontro teve duração de 2 horas/aulas, totalizando 100 minutos. Os encontros ocorreram no período de 16 de março de 2016 a 10 de maio de 2016. No Quadro 4, destaco os objetivos, as concepções e as atividades desenvolvidas em cada encontro realizado nas turmas.

Quadro 4 – Objetivos, concepção da álgebra e atividades realizadas em cada encontro

Encontro	**Objetivo**	**Concepção da álgebra**	**Atividades desenvolvidas**
Primeiro	Compreender como são realizadas atividades de Investigação Matemática. Observar as diferentes formações de sequências de palitos e quadrados, além de descobrir estratégias para encontrar as próximas figuras de uma determinada sequência.	Aritmética generalizada	Atividade de sequência de palitos.
Segundo	Conjecturar acerca de uma sequência de quadrados. Propor estratégias para relacionar diferentes pares de sequências.	Aritmética generalizada	Atividades envolvendo sequência de quadrados e diferentes pares de sequências.
Terceiro	Oportunizar a formulação de conjecturas acerca do significado de área e perímetro, tendo como referência diferentes figuras. Evidenciar que diferentes figuras podem ter mesmo valor de área e mesmo valor de perímetro.	Estudo de relações entre grandezas	Análise de diferentes figuras para evidenciar o significado de área e perímetro. Construção de diferentes figuras com valores de área e perímetro estipulados.
Quarto	Conjecturar acerca de fórmulas para calcular áreas de figuras como triângulo, trapézios e losangos.	Estudo de relações entre grandezas	Diferentes figuras para conjecturar acerca das suas áreas.
Quinto e sexto	Formular conjecturas, utilizando material concreto, na construção de conceitos em relação ao conteúdo de produtos notáveis.	Estruturas da álgebra	Atividades utilizando material concreto sobre produtos notáveis.

Sétimo	Encontrar estratégias para calcular o volume de uma caixa, levando em consideração algumas medidas pré-definidas. Resolver e formular problemas propostos	Resolução de problemas	Construção de diferentes caixas para cálculo do volume. Resolução de diferentes problemas.

Fonte: Da autora, 2017.

No início de cada aula, entregava aos grupos de estudantes uma folha de atividades e folhas de almaço, para, posteriormente, recolher os resultados descritos. Cada grupo recebia somente uma folha de atividades, pois o intuito era que se organizassem de forma a todos os integrantes participarem da elaboração das estratégias de resolução.

Durante a realização das atividades propostas, passava em todos os grupos, realizando questionamentos para obtenção de resultados mais concisos e detalhados. Ao final de cada encontro, realizava com os estudantes um momento no qual cada grupo podia explanar para a turma quais estratégias foram utilizadas durante a exploração das atividades. Saliento também que, a todo momento, havia necessidade de lembrar aos grupos a importância de descrever detalhadamente suas estratégias sobre cada questão.

No próximo capítulo, apresento a análise dos resultados emergentes dos encontros realizados. Para concretizar a análise dos dados, utilizo a metodologia descritiva, que consiste na descrição de características de determinados fenômenos. Segundo Gil (2007), muitos estudos podem ser considerados com este contexto, tendo como característica a utilização de técnicas mais uniformizadas, tais como a observação dos participantes da pesquisa. Rudio (2009, p. 71) enfatiza que “[...] a pesquisa descritiva está interessada em descobrir e observar fenômenos, procurando descrevê-los, classificá-los e interpretá-los”. Ainda segundo o autor, uma pesquisa descritiva almeja compreender a natureza de um fato, além de sua composição e os métodos que ele realiza ou estabelece.

Desta forma quanto aos objetivos propostos e a forma de recolher dados, posso evidenciar que:

a) para contemplar o objetivo - proporcionar aos alunos de 7° e 9° anos, tarefas de investigação que contemplam as diferentes concepções de álgebra - , disponibilizei a cada grupo de estudantes atividades que envolveram as concepções algébricas e a Investigação Matemática. Foram um total de dez atividades com situações em que os alunos tinham disponibilidade de encontrar diferentes estratégias. A resolução destas estratégias serviu como material de análise.

b) quanto ao objetivo - fomentar o trabalho em grupo durante a resolução de atividades de Investigação Matemática – saliento que todos os encontros foram gravados e as atividades recolhidas para análise de como transcorreu o trabalho em grupo. Além disso, durante a realização das tarefas, perpassava pelos grupos realizando anotações no diário de campo.

c) quanto ao objetivo - analisar as diferentes estratégias elaboradas pelos grupos de alunos ao resolverem as atividades investigativas -, as análises transcorreram posteriormente aos encontros por meio dos áudios gravados, bem como das atividades realizadas pelos estudantes. Além disso, o diário de campo do professor também favoreceu a análise das distintas estratégias emergentes.

No próximo capítulo, apresento todas as atividades exploradas e as estratégias decorrentes destas, analisando os dados emergentes por meio de referencial teórico sobre os temas em estudo.

4 RESULTADOS DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Neste capítulo relato estratégias utilizadas pelos estudantes durante o desenvolvimento das atividades de Investigação Matemática, bem como efetivo a análise dos resultados decorrentes, utilizando ideias de alguns pesquisadores da área. Apresento a discussão dos dados, separada por atividade realizada.

Para organização dos resultados obtidos, adotei algumas identificações para as falas e escritas dos estudantes e dos grupos de trabalho. Quando o excerto se refere às anotações realizadas pelos grupos de trabalho, usei como legenda para a escola A, G1A, G2A, G3A... e, para a escola B, G1B, G2B, G3B... Quando o excerto se refere aos áudios dos estudantes, os alunos da escola A são denominados A1, A2, A3...; e os da escola B como B1, B2, B3...

4.1 Primeiro encontro

No primeiro encontro, comentei com os estudantes quais seriam os objetivos da realização de atividades envolvendo Investigação Matemática, bem como expliquei a forma de realização das atividades investigativas. . Salientei também que essas atividades estavam vinculadas ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES. Na sequência, solicitei que os estudantes formassem grupos de até quatro integrantes, de acordo com a afinidade.

Portanto, engajada nos pressupostos teóricos relacionados ao trabalho cooperativo, entreguei para cada grupo de estudantes a primeira atividade, salientando a importância de todos os integrantes do grupo realizarem a elaboração das conjecturas e estratégias Além disso, comentei sobre a importância de descreverem detalhadamente todas as estratégias utilizadas, em cada questão. Esta atividade (Quadro 5) vincula-se à concepção da álgebra como aritmética generalizada. O objetivo foi observar as diferentes formações de sequências e descobrir estratégias para encontrar as próximas figuras da sequência.

Quadro 5 – Atividade de sequência de palitos

Atividade 1:

Observar a sequência:

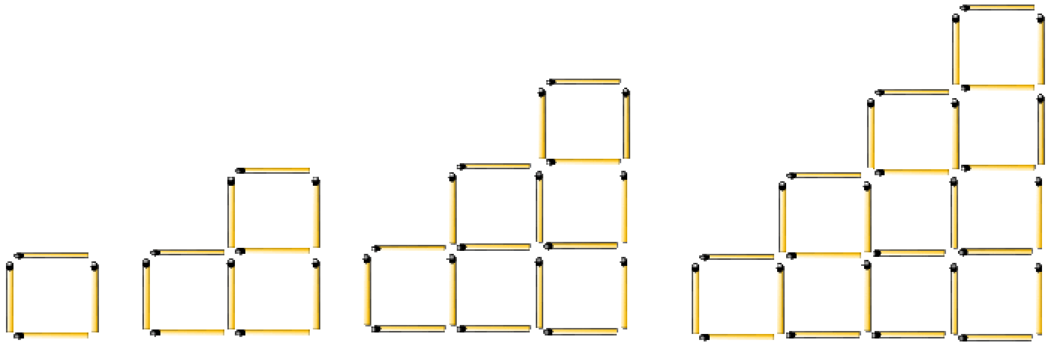


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Existe alguma relação com o número de palitos utilizados ao longo da sequência?
b) Sem construir a próxima figura, escrever quantos palitos serão utilizados. Justificar.
c) Existe alguma relação com o número de quadrados formados ao longo da sequência? Justificar.
d) Quantos quadrados serão formados na próxima figura? Explicar o porquê.
e) Na figura 20, quantos palitos serão necessários? Que estratégia foi utilizada para responder esta questão?
f) Pensando nesta atividade, o que significa sequência?

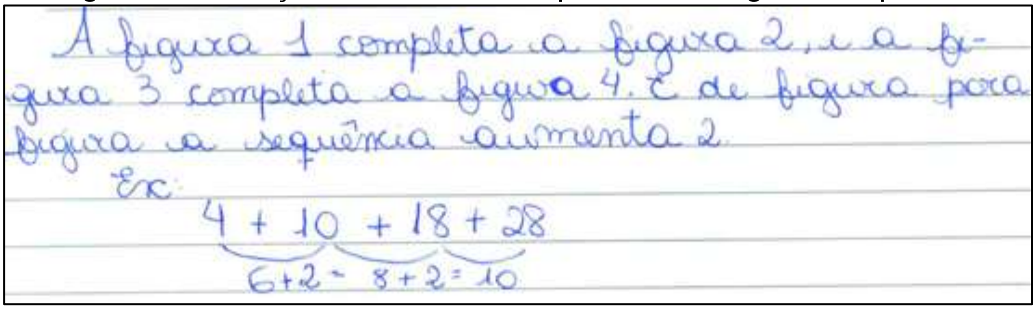
Fonte: adaptado de Dante (2005, p. 136).

Durante a análise dos resultados emergentes, observei que, tanto os alunos do 7° ano, como os do 9° ano, usaram diferentes estratégias, tais como: uso de desenhos, tentativas e erros, desenvolvimento de fórmulas. Por diversas vezes, os resultados decorrentes, entre todos os grupos participantes das atividades, eram os mesmos, mas as estratégias utilizadas eram distintas.

No decorrer desta atividade, uma das estratégias utilizadas estava associada à relação da quantidade de palitos ao longo da sequência. Alguns grupos elencaram que esta quantidade estava relacionada ao uso de números pares. Ou seja, alguns grupos salientaram, em suas conjecturas, que o número de palitos da sequência sempre seria par. Outra ideia emergente nos grupos de trabalho foi que a quantidade de palitos ia aumentando de forma crescente.

Para descobrirem a quantidade de palitos da 5ª[1] figura e da 20ª figura da atividade 1, diversos grupos utilizaram a estratégia de cálculo, que relacionava o aumento de palitos ao longo da sequência. Os cálculos elencados pelos grupos de estudantes estão contemplados nas Figuras 1, 2, e 3. Os grupos escreveram a sequência do aumento do número de palitos, descrevendo que utilizaram a soma de 2 em 2, pois, do número 4 para o 10, somou-se 6. Do número 10 ao 18, somou-se 8, já do 18 ao número 28, somou-se 10. Essa soma aumenta sempre de 2 em 2.

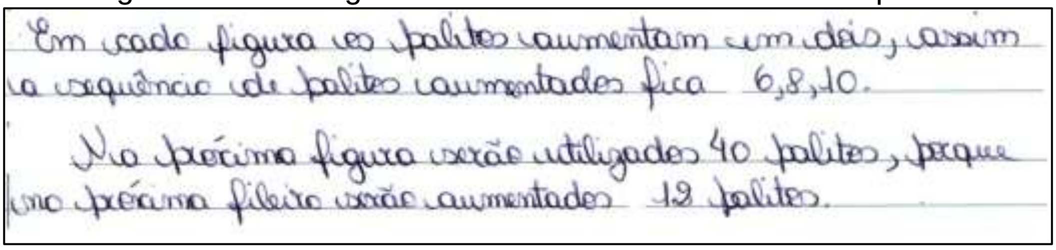
Figura 1 – Relação do aumento de palitos ao longo da sequência



A figura 1 completa a figura 2, e a figura 3 completa a figura 4. E de figura para figura a sequência aumenta 2.
Ex:
4 + 10 + 18 + 28
6+2 = 8+2 = 10

Fonte: Grupo 1 da escola A, 2016.

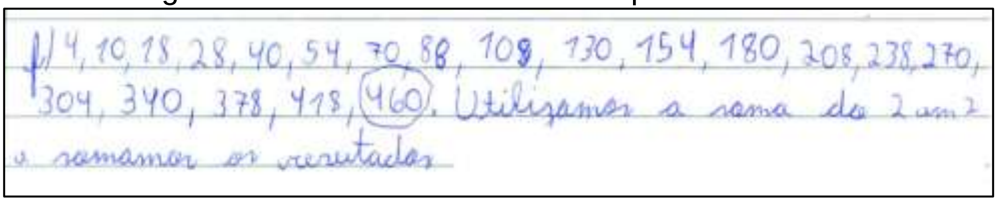
Figura 2 – Estratégia de cálculo acerca do aumento de palitos



Em cada figura os palitos aumentam em dois, assim a sequência de palitos aumentados fica 6,8,10.
Na próxima figura serão utilizados 40 palitos, porque na próxima fileira serão aumentados 12 palitos.

Fonte: Grupo 2 da escola B, 2016.

Figura 3 – Aumento do número de palitos somando



R/ 4, 10, 18, 28, 40, 54, 70, 88, 108, 130, 154, 180, 208, 238, 270, 304, 340, 378, 418, 460. Utilizamos a soma de 2 em 2 e somamos os resultados

Fonte: Grupo 3 da escola A, 2016.

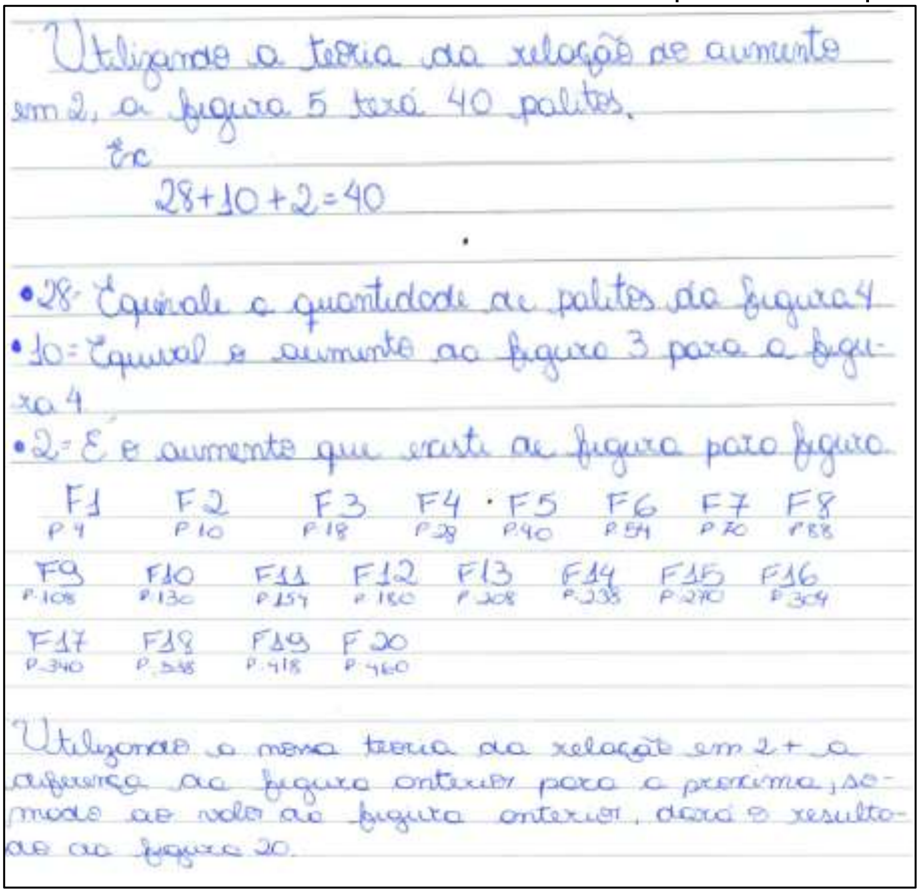
[1]Quando aparecem números ordinais durante as análises esses se referem as figuras das atividades.

Ainda utilizando como estratégia a soma de dois em dois, para descobrirem o número de quadrados da 20° figura, alguns grupos escreveram mais detalhadamente os resultados emergentes. Nesse contexto, posso destacar o que Smole e Diniz (2001, p. 31) expressam:

> Escrever pode ajudar os alunos a aprimorarem percepções, conhecimentos e reflexões pessoais. Além disso, ao produzir textos em matemática, tal como ocorre em outras áreas do conhecimento, o aluno tem oportunidade de usar habilidades de ler, ouvir, observar, questionar, interpretar e avaliar seus próprios caminhos, as ações que realizou, no que poderia ser melhor. É como se pudesse refletir sobre o próprio pensamento e ter, nesse momento, uma consciência maior sobre aquilo que realizou e aprendeu.

Em consonância ao que Smole e Diniz (2001) preconizam, um dos grupos de alunos apresentou os resultados mais detalhados, conforme visualizado na Figura 4, ou seja, explicaram passo a passo como haviam pensado para formular sua estratégia. Isto evidencia o que Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) argumentam, ou seja, que as atividades investigativas proporcionam ao aluno escrever matematicamente sua forma de pensar.

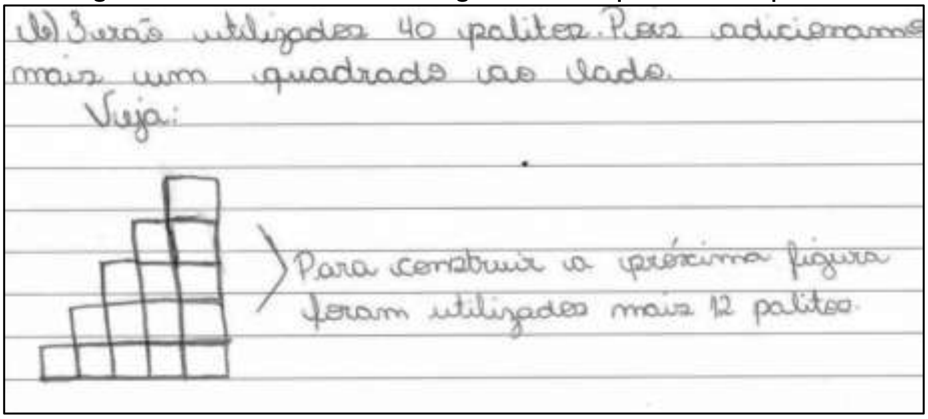
Figura 4 – Escrita detalhada acerca do número de palitos da sequência



Fonte: Grupo 6 da escola B, 2016.

Outros estudantes utilizaram como estratégia a representação por meio de desenhos (conforme visualizado na Figura 5), para descobrirem a quantidade de palitos da 5ª figura. Após desenharem a próxima figura da sequência, os alunos contaram quantos palitos havia nela.

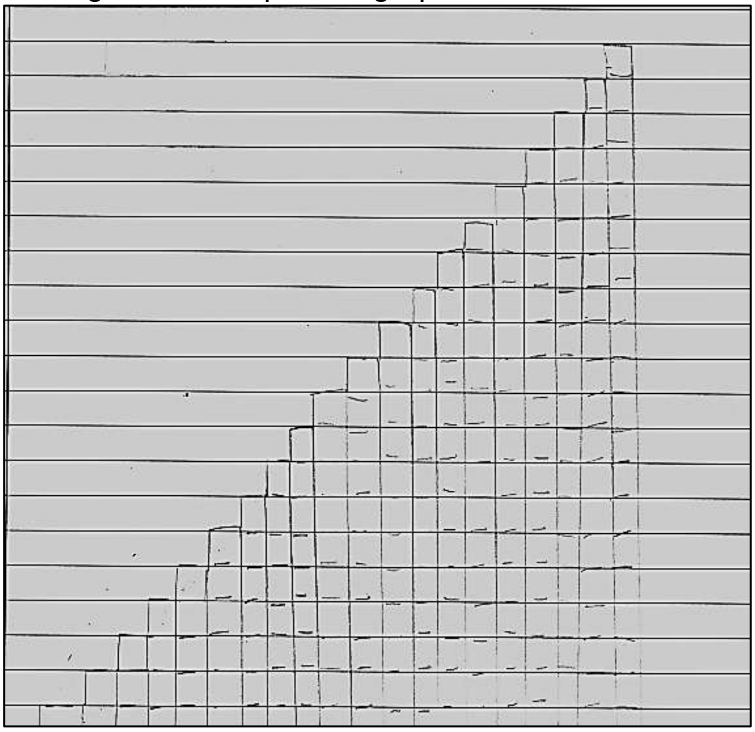
Figura 5 – Desenho da 5ª figura da sequência de palitos



Fonte: Grupo 13 da escola A, 2016.

Para responder o item referente à quantidade de palitos na 20ª figura, alguns grupos também utilizaram como estratégia o desenho, como mostra a Figura 6. Após terem feito o desenho, os estudantes contaram cada palito da figura desenhada.

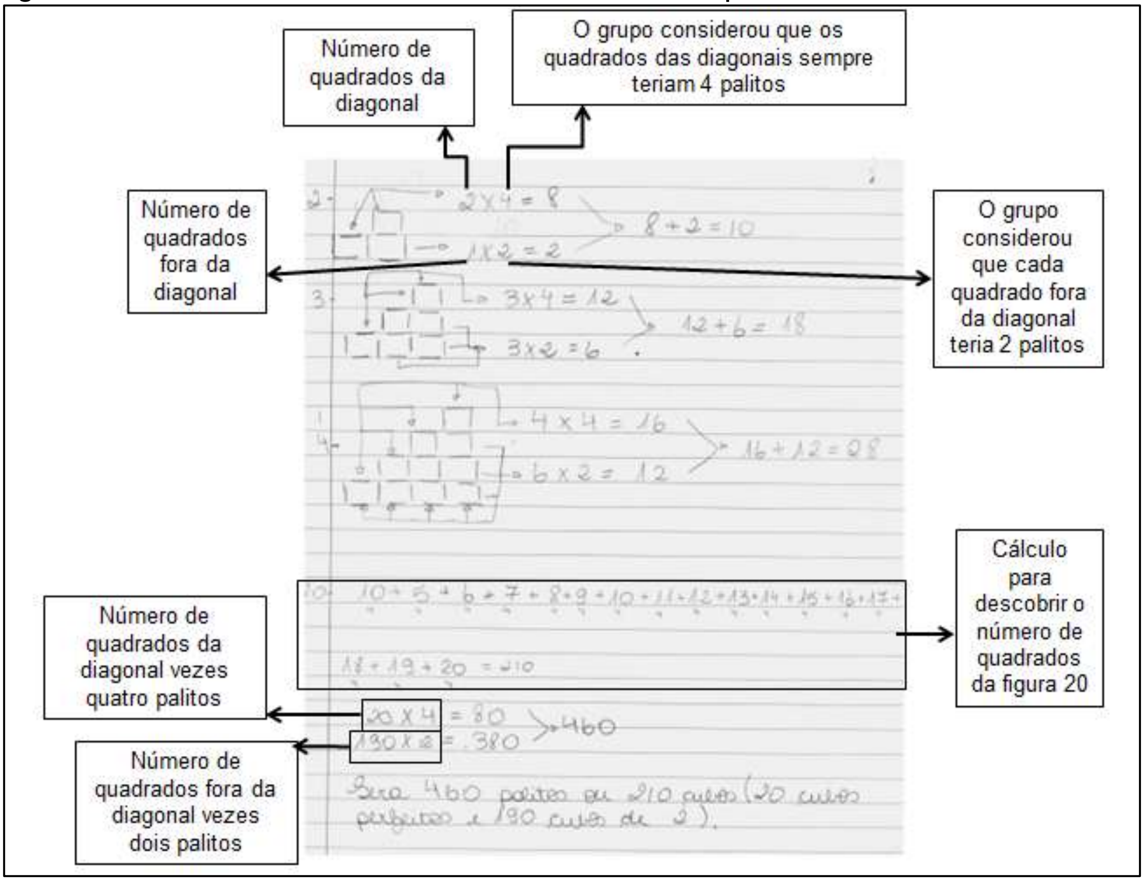
Figura 6 – Estratégia utilizada por um grupo de alunos do 7º ano da escola A



Fonte: Grupo 3 da escola A, 2016.

Um grupo do 9° ano da escola B descobriu uma fórmula matemática que permitiu calcular o número de palitos de qualquer figura. Assim, para encontrar o número de palitos da 20ª figura, os integrantes do grupo utilizaram a fórmula encontrada, visualizada e detalhada na Figura 7[2].

Figura 7 – Resultados da atividade com número de palitos, utilizando uma fórmula



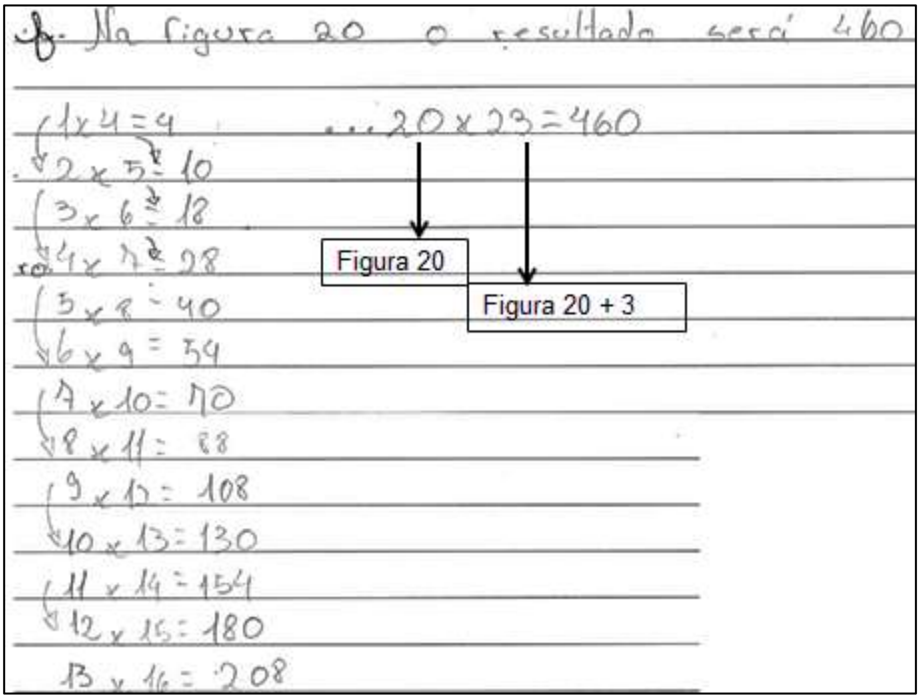
Fonte: Da autora, 2016.

