

# Do Conceito Matemático à Materialidade

---

PRÁTICAS INVESTIGATIVAS  
EM CURSOS DE ENGENHARIA

---

Márcia Jussara Hepp Rehfeldt  
Organizadora

Apoio:



**FAPERGS**

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul



Márcia Jussara Hepp Rehfeldt  
(Organizadora)

# **Do conceito matemático à materialidade: práticas investigativas em cursos de engenharia**

1ª edição



EDITORA  
**UNIVATES**

Lajeado/RS, 2026



**Universidade do Vale do Taquari - Univates**

**Reitora:** Profa. Ma. Evania Schneider

**Vice-Reitora:** Profa. Dra. Cíntia Agostini

**Pró-Reitor de Ensino e Extensão:** Prof. Dr. Tiago Weizenmann

**Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação:** Prof. Dr. Luis Fernando Saraiva Macedo Timmers



EDITORA  
**UNIVATES**

**Editora Univates**

**Coordenação:** Wagner Zarpellon

**Editoração:** Marlon Alceu Cristófoli

Avelino Talini, 171 – Bairro Universitário – Lajeado – RS, Brasil

Fone: (51) 3714-7024 / Fone: (51) 3714-7000, R.: 5984

editora@univates.br / <http://www.univates.br/editora>

D637

Do conceito matemático à materialidade: práticas investigativas em cursos de engenharia [recurso eletrônico] / Márcia Jussara Hepp Rehfeldt (org.) – Lajeado : Editora Univates, 2026.

Disponível em: [www.univates.br/editora-univates/publicacao/480](http://www.univates.br/editora-univates/publicacao/480)  
ISBN 978-85-8167-370-7

1. Matemática. 2. Ciências exatas. 3. Ensino de Engenharia.  
4. Práticas docentes. 5. Rehfeldt, Márcia Jussara Hepp. I. Título.

CDU: 51:62

Catálogo na publicação (CIP) – Biblioteca Univates  
Bibliotecária Gigliola Casagrande – CRB 10/2798



**As opiniões e os conceitos emitidos, bem como a exatidão, adequação e procedência das citações e referências, são de exclusiva responsabilidade dos autores e não refletem necessariamente a visão da Editora Univates e da Univates.**

## **Pareceristas**

Bárbara Bianchini

Gabriel Loureiro de Lima

Italo Gabriel Neide

Joseane Fiegenbaum

Joselito da Silva Bispo

Marinez Cargin Stielor

## Prefácio

Gabriel Loureiro de Lima<sup>1</sup>

Em setembro de 2025, ao final de uma das atividades que integraram a programação do 53º Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE), recebi e aceitei – com muita alegria e gratidão – um convite muito especial feito pela professora e pesquisadora Márcia Jussara Hepp Rehfeldt, parceira querida e constante nas reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de Ciências Básicas e Matemática na formação do futuro engenheiro, realizadas no Grupo de Trabalho Ciências Básicas e Matemática na Engenharia, vinculado à Associação Brasileira de Educação em Engenharia (ABENGE) e que tenho o prazer de ser um dos coordenadores desde sua criação em 2017: prefaciá-la, fruto da pesquisa Potencialidades e desafios na exploração da metodologia Estudos de Classes na prática docente de Ciências Exatas em cursos de Engenharia, desenvolvida sob a coordenação de Rehfeldt com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS).

Logo ao aceitar o convite, antes mesmo de ter acesso à obra para que pudesse lê-la, fui tomado por pensamentos a respeito de quanto o mundo – e, conseqüentemente, a Educação – mudaram desde que a Engenharia se consolidou como uma área de conhecimento e de atuação profissional e foram criadas as primeiras instituições voltadas à formação de engenheiros. Se, para melhor situar minhas reflexões, me restringir somente ao Brasil, as primeiras escolas de Engenharia, a Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho, no Rio de Janeiro, e a Escola de Minas, em Ouro Preto - MG, foram fundadas, respectivamente, em 1792 e 1876. Foram tantas as transformações sociais, econômicas, educacionais e tecnológicas vivenciadas pelo mundo – e, portanto, pelo País – nos últimos 234 anos que se torna praticamente impossível explicitá-las neste prefácio.

São mudanças que vão desde a universalização do acesso ao Ensino Superior até o desenvolvimento cada dia mais veloz de ferramentas de Inteligência Artificial. Enquanto na época da criação das primeiras instituições voltadas à formação de engenheiros as únicas fontes de acesso aos saberes eram as obras presentes nas bibliotecas e as aulas em formato de palestras ministradas por professores especialistas que “transmitiam” o conhecimento aos futuros profissionais, atualmente, além de saber-se que conhecimento não se transmite de um docente para um estudante, mas é construído pelo próprio discente, é possível – mesmo sem estar em uma instituição de ensino – assistir pela Internet, inclusive em tempo real, a palestras de especialistas de qualquer lugar do mundo.

As informações que poderão servir de matéria-prima para a construção de conhecimentos pelo futuro engenheiro estão, portanto, plenamente disponíveis a ele, 24 horas por dia, sete dias por semana, em diferentes fontes e em distintos formatos. As respostas às suas dúvidas e aos seus questionamentos, se antes precisavam ser obtidas junto

---

<sup>1</sup> Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e do Ciclo Básico dos cursos de Engenharia do Instituto Mauá de Tecnologia. Coordenador do Grupo de Trabalho Ciências Básicas e Matemática na Engenharia (GT-CbME) da Associação Brasileira de Educação em Engenharia (ABENGE) e do Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior (GT04) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

aos professores ou por meio de consultas às bibliotecas das instituições, hoje podem ser acessadas por um simples clique com o auxílio das cada vez mais numerosas ferramentas de Inteligência Artificial Generativa.

Mas e os cursos de graduação em Engenharia? Nesses 234 anos, desde que foram introduzidos no País, eles têm se aperfeiçoado em consonância com todas essas transformações? Têm de fato e efetivamente considerado todas essas mudanças na estruturação de seus currículos?

Do ponto de vista legal, as atuais Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) do Curso de Graduação em Engenharia, instituídas pela Resolução nº 2, de 24 de abril de 2019, estabelecem a necessidade de formar egressos que tenham visão holística e humanista; sejam críticos, reflexivos, criativos, cooperativos e éticos; que desenvolvam sólida formação técnica; que estejam aptos para pesquisar, desenvolver, adaptar e utilizar novas tecnologias com atuação inovadora e empreendedora; que sejam capazes de reconhecer as necessidades dos usuários, formular, analisar e resolver de forma criativa os problemas de Engenharia; que adotem perspectivas multidisciplinares e transdisciplinares em sua prática; e que considerem os aspectos globais, políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e de segurança e saúde em seu trabalho.

Evidentemente, a formação do futuro engenheiro só será exitosa na constituição desse perfil de egresso se estiver alinhada às transformações sociais, econômicas, educacionais e tecnológicas anteriormente mencionadas. Mas será que essas, além de serem mencionadas nos projetos pedagógicos dos cursos para atender ao que é estabelecido pelas DCN, são efetivamente levadas em consideração nas práticas presentes nas salas de aula da Engenharia? Mais ainda, será que são consideradas nas unidades curriculares relacionadas às Ciências Básicas e à Matemática, normalmente presentes nos primeiros semestres dos cursos de Engenharia?

Tenho realizado investigações na área da Educação em Engenharia desde 2015 e, tanto pesquisas por mim realizadas quanto outras às quais tive acesso durante meus estudos, muitas vezes sinalizam que alguns professores das unidades curriculares de Ciências Básicas e de Matemática ainda são resistentes a mudanças na forma de conduzir suas aulas.