Outra forma de encontrar o número de palitos da sequência está apresentada na 8ª figura. Esta estratégia foi desenvolvida por um dos grupos de alunos do 9° ano da escola B, e por um grupo de alunos do 7° ano da escola A. Em relação aos multiplicadores, os números da esquerda representam a figura, já o número da direita, para os estudantes, é o número referente à figura mais 3. Para todas as figuras da sequência, os resultados são correspondentes.

---

2 Os estudantes utilizaram, em vez de “quadrados”, a palavra “cubos”.

Figura 8 – Estratégia de cálculo da 20ª figura de alunos do 7º ano da escola A e 9° ano da escola B



Fonte: Da autora, 2016.

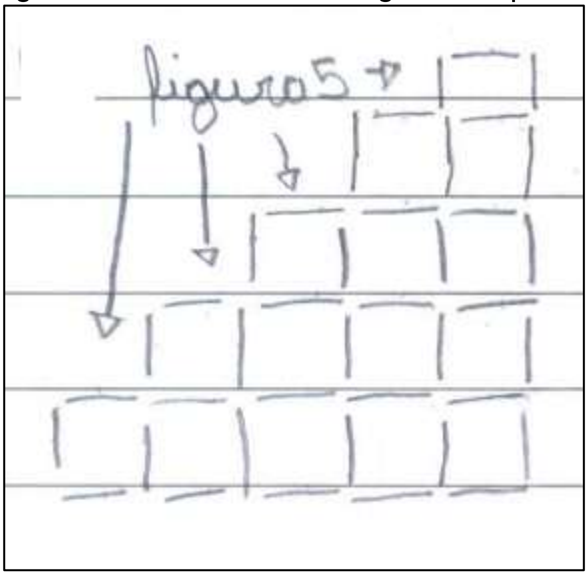
Quando os estudantes tiveram que conjecturar a respeito da relação entre o número de quadrados ao longo da sequência, alguns grupos salientaram que a cada figura coloca-se um quadrado a mais. Um grupo descreveu a seguinte situação: "*Se na primeira figura temos um quadrado, na segunda teremos dois a mais, na terceira três, na quarta quatro e na quinta cinco a mais" (G1A* [3]***)***.

Para mostrar como a sequência de quadrados aumenta, alguns grupos fizeram desenhos representando as próximas figuras, conforme pode ser visualizado na Figura 9. Segundo Andretta e Liblik (2011, p. 5), "Nesse sentido o desenho, enquanto representação gráfica, apresenta-se como um recurso facilitador da aprendizagem, já que permite ao aluno significar conceitos visualmente [..]", operando-os com o intuito de obter soluções favoráveis para as situações matemáticas em estudo.

---

3 As falas mais expressivas dos estudantes e dos grupos estarão expressas em quadros, e, outras, no decorrer do texto, em itálico.

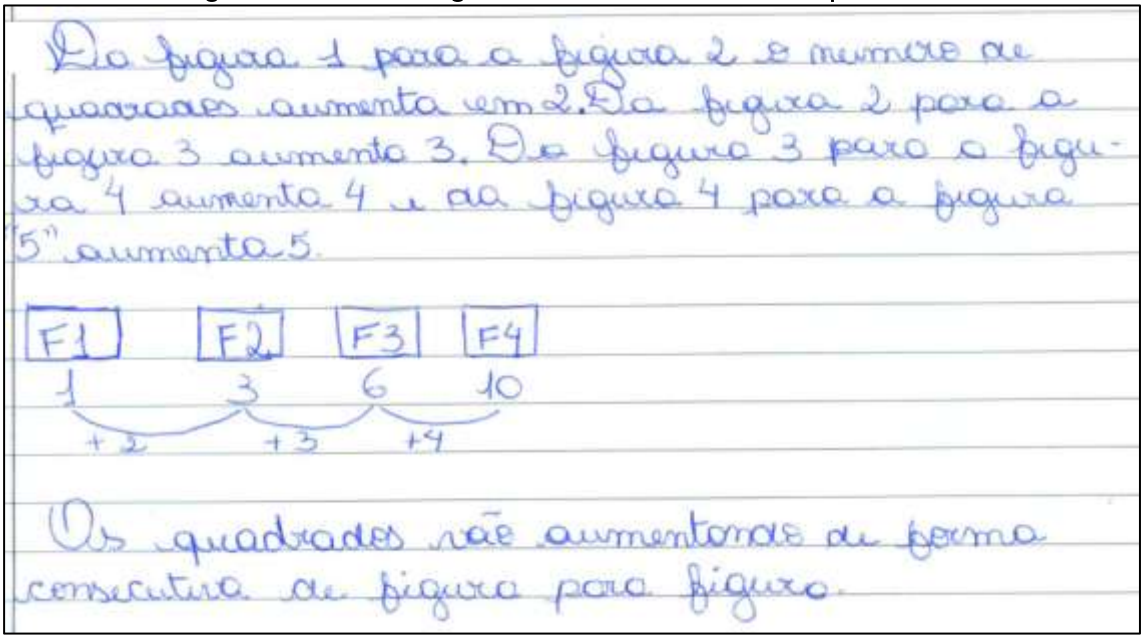
Figura 9 – Desenho da 5ª figura dos palitos



Fonte: Grupo 10 da escola A, 2016.

Já outros grupos utilizaram como estratégia uma sequência de somas, como representado nas Figuras 10 e 11.

Figura 10 – Estratégia utilizando a soma dos quadrados

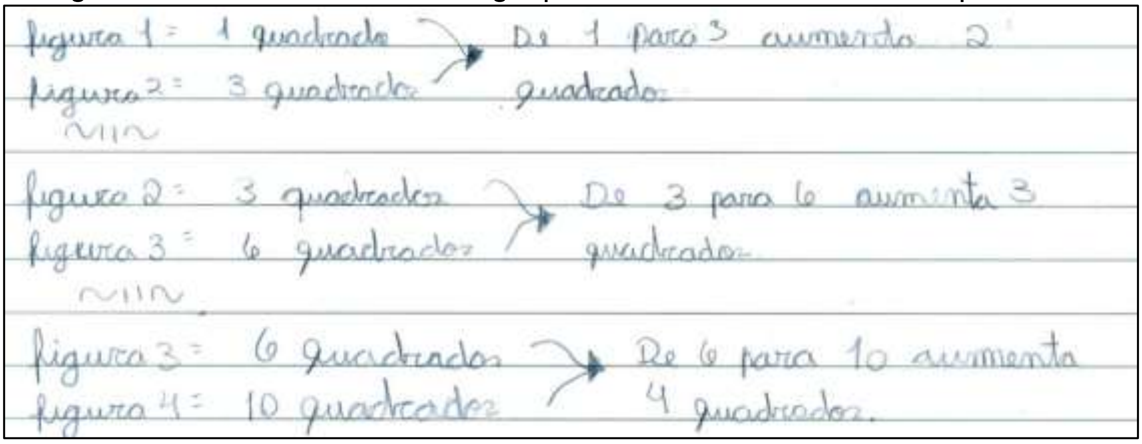

Da figura 1 para a figura 2 o numero de quadrados aumenta em 2. Da figura 2 para a figura 3 aumenta 3. Da figura 3 para a figu-ra 4 aumenta 4 e da figura 4 para a figura 5ª aumenta 5.

F1 F2 F3 F4
1 3 6 10
+2 +3 +4

Os quadrados vão aumentando de forma consecutiva de figura para figura.

Fonte: Grupo 7 da escola B, 2016

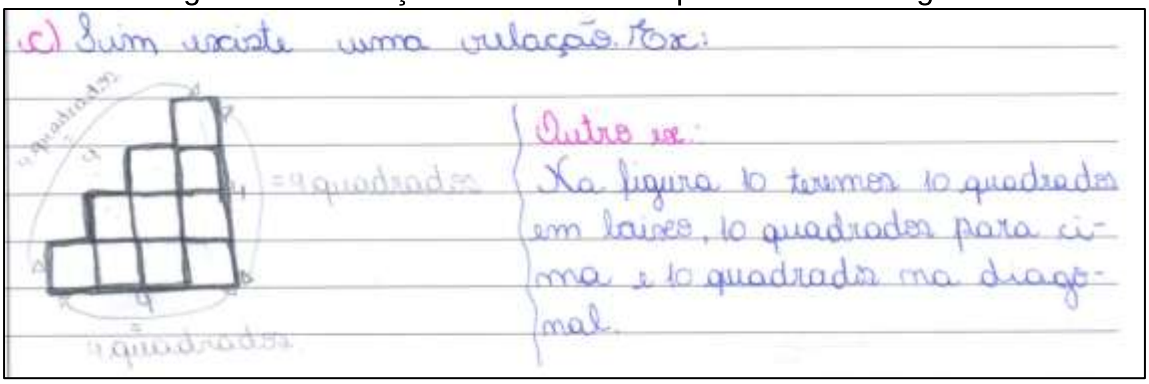
Figura 11 – Soma como estratégia para encontrar o número de quadrados



Fonte: Grupo 10 da escola A, 2016.

Um dos grupos relacionou o aumento do número de quadrados com a diagonal. Quando se fala de diagonais, pode-se observar que, na primeira figura, há um quadrado na diagonal; na segunda, existem dois quadrados e o número de quadrados que aumentou na figura foram dois; na terceira, três; na quarta, quatro; e assim, sucessivamente. *“Na figura 1 a diagonal tem 1 quadrado, na dois a diagonal tem dois quadrados e aumentou 2. Na três são três, na quatro são quatro e na cinco são cinco” (G2A).* Este fato pode ser evidenciado na Figura 12, na qual o grupo de estudantes explicou a estratégia utilizada por meio de desenho e exemplo.

Figura 12 – Relação do aumento de palitos com a diagonal

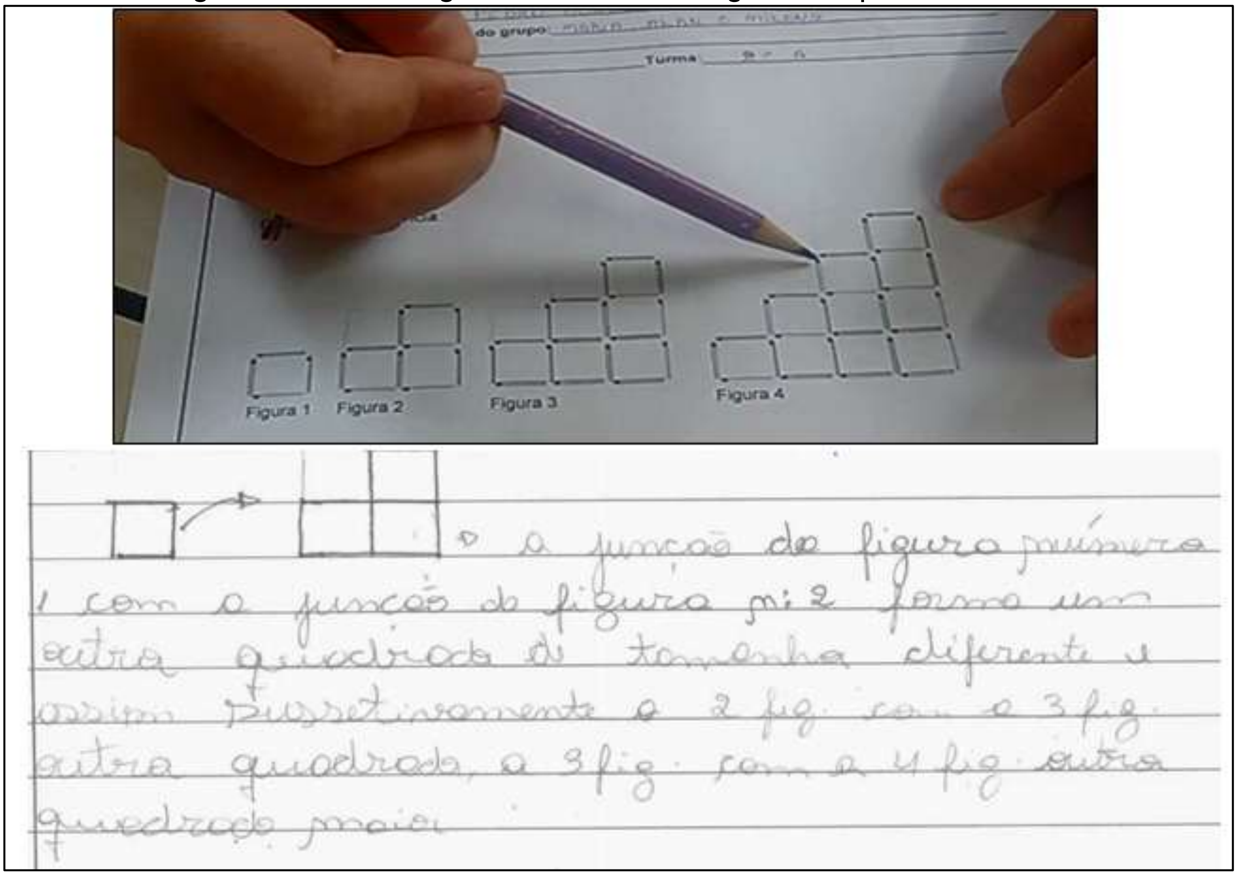


Fonte: Grupo 2 da escola A, 2016.

Um grupo salientou que a figura um completa um quadrado maior quando encaixada na figura dois. A figura dois, encaixada na três, completa um quadrado de lado 3 x 3. Durante conversa com o grupo os estudantes, estes destacaram: “*A gente consegue encaixar a primeira figura na segunda. A segunda a gente consegue encaixar na terceira e a terceira na quarta. Sempre dá certo” (G3B).*

A Figura 13 representa um dos estudantes demonstrando esta estratégia.

Figura 13 – Estratégia acerca de uma figura completar a outra



Fonte: Da autora, 2016.

Durante a realização da primeira parte da atividade de Investigação Matemática proposta, pude inferir que distintas estratégias emergiram por ocasião da resolução da questão. O trabalho em grupo potencializou o surgimento de diferentes estratégias, pois os grupos de estudantes discutiam, sentiam-se motivados e instigados a investigarem e aprimorarem suas respostas. Saliento que, de acordo com Pereira (2015, p. 29), “na fase de desenvolvimento da tarefa, a pretensão é que os alunos passem a ter uma atitude investigativa. O papel do professor é de orientador da tarefa”.

Pude estender estas atuações investigativas para o âmbito da minha pesquisa, ao salientar que os alunos participantes do estudo constantemente preocupavam-se em solucionar as ações pedagógicas, elaborando e tecendo distintas estratégias. Nesse cenário, coloquei em ação o que Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) afirmam, ou seja, que, em uma Investigação Matemática, o professor deve ser mediador, centrado em orientar e questionar os grupos a todo instante, afim deles elaborarem estratégias para a questão em análise.

Na questão relacionada ao significado de sequência, mesmo que alguns alunos não conhecessem o conteúdo, as respostas apresentadas foram coerentes. Infere-se que, quando o aluno descreve o que pensou acerca de uma determinada atividade matemática, “tem oportunidades de usar habilidades de ler, ouvir, observar, questionar, interpretar e avaliar seus próprios caminhos, as ações que realizou, no que poderia ser melhor” (SMOLE, 2001, p. 31). Apresento, a seguir, excertos do que os grupos descreveram acerca do significado de sequência.

G2A: Ordem de números que seguimos.

G10A: Dar continuidade ao que foi iniciado, continuar, seguir.

G2B: Coisas que se sucedem.

G13B: É uma ordem de objetos, números, pessoas, coisas. Que vem um e segue de outro, por exemplo: Uma sequência de número, seria um número a seguir do outro (1,2,3,4...), isso é uma ordem crescente, (... 3,2,1,0), isso é uma ordem decrescente, que também podem ser considerada sequência.

G11A: Pode ser de números ou de figuras, uma tem relação com a outra.

G12B: Continuar o processo anterior.

G3B: Baseando-se nas atividades, sequência é algo que se repete.

Saliento que, com a realização das atividades investigativas propostas, os estudantes conseguiram formular seus próprios conceitos acerca do significado de uma sequência. Na dissertação de Saraiva (2012, p. 79), a autora ressalta sobre a “importância do uso de uma metodologia diferenciada para o estudo de conteúdos que, em geral, são considerados difíceis por parte dos alunos, como é o caso de sequências numéricas”. Nessa perspectiva, ainda segundo a autora, entende-se que “a metodologia de investigação matemática pode ser uma alternativa metodológica que os professores, dos diferentes níveis de ensino, podem utilizar para ensinar Matemática” (Ibidem, p. 79).

Em consonância com o que Saraiva (2012) enfatizou sobre o conteúdo de sequências numéricas, saliento que a metodologia de Investigação Matemática auxiliou os estudantes na formulação de conceitos sobre esse conteúdo. Os estudantes conseguiram formular distintas estratégias e conceituar o termo sequência. Assim, diferentes estratégias e relações matemáticas emergiram durante a realização da primeira atividade pelos estudantes, o que também foi encontrado na pesquisa de Schmitt, Quartieri e Giongo (2015, p. 10). Para as autoras, uma atividade de investigação matemática:

> [...] pode possibilitar o desenvolvimento do espírito investigativo do aluno e, consequentemente, de sua aprendizagem em relação à matemática. Com estas atividades o aluno tem a oportunidade de levantar estratégias, estabelecer relações e tomar decisões através de resultados obtidos, estabelecendo relações e significando relações matemáticas.

Neste encontro pude perceber que os estudantes conseguiram discutir e formular estratégias distintas nos grupos de trabalho e que este favoreceu a resolução das atividades propostas.

Durante a socialização dos resultados, os grupos de estudantes demonstraram para os demais colegas as estratégias que utilizaram para encontrar os resultados solicitados. Tais respostas foram escritas no quadro. Saliento que as estratégias encontradas pelos grupos de alunos tem relação com o ensino da álgebra, ou melhor, podem representar uma ideia inicial para o significado das letras utilizadas no ensino da álgebra.

Algumas generalizações foram evidentes durante a análise dos dados emergentes, estas podem ser observadas na figura 7, no qual os estudantes encontraram uma fórmula matemática para descobrir o número de palitos das demais figuras solicitadas. Nesta figura os alunos multiplicavam o número de quadrados da diagonal por quatro e somavam a multiplicação dos quadrados fora da diagonal por 2. Na figura 8, o grupo de estudantes multiplicava o número da figura pelo resultado do número desta mesma figura mais o valor 3. Outras generalizações podem ser evidenciadas quando se observam as figuras 1, 2 e 3, nas quais os alunos utilizam uma sequência de somas para obter o resultado da quantidade de palitos.

Mesmo que os estudantes não utilizaram letras para demonstrar suas generalizações, fica evidente por meio de seus cálculos e escritas que esta emergiu durante a realização das atividades. Segundo Usiskin (1995) esta escrita generalizada é fundamental para que os alunos, posteriormente entendam o significado do uso das letras na álgebra.

4.2 Segundo encontro

Para a atividade 2, ainda relacionada à primeira concepção algébrica, os estudantes deveriam analisar a sequência apresentada e conjecturar de acordo com as questões abordadas no quadro. Esta atividade também foi realizada em pequenos grupos e, posteriormente, os resultados foram socializados em grande grupo.

Quadro 6 – Sequência de quadrados

<u>Atividade 2:</u>

Observar a seguinte sequência de figuras:

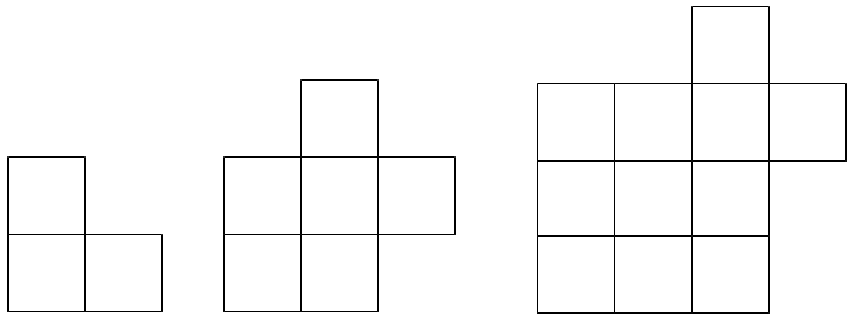


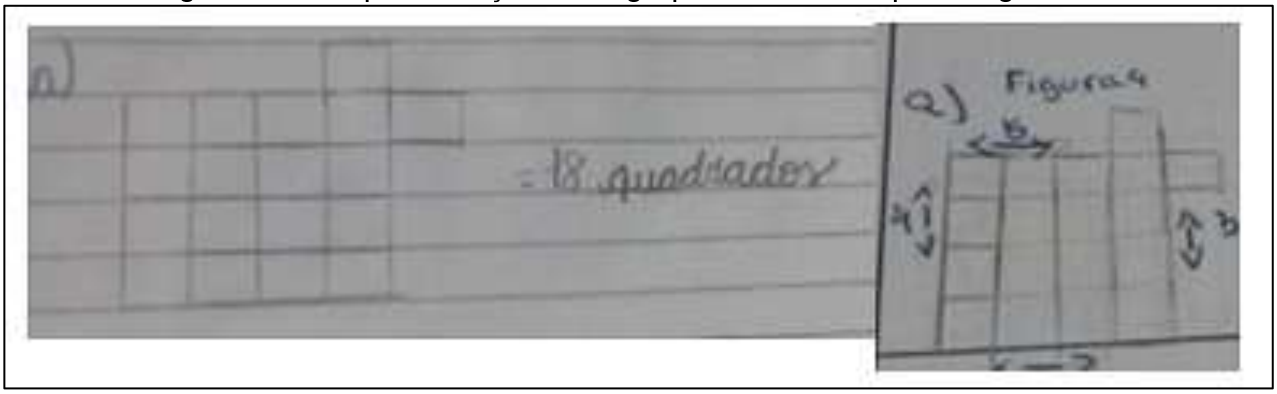
Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Desenhar a próxima figura da sequência.
b) Qual será a décima figura? Que estratégia foi utilizada para saber como é a figura?
c) Existe alguma relação entre o número de quadrados ao longo da sequência? Explique.

Fonte: Da autora, 2015.

As conjecturas que emergiram durante a construção da próxima figura que contempla a sequência do quadro 6 são demonstradas na Figura 14. Para representação da 4ª figura da atividade 2, os estudantes consideraram que: “*A figura um seria formada de um quadrado um por um, mais os dois quadros de fora. A figura dois seria formada de um quadrado dois por dois mais os dois quadrados de* *fora. E a terceira de um quadrado três por três mais os dois quadrados de fora” (*G2B*).*

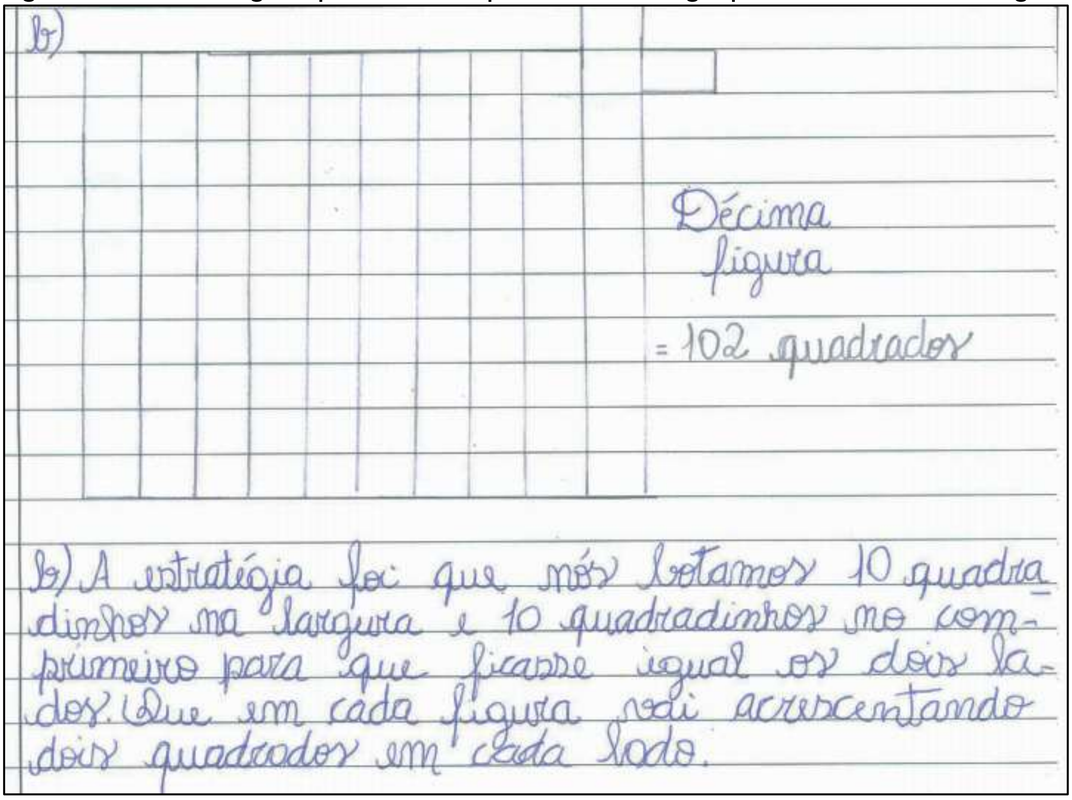
Figura 14 – Representações dos grupos acerca da quarta figura



Fonte: Grupo 2 da escola B e Grupo 3 da escola A, 2016.

Um estudante explicitou que: “*Como na figura 4 tínhamos um quadrado 4x4 mais dois quadradinhos; na figura 10, vamos ter um quadrado 10x10 e mais dois quadradinhos”* (G4B). Essa explicação descreve a estratégia evidenciada pelo grupo para encontrar a décima figura da sequência. A Figura 15 apresenta a 10ª figura desse grupo:

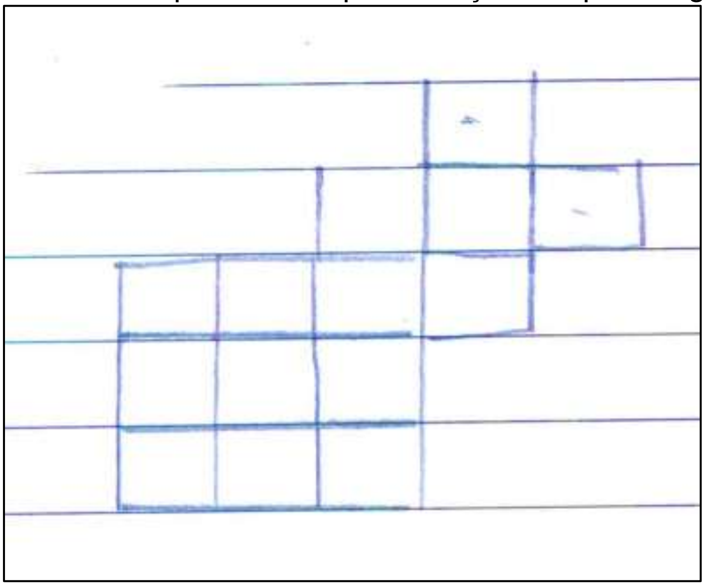
Figura 15: Estratégia apresentada pelos demais grupos acerca da 10ª figura



Fonte: Grupo 9 da escola B, 2016.