Essa resistência, na maioria das vezes, não é fruto de uma postura reativa dos docentes em relação às transformações sociais, econômicas, educacionais e tecnológicas pelas quais o País – e, claro, o mundo – passaram desde que os cursos superiores de formação de engenheiros foram implementados. Ela é decorrente, muitas vezes, da insegurança de substituir a atuação em uma zona de conforto por outras que exigem mudanças de paradigmas e, em muitos momentos, inserções em áreas de conhecimento diferentes daquelas de suas formações originais no intuito de aproximar a abordagem das unidades curriculares pelas quais esses docentes são responsáveis de situações específicas da Engenharia mais próximas daquelas com que o egresso irá se deparar em suas futuras práticas profissionais.

Muitas vezes, por mais que esses docentes tenham consciência da necessidade de implementar mudanças em suas aulas e estejam dispostos a realizá-las, faltam-lhes referências de como isso pode ser feito.

Revela-se então a importância indiscutível da publicação de obras, como essa que por meio deste prefácio tenho a honra de apresentar, que reúnam alguns exemplos de

iniciativas exitosas de transformações na abordagem das Ciências Básicas e da Matemática em cursos de Engenharia.

Particularmente a primeira parte do livro, composta pelos capítulos 1, 2 e 3, cumpre esse papel, uma vez que, nos mencionados capítulos são exemplificadas, em detalhes, práticas docentes em certo sentido inovadoras implementadas junto a estudantes de Engenharia.

No capítulo 1, o leitor é convidado a conhecer o percurso teórico-metodológico percorrido por um grupo de professoras-pesquisadoras no processo de desenvolvimento de uma prática pedagógica envolvendo tarefas exploratórias e investigativas objetivando revisitar, junto a estudantes de Engenharia da Universidade do Vale do Taquari, o conceito de logaritmos a partir de suas propriedades de modo a permitir sua emergência conforme ocorrido historicamente: pela necessidade de realizar cálculos com maior eficiência e de simplificá-los operacionalmente.

A intervenção concebida foi implementada na disciplina intitulada Modelagem de Situações Dinâmicas, unidade curricular obrigatória no primeiro semestre de todos os cursos de Engenharia da mencionada instituição e pré-requisito para as disciplinas de Cálculo e de Física que a sucedem.

Ao longo do capítulo, evidencia-se ao leitor a importância de ressignificar o papel do professor das unidades curriculares de Ciências Básicas e de Matemática nas Engenharias, de modo a deixar-se de lado a concepção do docente como único detentor do saber e filiar-se à ideia de professor como mediador e incentivador do pensamento reflexivo por parte dos estudantes. Seu papel, nessa nova visão, deixa de ser o de “transmitir conhecimentos” e passa a ser o de selecionar, de modo adequado, tarefas desafiadoras para serem realizadas pelo estudante sob sua mediação intencional e cuidadosamente planejada com a consciência de que, nessa orientação didático-pedagógica distinta da tradicional, tanto ele quanto o estudante, terão, em alguma medida, que sair de suas zonas de conforto e lidar com algum tipo de imprevisibilidade.

As reflexões presentes no capítulo salientam também a importância de os professores universitários responsáveis por determinada unidade curricular estabelecerem diálogos com seus colegas de outras áreas para investigar os processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos essenciais para a formação dos futuros engenheiros e para, de forma colaborativa, planejar aulas conjuntamente e, após a realização da intervenção, analisá-la também coletivamente.

No capítulo 2, apresenta-se uma Sequência de Ensino Investigativa (SEI) implementada junto a estudantes de Engenharia Elétrica da Universidade do Vale do Taquari no componente curricular Modelagem de Sistemas Eletromagnéticos. A SEI, abordando a indução mútua e suas aplicações, foi elaborada a partir de um problema apresentado pela própria autora do capítulo, que é professora-pesquisadora na área de Física.

Ao realizar a leitura do capítulo, os leitores perceberão o quanto a abordagem sob uma ótica investigativa de conteúdos clássicos da Teoria Eletromagnética, geralmente considerados difíceis pelos estudantes, oportuniza a eles o desenvolvimento da autonomia, do confronto e da comunicação de ideias, da liberdade intelectual e de visões mais críticas sobre as ciências, atitudes científicas fundamentais para que os futuros engenheiros exerçam suas profissões em consonância com o que se espera de um egresso de um curso de Engenharia na contemporaneidade.

Ao longo das considerações apresentadas no capítulo 2, evidencia-se também a importância da escolha de bons problemas para desencadear processos investigativos. É necessário selecionar situações que gerem nos estudantes algum nível de desconforto, inquietação e dúvida, mas que, ao mesmo tempo em que não sejam tão simples, não se mostrem tão complexas a ponto de desestimular os discentes a se engajarem em suas resoluções.

No capítulo 3, o leitor é apresentado a mais uma prática desenvolvida na disciplina Modelagem de Situações Dinâmicas, na qual os professores-pesquisadores desafiaram os estudantes a fotografar uma edificação em uma rua inclinada, próxima ao local em que residem, e, por meio de alguma estratégia, calcular o ângulo e o percentual de inclinação dessa rua.

A leitura desse capítulo reforça, mais uma vez, a importância do papel do professor como mediador do processo de aprendizagem dos estudantes, questionando-os, estimulando reflexões e solicitando a eles explicações a respeito de suas estratégias e conjecturas, de modo a favorecer que assumam protagonismo na resolução das tarefas, o qual é traduzido por meio de uma postura ativa e autônoma dos discentes. Evidencia-se a necessidade de o docente constituir com os estudantes um espaço efetivamente formativo, no qual a produção de conhecimentos possa ser potencializada.

Na segunda parte da obra, constituída pelos capítulos 4, 5 e 6, o foco está nas potencialidades – ainda que essas sejam tratadas de maneira mais implícita ao longo dos capítulos – da modelagem de objetos em 3D e suas impressões.

No capítulo 4, o leitor tem acesso à descrição de alguns recursos que podem ser empregados para a criação de objetos em 3D, bem como a algumas das potencialidades do software Blender e da impressora 3D Creality CR-30 para os processos de ensino e de aprendizagem de tópicos relacionados às Ciências Básicas e à Matemática em cursos de Engenharia, de modo que, após a elaboração e a compreensão geométrica dos objetos no ambiente digital pelos estudantes, possam ser realizados refinamentos estéticos e estruturais das superfícies, seguidos de suas materializações por meio do recurso de impressão 3D.

No capítulo 5, no qual o leitor é apresentado às descrições de duas atividades que ilustram a roteirização do processo de construção e impressão em 3D de dois objetos – a saber, um cálice a partir de um modelo logarítmico e um vaso a partir de um modelo linear – são tecidas considerações acerca das potencialidades dos softwares GeoGebra para a visualização de objetos em três dimensões, do Blender para o refinamento dos modelos, suavizar curvas, corrigir proporções, definir espessuras e aplicar acabamentos visuais, e da impressora 3D Creality CR-30, responsável por transformar a representação digital em um objeto físico.

Além disso, ao longo do capítulo, é ressaltado o potencial das propostas apresentadas para professores desencadear discussões e problematizações junto a estudantes de Engenharia em unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral.

Encerrando a obra, o capítulo 6 aborda a construção e a impressão 3D de outros três objetos: uma xícara, uma cuia e uma garrafa plástica de 500 mL que, quando comparados àqueles cujo processo de construção e de impressão foi relatado no capítulo anterior, requerem o emprego de outros modelos matemáticos, de técnicas mais sofisticadas, como regressões polinomiais para suavizar perfis e do Cálculo Integral para estimar a medida do volume da garrafa plástica, além de etapas adicionais de refinamento.

Por meio das discussões apresentadas ao longo do capítulo em questão, exemplificam-se ao leitor algumas estratégias para a exploração de como transitar de dados bidimensionais para uma representação tridimensional realista e de como empregar o software GeoGebra, em sua janela 3D, para realizar mapeamento por listas de pontos e então aplicar regressão polinomial por trechos para salientar como a combinação de diferentes funções matemáticas se adapta a contornos de curvatura complexa. Ressalta-se ainda a importância do Cálculo Integral para a determinação da medida do volume de sólidos.

Convido-os então, prezados leitores, a apreciarem a leitura desta obra e, inspirados pelas experiências com as quais irão se deparar ao longo dos capítulos que a compõem, se arriscarem a trilhar caminhos diferentes dos tradicionais em suas aulas de Ciências Básicas e de Matemática nos cursos de Engenharia. Acreditem! O esforço valerá muito a pena!

Boa leitura!

São Paulo, abril de 2026.

## Apresentação

Este *e-book* está vinculado aos resultados da pesquisa intitulada *Potencialidades e desafios na exploração da metodologia Estudos de Classes na prática docente de Ciências Exatas em cursos de Engenharia*, cujo objetivo geral foi examinar as potencialidades e os desafios da metodologia Estudos de Classes para a prática docente na área de Ciências Exatas, no Ensino de Engenharia. Para alcançar esse objetivo geral, foram elencados cinco objetivos específicos, quais sejam: a) estabelecer processos de planejamento e de docência colaborativa por meio da metodologia Estudos de Classes; b) elaborar, desenvolver, avaliar e reelaborar tarefas investigativas ou sequências de ensino investigativas para o Ensino de Ciências Exatas no contexto de cursos de Engenharia; c) promover processos de diálogo e interação entre docentes de cursos de Engenharia; d) produzir uma coletânea de tarefas investigativas ou sequências de ensino investigativas que se configurem como movimentos de ruptura e inovação disruptiva nos processos de ensino na área de Ciências Exatas para cursos de Engenharia; e) divulgar os resultados da pesquisa por meio de diferentes trabalhos científicos.

O projeto teve o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Rio Grande do Sul, Edital Fapergs 07/2021 – Pesquisador Gaúcho, e contou com o apoio da Universidade do Vale do Taquari - Univates, em especial por meio da disponibilização de horas aos professores vinculados à pesquisa, bem como da liberação para que algumas práticas fossem desenvolvidas em sala de aula. O projeto contou com a participação efetiva de quatro professoras e pesquisadoras, sendo três professoras vinculadas à Matemática e uma à Física, que atuam no Ensino Superior, nos cursos de Engenharia, lecionando disciplinas como Modelagem de Situações Dinâmicas, Ferramentas de Matemática e Aplicações e Modelagens de Sistemas Eletromagnéticos.

O presente *e-book* foi dividido em duas partes: Parte I – composta pelos capítulos 1, 2 e 3 – em que constam práticas desenvolvidas pelas quatro professoras e pesquisadoras junto às suas turmas de estudantes; e Parte II – que integra os capítulos 4, 5 e 6 – retratando a modelagem de objetos em 3D e sua impressão.

O capítulo 1 apresenta uma prática realizada no componente curricular Modelagem de Situações Dinâmicas e narra o planejamento e o desenvolvimento de uma tarefa exploratória e investigativa realizada com estudantes de Engenharia, contemplando o conteúdo de logaritmos. Os resultados indicaram que a prática apresenta potencial para desafiar os estudantes a encontrar soluções, tornando-os o centro dos processos de ensino e de aprendizagem.

Em seguida, o capítulo 2 traz uma Sequência de Ensino Investigativa (SEI) explorada no componente curricular Modelagem de Sistemas Eletromagnéticos, com estudantes de Engenharia Elétrica da Univates, e aborda a indução mútua e suas aplicações. A proposta partiu de um problema apresentado pela professora e pesquisadora da área da Física. Os resultados evidenciaram que os alunos agregaram novos conhecimentos àqueles preexistentes, bem como vivenciaram processos de ensino e aprendizagem com maior grau de abertura, o que favorece o desenvolvimento da autonomia e da liberdade intelectual.

No capítulo 3, é apresentada uma prática desenvolvida junto a três turmas de estudantes de diversos cursos de Engenharia, novamente no componente curricular

Modelagem de Situações Dinâmicas, na qual os alunos foram desafiados a fotografar uma edificação em uma rua inclinada, próxima ao local em que residem, e, por meio de alguma estratégia, calcular o ângulo e o percentual de inclinação. Além disso, tiveram que descrever, com detalhes, o que mais era observado nessa rua. Ainda relataram se sua percepção inicial do percentual de inclinação era maior ou menor do que o encontrado de fato.

Em continuidade, no capítulo 4, são descritos alguns recursos usados na criação de objetos em 3D, e enfatizadas as potencialidades do software Blender e da impressora 3D Creality CR-30. Esses recursos foram fundamentais no processo de transposição dos modelos matemáticos para o mundo físico. O Blender foi utilizado para realizar um refinamento estético e estrutural nas superfícies e para pré-visualizar o objeto em sua materialidade concreta.

No capítulo 5, são descritas duas atividades que ilustram a roteirização do processo de construção e impressão de dois objetos: um cálice, que envolve o uso e a aplicação de uma função logarítmica, e um vaso, formatado a partir de funções polinomiais de 1º grau. O intuito é orientar o leitor na construção desses objetos para que possam ser impressos em 3D. É um material para estudo de impressões de objetos em 3D.

Por fim, o capítulo 6 aborda a construção e impressão de outros três objetos: uma xícara, uma cuia e uma garrafa plástica de 500 mL. A construção desses objetos se diferencia do capítulo 5 não apenas pela definição de funções matemáticas distintas das anteriores, mas também pelo uso de técnicas como regressões polinomiais para suavizar perfis e cálculo integral para estimar o volume da garrafa plástica.

Seguem-se, a isso, as considerações finais do e-book. Desejamos uma boa leitura a todos!

Márcia Jussara Hepp Rehfeldt

Coordenadora da pesquisa

## Sumário

<b>Pareceristas</b> .....	4
<b>Prefácio</b> .....	5
<i>Gabriel Loureiro de Lima</i>	
<b>Apresentação</b> .....	10
<i>Márcia Jussara Hepp Rehfeldt</i>	
<b>Capítulo 1</b>	
<b>Ensino de logaritmos no Ensino Superior por meio de tarefas exploratórias investigativas e inspirações na metodologia de Estudos de Aula</b> .....	13
<i>Ieda Maria Giongo</i>	
<i>Marli Teresinha Quartieri</i>	
<b>Capítulo 2</b>	
<b>Aplicações da indução mútua na Engenharia Elétrica: uma sequência de ensino investigativo desenvolvida em um curso de Teoria Eletromagnética Aplicada</b> .....	26
<i>Sônia Elisa Marchi Gonzatti</i>	
<b>Capítulo 3</b>	
<b>Tarefas exploratórias e investigativas: abordagem prática de percentuais de inclinação</b> .....	36
<i>Ieda Maria Giongo</i>	
<i>Márcia Jussara Hepp Rehfeldt</i>	
<i>Marli Teresinha Quartieri</i>	
<b>Capítulo 4</b>	
<b>Ferramentas de Apoio: Blender e Impressora 3D</b> .....	52
<i>Jean Michel Mallmann</i>	
<b>Capítulo 5</b>	
<b>Modelagem e Construção de Objetos em 3D: O Cálice e o Vaso</b> .....	60
<i>Jean Michel Mallmann</i>	
<i>João Pedro Scherer de Sampaio Carvalho</i>	
<b>Capítulo 6</b>	
<b>Modelagem e Construção de Objetos em 3D: A xícara, a cuia e a garrafa</b> .....	72
<i>Jean Michel Mallmann</i>	
<i>João Pedro Scherer de Sampaio Carvalho</i>	
<i>Márcia Jussara Hepp Rehfeldt</i>	
<b>Considerações finais</b> .....	94