Ainda para representação da 4ª figura, um grupo do 7° ano da escola A pensou em uma resposta diferente (Figura 16):

Figura 16 – Esquema de representação da quarta figura

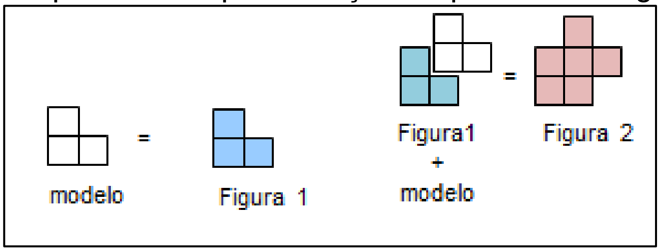


Fonte: Grupo 2 da escola A, 2016.

A explicação apresentada pelos alunos deste grupo foi: “*A estratégia foi que ia subindo três quadrados em forma de escada na diagonal principal. Quando completava um quadrado grande colocávamos dois quadrados na diagonal secundária. O quadrado grande é completado sempre nas figuras ímpares, 3, 5, 7, 9...” (G2A).*

Para compreensão da conjectura apresentada pelos estudantes, pode-se observar que a primeira figura da sequência apresenta os três quadrados iniciais representados como modelo na Figura 17; já a segunda figura da sequência é formada pela adição do modelo na primeira figura.

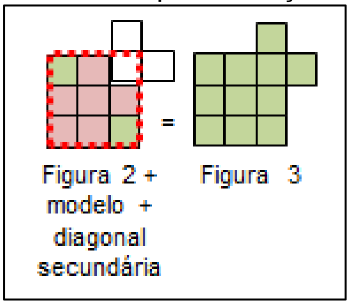
Figura 17 – Esquema de representação da primeira e segunda figuras



Fonte: da autora, 2016.

Para a figura 3, os estudantes salientaram que utilizaram a figura 2, mais o modelo. Ainda para completar essa figura 3 de número ímpar, os estudantes acrescentaram na diagonal secundária dois quadrados representados pela cor verde para completar um quadrado 3 por 3, como mostrado na Figura 18:

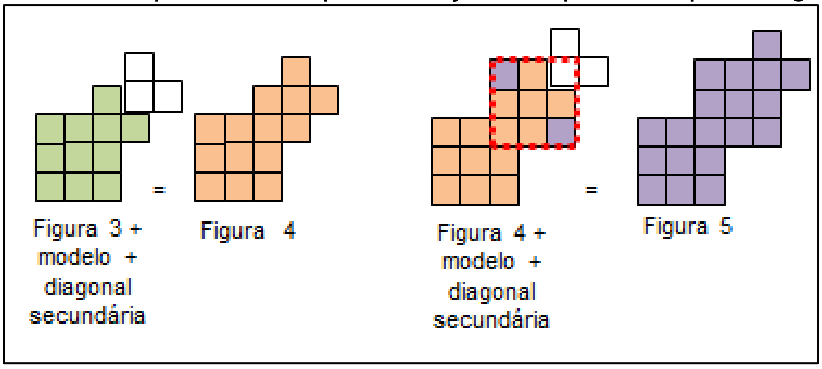
Figura 18 – Esquema de representação da terceira figura



Fonte: da autora, 2016.

Para a representação da figura 4, o grupo acresceu o modelo na figura 3. Para contemplar a figura 5 de número ímpar, novamente os alunos acrescentaram o modelo da figura 4 e adicionaram a ela dois quadrados roxos na diagonal para completar mais um quadrado 3 por 3 (Figura 19):

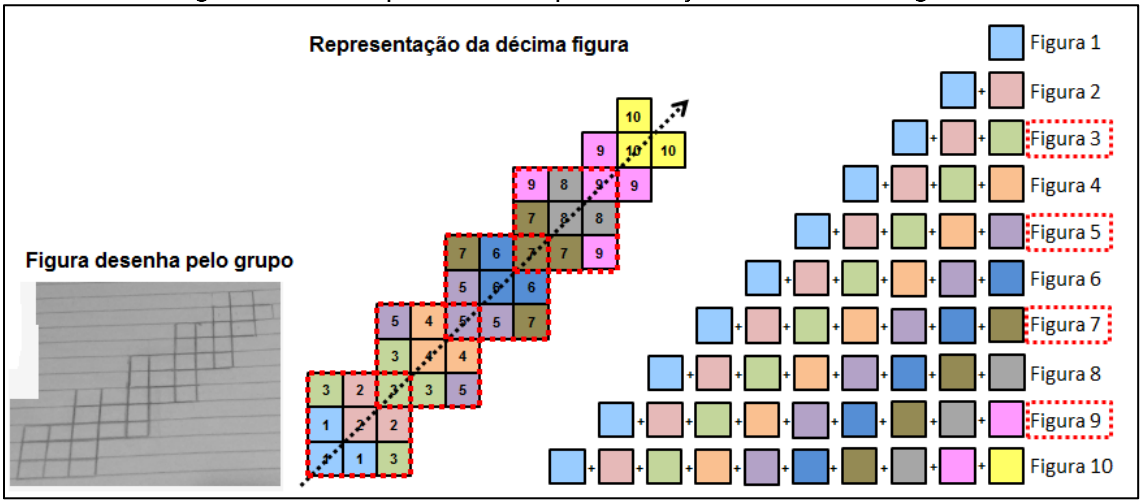
Figura 19: Esquema de representação da quarta e quinta figuras



Fonte: Da autora, 2016.

Nesse contexto, apresento, na Figura 20, o modelo representado pelos estudantes para a décima figura.

Figura 20 – Esquema de representação da décima figura



Fonte: Da autora, 2016.

O grupo elaborou uma sequência distinta dos demais, pois foram instigados a pensarem em soluções diferentes. Ao elaborem esta estratégia, o grupo considerou que uma sequência precisa de uma regra, deve ser válida para todas as figuras. Durante a realização desta atividade, relacionada à sequência de quadrados, não emergiram muitas conjecturas. Conforme, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), as atividades de Investigação Matemática devem ser abertas, para emergirem diferentes estratégias. Neste caso em específico, duas conjecturas foram evidenciadas pelos grupos de estudantes.

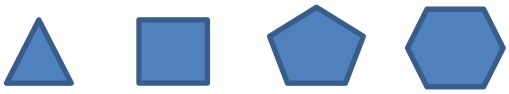
Saliento que os grupos testaram suas estratégias e apresentaram suas respostas para os demais colegas. Infiro que, nas atividades de Investigação Matemática, espera-se que os estudantes utilizem artifícios, tais como, “a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho” (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2009, p. 39).

Ainda vinculada à concepção da aritmética generalizada, o objetivo da atividade 3 consistia em estabelecer relações e indicar os próximos termos das sequências. Para esta atividade, além das estratégias utilizadas se distinguirem entre alguns grupos, as respostas finais também se diferenciaram. Saliento que as atividades de Investigação Matemática, para que possibilitem ao aluno a utilização de diferentes estratégias, devem estar alinhadas a “problemas abertos que possibilitam diferentes perguntas, estratégias de resolução e processos de validação” (GRANDO, NACARATO e GONÇALVES, 2008, p. 43). Assim, na atividade 3 (Quadro 7), apresentei diferentes pares de sequências, nos quais os estudantes deveriam encontrar relações entre os distintos pares.

Quadro 7 – Atividade relação entre os pares de sequências

Atividade 3:

Encontrar relações entre cada par de sequências abaixo e indicar quais são os próximos termos de cada uma delas.

a) 

0 2 5 9 ...

b)
1	8	27	125...
1	4	9	25...

c)
2	3	5	11...
1	1	1	1...

d)
1	2	3	4....
10	100	1000	10000....

e)
1	2	4	8...
1	0,5	0,25	0,125....

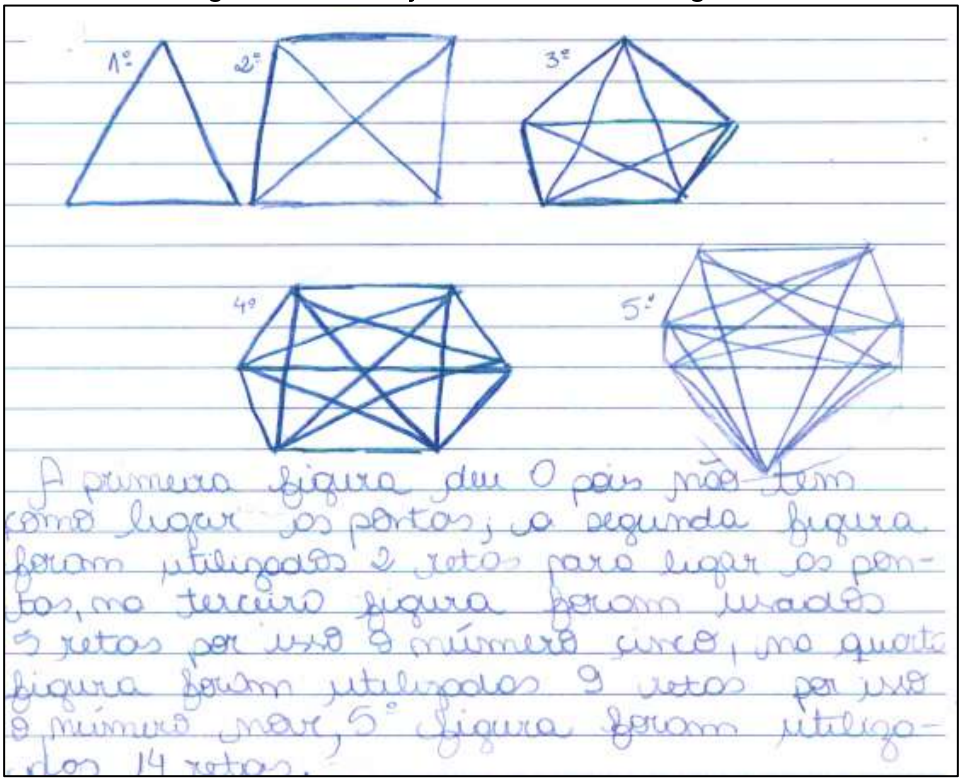
Fonte: Da autora, 2015.

Durante a realização da tarefa de análise dos pares de sequências, distintas estratégias e respostas finais emergiram. Os grupos interagiram muito durante a formulação das conjecturas referentes aos diferentes pares de sequências.

<u>Estratégias emergentes na questão a</u>

Um grupo de alunas do 7° ano da escola A, um grupo de alunos do 9° ano da escola A e um grupo de alunos do 9° ano da escola B, relacionaram os números abaixo de cada figura com o número de diagonais que cada uma possui. Esses grupos relacionaram que o triângulo não tem diagonal; já no quadrado há duas diagonais e, no pentágono, três. Na Figura 21 está representada esta conjectura:

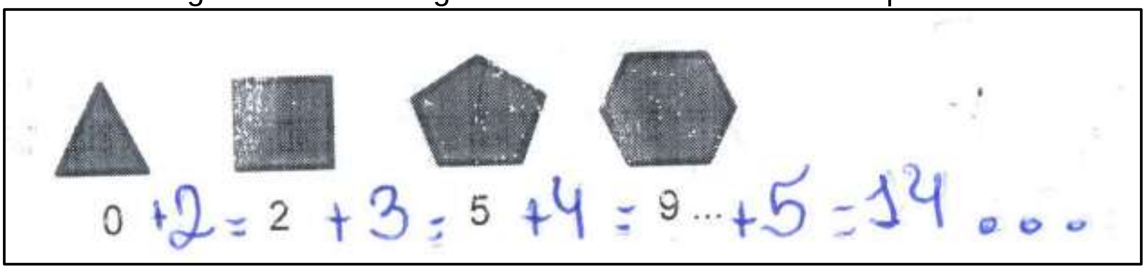
Figura 21 – Conjectura sobre as diagonais



Fonte: Grupo 6 da escola B, 2016.

Os demais grupos salientaram que, nas figuras, o lado sempre aumenta de um em um. Já nos números do 0 até o 2, aumentaram duas unidades, do 2 até o 5, aumentaram 3 unidades, e assim sucessivamente. Esta resolução pode ser observada na Figura 22:

Figura 22 – Estratégia utilizando o aumento em sequência



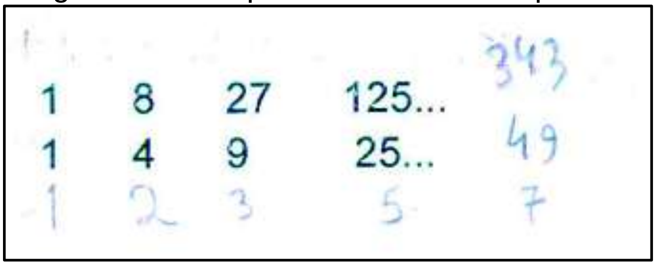
Fonte: Grupo 5 da escola B, 2016.

Em relação ao aumento de um lado nas figuras e ao aumento em sequência dos números, um grupo descreveu o seu pensamento da seguinte forma: "C*ada* *figura aumenta um traço e os números mudam. A cada figura aumentam mais um número, como: 0, 2, 5, 9. Do 2 para o 5 aumentou 3, e do 5 para o 9 aumentou 4, ai do 9 para o 14 aumenta 5" (G2B).*

<u>Estratégias emergentes na questão b</u>

Abaixo da sequência atual, que consta na letra b, o aluno criou mais uma, com números primos. Ao multiplicar este número pelo menor número, sempre resultava o maior número. O exemplo dado pelo aluno foi: *"A sequência de números primos é: 1, 2, 3, 5... Aí duas vezes o quatro dá 8. No 7: 7x7 dá 49. E 49 vezes 7 da 343" (B2).* Cada número primo 1, 2, 3, 5 e 7, elevado ao quadrado, resulta nos valores da primeira linha. Posteriormente esses resultados foram multiplicados pelos números primos novamente. Essa constatação feita pelo estudante B6 funciona com toda a sequência, como representado na Figura 23:

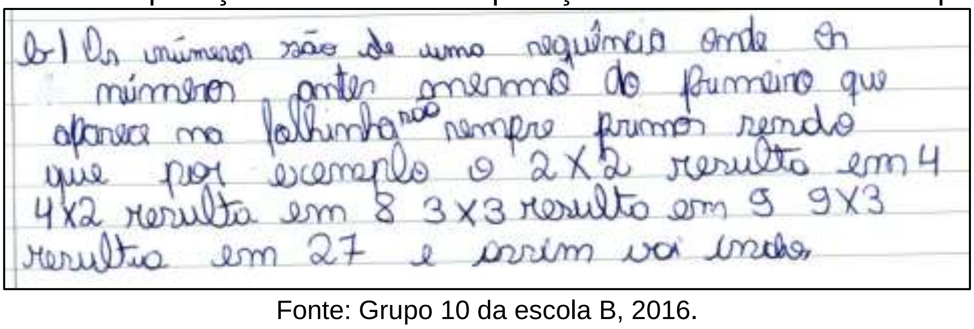
Figura 23 – Sequência de números primos



Fonte: Grupo 3 da escola A, 2016.

Um grupo de estudantes do 7° ano da escola B salientou, como mostra a Figura 24, que:

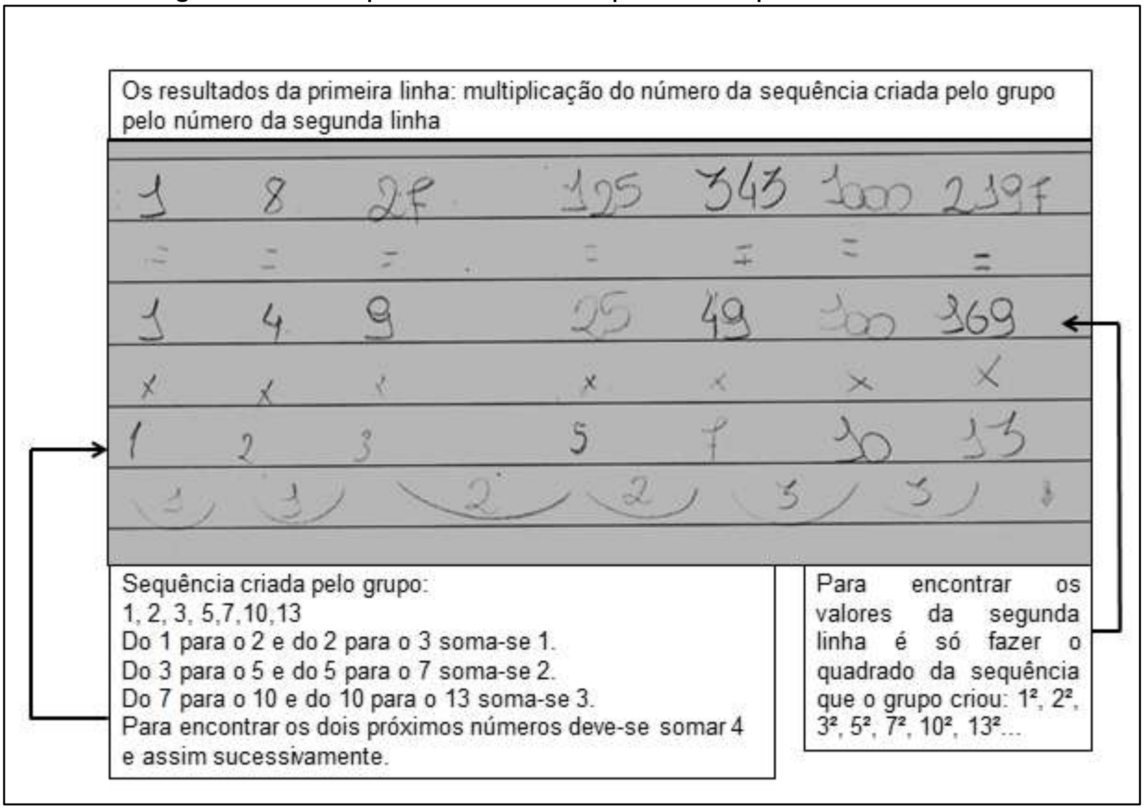
Figura 24 – Explicação acerca da multiplicação utilizando os números primos



Fonte: Grupo 10 da escola B, 2016.

Na Figura 25 é visualizado um esquema acerca da relação do par de sequência da letra b, apresentado por um grupo de estudantes do 9° ano da escola B.

Figura 25 – Esquema acerca do par de sequência da letra b

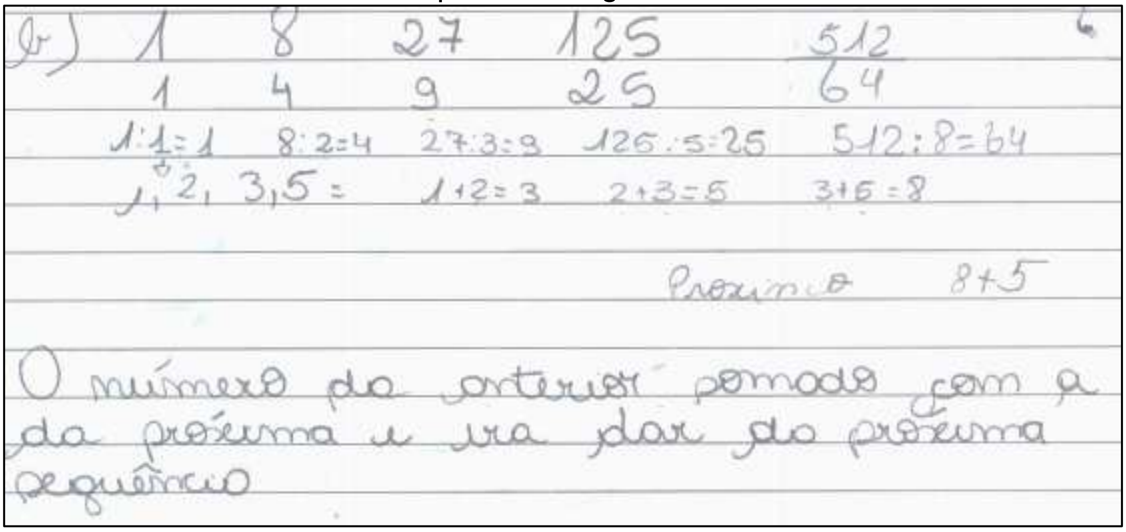


Fonte: Da autora, 2016.

Outro grupo salientou que, ao dividir os números da primeira linha pelos números da segunda, os resultados são 1, 2, 3 e 5, sendo esses números primos. Assim, o grupo continuou a sequência seguindo este raciocínio: "*Toda vez que dividimos o número da primeira linha pela debaixo o valor dá um número primo. Para nós deu 1, 2, 3, 4 e 5. Daí achamos o próximo: 7 e 49"* (G4B).

Na Figura 26 é apresentada a estratégia de um grupo que iniciou sua conjectura dividindo os valores da primeira linha pelos valores da segunda, obtendo como resultados 1, 2, 3 e 5. Ao somarem os valores 1+ 2 (primeiro e segundo números dos resultados das divisões), verificaram que o resultado seria 3. Sendo assim, ao dividirem o número 27 (terceiro valor da primeira linha) por 3, resultaria em 9 (terceiro valor da segunda linha). Na sequência, os estudantes somaram o valor 2 + 3 (segundo e terceiro número dos resultados das divisões), obtendo como resultado 5. Assim, dividiram o número 125 (quarto valor da primeira linha) por 5, tendo como resultado 25 (quarto valor da segunda linha). Posteriormente, os grupos juntaram os valores 3 + 5 (terceiro e quarto números dos resultados da divisão), resultando em 8. Nesse contexto, o grupo salientou durante a gravação: “*Para chegar no 64 fizemos o passo ao contrário multiplicamos o 8 por ele mesmo e posteriormente esse resultado novamente por 8”* (G2B).

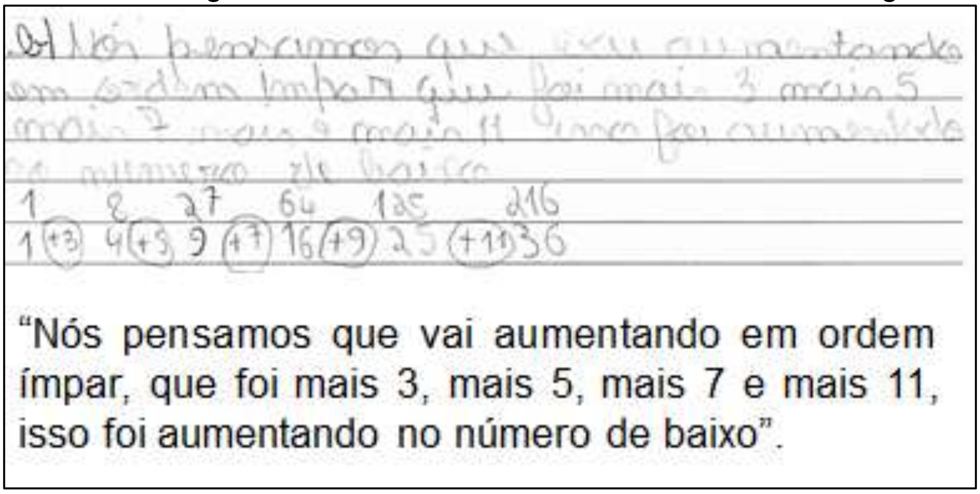
Figura 26 – Estratégia diferenciada utilizando a divisão dos valores da primeira linha pelos da segunda



Fonte: Grupo 6 da escola B, 2016.

Outra estratégia que emergiu durante a realização da atividade, relacionada à questão b, está representada na figura 27. O grupo conjecturou acerca do aumento do número da segunda linha, que ocorria, segundo eles, seguindo a ordem dos números ímpares. Exemplo disso: do número 1 para o 4 somou-se 3; já do número 4 para o 9 somou-se 5 (esta conjectura pode ser observada na figura 26). Para encontrar os números da primeira linha, um dos estudantes elencou que onde o resultado era 4, multiplicava por 2; no resultado 27 multiplicava por 3; quando o valor era 64, a multiplicação era por 4, sempre na sequência 2, 3, 4, 5, 6...

Figura 27 – Estratégia relacionando o aumento dos números da segunda linha

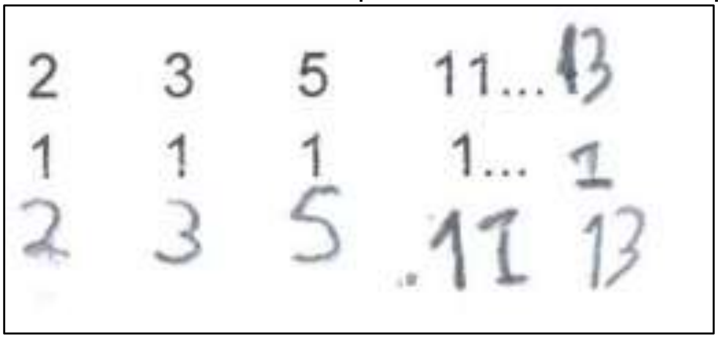


Fonte: Grupo 2 da escola A, 2016.

<u>Estratégias emergentes na questão letra c</u>

Para esta questão, um grupo salientou que os números da segunda linha são sempre 1. Já os números da primeira linha são os números primos. O grupo ainda ressaltou que, a cada três números primos, um fica de fora na sequência, como foi o caso do valor 7. Esse fato está explícito na Figura 28:

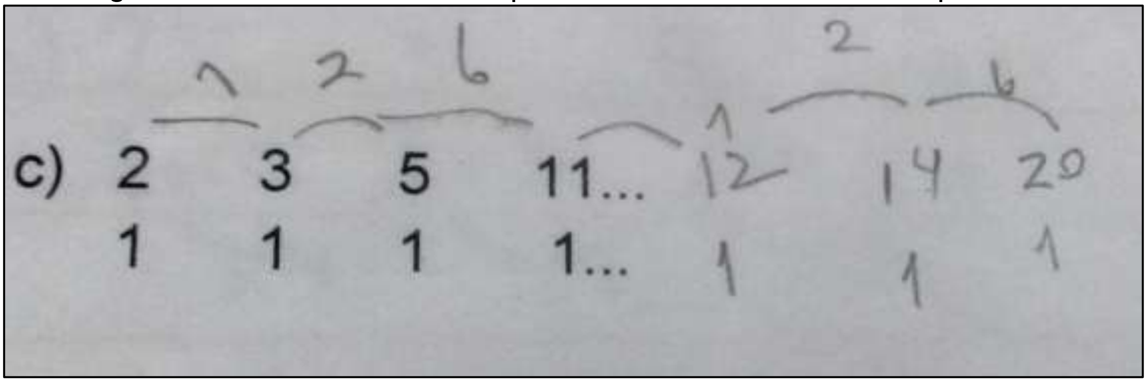
Figura 28 – Relacionando a sequência com os números primos



Fonte: Grupo 10 da escola B, 2016.