# Capítulo 1

## Ensino de logaritmos no Ensino Superior por meio de tarefas exploratórias investigativas e inspirações na metodologia de Estudos de Aula

Ieda Maria Giongo<sup>1</sup>

Marli Teresinha Quartieri<sup>2</sup>

### 1. Delimitação do contexto em que a prática foi desenvolvida

Neste capítulo, socializar-se-á o percurso teórico-metodológico percorrido por um grupo de professoras pesquisadoras no desenvolvimento de uma prática pedagógica envolvendo tarefas exploratórias e investigativas. O foco da intervenção consistiu na introdução do conceito de logaritmos a partir de suas propriedades, tendo sido planejada, executada e analisada por docentes de matemática junto a estudantes de Engenharia.

A referida prática pedagógica é um dos resultados da pesquisa intitulada “Potencialidades e desafios na exploração da metodologia *Estudios de Clases* na prática docente de Ciências Exatas em cursos de Engenharia”, que conta com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS). O objetivo geral da pesquisa consiste em examinar potencialidades e desafios da metodologia Estudos de Aula para a prática docente na área de Ciências Exatas, no ensino de disciplinas vinculadas à matemática em cursos de Engenharia. A pesquisa está sendo desenvolvida na Universidade do Vale do Taquari, Lajeado, RS por um grupo de quatro pesquisadoras (três professoras de Matemática e uma de Física) que ministram aulas em cursos de Engenharia vinculados às Ciências Exatas (Cálculos e Físicas), bem como por bolsistas de Iniciação Científica, mestrandos e doutorandos do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE).

Os resultados descritos estão relacionados, particularmente, a dois objetivos específicos da referida pesquisa: i) estabelecer processos de planejamento e de docência colaborativa por meio da metodologia Estudos de Aula; ii) elaborar, desenvolver, avaliar e reelaborar tarefas investigativas para o ensino de matemática no contexto de cursos de Engenharia.

A experiência desenvolvida ocorreu na disciplina denominada “Modelagem de Situações Dinâmicas”, obrigatória no primeiro semestre de todos os cursos de Engenharia da Instituição, sendo pré-requisito para os Cálculos e as Físicas que ocorrem na sequência do currículo dos cursos. A carga horária da disciplina é de 80 horas, as quais ocorrem durante um semestre letivo. A ementa da disciplina é assim descrita: “Estudo do comportamento de situações dinâmicas e aperfeiçoamento das diversas formas de representação, seja na forma de texto técnico, gráfico, tabela, equação ou lei matemática”. As habilidades a serem desenvolvidas, no decorrer do semestre são: aplicar técnicas de análise e modelagem à resolução de problemas utilizando ferramentas de apoio, que incluem softwares e bases

---

1 Professora titular da Universidade do Vale do Taquari - Univates.

2 Professora titular da Universidade do Vale do Taquari - Univates.

digitais de informação; resolver problemas de engenharia por meio do desenvolvimento de raciocínio lógico, crítico e analítico.

Os objetos de conhecimento da disciplina são definidos em função de sistemas de medida e notação científica; análise gráfica, algébrica e aplicações de funções: linear, quadrática, logarítmica, exponencial; trigonometria no triângulo e no círculo e funções trigonométricas; taxa de variação média (declividade) e instantânea (noção de derivada e limite). A maioria destes temas já foram estudados na Educação Básica, mas devido à relevância para as disciplinas das Engenharias, são revistos. Salienta-se que esta disciplina tem o intuito de tornar o estudante ativo do seu processo de aprendizagem, sendo responsável pela realização das tarefas propostas de forma individual ou em grupo, por meio de metodologias, tais como aulas expositiva-dialogadas, estudos de caso, investigação matemática, modelagem matemática, dentre outras.

Diante desse contexto e como as três pesquisadoras da área da Matemática estavam ministrando, no mesmo semestre, a disciplina de Modelagem de Situações Dinâmicas, o grupo de pesquisa optou por experienciar um ciclo dos Estudos de Aula com o intuito de elaborar um material introdutório para o ensino de logaritmos. Este conteúdo foi escolhido porque as professoras perceberam em outras edições da referida disciplina, que os estudantes apresentam dificuldades de aprendizagem em relação a este assunto. Tais evidências corroboram os estudos de Rocha (2021) e Galupo (2021). Assim, o grupo resolveu elaborar, em conjunto, uma tarefa exploratória e investigativa, na perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), para introduzir os logaritmos em sala de aula utilizando suas propriedades.

Na próxima seção, serão discutidos os escopos teóricos deste trabalho que envolve três itens, a saber: uso da história do surgimento de logaritmos; as dificuldades em relação ao estudo de logaritmos; importância das tarefas exploratórias e investigativas no ensino de matemática; benefícios e limitações da metodologia dos Estudos de Aula no Ensino Superior.

## **2. Fundamentação teórica: logaritmos e investigação matemática no contexto dos Estudos de Aula**

O tema logaritmo é desenvolvido na Educação Básica como um estudo que foca em técnicas para resolver exercícios repetitivos e não no conceito e nas propriedades. De acordo com Araújo, Torres e Ferreira (2024, p. 2) “sob esse viés, os estudantes apenas podem reproduzir o que os professores fazem em sala de aula, numa perspectiva mecânica, nem sempre aprendendo sobre o conteúdo de fato”. Dessa forma, os estudantes tanto da Educação Básica como do Ensino Superior, recorrem à memorização mecânica de propriedades, resultando em um aprendizado frágil e sujeito ao esquecimento após as avaliações formais.

Aliado a isso, pesquisas (Ramos, 2015, Wendland 2019, Rocha, 2021; Galupo, 2021; Araújo, Torres e Ferreira, 2024) destacam como dificuldades no ensino de logaritmos: a transição do pensamento aritmético para o algébrico gera entraves na interpretação da simbologia do logaritmo; a desconexão entre como os logaritmos foram criados (facilitadores de cálculos complexos) e como são ensinados hoje, o que impede que o estudante veja sentido no objeto matemático. Aliado a esses fatores, evidencia-se o foco excessivo em regras e algoritmos (propriedades operatórias) sem compreensão do conceito, torna a aprendizagem superficial; a falta do uso de problemas reais faz com que o estudante

não identifique a utilidade prática do tema e a falta de domínio em relação a potenciação e radiciação.

De acordo com Galupo (2021, p. 24) “A palavra Logarithmos tem origem grega, Lógos (razão) e Arithmós (número). O conceito de logaritmo foi apresentado, pelo matemático escocês John Napier (1550-1617), em princípios do século XVII”. Conforme Boyer (1974), Napier dedicou duas décadas de seus estudos ao desenvolvimento dos logaritmos antes de sua divulgação. Para o autor, Napier percebeu que poderia estabelecer uma correspondência entre uma progressão aritmética (os índices ou logaritmos) e uma progressão geométrica (os números ou potências). A lógica básica reside na propriedade de que, ao manipular os índices, as operações de multiplicação e divisão são reduzidas a somas e subtrações. Acredita-se que ignorar a função histórica dos logaritmos de simplificar multiplicações em adições impede que o aluno desenvolva uma intuição logarítmica.

Assim, neste capítulo, pretende-se socializar uma tarefa exploratória e investigativa, com foco na introdução do conceito de logaritmo a partir de suas propriedades. Os estudantes destacaram o esquecimento deste conteúdo, mesmo após estudá-lo anteriormente. Os poucos que recordavam descreveram-no como um dos conteúdos mais desafiadores do Ensino Médio. Além disso, pode-se inferir que mesmo que os logaritmos tenham surgido para simplificar a vida dos matemáticos, eles são frequentemente ensinados de forma abstrata, o que gera efeito contrário no estudante, ou seja, a percepção de complexidade.

Diante desse contexto, optou-se por introduzir o conceito de logaritmos, para os graduandos em Engenharia, por meio de quadros (tábuas de Napier). O objetivo consistiu em proporcionar uma experiência de reconstrução histórica, permitindo que os estudantes compreendessem a origem dos logaritmos e a necessidade da época: a simplificação de operações aritméticas complexas em cálculos elementares. A tarefa assumiu um caráter exploratório-investigativo, sob a perspectiva de Ponte (2019), mobilizando a curiosidade dos discentes acerca dos processos de cálculo históricos. Ao buscarem relações intrínsecas entre os valores apresentados no quadro, os estudantes foram levados à construção da ideia intuitiva de logaritmo. Essa fase de descoberta serviu como alicerce para a formalização subsequente, que abrangeu a definição formal, as condições de existência e o comportamento gráfico da função logarítmica.

Galupo (2021, p. 14) descreve que a criação das tábuas logarítmicas, se revelou como “uma poderosa ferramenta, facilitando o trabalho daqueles que dependiam de cálculos longos e trabalhosos, contribuindo de maneira decisiva para o desenvolvimento de muitas áreas como a astronomia, a navegação e a engenharia”. Ainda, de acordo com o autor, com o surgimento das modernas calculadoras eletrônicas e dos computadores, o uso dos logaritmos como instrumentos de cálculo, não é mais tão relevante como era na época em que foram criados. Rocha (2021, p. 15) destaca que o ensino dos logaritmos ainda é importante, “pois as variações exponenciais e logarítmicas modelam fenômenos e também são úteis para construção de algumas escalas”. Aliado a isso, os logaritmos têm importância no desenvolvimento de pesquisas em matemática e diversas aplicações em áreas como biologia, física, química, engenharia e outras. Alguns exemplos do uso dos logaritmos são problemas relacionados à meia-vida, matemática financeira, medição de níveis sonoros, escala Richter (terremotos), escala de magnitude estelar para a luminosidade de estrelas, dentre outras.

Aqui, assume-se a hipótese de que o ensino de logaritmos, por meio de tarefas exploratórias e investigativas, favorece a resignificação de conceitos e propriedades. Tais tarefas, sob a ótica de Ponte (2005, 2019), fundamentam-se na premissa de que a

aprendizagem matemática ocorre de forma mais significativa quando o estudante é desafiado por enunciados que exigem mais do que a mera aplicação de algoritmos. Ao introduzir o estudo dos logaritmos por meio de um quadro de valores inspirado nas tábuas de Napier, o docente propõe uma investigação que transcende a memorização de propriedades.

Nesse contexto, o papel do estudante de Engenharia é elevado ao de protagonista, assemelhando-se ao trabalho de um investigador que reconstrói a origem do conceito (Ponte, 2019). A análise intuitiva das relações numéricas no quadro serve como alicerce para a formalização teórica, em que o rigor das condições de existência e o comportamento das funções logarítmicas passam a ter sentido prático e operacional. Ao vivenciar uma experiência análoga à de Napier, o discente não apenas pode se apropriar do conteúdo formal, mas desenvolver a capacidade de argumentação e validação, competências essenciais para a sua formação profissional.

Ao adotar a investigação matemática como estratégia didática, o ambiente escolar deixa de ser um espaço de transmissão passiva para tornar-se um ambiente em que o estudante assume o protagonismo de sua própria aprendizagem intelectual (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2009). O processo de investigação matemática, de acordo com os autores, estrutura-se em um ciclo de ações, conforme segue. Inicialmente, ocorre a exploração e formulação de questões, ou seja, momento em que ocorre a familiarização dos estudantes com a tarefa; são examinados os dados, identificadas as informações relevantes e levantadas as questões a responder. Como descrevem Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), o estudante avança para a etapa da formulação de conjecturas, ou seja, elaboração de hipóteses baseadas nas observações.

A etapa seguinte consiste na testagem e refinamento, em que os estudantes colocam suas hipóteses à prova por meio de novos cálculos ou exemplos. Se a hipótese falha, eles retornam à etapa anterior para refiná-la ou descartá-la, aprendendo com o erro e aprofundando a compreensão do conceito (Oliveira e Ponte, 2002). Por fim, ocorre a etapa da argumentação e demonstração em que os resultados são validados matematicamente. O processo termina com os estudantes justificando suas conclusões e comunicando os resultados para a turma e/ou o professor (Ponte, 2019).

A implementação de tarefas exploratórias e investigativas promove benefícios que extrapolam a simples aquisição de conteúdos, fomentando o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia intelectual do estudante. Ao ser confrontado com situações que não possuem um caminho de resolução imediato, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), o estudante desenvolve a persistência e a capacidade de gerenciar o próprio aprendizado. Somado a isso, o envolvimento com o método investigativo empodera o estudante em sua relação com a disciplina, permitindo que ele abandone a postura passiva de aplicar regras para assumir uma postura ativa na produção de significados.

No contexto das tarefas exploratórias e investigativas, o papel do professor é ressignificado, abandonando a postura de detentor absoluto do saber para assumir a função de mediador e incentivador do pensamento reflexivo. Conforme apontam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), cabe ao docente o papel de selecionar tarefas desafiadoras e mediar as discussões em sala de aula. Essa mediação exige que o professor crie um ambiente de diálogo, no qual o questionamento substitui a resposta pronta e o erro é aproveitado como uma oportunidade de investigação (Ponte, 2019). Ou seja, durante a aula, o professor assume

a função de provocador do pensamento reflexivo, intervindo por meio de questionamentos que estimulam o aluno a explicitar seu raciocínio, sem antecipar respostas ou algoritmos.

De acordo com Ponte (2005, 2019) a transição para uma prática investigativa exige que o professor lide com a imprevisibilidade, o que representa uma das barreiras pedagógicas. Para o autor, muitos docentes sentem-se inseguros ao abandonar o controle do conteúdo, uma vez que as tarefas exploratórias e investigativas podem levar a questionamentos inesperados para os quais o professor nem sempre possui respostas imediatas. No ensino de logaritmos, a implementação de tarefas investigativas pode ser dificultada pela insegurança docente frente à imprevisibilidade das explorações discentes e pela dificuldade do próprio professor sobre o conteúdo dos logaritmos. Além disso, o docente pode desconhecer a origem histórica dos logaritmos, bem como sentir dificuldades em mediar a transição entre as progressões aritméticas e geométricas observadas nas tábuas de Napier e a formalização das propriedades operatórias.