Ainda como resposta, um dos grupos salientou que o número da segunda linha sempre será 1. Já os números da primeira linha aumentam de acordo com o esquema representado pelos alunos na figura 29. Do número 2 para o 3, soma-se 1, já do número 3 para o 5, adiciona-se 2, e do número 5 para o 11, acrescenta-se 6. Repetindo essa ordem de somas, tem-se os resultados seguintes:

Figura 29 – Diferentes somas para encontrar os valores da questão c



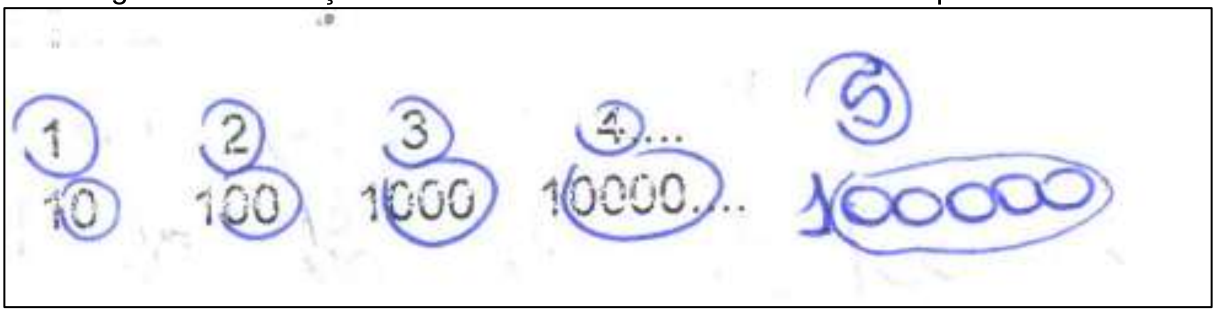
Fonte: Grupo 3 da escola B, 2016.

Para a sequência formada pelo grupo de estudantes (figura 29), estes consideraram que a regra da soma repete a cada três números.

<u>Estratégias emergentes na questão letra d</u>

A conjectura apresentada por alguns grupos (figura 30) elenca que os valores da primeira linha referem-se ao número de zeros apresentados na segunda linha:

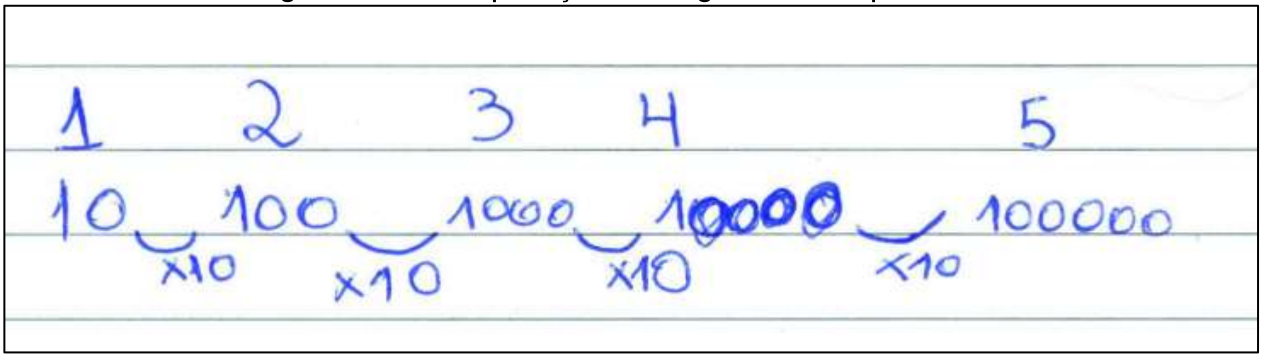
Figura 30 – Relação dos números de 0 com os números da primeira linha



Fonte: Grupo 7 da escola B, 2016.

Outra estratégia preconizava que, na sequência da segunda linha, os grupos multiplicavam de 10 em 10 para encontrar os valores seguintes, e que, na primeira linha, os números aumentavam de um em um (figura 31):

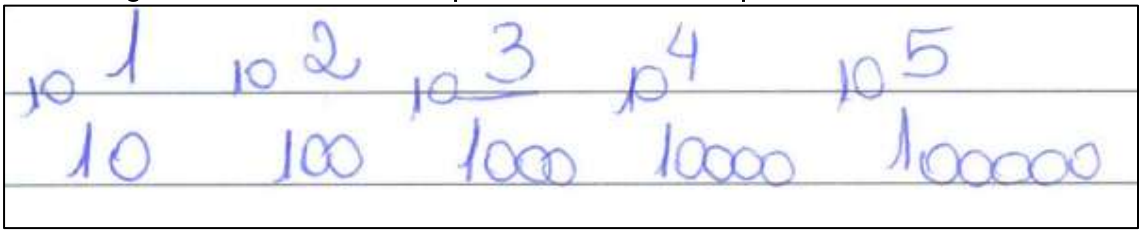
Figura 31 – Multiplicação da segunda linha por 10



Fonte: Grupo 14 da escola A, 2016.

Elevando-se o número 10 pelos números da primeira linha, obtém-se como resultados os valores da segunda linha. Assim, alguns grupos de estudantes utilizaram essa estratégia (Figura 32):

Figura 32 – Números da primeira linha como potências na base 10

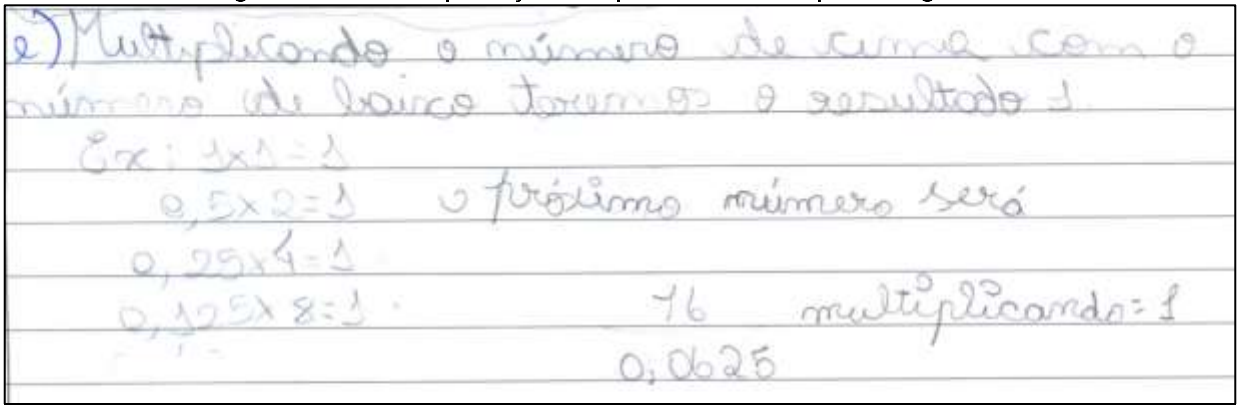


Fonte: Grupo 7 da escola B, 2016.

<u>Estratégias emergentes na letra e</u>

Uma das conjecturas emergentes neste item relaciona o que um dos estudantes salienta e descreve na figura 33: “*Multiplicando os números da primeira linha pelos da segunda resulta em 1. Um vezes um é um. Dois vezes zero vírgula cinco é um. Sempre dá um”* (B14).

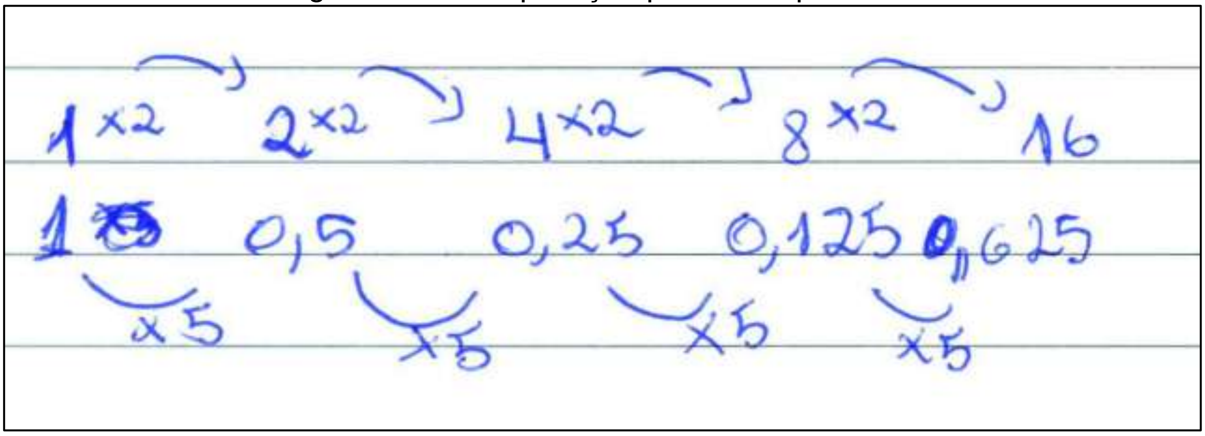
Figura 33 – Multiplicação da primeira linha pela segunda



Fonte: Grupo 9 da escola B, 2016.

Outros grupos destacaram que os números de cima são sempre multiplicados por 2; já os números de baixo, multiplicados por cinco, acrescentando o zero na frente (Figura 34):

Figura 34 – Multiplicação por dois e por cinco

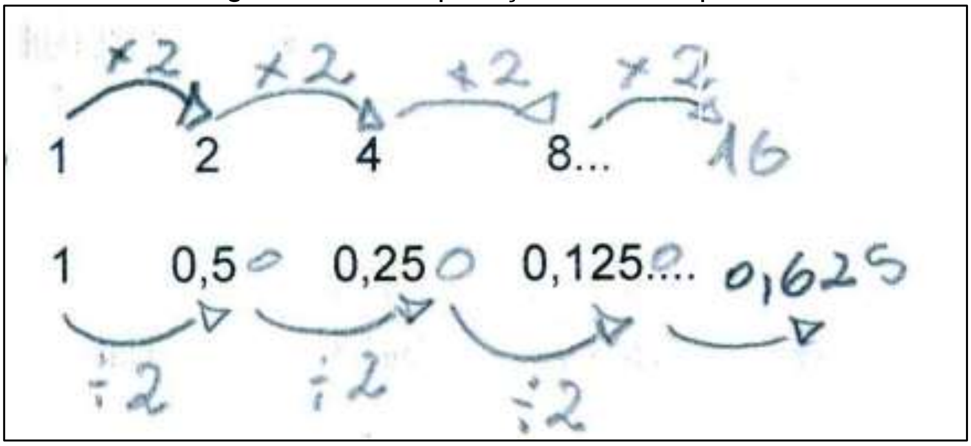


Fonte: Grupo 11 da escola B, 2016.

Compete destacar que, ao multiplicarem o número 1 por 5 (segunda linha, Figura 34), os estudantes acrescentaram o número 0 na frente do resultado. Utilizando esta estratégia para os demais números da sequência, a multiplicação pelo número 5 estaria correta.

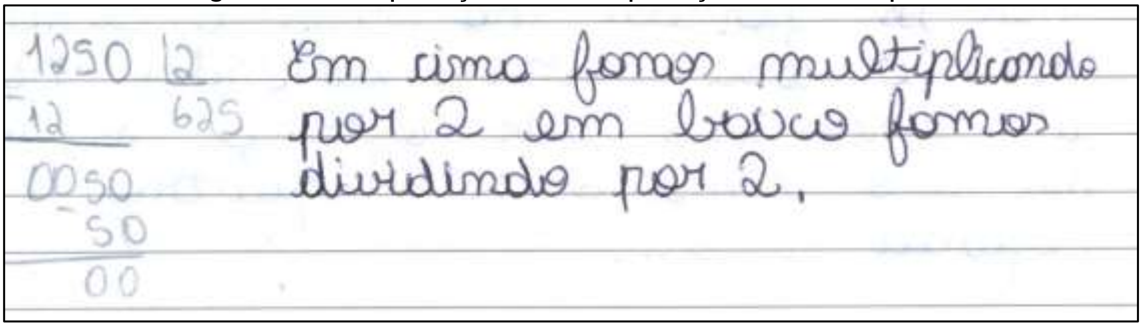
Outra maneira apresentada pelos alunos está representada nas figuras 35 e 36: os grupos destacaram que os números da primeira linha são multiplicados por 2; já os valores da segunda linha são divididos por 2.

Figura 35 – Multiplicação e divisão por 2



Fonte: Grupo 4 da escola A, 2016.

Figura 36 – Explicação da multiplicação e divisão por 2



Fonte: Grupo 1 da escola B, 2016.

Para esta questão, distintas conjecturas emergiram. Os estudantes evidenciaram que poderiam utilizar tanto a multiplicação como a divisão na resolução desta atividade. Saliento que, durante a realização das atividades do segundo encontro, os estudantes estavam mais interessados. Como já possuíam conhecimento da tendência de Investigação Matemática, durante a realização das tarefas deste encontro, eles apresentavam-se mais motivados para descobrir novas estratégias, bem como apresentar seus resultados para os colegas.

Na figura 21 fica evidente uma generalização que relaciona o número da linha debaixo com o número de diagonais de cada figura. Os estudantes conseguiram relacionar o valor com as diagonais, mesmo sem ter conhecimento deste conteúdo. Já na figura 22, os estudantes consideraram que os valores dos lados aumentam de 1 em 1 (número de lados de cada polígono). Na linha de baixo observaram que existe a soma em forma de uma sequência, ou seja, primeiro somando 2, posteriormente 3, 4 e assim sucessivamente.

Ainda como generalização realizada pelos alunos, destaco os esquemas evidenciados nas figuras 25 e 26. O que estes esquemas têm em comum é uma terceira linha com os resultados das divisões da primeira linha pela segunda. Por meio desses resultados é que os alunos elaboraram seus esquemas para descobrir os próximos valores posteriores da sequência.

Nas Figuras 31 e 32 há exemplo de duas generalizações diferentes para a mesma questão. O grupo 14 (Figura 31) descreveu que o número da linha de cima indicava o número de zeros que deveria ter no respectivo número de baixo. Já o grupo 7 (Figura 31) usou a potenciação para fazer a generalização da resposta, ou seja, para encontrar o número da segunda linha basta escrever uma potência de base 10 com o expoente respectivo da primeira linha.

Ainda há evidência de generalização (Figura 34 e 35), no qual os estudantes multiplicam os valores da primeira linha por dois, já para a segunda linha um dos grupos dividiu os valores por 2 e outro multiplicou por 5. Assim, posso inferir que os estudantes conseguiram encontrar distintas generalizações que poderão auxiliar os mesmos nos conteúdos de álgebra futuramente, pois de acordo com Usiskin (1995) a compreensão desta primeira concepção é fundamental para o ensino das outras três concepções.

4.3 Terceiro encontro

As atividades realizadas no terceiro encontro relacionavam-se à concepção da álgebra como relações entre grandezas. A primeira atividade objetivou analisar diferentes figuras para evidenciar o significado de área e perímetro. No Quadro 8 está a primeira atividade explorada:

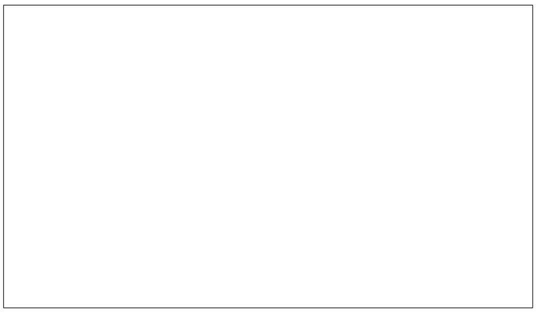
Quadro 8 – Atividade sobre área e perímetro de quadrados e retângulos

Atividade 1:

Utilizando os materiais disponibilizados comprovar que os quadrados e retângulos possuem o valor da área e do perímetro especificado em cada item

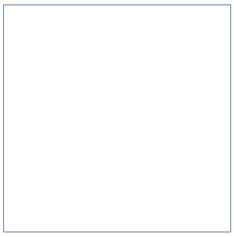
a) Área: $28cm^2$

Perímetro: 22cm



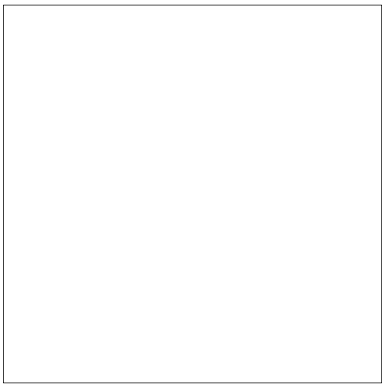
b) Área: $9cm^2$

Perímetro: 12cm



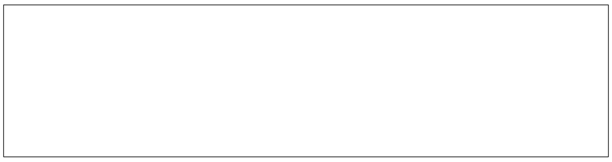
c) Área: $25cm^2$

Perímetro: 20cm



d) Área: $16cm^2$

Perímetro: 20 cm



Depois da comprovação dos resultados acima, responder:

O que representa a área de uma figura?

O que representa o perímetro de uma figura?

Como poderíamos calcular a área de qualquer quadrado ou retângulo? E o perímetro?

Fonte: Da autora, 2016.

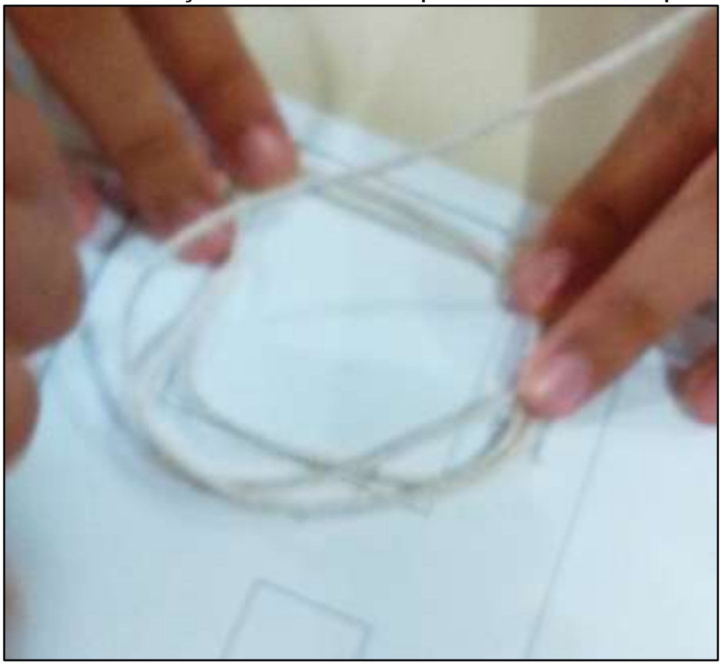
A fim de comprovar os valores do perímetro, alguns grupos utilizaram a régua para medir cada um dos lados. Somando os valores dos quatro lados, os estudantes encontraram as respostas. Quem utilizou essa estratégia, confirmou seus resultados somando os valores dos lados das demais figuras. Para comprovar a estratégia (resposta referente à letra b da atividade 1 do Quadro 8), alguns grupos demonstraram por meio da escrita matemática os seus resultados:

> *G4A: A gente fez com todos e deu certo. Aqui em cm ao todo vai dar 3, 6, 9, 12. Dá sempre certo.*
>
> *G3B: Somamos todos os lados de cada figura, e vimos que sempre dá o valor do perímetro.*

Mesmo sem ter conhecimento do conteúdo abordado, os estudantes conseguiram verificar que a soma dos lados de um quadrado e de um retângulo resulta no perímetro. Grupos também utilizaram um barbante para medir e comprovar os resultados do perímetro. Um dos grupos, ao ser questionado acerca de como pensou, salientou em sua escrita que: “*Pegamos o barbante, ele forma o perímetro do retângulo, porque o barbante encaixa no retângulo e dá certo”* (G2B).

A Figura 37 mostra um dos grupos resolvendo a atividade proposta, utilizando como material de apoio o barbante.

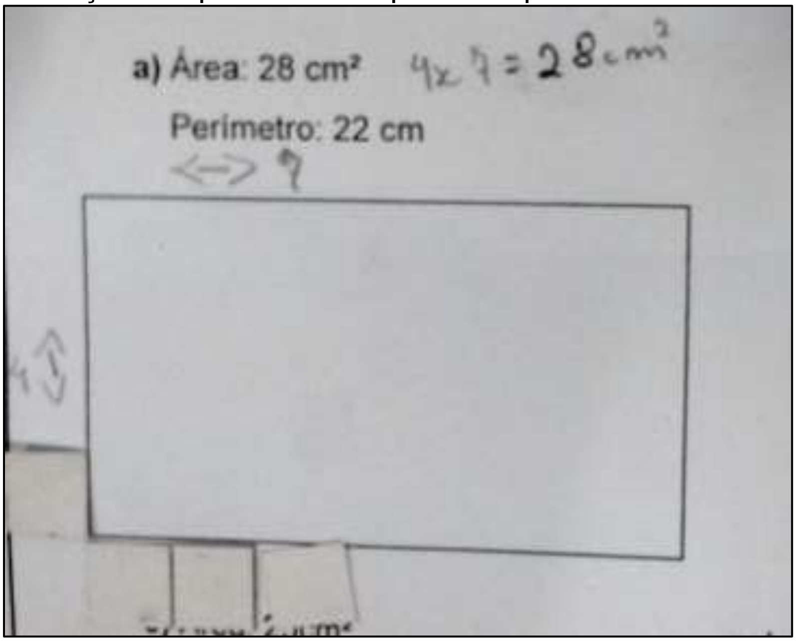
Figura 37 – Utilização do barbante para encontrar o perímetro



Fonte: Da autora, 2016.

Ainda para comprovação do perímetro, alguns estudantes utilizaram os quadradinhos 1cmx1cm. Ao disporem os mesmos no contorno do retângulo, verificaram os resultados, como mostra a Figura 38.

Figura 38 – Utilização de quadradinhos para comprovar o resultado do perímetro

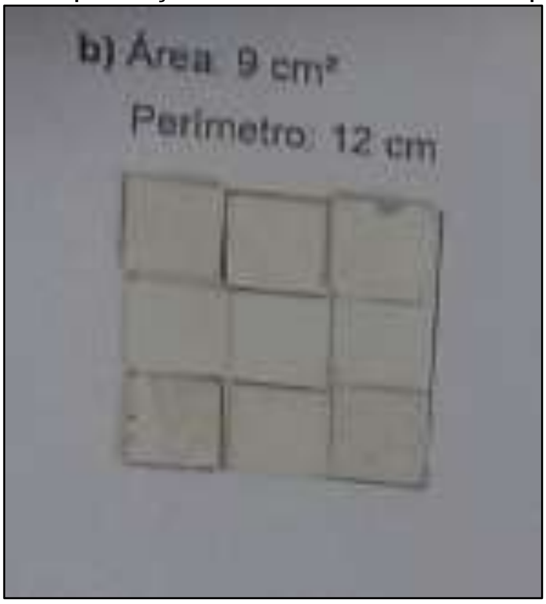


Fonte: Da autora, 2016.

Durante a realização e comprovação das estratégias acerca do perímetro, os alunos sentiram-se motivados. Foi notória a participação de todos os integrantes do grupo na resolução da atividade proposta.

Para encontrar e comprovar a área das figuras, a maioria dos grupos utilizou os quadradinhos, mostrando e comprovando os resultados da área de cada retângulo. Para isso, os grupos fizeram a sobreposição dos quadradinhos dentro do retângulo, como mostra a Figura 39.

Figura 39 – Comprovação da área utilizando os quadradinhos



Fonte: Da autora, 2016.

Ainda para comprovação da área de retângulos e de quadrados, alguns grupos salientaram que, ao multiplicar o valor dos lados, sempre resulta o valor da área. Saliento que a maioria dos estudantes, em ambos os níveis de escolaridade, não possuía o conhecimento de área e perímetro. O material concreto, nesta atividade, auxiliou os estudantes a resolverem as atividades propostas.

A comprovação de que o perímetro de uma figura é a soma de seus lados, e de que a área é o valor da superfície interna, podendo ser encontrada, nos retângulos, por meio da multiplicação dos lados destas figuras, ocorreu devido à utilização do material manipulável oferecido aos alunos. Nesse contexto, corroboro com Neto e Cota (2006, p. 2), quando salientam:

> A manipulação de materiais concretos deve possibilitar momentos de descoberta de relações por meio de ações, percepções e abstrações. A (re)descoberta de conhecimentos matemáticos subjacentes a estrutura de cada material, conduz o aluno a formular explicações e conclusões.

A segunda atividade, também relacionada à concepção da álgebra como estudo de relações entre grandezas, orientava os estudantes a construírem figuras que satisfizessem os valores mostrados no Quadro 9. Nesta atividade, os alunos utilizaram material manipulável, que foi importante para o ensino e a aprendizagem dos estudantes em relação a este conteúdo.

Quadro 9 – Construção de figuras com área e perímetro determinados

<u>Atividade 2</u>
Construir figuras que satisfaçam os seguintes valores:
a) Área: 4cm² Perímetro: 10cm
b) Área: 12cm² Perímetro: 16cm
c) Área: 12cm² Perímetro: 26 cm
d) Área: 8 cm² Perímetro: 12cm
e) Área: 5cm² Perímetro: 12cm
f) Área: 6cm² Perímetro: 12cm
g) Área: 7 cm² Perímetro: 12cm
h) Área: 7 cm² Perímetro: 14cm
Responder: O que o grupo observou ao construir cada figura? Que estratégia foi utilizada para desenhar as figuras?

Fonte: da autora, 2015.