Diante dessa insegurança docente e das incertezas inerentes à prática investigativa, a formação continuada do tipo Estudos de Aula pode ser produtiva. Este modelo de formação continuada, de origem japonesa, destaca-se como uma metodologia colaborativa que permite ao professor enfrentar as dificuldades de mediação do conceito, neste caso sobre logaritmos, por meio do planejamento coletivo e da observação entre pares. Conforme destacam Ponte *et al.* (2016), esse processo de investigar a própria prática permite que o docente antecipe possíveis respostas dos alunos e prepare intervenções que promovam a aprendizagem dos estudantes.

De acordo com Richit *et al.* (2024), no contexto universitário, essa metodologia busca romper com o isolamento pedagógico característico da academia, permitindo que especialistas de diversas áreas se reúnam para investigar como os alunos aprendem conteúdos específicos. De acordo com Lewis (2002), o foco da investigação desloca-se da atuação do professor para as evidências de aprendizagem dos estudantes. Para Richit *et al.* (2024), a implementação dos Estudos de Aula no Ensino Superior brasileiro apresenta desafios e oportunidades particulares, especialmente no que tange à construção de uma cultura de colaboração entre pares e à valorização do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Diferente de modelos de formação continuada que são baseados em palestras ou cursos teóricos isolados, a metodologia Estudos de Aula, ocorre no ambiente escolar ou acadêmico. Para concretização desta metodologia, autores como Murata (2011) e Curi (2018) sugerem diferentes etapas que se complementam e podem ser resumidas como: planejamento colaborativo de uma aula; implementação e observação da aula planejada; reflexão sobre os pontos fortes e aspectos a serem melhorados com vistas à reformulação, se necessário.

Na etapa do planejamento colaborativo de uma aula, o grupo de professores seleciona um tópico curricular considerado desafiador e define metas de aprendizagem para os alunos. Diferente de um planejamento comum, aqui é importante buscar antecipar as reações dos estudantes. O resultado é a elaboração de um plano de aula detalhado, fundamentado na literatura da área e no conhecimento pedagógico do conteúdo (Ponte *et al.*, 2016).

Na etapa da implementação e observação da aula planejada, um dos membros do grupo ministra a aula planejada enquanto os demais professores atuam como observadores. O diferencial desta etapa, de acordo com Curi (2018), é o foco do olhar dos observadores que

não avaliam a didática ou a postura do colega, mas sim o comportamento e a aprendizagem dos alunos. Utilizam-se, de acordo com Lewis (2002), de roteiros de observação para registrar diálogos, dúvidas e o engajamento dos estudantes com as tarefas propostas.

Na etapa da reflexão sobre os pontos fortes e dos aspectos que devem ser melhorados com vistas à reformulação, se necessário, que ocorre imediatamente após a aula, o grupo se reúne para uma discussão crítica baseada nas evidências coletadas. Importante notar que o professor que lecionou a aula planejada inicia compartilhando suas percepções, seguido pelos observadores. O objetivo, de acordo com Bezerra e Morelatti (2017), é confrontar o que foi planejado com o que efetivamente ocorreu, analisando por que certas estratégias funcionaram e outras não. Assim, nesta etapa, ocorre a reformulação das atividades, e o grupo decide se a aula precisa de ajustes estruturais. O plano de aula revisado pode ser aplicado novamente em outra turma (por outro professor do grupo) para testar as melhorias. Ao final, o conhecimento gerado é documentado, servindo como material de apoio para outros docentes da área.

O uso de Estudos de Aula, como metodologia de formação continuada, revela que o aprimoramento dos processos de ensino e de aprendizagem depende, fundamentalmente, da capacidade dos docentes de investigarem coletivamente sua própria prática (Curi, 2018). Ao transformar a sala de aula em um espaço de pesquisa colaborativa, conforme a autora, o método oferece um caminho sólido para que o professor evolua de um especialista em conteúdo para um especialista em processos de aprendizagem. Embora as barreiras institucionais — como a escassez de tempo e a cultura de isolamento — sejam reais, os benefícios para a qualidade do ensino e para a satisfação profissional do docente superam tais obstáculos. A implementação bem-sucedida dos Estudos de Aula, conforme discutido em Müller (2021), exige o apoio das instâncias gestoras para garantir a sustentabilidade dos grupos de estudo e a valorização das horas dedicadas ao planejamento pedagógico.

Em suma, a introdução dos logaritmos para estudantes de Engenharia por meio de tarefas exploratórias e investigativas fundamentadas nas tábuas de Napier pode permitir que o conceito emergja conforme ocorrido pela necessidade do momento histórico: a eficiência no cálculo e a simplificação operacional. Ao reconstruir a lógica das propriedades logarítmicas, a partir da investigação de padrões numéricos, o futuro engenheiro deixa de ser um mero aplicador de fórmulas para se tornar um produtor de significados, desenvolvendo compreensão conceitual. Contudo, a eficácia dessa transição metodológica no Ensino Superior depende da mediação docente. Nesse sentido, a adoção de Estudos de Aula oferece o suporte colaborativo necessário para que o professor planeje, observe e refine tais investigações, garantindo que o rigor matemático e o protagonismo estudantil caminhem juntos na construção de um saber significativo.

Na próxima seção, será apresentada a prática pedagógica desenvolvida com os estudantes de Engenharia envolvendo a introdução do conteúdo de logaritmos, destacando os passos desde a sua elaboração, execução, reflexão, reaplicação e versão final.

### **3. O percurso da construção coletiva de docentes: ensino de logaritmos usando atividades exploratórias e investigativas**

O grupo de pesquisa, envolvendo as quatro professoras pesquisadoras e três bolsistas de Iniciação Científica, decidiu vivenciar um ciclo completo da metodologia Estudos de Aula com os alunos de Engenharia na disciplina de Modelagem de Situações Dinâmicas. Neste contexto, inicialmente, o grupo estudou com profundidade alguns trabalhos sobre os

Estudos de Aula (Blanco-Álvarez e Castellanos, 2017; Curi, 2018; Ponte *et al.*, 2016; Richit, 2021; Richit, Ponte, Richit, 2022), focando nas ações que deveriam ser efetivadas em cada uma das etapas do ciclo. As reuniões destes estudos foram quinzenais, de forma online, por meio do Google Meet.

Após tais estudos, o grupo de pesquisa iniciou a etapa do planejamento colaborativo de uma aula. Assim, as três professoras pesquisadoras de matemática optaram pelo objeto de conhecimento: introdução do ensino de logaritmos. O conteúdo foi escolhido, em conjunto, devido às dificuldades de aprendizagem dos estudantes em outros semestres em relação ao conceito de logaritmo, suas propriedades, condições de existência e análise gráfica. Todo o grupo concordou com a escolha dos professores da disciplina, confirmando que eles também tinham dificuldades em relação a este conteúdo no decorrer do Ensino Médio.

O grupo, então, estudou diferentes trabalhos (artigos, teses, dissertações, produtos educacionais, dentre outros) que focam no ensino de logaritmos, desde seu histórico, propriedades, aplicações, representação gráfica, para ter sugestões de que tipo de tarefa planejar. Decidiu-se planejar as atividades na perspectiva da investigação matemática (perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira, 2009) em que os estudantes, em pequenos grupos, receberiam a tarefa para resolver. Após a leitura da tarefa, deveriam elaborar conjecturas para resolver a atividade, testando e validando-as matematicamente. E, no final, cada grupo deveria apresentar as respostas, justificando-as. O professor, nesse momento, deveria passar nos grupos, tirando dúvidas, instigando e questionando os estudantes, a fim de que eles respondessem com sucesso a questão proposta.