Para realização desta atividade, alguns grupos logo desenharam as figuras sem necessidade de utilizar os quadrados de 1cmx1cm. Neste contexto, os alunos de um dos grupos questionaram:

> *A2: professora não tem como construir estas figuras?*
>
> *Professora: mas existem só retângulos?*
>
> *A2: podemos fazer outras? Aí temos que utilizar os quadradinhos*.

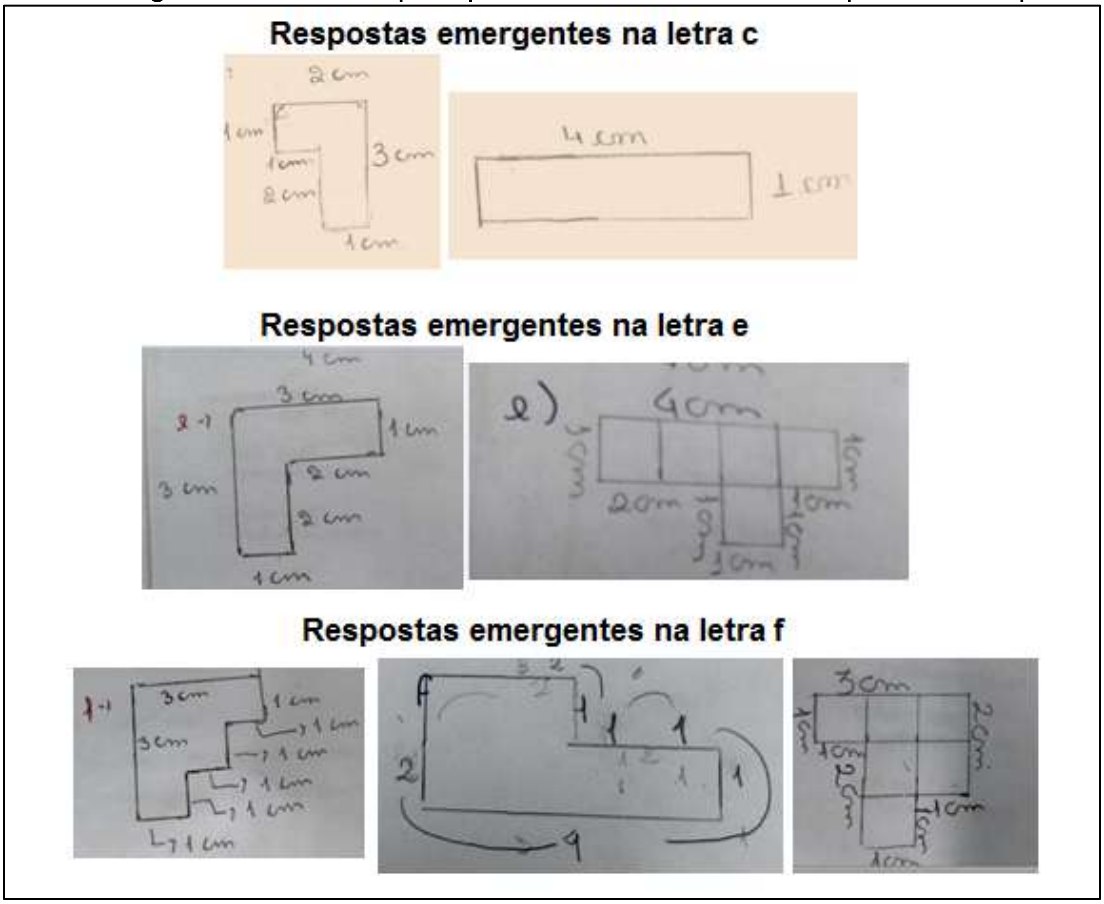
Essa discussão emergiu, pois os estudantes acharam que só poderiam quadrados ou retângulos. Posteriormente a esta discussão os estudantes conseguiram construir distintas figuras.

Um dos grupos salientou que utilizariam os quadradinhos para poder montar a área da figura, e os barbantes para o perímetro. Novamente o material concreto mostrou-se fundamental para a realização da tarefa proposta. Posso inferir que, durante a realização destas atividades, quando os grupos comparavam suas respostas com as dos demais colegas, verificavam que não havia uma única maneira de construir a figura solicitada. Um aluno de 7° ano da escola A questionou para a turma:

> *A3: pode ter mais de uma figura com a mesma área? Muito legal.*
> *Professora: Como vocês descobriram?*
> *A3: eu montei uma com os quadradinhos e ele montou outra.*
> *Professora: e os dois estão certos?*
> *A3: Sim, deu a mesma coisa, contamos um monte de vezes.*

Esse fato está explícito na Figura 40, ou seja, duas ou mais figuras possuem mesma área e mesmo perímetro.

Figura 40 – Figuras diferentes que apresentam o mesmo valor para área e perímetro



Fonte: Da autora, 2016.

A maioria dos grupos utilizou os quadradinhos para formar as figuras solicitadas. Outros grupos, por meio de tentativas, foram construindo as figuras, sem utilizar os quadradinhos.

> *BA6: A gente fez por tentativa, até encontrar uma figura como pedia.*
> *Professora: Como?*
> *BA6: nós íamos colocando.... isso colocamos os quadradinhos na mesa e cuidamos a área o perímetro, quando dava certo desenhamos.*
> *Professora: muito legal!*

Em relação ao diálogo citado, o trabalho em grupo favoreceu os estudantes na realização das atividades propostas, pois, durante a manipulação do material concreto, um colega auxiliava o outro. Observei também que a maioria dos estudantes envolvia-se nas discussões das estratégias formuladas. Durante a realização das atividades, os grupos interagiram e todos os participantes auxiliaram na resolução da atividade proposta. Foi perceptível o envolvimento de todos na busca e formulação de distintas estratégias e conjecturas.

Nestas atividades, fórmulas como a base x altura foram evidenciadas para o cálculo da área das figuras, como meio de generalização das questões. Além dessa fórmula matemática, os estudantes utilizaram a soma dos lados das figuras para a obtenção do perímetro.

4.4 Quarto encontro

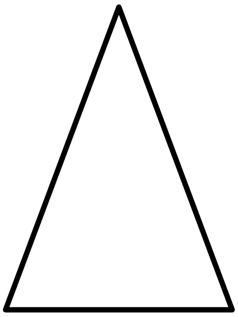
Ainda relacionada à concepção da álgebra como relações entre grandezas, esta atividade objetivou proporcionar aos estudantes a formulação de estratégias sobre a forma de encontrar a área de diferentes figuras (Quadro 10).

Quadro 10 – Cálculo da área de distintas figuras

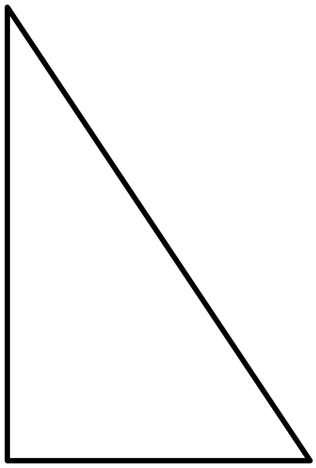
Atividade 3:
Material:
- quadradinhos de tamanho 1cm x 1cm.

Encontrar estratégias para encontrar a área das figuras:

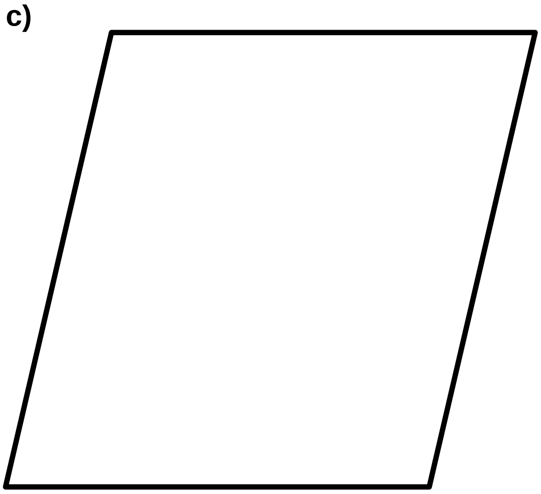
a)



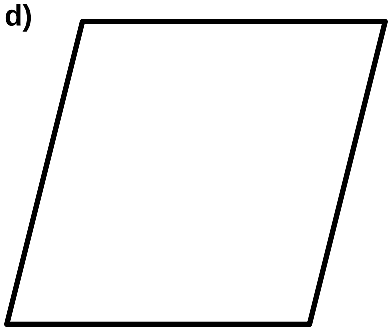
b)



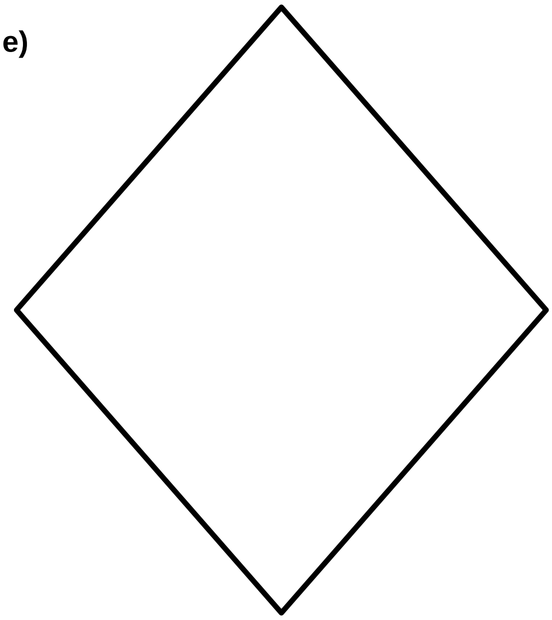
c)



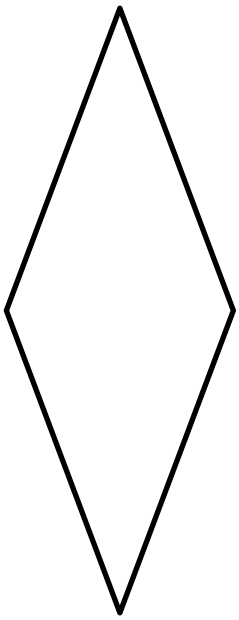
d)



e)



f)

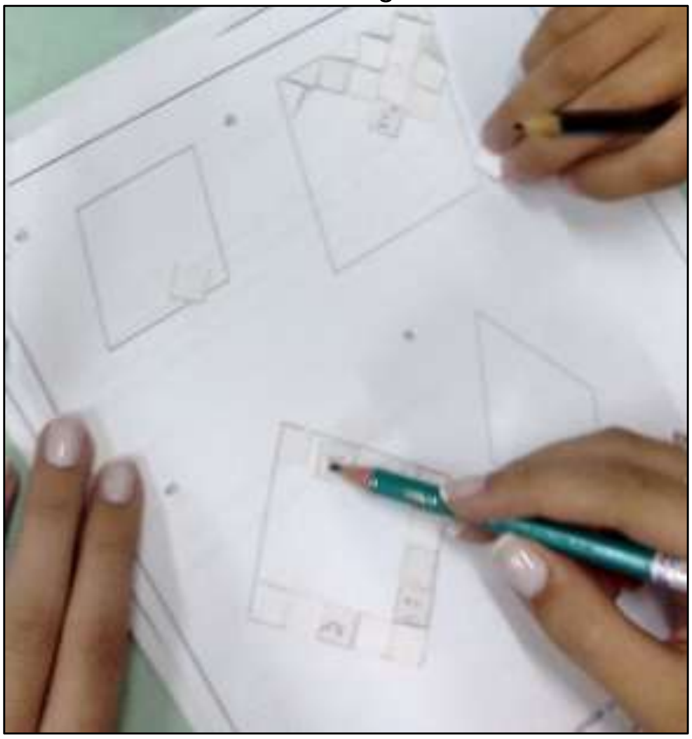


Para cada figura, o grupo deverá relatar como foram encontrados os valores da área. Existe alguma "fórmula" ou algum método mais simples para encontrar os valores obtidos? Explicar.

Fonte: Da autora, 2015.

Para a realização desta atividade, alguns grupos utilizaram como estratégia a disposição dos quadradinhos dentro da figura, encontrando os valores das áreas solicitadas. Os alunos dobravam e manipulavam o material concreto até preencherem toda a figura (Figura 41).

Figura 41 – Alunos manipulando com os quadradinhos para encontrar a área de distintas figuras



Fonte: Da autora, 2016.

Para descobrirem a área dos triângulos, alguns grupos utilizaram quadradinhos; outros ampliaram a figura, transformando-a em retângulos. Estas estratégias podem ser evidenciadas na Figura 42 e no diálogo abaixo:

Professora: Como vocês estão descobrindo a área das figuras?

B17: Colocamos os quadradinhos dentro.

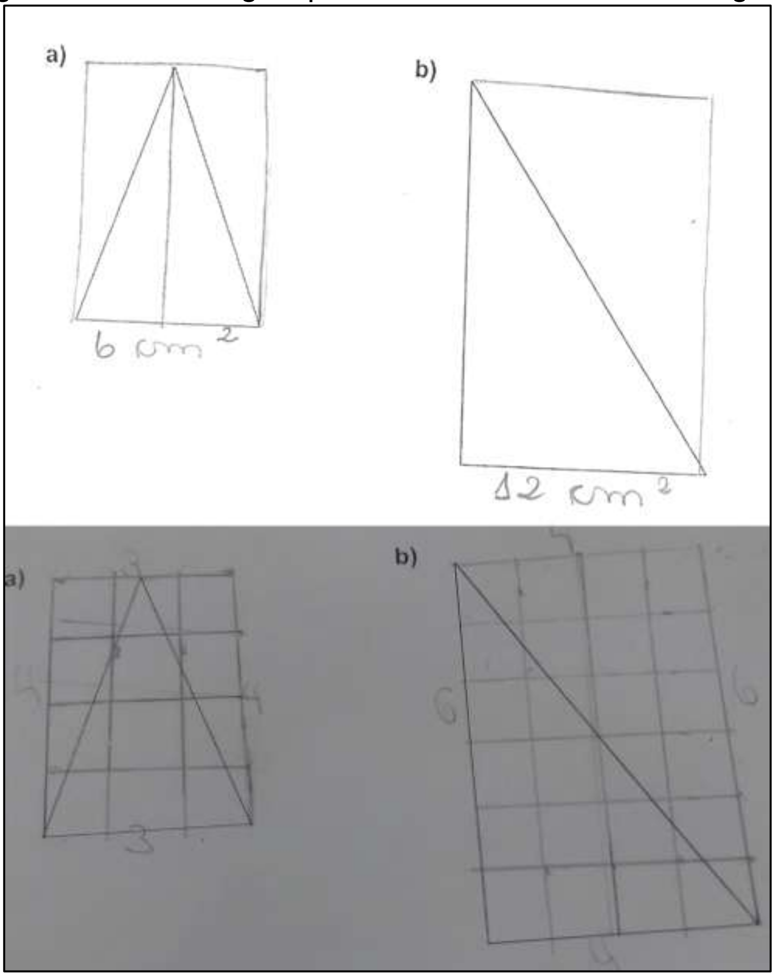
Professora, mas e os cantos?

B16: A gente dobra, né... não dá pra recortar, mas dobrar acho que pode.

Nesse diálogo, fica evidenciado que os estudantes utilizaram a mesma estratégia do terceiro encontro, quando dispuseram os quadradinhos dentro de cada figura para encontrar a área. Pereira (2015) elenca em sua dissertação que os estudantes utilizam conhecimentos adquiridos em encontro anteriores. Assim, os alunos não apresentaram dificuldades em encontrar as áreas de distintas figuras.

No contexto, na Figura 42, também é possível notar que os alunos utilizaram os conhecimentos adquiridos no terceiro encontro. Observei que transformaram as figuras em um retângulo, pois já sabiam como calcular a área desse polígono.

Figura 42 – Estratégias para encontrar a área de triângulos

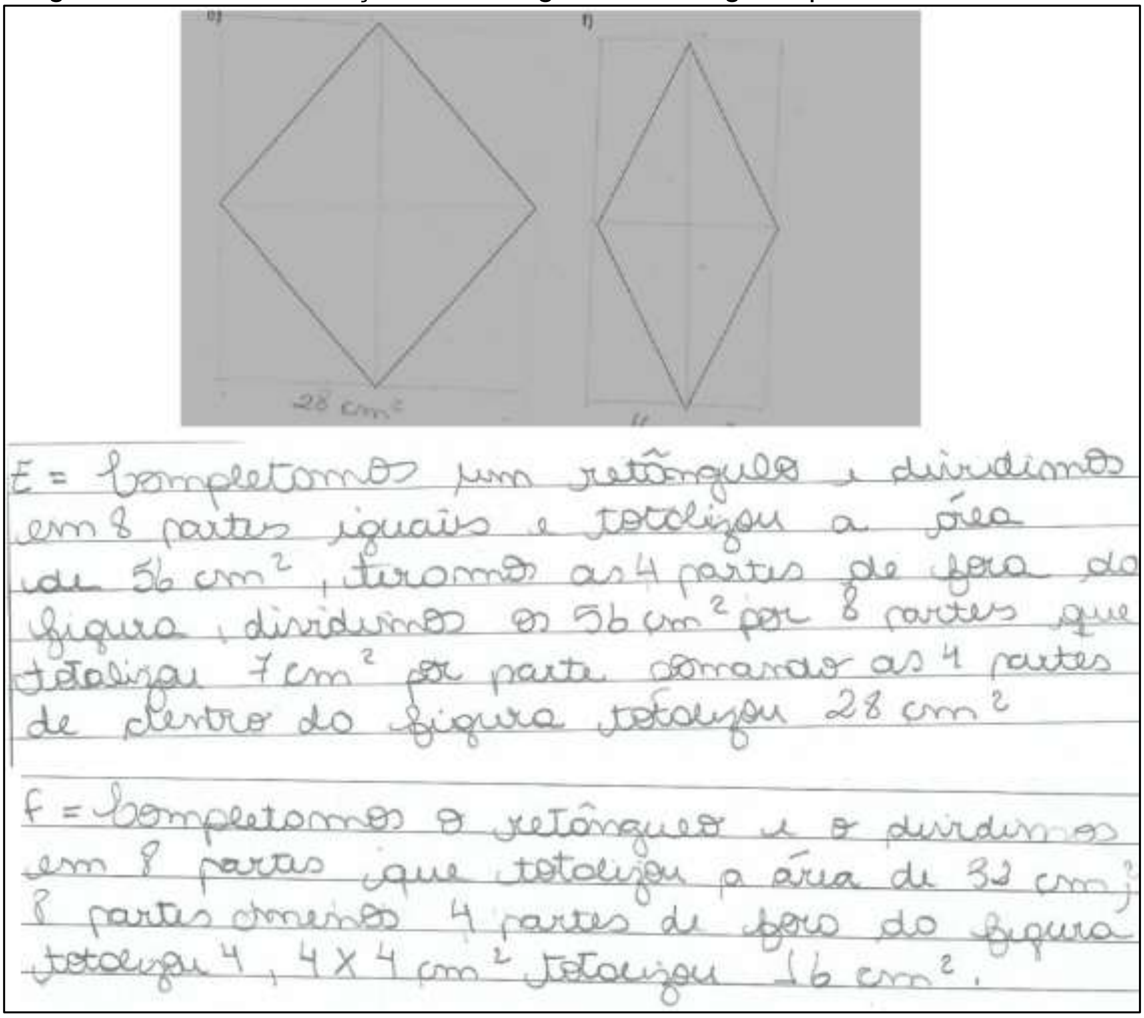


Fonte: Da autora, 2016.

Um dos alunos salientou: "*As partes que estão fora do retângulo cabem dentro. Assim base vezes altura dividido por dois*" *(*B16). Para explicitar a estratégia utilizada, alguns grupos escreveram detalhadamente sobre o que conjecturavam. Saliento que esse fato ocorreu devido à minha insistência para que os alunos escrevessem durante a realização das práticas: *“Quero que vocês escrevam para eu conseguir entender o que vocês pensaram quando eu chegar em casa. Detalhem tudo o que pensaram”* (professora).

A Figura 43 apresenta a estratégia utilizada por um grupo de estudantes da escola B, quando aumentavam as figuras transformando-as em retângulos e descrevendo detalhadamente o que conjecturavam.

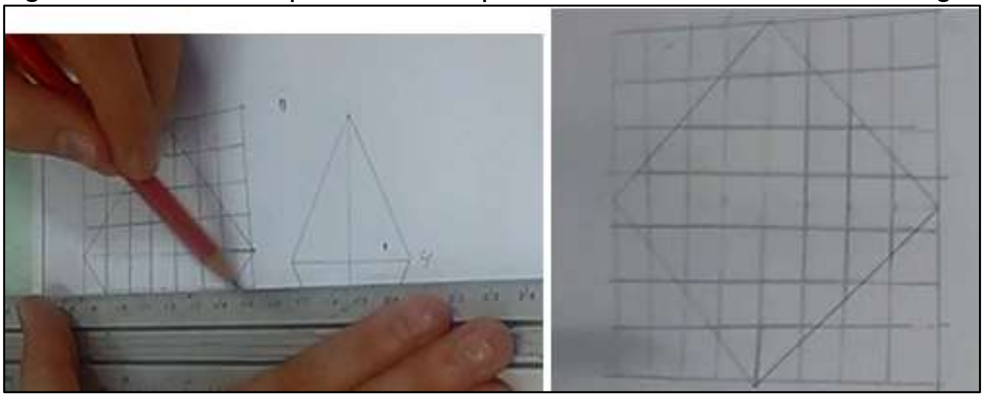
Figura 43 – Transformação de losangos em retângulos para o cálculo da área



Fonte: Da autora, 2016.

Utilizando esse mesmo raciocínio, um dos grupos desenhou os quadradinhos na figura da letra *e*. Ao contar, os alunos encontraram um total de 64 quadradinhos, constatando que, ao dividirem por dois, encontrariam o resultado da área da figura solicitada (Figura 44).

Figura 44 – Uso de quadradinhos para encontrar a área dos losangos

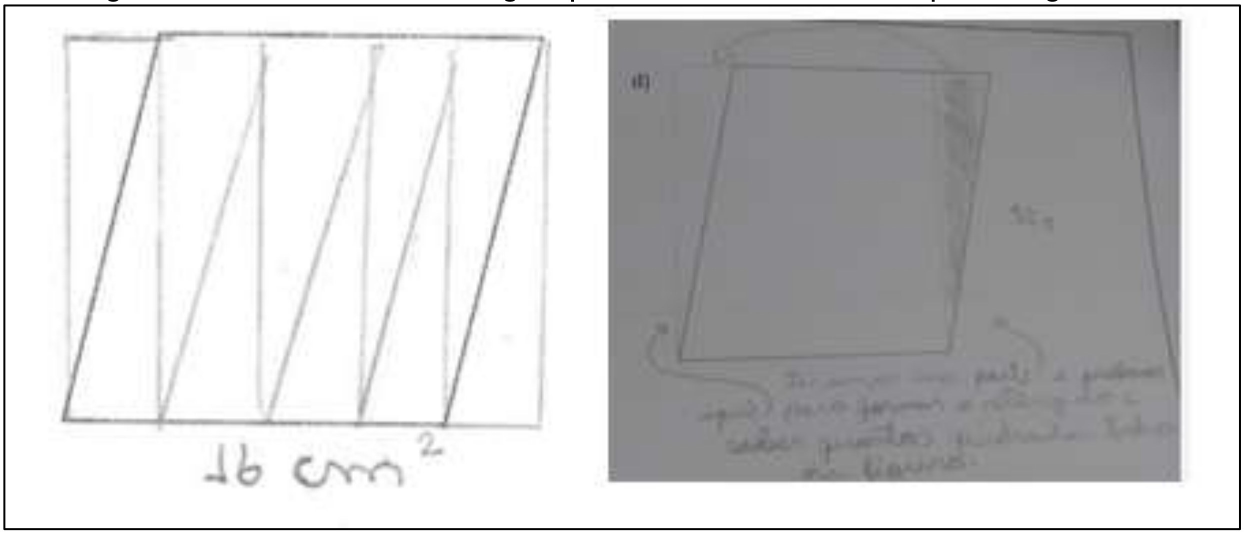


Fonte: Da autora, 2016.

Para encontrar a área dos paralelogramos, um dos grupos dividiu as figuras em partes iguais. A divisão realizada pelos estudantes transformou as figuras em retângulos. Posteriormente, o grupo dividiu a figura em triângulos iguais. Outros grupos evidenciaram a área do paralelogramo retirando um dos cantos e colocando do outro lado da figura. Essas estratégias são evidenciadas na Figura 45 e nas escritas dos grupos.

> *G6B: Na letra c, completamos o retângulo, a gente dividiu em 10 partes iguais. A base deu 5 e altura 4. A área deu 20. Assim dividimos os 20 pelas 10 partes, cada parte deu 2. Assim como na figura ficaram 8 partes, multiplicamos por 8 encontrando a área da figura.*

Figura 45 – Diferentes estratégias para encontrar a área do paralelogramo



Fonte: Da autora, 2016.

Durante as atividades emergentes do quarto encontro, na maioria das estratégias formuladas, os alunos consideravam os conhecimentos prévios do terceiro encontro, no qual conjecturaram acerca de como encontrariam a área de retângulos e quadrados. Isso fica explícito em uma fala de um estudante durante a discussão das estratégias: “*A gente tentou fazer retângulos para colocar melhor os quadradinhos dentro da figura, ai é mais fácil de contar”* (B10).

Nesse contexto, os conhecimentos prévios dos estudantes lhes possibilitaram evidenciar estratégias para encontrar a área de diferentes figuras. Assim, “é importante atentarmos para o valor do conhecimento prévio como importante instrumento para o processo de ensino e aprendizagem” (PEREIRA, 2011, p. 63). Dessa forma, as atividades efetivadas no terceiro encontro possibilitaram aos alunos o desenvolvimento de novas estratégias no quarto encontro.

Posso inferir que estas atividades propostas proporcionaram aos estudantes momentos de autonomia na formulação de estratégias para encontrar a área de distintas figuras. Os grupos de alunos interagiam mais uns com os outros. Observei, também, que já tinham conhecimento acerca de como se desenvolve uma Investigação Matemática.

Como generalização os estudantes utilizaram a fórmula da base x altura para o cálculo da área de um retângulo. Para os triângulos e losangos os alunos transformaram os mesmos em retângulos (ver Figuras 42 e 43). Em seguida, os alunos realizavam a multiplicação da base e da altura e posteriormente dividiam o resultado obtido por 2. Para os paralelogramos (Figura 45), os estudantes também transformaram o mesmo em retângulos evidenciando o cálculo da área por meio da multiplicação do valor da base pela altura. Saliento que observaram que não havia necessidade de dividir por dois como nos triângulos e nos losangos e que houve apenas um deslocamento de uma parte do paralelogramo (esta parte em formato de triângulo).

4.5 Quinto e sexto encontros

No quinto e sexto encontros foram desenvolvidas atividades relacionadas com a concepção do estudo das estruturas. Na primeira atividade (Quadro 11), o intuito foi utilizar tiras de diferentes tamanhos para calcular o perímetro de um retângulo.

Saliento que os alunos não sabiam o valor da medida dos lados do retângulo e nem o tamanho das tiras. Na segunda atividade, o intuito foi proporcionar aos estudantes a formulação de conjeturas acerca de atividades utilizando materiais concretos, vinculadas ao conteúdo de produtos notáveis.

Quadro 11 – Atividade das tiras coloridas

Atividade 1:

Cada grupo de trabalho precisará de:

- Uma folha retangular com medidas 50 cm e 30 cm;
- 10 tiras laranja de 15 cm;
- 10 tiras rosa de 20 cm;
- 10 tiras verdes de 10 cm.

Realizar os seguintes procedimentos e escrever os resultados no quadro que segue:

- Medir os lados do retângulo com tiras de uma cor e escrever as medidas dos lados do retângulo em relação às tiras que foram utilizadas.
- Medir os lados do retângulo com tiras de duas cores e escrever as medidas dos lados do retângulo em relação à quantidade de tiras utilizadas.
- Medir os lados do retângulo com tiras de três cores e escrever as medidas dos lados do retângulo em relação à quantidade de tiras utilizadas.

	Lado Maior	Lado Menor	Perímetro
Uma cor			
Duas cores			
Três cores			

Comparar o resultado do grupo com os de outros grupos. Todos obtiveram os mesmos resultados? Por quê?

Fonte: Adaptado de: (SCHMIDT, 2000).

Nesta atividade, alguns estudantes, para colocar as tiras no perímetro, utilizaram apenas uma das cores. Um dos grupos salientou que *"no lado menor colocamos três tiras verdes e no lado maior colocamos cinco tiras verdes"* (G2B). Dois grupos apenas utilizaram como estratégia as tiras dobradas. Questionei sobre a viabilidade da utilização de parte de uma tira:

> Professor: como podemos representar o lado maior do retângulo?
>
> B6: a gente usou duas tiras e meia rosa.
>
> Professor: podemos representar essa resposta só com números?
>
> B6: a metade é ½?
>
> Professor: isso.
>
> B6: então da 2 + ½

Nesse momento da discussão emergiu o conteúdo relativo a frações e os estudantes perceberam que poderiam dobrar as tiras. Novamente foi possível verificar a importância da utilização do material concreto em aulas de matemática, pois a discussão acerca das diferentes maneiras de representar o perímetro foi constatada pelas turmas. “Todos esses acessórios utilizados pelo professor para realizar a aprendizagem são recursos que contribuem para a socialização dos alunos, a formulação de respostas, as indagações propostas a eles” (SANTOS, 2014, p. 23).

Apresento, na Figura 46, a estratégia de um dos grupos que utilizou uma cor para demonstrar o perímetro, empregando a dobradura das tiras.

Figura 46 – Representação do perímetro dobrando as tiras

Fonte: Da autora, 2016.

Após a realização desta atividade, os grupos expuseram suas estratégias para a turma. Os grupos que utilizaram como estratégia a dobradura das tiras foram questionados sobre a utilização da tira laranja para a representação do perímetro, utilizando apenas uma cor. *“No lado menor usamos duas tiras e no maior vamos usar três sem dobrar. E, a outra, temos que dobrar em três partes, pois falta uma parte”* (G5B). Já para a representação do perímetro utilizando tiras de duas cores distintas, mais resultados emergiram:

> *B8: Para o lado maior usamos duas tiras rosas e uma verde. E para o menor lado uma rosa e uma verde.*
> *A6: Nós usamos duas tiras laranjas e duas verdes para o lado grande. Uma laranja, e uma e meia verde para o lado menor.*

Alguns grupos utilizaram duas cores, de maneiras diferentes, "*Lado maior 2 laranjas e uma verde. Lado menor duas laranjas"* (G5A). As respostas aumentaram quando os alunos que utilizaram apenas uma cor para representação do perímetro apresentaram os seus resultados para a turma. Infiro que é importante quando os alunos compartilham seus saberes, pois assim confrontam "suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador" (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA 2009, p. 41).

Assim, durante a resolução da atividade, desempenhei um papel de mediadora, questionando-os para que encontrassem diversas respostas. Nessa perspectiva, para a representação do perímetro utilizando três cores distintas, o diálogo a seguir ressalta a importância da apresentação das estratégias por parte do estudante e a importância dos questionamentos:

> *Professora: Como vocês colocaram o perímetro de três cores?*
> *G6B: Para o lado maior usamos 1 rosa e 2 laranjas e para o menor três verdes. Nós não dobramos nenhuma tira, é difícil.*
>
> *Professora: Qual estratégia vocês utilizaram? Vocês dobraram as tiras?*
> *G7A: Não, na vertical, duas tiras laranjas; e, na horizontal, duas tiras rosas e uma tira verde.*
>
> *Professora (questionando a turma): se utilizássemos todas as cores em um lado, como ficaria?*
> *A3: Não tem como.*
> *Professor: será?*
> *A6: aí teríamos que ficar dobrando.*
>
> *Professora: e se eu usar dobrar as tiras como os colegas fizeram, o que podemos fazer?*
> *B7: Nós dobramos, como esse grupo, no lado de 50, usamos 1 verde, 1 rosa, 1 laranja, ai deu 45 e dobramos a tira laranja em três pra dar os 5cm que faltavam. E no lado de 30 a gente só usou três verdes.*

Nas quatro turmas emergiu a estratégia da dobradura das tiras para representar o perímetro. Nessa perspectiva, saliento a importância dos questionamentos e das discussões no decorrer das atividades de Investigação Matemática. Segundo Reginaldo (2011, p. 9), "[...] para que o momento da discussão não se torne empobrecido é importante que o professor faça uma mediação do debate, incentivando a discussão de ideias contrárias e a favor de cada conjectura", afastando as "respostas prontas" e incentivando os alunos a explanarem seus conhecimentos matemáticos.

Os questionamentos desse encontro proporcionaram aos estudantes momentos para relembrarem conceitos acerca do conteúdo de frações. Esse fato ficou explícito quando destacaram, durante as discussões, que, ao dobrar, as tiras teriam metades, terços ou até quartos. Para representação dos lados da folha retangular utilizando apenas uma cor, emergiu como resultado: 1 ½ tira rosa para o lado menor e 2 ½ tiras rosa para o lado maior.

A intervenção pedagógica proporcionou aos estudantes momentos para relembrarem conteúdos já abordados em sala de aula. Infiro a importância de trabalhar "o conhecimento prévio dos alunos e o que ele já tem aprendido sobre o assunto ministrado" (PEREIRA, 2011, p. 72). Além disso, nesse encontro ficou explícita a importância do trabalho cooperativo, pois um aluno pode auxiliar o outro durante a realização das atividades e, ainda segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), o trabalho em grupo intensifica as discussões e formulações de conjecturas.

No Quadro 12 está a atividade em que foi enfatizado o conteúdo de produtos notáveis com o uso de material concreto.

Quadro 12 – Atividades com produtos notáveis

Atividade 2:

Nesta atividade serão necessários os seguintes materiais:

- 6 peças de forma quadrada, de tamanho grande;
- 15 peças de forma retangular;
- 24 peças de forma quadrada, de tamanho pequeno;

1. Usando o material, construir quadrados ou retângulos que tenham por medida da base e da altura os valores citados no quadro. Para esta atividade considerar o lado do quadrado maior "x" e o lado do quadrado menor "1". Anotar a área resultante.

Medida da base	Medida da altura	Área
x + 2	x	
X	3 + x	
2x	x + 4	
x + 5	2x	
x + 3	x + 3	
x + 2	x + 4	
x + 1	x + 4	

Analisando os resultados obtidos o que podemos concluir sobre as figuras construídas?

2. Construir retângulos ou quadrados que satisfaçam as expressões algébricas a seguir. Em cada caso escrever a medida da base e da altura do retângulo ou do quadrado resultante.

a) $x^2 + 4x$
b) $4x^2 + 2x$
c) $3x^2 + 5x$
d) $x^2 + 8x$
e) $x^2 + 10x$

Se não tivesse o material, como ficaria a figura a seguir? Justificar.
$x^2 + 30x$

3. Construir as figuras que satisfaçam as equações abaixo.

a) $x^2 + 4x + 4$
b) $x^2 + 8x + 16$
c) $x^2 + 5x + 4$
d) $x^2 + 6x + 9$
e) $2x^2 + 3x + 1$
f) $2x^2 + 7x + 6$
g) $4x^2 + 8x + 4$

Analisando os dados obtidos o que podemos concluir sobre o exercício anterior?
O que o grupo pensou para montar cada figura do exercício anterior?
E se não tivéssemos o material como seria a representação de $x^2 + 8x + 7$
Analisando os resultados obtidos o que podemos concluir sobre as atividades anteriores.

4 Representar geometricamente as expressões abaixo: (esboçar as representações e descrever os procedimentos, mostrando qual é a área de cada situação)

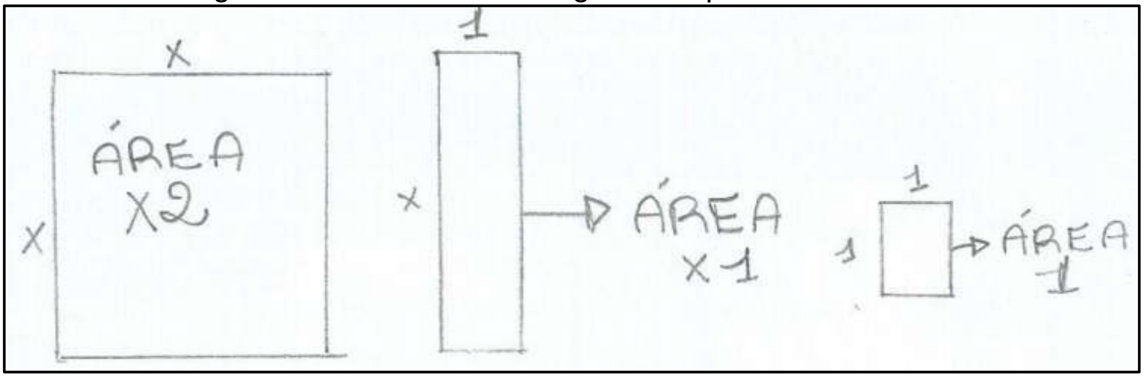
a) $(x + 3)\ (x – 3)$
b) $(x + 6)\ (x – 6)$
c) $(x + 5)\ (x – 5)$

O que se pode concluir acerca do que foi representado acima? Descrever as estratégias do grupo para a construção das figuras acima.

Fonte: adaptado de: (SCHMIDT, 2000 e QUARTIERI, GIONGO, 2011).

Na realização desta atividade, o primeiro momento foi dedicado a questionar os estudantes sobre qual seria a área do quadrado de lado x, do quadrado de lado 1 e do retângulo de lado x e 1. A Figura 47 mostra como os grupos se organizaram para a realização da atividade, anotando cada área para, posteriormente, conseguir fazer a resolução das questões.

Figura 47 – Área de cada figura dos produtos notáveis



Fonte: Da autora, 2016.

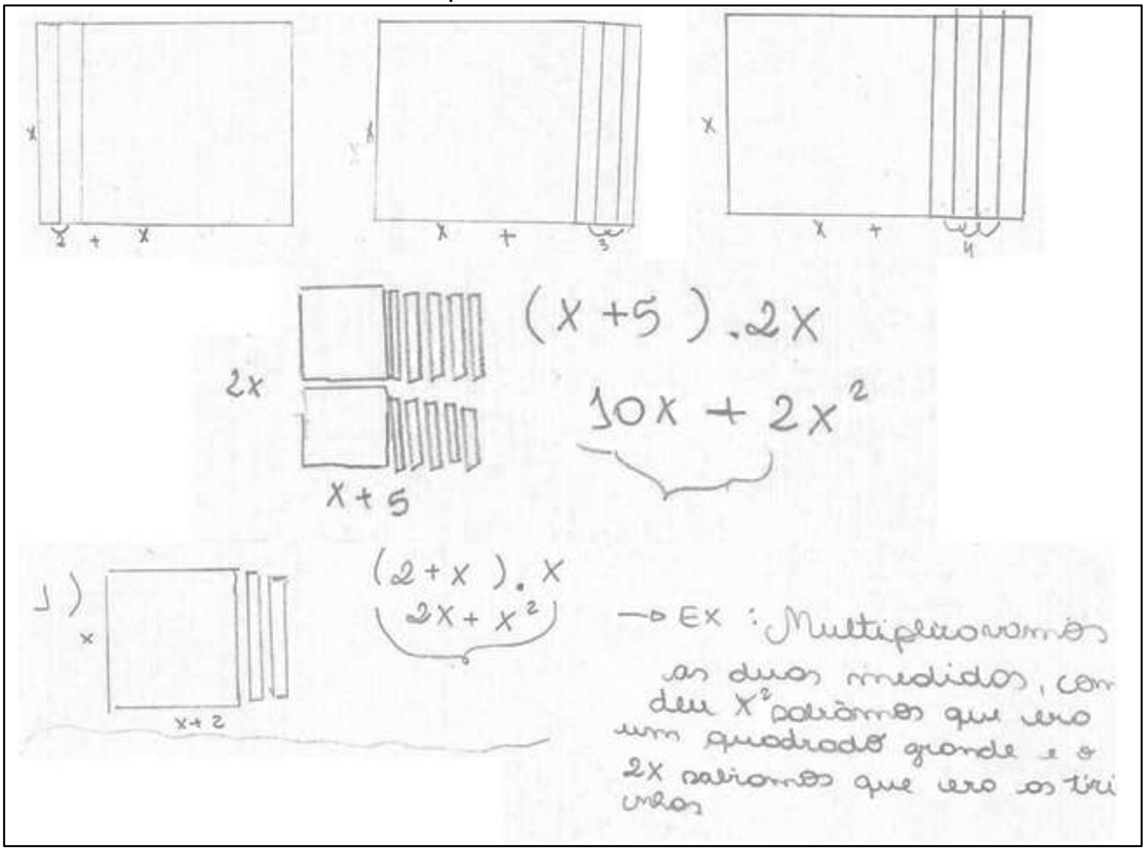
Na Figura 48, os resultados encontrados por um dos grupos, durante o preenchimento do quadro da atividade em estudo. Alguns grupos utilizavam as peças para montar a figura solicitada. Entretanto, três grupos utilizaram o método do cálculo para resolver esta atividade: multiplicavam a base pela altura e só depois montavam a figura equivalente à área encontrada. Essas estratégias estão apresentadas na Figura 49.

Figura 48 – Resultados emergentes das áreas

Medida da base	Medida da altura	Área
x + 2	X	$2x + x^2$
X	3 + x	$3x + x^2$
2x	x + 4	$8x + 2x^2$
x + 5	2x	$10x + 2x^2$
x + 3	x + 3	$x^2 + 6x + 9$
x + 2	x + 4	$x^2 + 6x + 8$
x + 1	x + 4	$x^2 + 5x + 4$

Fonte: Da autora, 2016.

Figura 49 – Utilização das peças e dos cálculos para representar as figuras de produtos notáveis

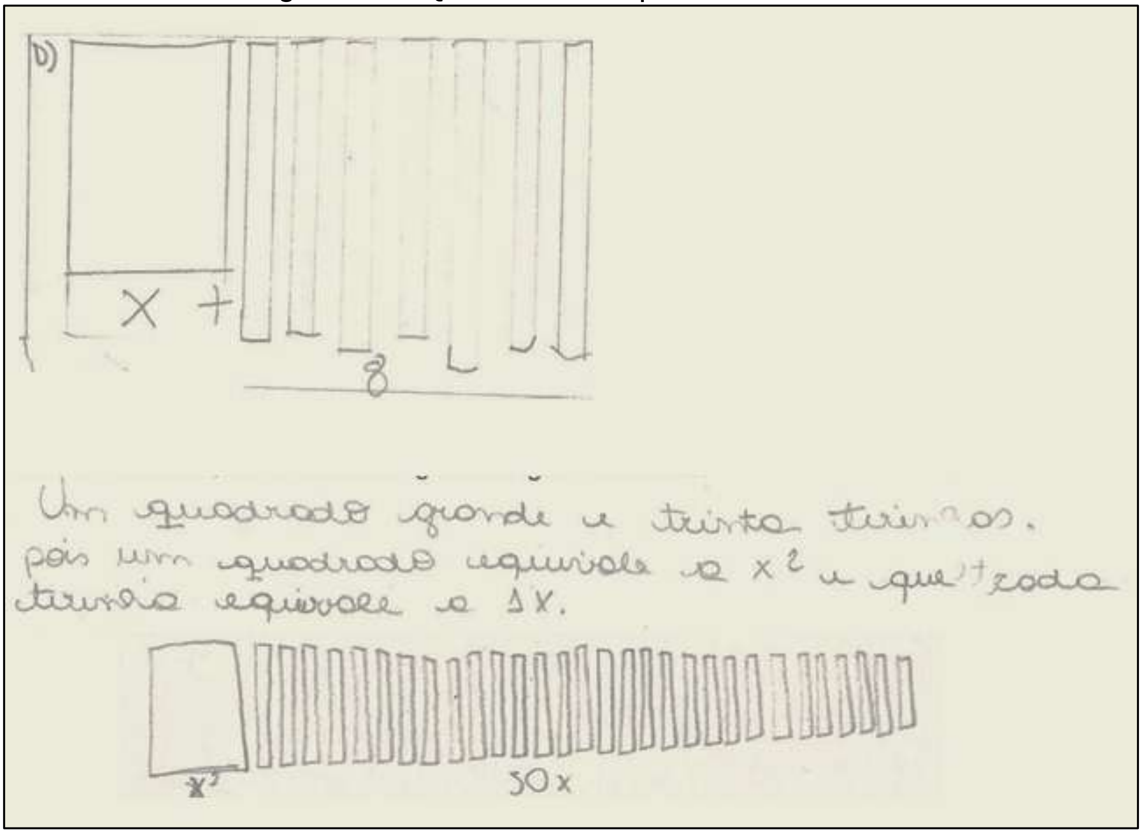


Fonte: Grupo 3 da escola B, 2016.

Um dos grupos que utilizou somente as peças para formar as figuras solicitadas salientou que, primeiro, formavam a base da figura e, sequencialmente, formavam a altura. Esse fato pode ser observado na fala de um dos grupos: “*A gente vai colocando as pecinhas para formar a base primeiro, depois a altura. A gente faz isso por tentativa até dar certo”* (G7B).

Na segunda atividade, diversos grupos logo resolveram a questão do $x^2 + 30x$, destacando que seria só colocar uma peça x^2 e 30 barrinhas. Já outros grupos realizaram a construção de todas as figuras para assim conseguir construir a figura solicitada (Figura 50).

Figura 50 – Questão 2 dos produtos notáveis



Fonte: Grupo 5 da escola A, 2016.

Um grupo de estudantes da escola B utilizou a mesma estratégia para desenvolver todas as questões. Eles foram dispondo o quadrado grande e, ao lado desse, a quantidade de retângulos referentes ao número que multiplicava o x. Na Figura 50, na primeira parte da resolução, os estudantes utilizaram o quadrado grande e 8 retângulos e, na segunda parte, o quadrado grande com 30 retângulos.

Na questão 3, para montar as figuras correspondentes, os grupos salientaram que primeiro tinham necessidade de separar as peças de acordo com a área solicitada na questão e depois deveriam organizar as peças formando retângulos ou quadrados.

Professor: como vocês resolveram e montaram as figuras?

A11: A gente sabe que o x^2 é o quadrado grande, o 1x é a tirinha e o 1 é o quadrado pequeno. É só separar as peças e montar as figuras.

Professor: como eu sei quantas vou usar?

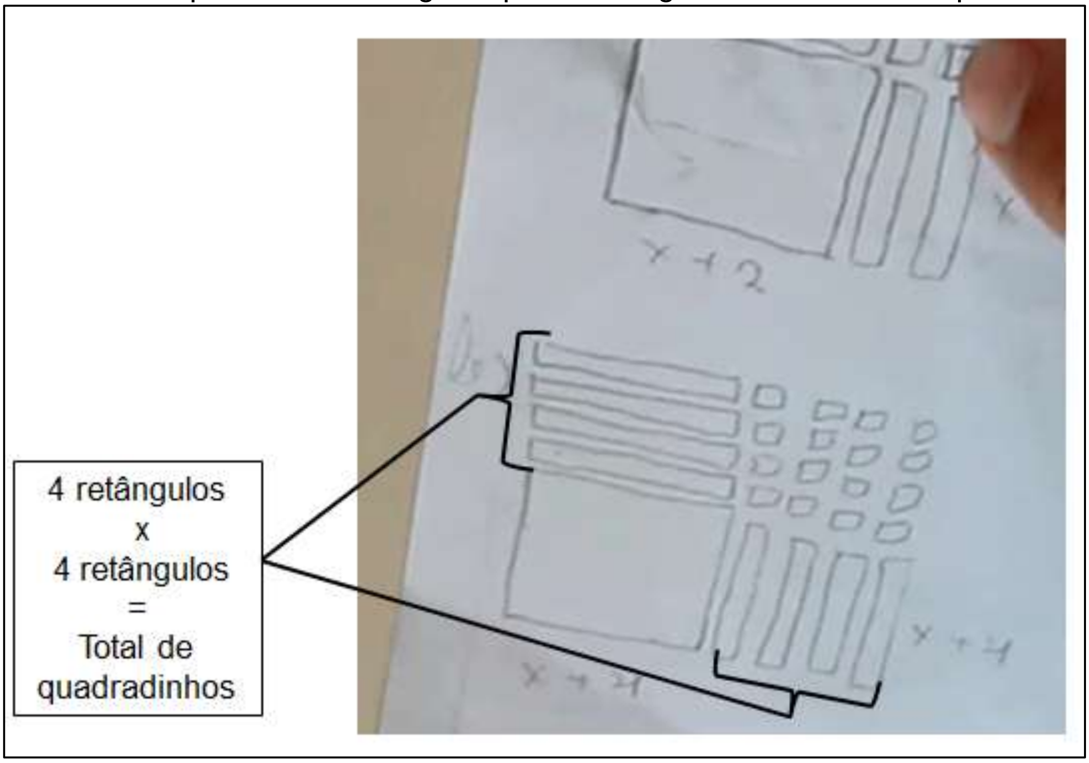
A11: Na $2x^2 + 3x + 1$, eu uso 2 grandes, 3 tiras e 1 pequeno.

Os grupos de alunos, tanto de 7° ano como de 9° ano, depois que montaram algumas figuras, concluíram que:

Professor: Por que você colocou duas tirinhas de cada lado?
A15: Por que dois vezes dois dá quatro.
Professor: E lá no outro, por que tinhas quatro em cada lado?
A15: Por que quatro vezes quatro dá dezesseis.

A Figura 51 representa o que o aluno 15 explanou em sua fala. Apresentam-se 16 quadradinhos, resultado da multiplicação dos retângulos: quatro de um lado e quatro do outro. O cálculo realizado foi a multiplicação. Assim, para realizar a atividade, o estudante considerava o número de quadradinhos para dispor os retângulos ao lado do quadrado grande. Pensava em dois números (considerando a quantidade de retângulos) que, ao se multiplicarem, resultavam na quantidade de quadradinhos.

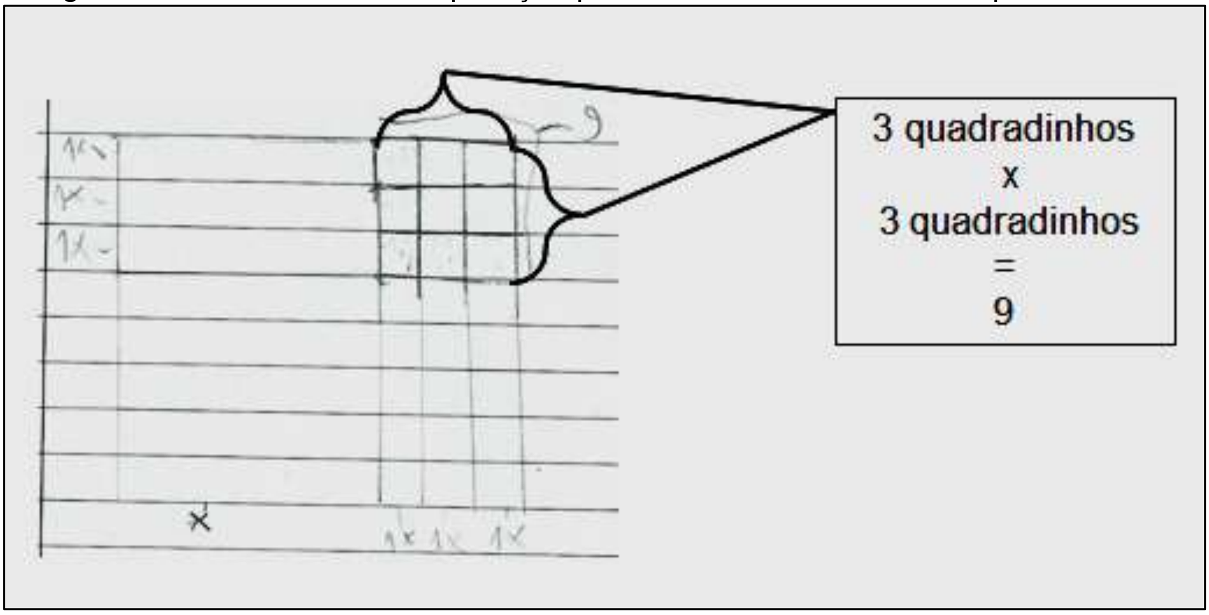
Figura 51 – Multiplicando 4 retângulos por 4 retângulos resulta em 16 quadradinhos



Fonte: Da autora, 2016.