A tarefa do Quadro 1 deveria ser resolvida em grupos de até quatro estudantes:

Quadro 1: Tarefa inicial a ser desenvolvida

No quadro que segue existe um padrão entre os números. Descubrir este padrão e completar os números que faltam.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	0	0,5	0,79	1	1,16	1,29	1,4	1,5	1,58	1,66	1,72		1,85
14	15	16	17	18	24	36	0,2	0,5	0,8	$5^6$	$8^3$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[3]{80}$

Fonte: Das autoras, 2026

A partir desta atividade, foram elaboradas questões que o professor poderia realizar oralmente em sala de aula para instigar o aluno a descobrir o padrão que existia entre os números e assim completar o quadro com os números que faltavam. O intuito desta atividade era fazer com que os estudantes identificassem os seguintes padrões no quadro:

**a) Multiplicação é transformada em adição**

Ex.:  $18 = 2 \times 9$  deve-se somar o valor de y quando x é 2 com o valor de y quando x é 9. Assim:  $0,5 + 1,58 = 2,08$  (valor de y quando x é 18)

### b) Divisão é transformada em subtração

Ex.:  $0,2 = 2 : 10$  deve-se diminuir o valor de  $y$  quando  $x$  é 2 com o valor de  $y$  quando  $x$  é 10. Assim:  $0,5 - 1,66 = -1,16$  (valor de  $y$  quando  $x$  é 0,2)

### c) Potenciação é transformada em multiplicação

Ex.:  $5^6$  deve-se multiplicar o valor de  $y$  quando  $x$  é 5 por 6 (expoente da potência). Assim:  $1,16 \times 6 = 6,96$  (valor de  $y$  quando  $x$  é  $5^6$ )

Salienta-se que tais padrões estão relacionados às propriedades dos logaritmos (conforme Napier percebeu em seus estudos em 1614), conforme expresso no Quadro 2:

Quadro 2: Propriedades operatórias dos logaritmos

1) Em qualquer base, o **logaritmo de um produto** de dois números reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

$$\log (M \cdot N) = \log M + \log N$$

2) Em qualquer base, o **logaritmo de um quociente** é igual diferença entre o logaritmo do dividendo (numerador) e o logaritmo do divisor (denominador).

$$\log \left( \frac{M}{N} \right) = \log M - \log N$$

3) Em qualquer base, o **logaritmo de uma potência** de base real positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\log M^N = N \cdot \log M$$

Fonte: Das autoras, 2026

Além disso, a ideia era solicitar o gráfico relacionando  $y$  em função de  $x$ , para que o estudante analisasse as características do gráfico (domínio, imagem, crescimento, interceptos  $x$  e  $y$ ). E, no final, o intuito era que o professor definisse que a função em estudo era a logarítmica, chegando dessa forma na definição formal de logaritmo.

Aliado a isso, foram debatidas possíveis respostas dos alunos e dificuldades que poderiam ocorrer durante a resolução da atividade e quais as orientações que o professor deveria dar nesses momentos. Além disso, foi discutido e planejado pelo grupo o que seria observado no decorrer da execução do planejamento. Destacou-se a importância de observar as reações e as respostas dos estudantes e não somente a performance do docente, conforme descrito por Blanco-Álvarez e Castellanos (2016). Os autores citam como indicadores a serem considerados na observação: o cumprimento dos objetivos do roteiro, a clareza das atividades propostas, o alinhamento entre as dificuldades previstas dos alunos e o que de fato ocorreu em sala de aula, a consistência entre o apoio do professor em sala de aula e o planejado no roteiro, o uso adequado dos materiais e o cumprimento do tempo estipulado.

Para a etapa do planejamento foram usados três encontros, de forma online, pelo Google Meet, com duração de duas horas e trinta minutos cada um desses encontros. Foram momentos de estudos, discussão e preparação, para que a implementação ocorresse de forma produtiva.

Na segunda etapa – implementação e observação da aula planejada – uma das professoras pesquisadoras implementou a tarefa em sua turma e uma das pesquisadoras e mais duas bolsistas observaram a referida aula, para identificar dificuldades e avanços

dos estudantes em relação ao estudo dos logaritmos. A professora usou o planejamento conforme elaborado em conjunto e seguiu os passos combinados em relação à execução da tarefa. Os observadores ficaram na sala de aula atentos aos acontecimentos durante a aula, focando nas reações dos estudantes, nos questionamentos, nas dificuldades e nas respostas dos estudantes no decorrer da aula ministrada.

A terceira etapa – reflexão sobre os pontos fortes e os aspectos a serem melhorados com vistas à reformulação, se necessário – ocorreu logo após a implementação do plano, de forma online, em que o grupo se reuniu para realizar a avaliação reflexiva da aula ministrada, destacando pontos que deveriam ser modificados nas atividades para melhorias em relação à aprendizagem dos estudantes.

Os observadores ficaram impressionados com o envolvimento dos estudantes com a atividade, pois todos os grupos queriam descobrir as relações presentes na tarefa, sem solicitar auxílio dos demais colegas. Destacaram a importância da mediação do professor no decorrer da execução do plano, pois instigou os estudantes, fazendo questionamentos pertinentes para que os estudantes chegassem às regras, sem que houvesse necessidade de responder. Segundo a professora que desenvolveu a primeira versão, a maior dificuldade foi justamente dar tempo para que os estudantes chegassem à resposta desejada; o que corrobora as ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) em relação à implementação de tarefas exploratórias e investigativas. Nesse sentido, uma das reformulações na tarefa planejada foi acrescentar questões escritas na atividade que é entregue aos estudantes. Esses escritos tiveram o intuito de fazer com que os estudantes refletissem e elaborassem hipóteses para chegar à resolução da tarefa.

Os observadores foram unânimes em comentar sobre a dificuldade de permanecer na sala de aula, apenas como observador, sem auxiliar o professor e os alunos no decorrer da tarefa proposta. Para eles, a vontade de responder aos estudantes quando estes estavam com dúvidas e não conseguiam chegar no padrão do quadro foi “enorme”. Na palavra de um dos observadores: “O difícil foi ficar quieto no decorrer da aula, principalmente quando os estudantes não estavam encontrando o padrão. Dava muita vontade de dar a resposta”. Essa dificuldade, no momento da observação, também foi identificada na tese de Müller (2021).

Após as reformulações, outro professor pesquisador do grupo implementou o segundo planejamento em sua turma e os observadores foram um professor e três bolsistas. Os observadores destacaram a interação entre os estudantes do grupo e a persistência dos discentes em encontrar os valores ausentes no quadro. Essa interação e empenho dos estudantes no decorrer de uma tarefa na perspectiva da investigação matemática é comentada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) como um dos pontos positivos desta abordagem.

Após a segunda aplicação, foram realizadas pequenas mudanças no planejamento, a seguir expostas no Quadro 3. O grupo, em conjunto, decidiu que não havia necessidade de nova implementação.

Quadro 3: Tarefa atualizada

No quadro que segue existe um padrão entre os números. Descubrir este padrão e completar os números que faltam

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	0	0,5	0,79	1	1,16	1,29	1,4	1,5	1,58	1,66	1,72		1,85

14	15	16	17	18	24	36	0,2	0,5	0,8	$5^6$	$8^3$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[3]{80}$

Questionamentos:

- 1 – Observando os valores de x e y, qual será o valor de y quando x = 12? Como você pensou para encontrar a resposta?
- 2 – Esse padrão que você descobriu vale também quando x = 10? Justifique sua resposta.
- 3 – E quando x = 15?
- 4 – Descreva o padrão que você utilizou para descobrir estes valores.
- 5 – E qual o valor de y quando x = 0,2? Como você pensou para encontrar a resposta?
- 6 – E qual o valor de y quando x = 0,8? Como você pensou para encontrar a resposta?
- 7 – Descreva o padrão que você utilizou para descobrir estes valores.
- 8 – Descubra os valores faltantes no quadro. Como você pensou para encontrar a resposta em cada espaço que estava em branco?
- 9 – E qual o valor de y quando x = 17? Como você pensou para encontrar a resposta?
- 10 – Construir o gráfico de y em função de x. Escreva algumas características tais como domínio, imagem, intercepto de x e de y, crescimento da função.
- 11 – Qual a função (y em função de x) que representa a relação que existe no quadro.