Considerando esse raciocínio, outros grupos também conjecturaram acerca da multiplicação da quantidade de retângulos (Figura 52). “*B12: Se a gente faz três vezes o três, dá nove”.*

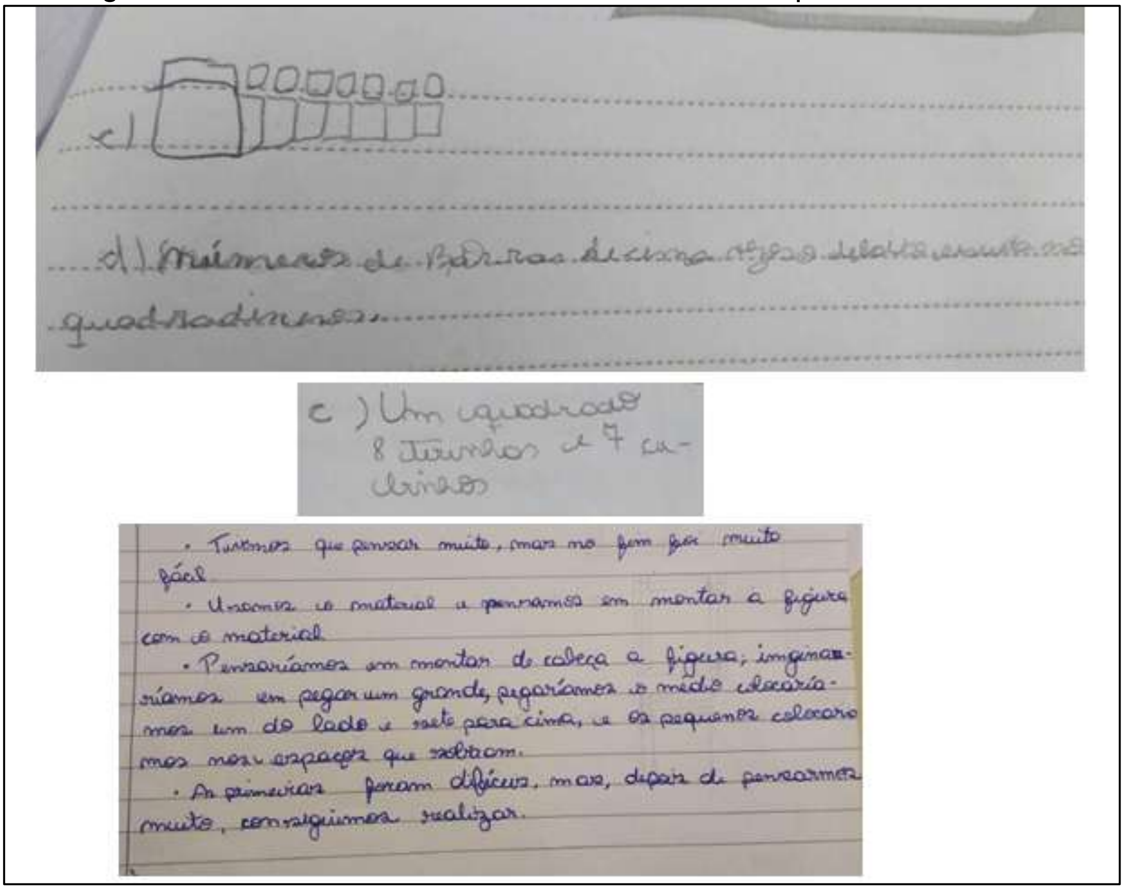
Figura 52 – Utilizando a multiplicação para encontrar o número de quadradinhos



Fonte: Da autora, 2016.

Assim, para demonstrar como ficaria a figura: $x^2 + 8x + 7$, sem utilizar o material, alguns grupos fizeram o desenho por tentativa até montar um retângulo. Outros utilizaram o raciocínio da multiplicação, fazendo uma vez o número sete, como demonstra a Figura 53.

Figura 53 – Conclusões acerca da atividade 3 dos produtos notáveis



Fonte: Da autora, 2016.

Posso inferir que a realização destas atividades, utilizando material concreto, possibilitou aos estudantes a compreensão de conceitos relacionados ao conteúdo de produtos notáveis. Antes da construção das figuras solicitadas, os grupos de estudantes tiveram que discutir muito sobre quais estratégias utilizariam para montar cada questão. Como já possuíam conhecimento sobre área de diferentes figuras, partiram destes conceitos para realizar a tarefa solicitada.

Para a realização da questão 4, foi necessário questionar todos os grupos acerca de como se poderia representar um valor negativo. Ao interrogar os estudantes, a ideia de sobrepor as peças emergiu em todas as turmas.

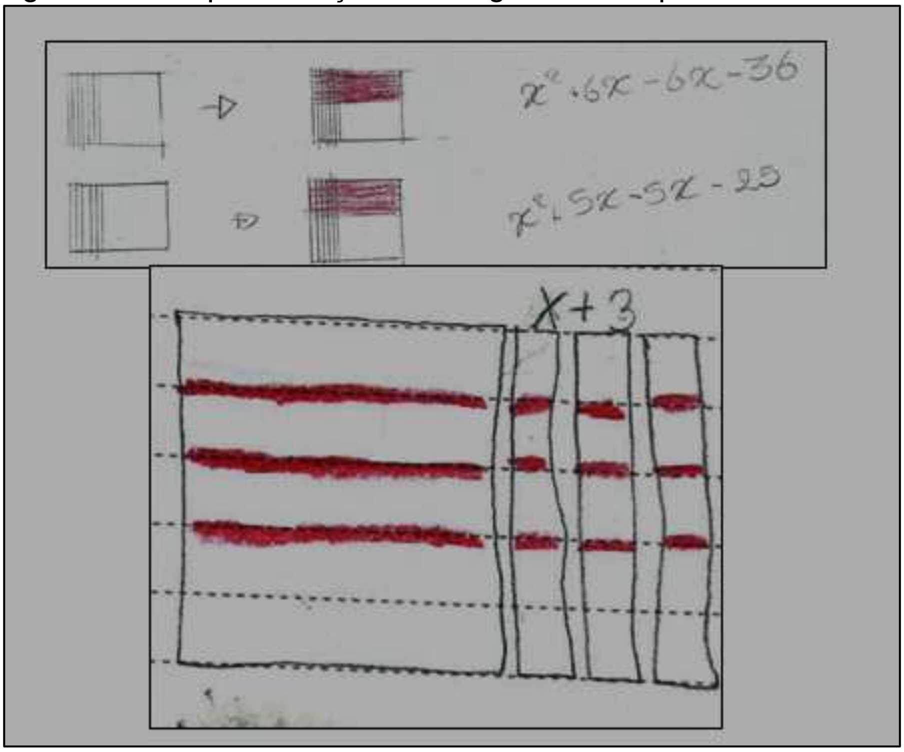
> Professor: Vamos pensar um pouco, se eu tenho que tirar e não posso cortar nada, como podemos representar o negativo.
> A10: Dá para pintar.

Professor: Só pode usar as pecinhas, em vez de pintar pode pensar que tem peças coloridas.
A12: Então pode colocar as peças em cima.
Professor: Vamos testar, se der certo...

Discutida a ideia de sobreposição, os grupos tentaram resolver as questões. Durante a realização desta atividade, fez-se necessário perpassar em todos os grupos para auxiliá-los e questioná-los durante a formulação de estratégias e conjecturas. Alguns grupos não conseguiram concluir a atividade. Entretanto, os que chegaram em alguma estratégia, mostravam para os demais como tinham pensado a respeito da questão, apresentando os resultados obtidos.

Dois grupos evidenciaram a respeito desta questão logo após terem construído a primeira figura, que os resultados seriam sempre o x^2 e o valor ao quadrado e negativo do número que está sendo adicionado ao x. Como exemplo, tem-se: (x-6) . (x+6), terá como resultado $x^2 - 6^2$. Os demais grupos construíram todas as figuras propostas. Na Figura 54, visualiza-se o cálculo realizado e a figura construída por um dos grupos:

Figura 54 – Representação dos negativos dos produtos notáveis



Fonte: Da autora, 2016.

Durante a montagem das figuras, um dos grupos salientou: "*Nós utilizamos as três barrinhas para diminuir o lado do quadradão, e os quadradinhos para diminuir o lado das barrinhas"* (G12B). A partir da realização desta atividade, ressalto acerca da importância de trabalhar com os estudantes os conteúdos de produtos notáveis, pois no 8° ano do Ensino Fundamental são abordados os conteúdos de "Álgebra: Produção histórico-cultural; Sequências; Conceitos; Operações com Polinômios; Produtos notáveis; Fatoração de polinômios; Mínimo múltiplo comum de polinômios; Frações algébricas; Equações e inequações [...]" (SCHNEIDER, 2013, p. 9).

Ainda de acordo com esse autor, "esse elevado número de conteúdos pode indicar também possíveis dificuldades de aprendizagem nesta etapa da escolarização" (SCHNEIDER, 2013, p. 9). Nesse contexto, há necessidade de trabalhar de forma diferenciada os conteúdos algébricos, pois, de acordo com Schneider (2013, p. 20), "[...] a álgebra é tratada como conteúdo principal do oitavo ano devido à sua importância para a continuidade do estudo de matemática no nono ano [...]".

Na figura 51 desta atividade fica explícito que os alunos encontraram a maneira de encontrar a figura solicitada (uso da fatoração). Os estudantes perceberam que o terceiro número (16) é o produto, ou seja, 4x4, já o segundo número está associado a soma (8) ou seja 4+4, isto explícito para a fórmula ($x^2 + 8x + 16$). Na Figura 52 que representa a forma de encontrar a figura para $x^2 + 6x + 9$, também fica evidenciado o mesmo raciocínio da Figura 51. Ou seja, os alunos multiplicarem 3x3 obtém como resultado 9 e ao somarem 3x (1x+1x+1x) com 3x(1x+1x+1x+1) encontram o valor 6x (segundo termo da expressão). Saliento que os alunos não haviam tido contato ainda com o tema fatoração e por meio desta atividade resolveram as expressões corretamente.

Realço que a utilização do material concreto para realização dessas atividades possibilitou aos estudantes um maior entendimento acerca das questões propostas. Ao manipularem o material, os discentes conseguiram formar as figuras propostas, bem como calcular as áreas dessas, quando tinham conhecimento dos lados das figuras. Por meio do conhecimento da área das figuras, e com auxílio do material concreto, também conseguiram evidenciar o valor dos lados.

Em efeito, de acordo com Neto e Cota (2006, p. 1), utilizar material concreto nas aulas de Matemática, com os alunos manuseando os materiais palpáveis, "é uma metodologia que pode possibilitar uma abordagem mais dinâmica desse campo do saber, pois permite, aos alunos, a descoberta de relações por meio de ações, percepções".

Para montar as figuras solicitadas, o trabalho em grupo foi de suma importância, pois, quando um estudante sentia dificuldade na hora de manipular o material concreto, o colega auxiliava. Todos os integrantes dos grupos se empenharam na realização das atividades, para encontrar estratégias, pois um colega auxiliava o outro na busca de uma possível resposta. Foi notório que, quando um dos integrantes do grupo apresentava dificuldades em relação à atividade, os demais membros auxiliavam para que todo o grupo tivesse compreensão da questão proposta.

4.6 Sétimo encontro

No Quadro 13 consta a atividade que contemplou a concepção da álgebra como resolução de problemas. A proposta foi que os educandos desenvolvessem estratégias para calcular o volume de uma caixa, levando em consideração algumas medidas predefinidas, conforme descrito no Quadro 13.

Quadro 13 – Atividades acerca da concepção da álgebra como resolução de problemas

Atividade 1:

Cada grupo de alunos receberá uma folha retangular de 20 cm x 16 cm. Construir uma caixa aberta, retirando de cada canto desta folha um quadrado de lado x.

Responder:

a) Qual é o volume da caixa que o grupo montou? Explicar o procedimento utilizado para encontrar o volume da caixa.

b) Agora construir novos retângulos com a mesma medida. Variar o tamanho dos quadrados dispostos nos cantos e recortá-los montando novas caixas. Preencher a tabela abaixo com os resultados obtidos.

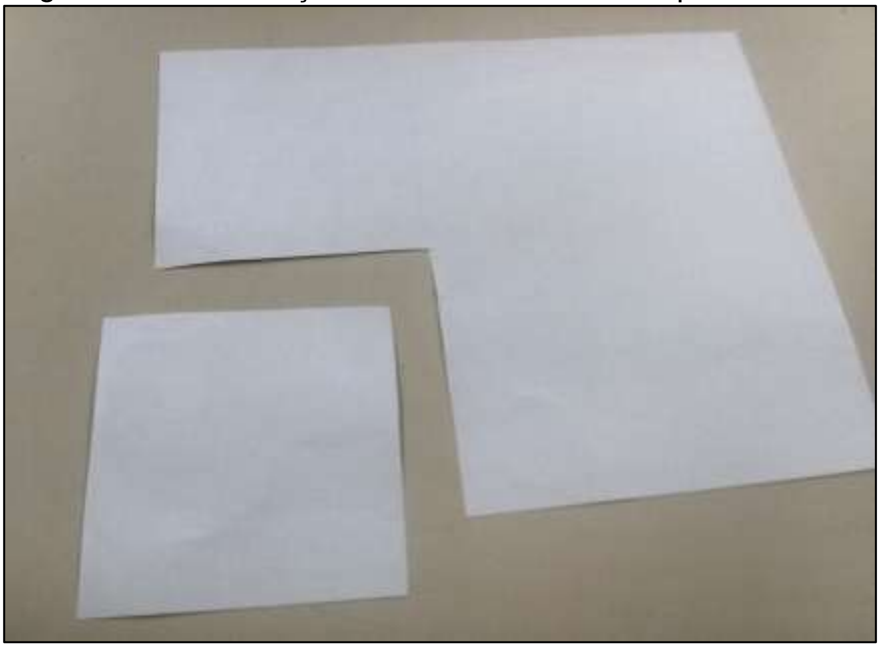
Lado do quadrado recortado	Comprimento da caixa	Altura da caixa	Largura da caixa	Volume

c) Se o lado do quadrado recortado fosse x. Quais seriam as medidas da caixa? E o volume?
d) Existem valores inteiros para x que não possibilitem a construção da caixa? Explicar a resposta.

Fonte: Adaptado de TELES, 2010.

Para a realização dessa atividade, alguns grupos tiveram que construir as diferentes caixas, encontrando o valor do comprimento, da altura, da largura, e calcular seu volume. Para descobrirem acerca de quais medidas de x não possibilitavam a construção das caixas, os grupos confeccionaram mais caixas a fim de comprovar suas respostas. Na Figura 55 está representado o início da construção de uma das caixas.

Figura 55 – Construção da caixa com lado do quadrado 8cm



Fonte: Da autora, 2016.

Alguns grupos evidenciaram, no início da atividade, que não haveria possibilidade de construção da caixa quando utilizassem como valor de x o valor de 8cm, pois não teriam largura suficiente para a caixa.

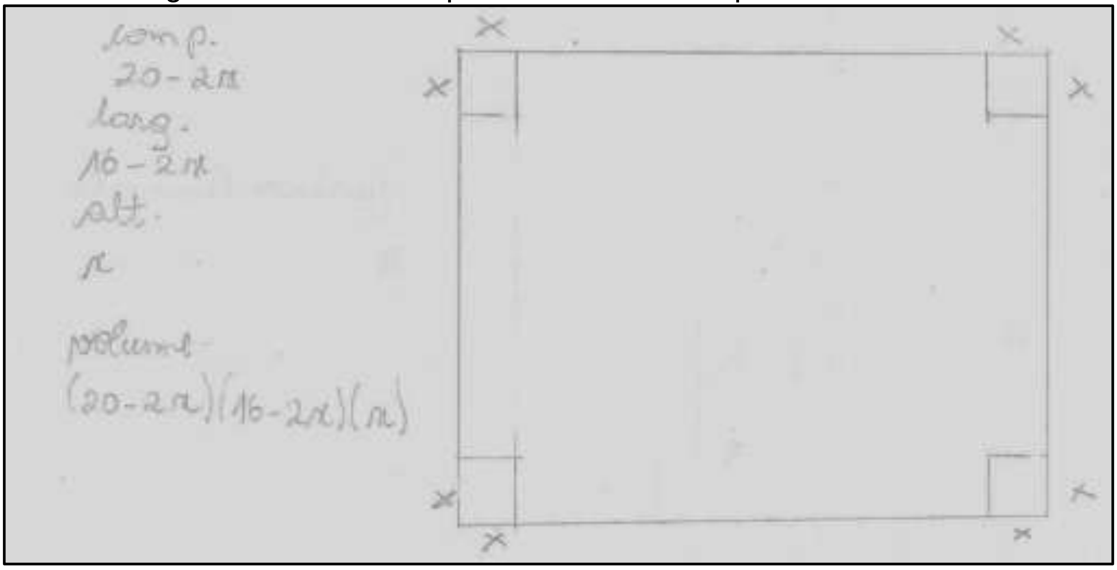
GA2: Existem valores para x que não possibilitam a construção da caixa, que é o número 8, ele não possibilita porque é exatamente a metade de 16.
GA4: 8 cm, é a metade. Aí não sobra uma frestinha para formar uma caixa. Dá com valores próximos a 8.

Um dos estudantes do 9° ano da escola A salientou:

A 11: não precisava ficar medindo para saber o comprimento.
Professora: Por quê?
A11: Se o lado for 3 é só fazer dezesseis menos 6 e vinte menos seis. A gente fez isso em todas as questões.

A fórmula encontrada por alguns grupos, considerando os lados dos quadrados a serem recortados x, pode ser visualizada na Figura 56.

Figura 56 – Fórmula quando os lados do quadrado valem x



Fonte: Da autora, 2016.

Para encontrar as fórmulas, alguns grupos desenharam o retângulo e representaram o lado do quadrado sendo x, visualizando quais seriam os valores dos lados. Uma das dificuldades evidenciada nesta atividade foi descobrir a fórmula para o volume da caixa, quando os lados dos quadrados a serem recortados valessem x. Os estudantes conseguiram representar os valores dos lados, como mostrado na Figura 56, mas tiveram dificuldades no momento de pensar uma fórmula matemática para representação do volume da caixa. Os grupos que conseguiram formular estratégias considerando o valor do lado do quadrado recortado sendo x, realizaram apresentação de suas respostas para os demais grupos que tiveram dificuldades na compreensão da atividade.

No Quadro 14, apresento os problemas que os estudantes deveriam resolver, descrevendo a estratégia usada.

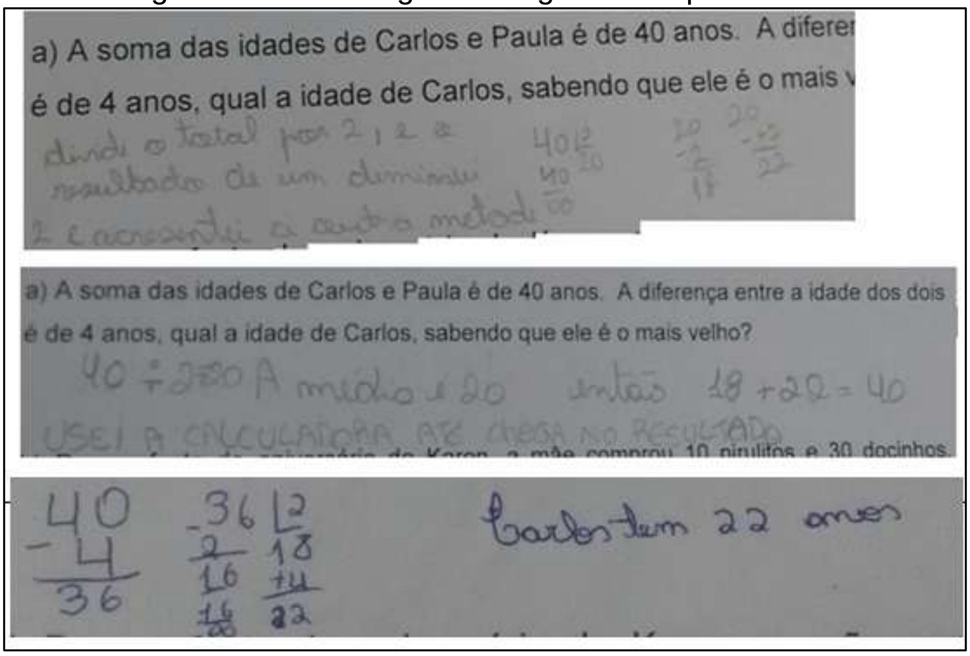
Quadro 14 – Problemas matemáticos

<u>Atividade 2:</u> Resolver os seguintes problemas: a) A soma das idades de Carlos e Paula é de 40 anos. A diferença entre a idade dos dois é de 4 anos. Qual a idade de Carlos, sabendo que ele é o mais velho? b) Para a festa de aniversário de Karen, a mãe comprou 10 pirulitos e 30 docinhos, gastando R$ 45,00. Como o número de convidados foi maior do que o esperado, a mãe de Karen comprou mais 30 pirulitos e 40 docinhos, gastando R$ 85,00. Quanto custou cada pirulito e cada docinho? c) João tem o dobro de figurinhas que Pedro tem, mais 3. Paulo tem a quantidade de figurinhas que João tem, mais a metade do quadrado das figurinhas de Pedro. Sabendo que Pedro tem 10 figurinhas, quantas figurinhas João e Paulo possuem?

Fonte: Da autora, 2016.

Para resolução do primeiro problema, os grupos salientaram que primeiro dividiram o número 40, obtendo como resultado 20. Como a diferença deveria ser 4, dividiram esse número, obtendo como resultado 2. Outros grupos também utilizaram a divisão do número 40 por dois. Como média, obtiveram 20. O grupo destacou que, a partir disso, foram utilizando a calculadora até chegar na diferença 4, obtendo como resultados 18 e 22. A Figura 57 apresenta as resoluções descritas.

Figura 57 – Estratégias emergentes no problema a

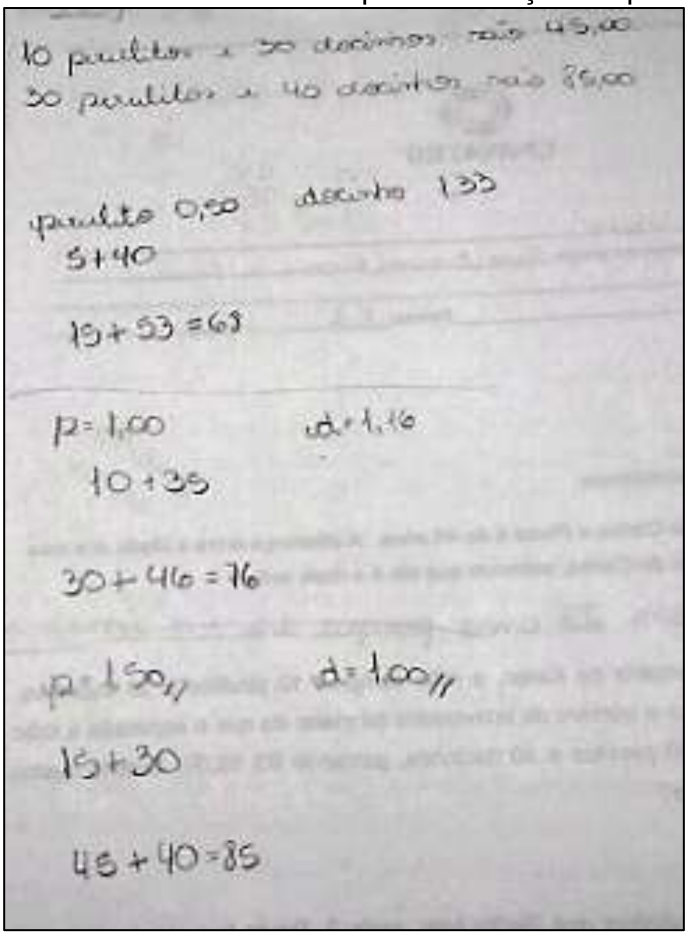


Fonte: Da autora, 2016.

Na primeira estratégia, o grupo de estudantes dividiu a soma das idades por dois, resultando em 20. Como a diferença das idades era 4, o grupo realizou os cálculos 20+2 e 20-2 para encontrar as idades resultantes. A segunda estratégia também foi dividir a soma das idades por 2, mas, para encontrar a idade de Carlos, o grupo partiu desse resultado e utilizou a calculadora e o método da tentativa. A terceira estratégia partiu da subtração da diferença das idades do 40, resultando em 36. Posteriormente, dividiram este resultado por dois, obtendo 18, e a esse somaram 4. Outro grupo, utilizando o método da tentativa, salientou que: *“Partimos do número 20, metade de 40, acrescentamos 4 na idade de Carlos, por que ele será o mais velho, deu 24, mas não fechou a diferença baixamos 2 anos da idade dele e acrescentamos na idade dela, então encontramos para Carlos 22 anos e para Paula 18”* (G2B).

O segundo problema foi solucionado pela maioria dos grupos por tentativa, como visualizado na Figura 58.

Figura 58 – Método da tentativa para resolução do problema b



Fonte: Grupo 2 da escola B, 2016.

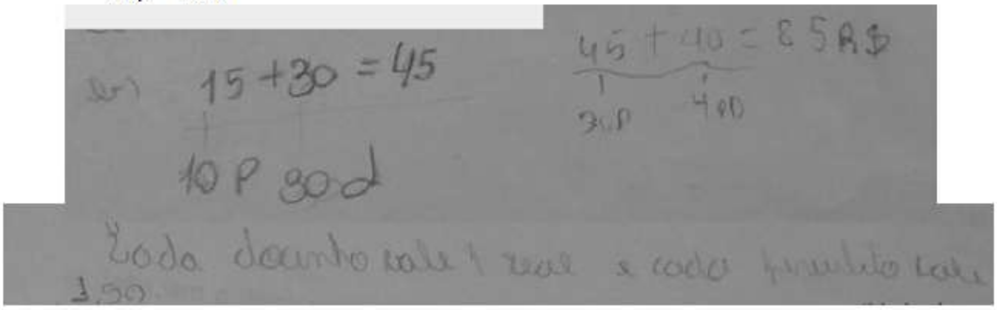
Grupos de alunos do 9° montaram um sistema e também resolveram por tentativa, como mostra a figura 59. Estes estudantes manifestaram já terem conhecimento do conteúdo de sistemas.

Figura 59 – Resolução do problema b por meio de um sistema

Grupos de estudantes resolveram este problema utilizando um sistema de equações, por tentativas
Assim evidenciando que cada docinho custava R$ 1,00 e cada pirulito R$ 1,50

O sistema apresentado por um dos grupos foi:
15 + 30 = 45
10p + 30d

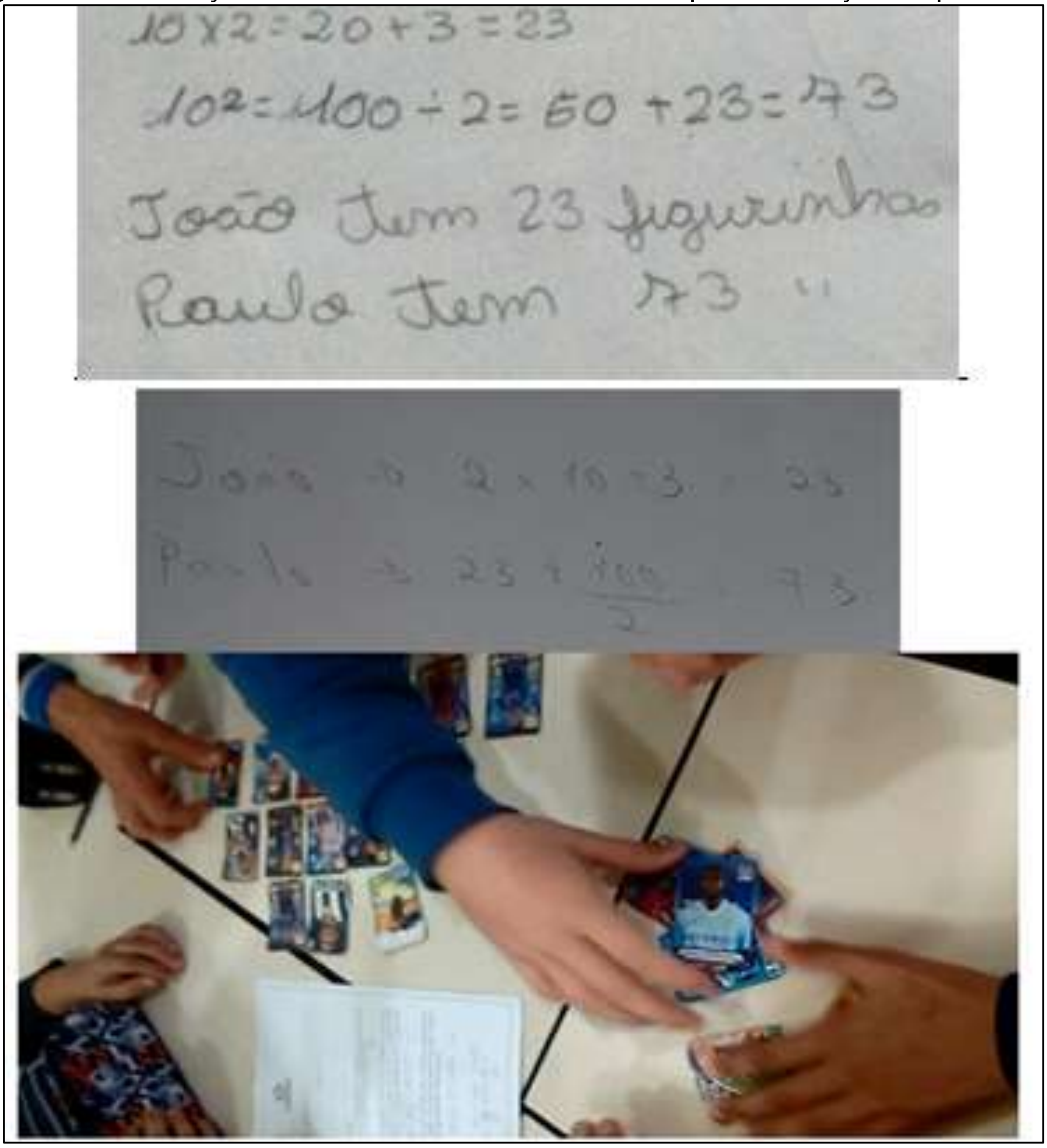
45 + 40 = 85
30p + 40d



Fonte: Da autora, 2016.

Alguns grupos resolveram o terceiro problema por meio de operações matemáticas, como mostrado na Figura 59. Um dos grupos do 9° ano da escola A resolveu este problema utilizando uma coleção de cartinhas que um aluno possuía (Figura 60).

Figura 60 – Utilização de cálculo e material alternativo para resolução do problema c



Fonte: Da autora 2016.

Foi possível perceber, nesse momento, que alguns estudantes têm mais facilidade na resolução de situações matemáticas quando utilizam materiais alternativos. Esse fato ficou confirmado quando, ao realizarem essa atividade, os alunos utilizaram "cartinhas", conseguindo solucionar o problema proposto. A interação dos grupos durante essas atividades foi evidente, pois todos auxiliavam o grupo na resolução das atividades propostas. Esse fato fica explícita na conversação sobre a resolução da atividade, destacada na Figura 60.

A14: O meu, eu tenho umas cartinhas na muchi!
A15: Vamos usar, para ver se da uma resposta?
A16: Profe da para usar essas cartinhas?
Professora: Claro, fica mais fácil.

Nesse contexto, ao findar esta análise, posso mensurar que as atividades efetivadas em grupo potencializaram o surgimento de diferentes estratégias. O trabalho cooperativo favoreceu discussões acerca dos resultados encontrados, em cada atividade realizada pelos alunos. Em efeito, no decorrer dos encontros, os estudantes interagiam mais e formulavam conjecturas ou estratégias coerentes acerca das questões abordadas. Posso inferir que as atividades de Investigação Matemática proporcionaram “aos alunos a construção de seu próprio conhecimento e a assimilação de novos conhecimentos por meio do trabalho em equipe” (TEODORO e BELINE, 2013, p. 14).

No Quadro 15, apresento as estratégias mais evidenciadas durante os encontros.

Quadro 15 – Estratégias emergentes das distintas concepções da álgebra

Concepção da álgebra	**Estratégias Utilizadas**
Aritmética generalizada	Para todas as atividades, os estudantes utilizaram como estratégia: ✓ Material concreto ✓ Desenhos ✓ Cálculos ✓ Fórmulas (em pouca quantidade)
Meio de resolver certos problemas	
Estudo de relações	
Estrutura	

Fonte: Da autora, 2017.

Considerando as diferentes estratégias emergentes durante as atividades em grupo, e utilizando a tendência de Investigação Matemática e as concepções de Usiskin (1995), no capítulo 5, desta dissertação, apresento as considerações sobre a prática efetivada.

5 CONSIDERAÇÕES SOBRE A PRÁTICA EFETIVADA

Neste capítulo apresento algumas conclusões sobre a prática pedagógica desenvolvida nas quatro turmas. Utilizo como base para esta discussão os objetivos específicos firmados para esta pesquisa, bem como o objetivo geral deste trabalho, que consistiu em *analisar as estratégias elaboradas por alunos do 7° e 9° anos ao realizarem atividades em grupo, utilizando a Investigação Matemática e envolvendo concepções algébricas.*

Inicialmente, destaco que o trabalho em sala de aula, utilizando a tendência de Investigação Matemática, motivou os estudantes a trabalharem com as atividades propostas. Como pesquisadora, percebi que as atividades de Investigação Matemática desenvolveram nos estudantes o espírito investigativo e, consequentemente, possibilitaram a aprendizagem de conteúdos de álgebra.

O primeiro objetivo específico deste trabalho, *proporcionar aos alunos de 7° e 9° anos, tarefas de investigação que contemplam as diferentes concepções de álgebra, foi contemplado.* Os estudantes resolveram atividades distintas que abrangeram as quatro concepções da álgebra de Usiskin (1995). Foram desenvolvidas dez atividades, as quais enfatizaram a metodologia de Investigação Matemática.

Posso inferir que os alunos apresentaram mais dificuldades nas atividades que envolveram a concepção da álgebra como Estrutura. Salientaram que essas dificuldades ocorriam pela dificuldade em trabalhar com “às letras que aparecem nas contas”. Em relação às atividades da primeira concepção, os alunos dos dois níveis conseguiram, por meio de diferentes estratégias, encontrar distintas generalizações.

Infere-se que devido a quantidade de turmas com o qual foram realizadas as tarefas, a quantidade de atividades poderia ter sido menor. Muitos resultados emergiram durante a realização das tarefas. Neste sentido, penso que se tivesse considerado um número menor de questões, a exploração das atividades poderia ter sido mais ampla, como uma análise mais detalhada dos resultados, bem como mais discussões em sala de aula.

Analisando o segundo objetivo específico, *fomentar o trabalho em grupo na resolução de atividades de Investigação Matemática,* verifiquei que a formação dos grupos de trabalho ocorreu pela afinidade dos alunos. Acredito que esse fato favoreceu o trabalho em grupo dos estudantes. Além disso, ao entregar as tarefas aos estudantes, distribuía apenas uma cópia por grupo, solicitando que deveriam me entregar a resolução das tarefas propostas. Assim, precisavam encontrar uma maneira de todos os integrantes do grupo lerem e discutirem juntos as atividades propostas, para, no final, chegarem a um consenso sobre a resposta.

Durante a realização da tarefa, ao perpassar pelos grupos, observei que todos os alunos expressavam sua opinião sobre as atividades. A discussão era intensa nos pequenos grupos. Para elaboração das estratégias, o trabalho cooperativo foi importante, pois foi notório um colega auxiliando o outro nos grupos de trabalho. Foi perceptível também que as atividades desenvolvidas proporcionaram momentos de autonomia, nos quais os componentes dos grupos elaboraram e pensaram diferentes conjecturas. Ao final de cada atividade os estudantes tiveram a oportunidade de apresentar aos demais grupos quais estratégias evidenciaram em cada questão. Esse fato favoreceu as discussões em sala de aula, pois solicitava que todos os integrantes explanassem para a turma alguma evidência realizada.

No início da realização das tarefas, os alunos apresentaram dificuldades em trabalhar em grupo, esse fato foi evidenciado, pois ao entregar as atividades para os grupos, cada estudante lia individualmente a questão. Assim, posso destacar que por diversas vezes ao entregar as atividades aos grupos, foi necessário salientar a importância de discutirem e lerem as questões em grupos e não individualmente. No decorrer dos encontros percebi que o trabalho cooperativo evoluiu, pois os alunos sempre formulavam suas conjecturas e estratégias conversando e interagindo com todos os integrantes do grupo. Também é pertinente salientar que o grupo só formulava as respostas para a questão quando todos os integrantes concordavam com a resolução.

Já o terceiro objetivo teve o intuito de *analisar as diferentes estratégias elaboradas pelos grupos de alunos ao resolverem as atividades investigativas.* Nesse sentido, evidenciei que os grupos utilizaram diferentes estratégias para resolução das atividades propostas. Para a mesma atividade, alguns alunos utilizaram material concreto, outros resolviam a mesma questão por tentativa e erro, outros formulavam suas estratégias utilizando fórmulas e cálculos. Portanto, as estratégias mais utilizadas pelos estudantes foram utilização de materiais concretos, desenho, cálculos e formulação de algumas fórmulas.

Ao final de cada atividade proposta, solicitava aos grupos que explanassem para a turma as estratégias evidenciadas durante a realização da tarefa. Assim, todos os colegas tiveram conhecimento das diferentes estratégias emergentes durante a realização das questões propostas. Os estudantes, mesmo sendo de níveis de escolaridade diferentes, conseguiram formular estratégias para as atividades propostas. A maioria dos conteúdos abordados não era de conhecimento dos alunos, mas, com as atividades oportunizadas, conseguiram aprender diferentes conteúdos.

Posso inferir que, na maioria das questões, o material manipulável auxiliou na formulação de estratégias e conjecturas. Os estudantes sentiram-se mais seguros quando manipulavam o material concreto, bem como quando representavam a situação apresentada por meio de desenhos.

Um cuidado que tive no decorrer das atividades envolvendo a Investigação Matemática foi “não dar a resposta pronta para o aluno”. Em uma Investigação, é importante que o professor instigue os alunos a pensarem e repensarem suas estratégias, questionando-os e não lhes apresentando uma resposta. O professor deve ser mediador durante a realização das atividades. Ademais, é pertinente salientar que as atividades sejam abertas, possibilitando aos alunos o uso de diversas estratégias e conjecturas; e que o professor seja questionador, oportunizando aos seus alunos momentos desafiadores.

Retomados os objetivos desta dissertação, posso inferir que as atividades de Investigação Matemática também proporcionaram aos estudantes momentos de autonomia, pois, durante as tarefas, o meu papel foi de mediadora, instigando os estudantes a pensarem e discutirem sobre as distintas estratégias e conjecturas. As mediações durante as atividades ocorreram por meio de questionamentos. Assim, quando solicitavam auxílio para a realização das tarefas, questionava-os acerca do que já haviam conjecturado, instigando-os a fazerem novas relações.

Posso salientar que, como pesquisadora vinculada ao programa do Observatório da Univates, me senti realizada profissional e pessoalmente ao realizar atividades diferenciadas para o ensino da matemática. Percebi que os estudantes gostam de ser desafiados e elogiados. Ao realizarem as atividades propostas, quando formulavam uma estratégia diferenciada, os elogiava. Isso fazia com que os alunos tentassem formular outras estratégias, mostrando-me posteriormente.

Destaco ainda que, em reuniões de professores das escolas parceiras do programa Observatório da Educação, expus as atividades que desenvolvi durante minha prática, bem como os resultados decorrentes destas. Durante essa apresentação, os docentes sentiram-se motivados em desenvolver algumas das atividades investigativas com os seus colegas, em encontros de formação na escola em que atuavam. Este fato ocorreu porque uma das ações do referido Programa foi problematizar atividades investigativas e o ensino de álgebra com os professores do Ensino Fundamental.

Neste cenário, percebi que as questões efetivadas na minha prática pedagógica auxiliaram também outros professores a refletirem sobre o uso de atividades investigativas e o ensino de conteúdos algébricos, conteúdo este tão temido por muitos alunos. As atividades investigativas, segundo os docentes participantes das formações nas escolas, possibilitam dar voz aos estudantes, permitindo que redijam conjecturas e expressem suas reflexões acerca das tarefas.

Saliento ainda que, nas aulas de Matemática, Física e Química (disciplinas que ministro atualmente), percebo que a tendência de Investigação oportunizou-me uma mudança de postura como educadora. Esse fato fica explícito, pois durante as aulas, solicito aos estudantes que apresentem suas estratégias de resolução para as atividades propostas em aula, bem como procuro não dar as respostas, questionando os alunos constantemente sobre os temas em estudo. Durante minhas aulas nas três disciplinas, procuro oportunizar aos estudantes distintas metodologias, pois percebo que os alunos têm mais interesse em aulas diversificadas.

Acredito que houve uma mudança significativa no meu trabalho como profissional da educação, pois, a partir desta vivência, planejo aulas diferenciadas e que oportunizam aos estudantes dialogarem e expressarem mais suas ideias. Assim, pretendo continuar desenvolvendo práticas pedagógicas distintas durante minhas aulas.

REFERÊNCIAS

ANDRETTA, Patricia.; LIBLIK, Ana M. P. **Desenho: da imagem mental à representação gráfica - uma proposta para o ensino da Matemática.** Anais Ebrapem. 2011 - Volume 1, Número 1. Disponível em: <http://editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/ced9dca353849a9db5a8d6acbcea207f.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2017.
Artmed, 2001. p. 29-68.

AVI, Emanueli B. **Aprendizagens matemáticas desenvolvidas em ambiente de investigação estatística.** 2012. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências – área Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2012. Disponível em: <http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/1838/Emanueli%20Bandeira%20Avi.pdf?sequence=1>. Acesso em: 19 jun. 2015

BACCARIN, Sandra A. de O. **Investigação matemática: uma análise da sua contribuição na construção de conceitos algébricos.** 2008. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília. Disponível em: <http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/6188/1/Dissert_Sandra%20Aparecida.pdf>. Acesso em: 30 set. 2015.

BALKE, Marlova E. **Investigação Matemática: Tratamento da Informação no Ensino Fundamental.** 2011. 132f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Educação, Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, RS. Disponível em: **<**https://secure.upf.br/pdf/2011MarlovaElizabeteBalke.pdf>. Acesso em:14 ago. 2015.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2012.

BARROS, Aidil J. da S.; LEHFELD, Neide A. de S. **Fundamentos de metodologia científica**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BNCC – **Base Nacional Comum Curricular.** <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2017.

BONALS, Joan; HICKEL, Neusa K. **O trabalho em pequenos grupos na sala de aula**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

BRUM, Maria G. N. **Atividades investigativas para o ensino de matemática para alunos de 5ª série do Ensino Fundamental.** 2012. 127f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática) – Instituição de Ensino: Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS. Disponível em: <http://sites.unifra.br/Portals/13/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2012/dissertacao%20-%20maria%20gorete.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2015.

BRUNHEIRA, Lina.; FONSECA, Hélia. **Investigar na aula de Matemática.** Educação e Matemática, Lisboa, n. 35, p. 16-18, 1995. CAED-UFMG, 2013. 69f. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Algebra_e_Funcoes_na_Educacao_Basica.pdf>. Acesso em 14 fev. 2017.

CARMO, Marcia A. D. do. **Olhar docente sobre o trabalho em grupo e a pedagogia social: uma contribuição.** 2011. 84f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro Universitário Salesiano de São Paulo, São Paulo. Disponível em: <http://unisal.br/wpcontent/uploads/2013/04/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Marcia-Amaral-Domingos-do-Carmo.pdf>. Acesso em: 30 set. 2015.

COSTA, Natalia de O. **Trabalho em Grupo: Concepções de um professor de biologia e alunos do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo.** 2010. 67 f. Monografia (Graduação) – Curso de Ciências Biológicas, Centro de Ciências Biológicas e da Saúde, da Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo. Disponível em: <http://www.mackenzie.br/fileadmin/Graduacao/CCBS/Cursos/Ciencias_Biologicas/1o_2012/Biblioteca_TCC_Lic/2010/2o_2010/NATALIA_COSTA.pdf>. Acesso em: 30 ago. 2015.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática – o elo entre as tradições e a modernidade**. 5ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1).

DANTE, Luiz R. **Matemática.** Volume Único. 1ª edição, São Paulo: Ática, 2005.

DEAQUINO, Carlos T. E. **Como aprender**: andragogia e as habilidades de aprendizagem. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

FIORENTINI, Dário.; FERNANDES, Fernando L. P.; CRISTOVÃO, Eliane M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.** Faculdade de Educação – Unicamp - Brasil 2004.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática**. 2. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2007

FIORINTINI, Dário.; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

GIBBS, Graham. **Análise de dados qualitativos.** Porto Alegre: Artmed, 2009.

GIL, Antonio C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007

GIL, Katia H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra.** 2008. 118f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade De Física, PUCRS. Porto Alegre, RS. Disponível em: <http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2962/1/000401324-Texto%2BCompleto-0.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2015.

GOMES, Maria L. M. **Álgebra e Funções na Educação Básica.** Belo Horizonte:

GÓMEZ-GRANELL, Carmem. Rumo à epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. In: ARNAY, José; RODRIGO; Maria J. (Ed.). **Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores: a construção do conhecimento escolar.** São Paulo: Ática, 1998. v. 2, p. 15-

GRANDO, Regina C., NACARATO, Adair. M.; GONÇALVES, Luci M. G. **Compartilhando saberes em Geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos**. Caderno Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, 39-56, jan./abr. 2008. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a04.pdf> . Acesso em: 04 de nov. 2016.

KNIJNIK, Gelsa.; WANDERER, Fernanda.; GIONGO, Ieda M.; DUARTE, Cláudia G. **Etnomatemática em movimento.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

LAMONATO, Maiza.; PASSOS, Carmem L. B. **Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática**. Zetetiké, FE/Unicamp – v. 19, n. 36 – jul/dez 2011.

MENDES, Iran A. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MORAIS, Roque. **Análise de conteúdo.** Revista Educação, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MOREIRA, Marco. A. **Metodologias de pesquisa em ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

NETO, Thomaz, M.O.; COTA, Abreu S.S. **Explorando Conhecimentos Matemáticos por Meio de Atividades de Ensino com o Material Dourado.** In Anais do SIPEMAT. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 2006. Disponível em:

<http://www.lematec.net.br/CDS/SIPEMAT06/artigos/thomaznetocota.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2017.

PEREIRA, Adelmar B. **Investigação matemática: possibilidade para ensino de trigonometria.** 2015. 150f. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências exatas) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, RS.

PONTE, João P. da.; BRANCO, Neusa.; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico.** Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral-de Inovação e de Desenvolvimento Curricular - DGIDC, 2009. Disponível em: < http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf> Acesso em: 30 set. 2015.

PONTE, João. P. da.; BROCARDO, Joana.; OLIVEIRA, Helia. **Investigações matemática na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

QUARTIERI, Marli T.; GIONGO, Ieda M.; REHFELDT, Márcia J. H. **Problematizando a Matemática nas Séries Finais do Ensino Fundamental** - Módulo II. 2011. (Curso de curta duração ministrado/Extensão).

RAMOS, Mageri R. **Uma Investigação Sobre a Produção de Tarefas Algébricas para o 6º ano do Ensino Fundamental.** 2011. 101f. Dissertação de Mestrado - Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Juíz de Fora, MG. Disponível em: <http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2012/03/Dissert_Mageri.pdf>. Acesso em 14: fev 2017.

REGINALDO, Bruna K S. **Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática.** 2012. 185 f. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais - FAE/UFMG, Belo Horizonte. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/BUOS-8ZLPQB/dissertacaofinal_bruna.pdf?sequence=1>**.** Acesso em: 14 ago. 2015

REGINALDO, Bruna K. S. **Reflexões Teóricas sobre o Trabalho com Investigação na Sala de Aula de Matemática.** Anais Ebrapem (2011) - Volume 1, Número 1. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/0c212dac247070f5735886d89153ea77.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2017.

RIBEIRO, Alessandro J. **A Álgebra que se aprende e a Álgebra que se ensina: encontros e desencontros na visão dos professores.** XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

RUDIO, Franz V. **Introdução ao projeto de pesquisa científica.** 36. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2009.

SANTOS, Maria J. B. de S. **O ensino e aprendizagem das frações utilizando materiais concreto.** 2014. 47f. Monografia (Licenciatura plena em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2014. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/4290/1/PDF%20-

%20Maria%20Jos%C3%A9%20Batista%20de%20Souza%20Santos.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2017.

SARAIVA, Lucilene O. **Atividades investigativas para o ensino e aprendizagem dos conceitos e propriedades de sucessões numéricas.** 2012. 93f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria – RS, 2012. Disponível em: <http://sites.unifra.br/Portals/13/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2012/disserta%C3%A7%C3%A3o_lucilene.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2017.

SCHMIDT, Isolde L. **A investigação da Evolução de concepções e práticas de ensino-elaboração e análise de propostas inovadoras no espaço do laboratório de ensino de matemática.** Pró-reitoria de pesquisa e extensão – PROPEX. Centro Universitário UNIVATES, 2000.

SCHMIT, Fernanda E. **Abordando geometria por meio da investigação matemática: um comparativo entre o 5º e 9º anos do ensino fundamental.** 2015. 106f. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências exatas) – Centro Universitário UNIVATES. Lajeado, RS. Disponível em: <https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/831/1/2015FernandaEloisaSchmitt.pdf>. Acesso em 12 fev. 2017.

SCHMITT, Fernanda E.; QUARTIERI, Marli T.; Giongo, Ieda M. **Abordando Geometria por meio da investigação matemática.** Centro Universitário Univates programa de pós-graduação em ensino de ciências exatas – mestrado. Disponível em: < https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/2015/fernanda_eloisa_schmitt.pdf>. Acesso em 12 fev. 2017.

SILVA, Maísa G. da.; IBRAHIM, Maísa S.A.; RESENDE, Marilene R.; **Concepções de álgebra das questões do sistema nacional de avaliação da educação básica – saeb**. Revista Encontro de Pesquisa em Educação. Uberaba, v. 1, n.1, p. 118-131, 2013.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo e Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008.

SMOLE, Kátia C. S. **Textos em matemática: por que não?** In: Ler, escrever e e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 29-68.

TELES, Rosinalda A. de M. **Um estudo sobre a influência do campo algébrico na resolução de situações que envolvem fórmulas de área**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.1, p.129-142, 2010.

TEODORO, Flavia P.; BELINE, Willian. **Investigação matemática em sala de aula na educaçãobásica: um estudo com alunos do 3º ano do ensino médio.** VIII Encontro de Produção Científica e Tecnológica – EPCT, 2013.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (org). **As ideias da álgebra**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

YIN**,** Robert K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

APÊNDICES

Apêndice A: Modelo de Declaração de Anuência da escola "A e B"

DECLARAÇÃO

Declaro que autorizo a mestranda do Centro Universitário Univates de Lajeado, Ludmila Maccali a realizar sua investigação junto aos alunos de 7º e 9° anos da Escola Estadual A e B, RS. Esta prevê práticas pedagógicas com os alunos mencionados, durante o primeiro semestre de 2016, na escola, em horários a serem concordados com os professores titulares das referidas turmas, de modo a não interferir nas atividades de rotina da Instituição. A Escola e os alunos não se responsabilizarão por despesas decorrentes da pesquisa.

Cidade, dezembro de 2015.

____

Diretora

Carimbo

Apêndice B: Modelo de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Pelo presente Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, declaro que autorizo a participação de meu/minha filho/a na pesquisa denominada Atividades investigativas para o ensino da álgebra para alunos de 7° ano e 9° ano do ensino fundamental Escola Estadual A e B, pois fui informado/a, de forma clara e detalhada, livre de qualquer constrangimento e coerção, dos objetivos, da justificativa e dos procedimentos da mesma.

Fui especialmente informado:

a) Da garantia de receber, a qualquer momento, resposta a toda pergunta ou esclarecimento de qualquer dúvida acerca da pesquisa e de seus procedimentos;
b) Da liberdade de retirar meu consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo, sem que isso traga qualquer prejuízo ao meu/minha filho/filha;
c) Da garantia de que meu/minha filho/a não será identificado/a quando da divulgação dos resultados e que as informações obtidas serão utilizadas apenas para fins científicos vinculados à pesquisa;
d) Os encontros serão gravados e fotografados, mas nenhum áudio ou imagem será divulgado, somente transcrito, mas sem identificação dos alunos;
e) Do compromisso do pesquisador de proporcionar-me informações atualizadas obtidas durante o estudo, ainda que isto possa afetar a participação de meu/minha filho/a;
f) De que esta investigação está sendo desenvolvida como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, estando à pesquisadora inserida no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Univates, RS.
f) Da inexistência de custos.

A pesquisadora responsável pela pesquisa é a professora Ludmila Maccali, orientada pela professora Marli Teresinha Quartieri e coorientada pela professora Ieda Maria Giongo do Centro Universitário Univates de Lajeado, RS, que podem ser contatadas pelos e-mails ou e ainda pelo telefone (51) 3714-7000 ramal 5517.

____
Local e data

____
Nome e assinatura do/a responsável

____
Nome e assinatura da pesquisadora responsável