Fonte: As autoras, 2026

Cabe evidenciar que tanto os bolsistas que participaram do grupo de Estudos de Aula, quanto os estudantes das duas turmas de Engenharia em que as atividades foram exploradas, não tinham estudado logaritmo sob esta perspectiva histórica, ou seja, por meio das propriedades logarítmicas. Foram unânimes em comentar que, na Educação Básica, não tinham entendido as propriedades e que por meio desta tarefa – em que eles tiveram que descobrir as relações existentes – o conteúdo se tornou mais dinâmico e compreensível.

#### 4. Algumas reflexões sobre a experiência efetivada

A experiência descrita neste capítulo suscitou três reflexões importantes. A primeira mostra que a introdução dos logaritmos por meio de tarefas exploratórias e investigativas, inspiradas nas tábuas de Napier, possibilita deslocar o foco do ensino da aplicação mecânica de propriedades para a compreensão conceitual. Ao reconstruírem as próprias relações, os estudantes vivenciaram processos de produção de conceitos, o que favoreceu a atribuição de sentido às propriedades operatórias. Mais do que reconhecer regras formais, puderam compreender por que multiplicações se transformam em adições e por que potências se

convertem em produtos, desenvolvendo uma intuição logarítmica que pode sustentar aprendizagens futuras nas disciplinas subseqüentes do currículo.

Para as professoras pesquisadoras, a vivência do ciclo de Estudos de Aula revelou-se igualmente significativa, pois o planejamento colaborativo, a observação focada nas evidências de aprendizagem e a reflexão coletiva após a aula permitiram antecipar dificuldades, refinar intervenções e ajustar a tarefa às necessidades reais dos estudantes. O exercício de observar sem intervir, bem como a necessidade de sustentar o tempo investigativo dos grupos, explicitou tensões inerentes à prática investigativa no Ensino Superior, tradicionalmente marcado por abordagens expositivas. Nesse sentido, a metodologia contribuiu para romper o isolamento docente e fortalecer uma cultura de investigação da própria prática, reafirmando a sala de aula como espaço legítimo de produção de conhecimento pedagógico.

A terceira reflexão expressa que a articulação entre investigação matemática e Estudos de Aula constitui uma possibilidade potente para ressignificar o ensino de conteúdos considerados difíceis e excessivamente formais, como os logaritmos. Ao promover o protagonismo estudantil e, simultaneamente, sustentar o rigor conceitual por meio da mediação qualificada do professor, a proposta indica caminhos para um ensino mais significativo nas Engenharias.

## Referências

ARAÚJO, V. L. da S.; TORRES, M. C. de S.; FERREIRA, G. S. S. Abordagem conceitual no ensino de logaritmos: perspectivas de licenciandos e egressos do curso de matemática. Número Especial – II Encontro Cearense de Educação Matemática (II ECeEM) **Revista Cearense de Educação Matemática – RCeEM**, v. 3, n. 7, p. 1 – 16, 2024.

BLANCO-ALVAREZ, H.; CASTELLANOS, M. T. La formación de maestros reflexivos sobre su propia práctica y el estudio de clase. In: MUNHOZ, A. V.; GIONGO, I. M.. (Org.) **Observatório da educação III: práticas pedagógicas na educação básica**. Porto Alegre: Evangraf, 2017. p. 7-18.

BEZERRA, R. C.; MORELATTI, M. R. Lesson study: discutindo o processo formativo da prática à prática. In: **Anais do XIII Congresso Nacional de Educação – EDUCERE**, 2017. Disponível em: <https://educere.pucpr.br/p1/anais.html>. Acesso em: 24 jan 2026.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CURI, Edda. Reflexões sobre um projeto de pesquisa que envolve grupos colaborativos e a metodologia lesson study. In.: CURI, Edda; NASCIMENTO, Julia de C. P. do; VECE, Janaina P. (orgs). **Grupos colaborativos e lesson study: contribuições para a melhoria do ensino de matemática e desenvolvimento profissional de professores**. Alexa Cultural: São Paulo, 2018.

GALUPO, A. S. **A construção do conceito de logaritmo**. 101 f. Dissertação - Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal da Fronteira Sul. Chapecó, SC, 2021.

LEWIS, C. *Lesson Study: a handbook of teacher-led instructional change*. **Philadelphia: Research for Better Schools, Inc.**, 2002.

MÜLLER, Ana Paula K.. **Desenvolvimento profissional de professores dos anos iniciais usando Estudos de Aula**: integração de recursos tecnológicos e atividades experimentais. 2021. Tese (Doutorado) – Curso de Ensino, Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 2021.

MURATA, A. Introduction: conceptual overview of Lesson Study. In: HART, A.; ALSTON, L. C.; MURATA, A. S. (Org.). **Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education**. Dordrecht: Springer, 2011. p. 13-24.

OLIVEIRA, H.; PONTE, J. P. O papel das tarefas na investigação matemática e na aprendizagem dos alunos. In: **Actas do XIII Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Porto: APM, 2002. p. 195-208.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34. Disponível em: Repositório da Universidade de Lisboa.

PONTE, J. P. O trabalho do professor de Matemática na condução de tarefas investigativas. **Quadrante**, Lisboa, v. 28, n. 2, p. 100-125, 2019. Disponível em: Revista Quadrante.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2ª. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; PEREIRA, M. H.; BAPTISTA, M. O Lesson Study como modalidade de formação de professores. **Quadrante**, Lisboa, v. 25, n. 2, p. 45-66, 2016. Disponível em: Repositório UL.

RAMOS, Simone Sotozono Alonso. **Logaritmos: uma abordagem didática**. 2015, 110 f. Dissertação - Universidade Federal do Paraná. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2015.

RICHIT, A. Desenvolvimento profissional de professores: um quadro teórico. In: **Research, Society and Development**, Vargem Grande, v. 10, n. 14, p. 1-25, 2021.

RICHIT, A.; PONTE, J. P.; RICHIT, L. A. Conhecimento profissional de professores universitários em um estudo de aula em Cálculo. PNA - **Revista de investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, v.17, n.1, p. 89-116, 2022.

RICHIT, A.; LOSS, A. S.; BREDA, A.; TOMKELSKI, M. L. Formação para a docência no Ensino Superior a partir do Lesson Study. **Práxis Educativa**, [S. l.], v. 19, p. 1–21, 2024. Disponível em: <https://revistas.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/22773>. Acesso em: 12 jan. 2026.

ROCHA, L. L. **Logaritmos**: conceito, história, aplicações e ensino. Trabalho de conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. Campina Grande, Paraíba. 2021.

WENDLAND, Caroline Vanessa. **Logaritmos e história da matemática: elaboração de um material paradidático**. 2019, 153 f. Dissertação- Universidade do Estado de Santa Catarina. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2019.

## Capítulo 2

### Aplicações da indução mútua na Engenharia Elétrica: uma sequência de ensino investigativo desenvolvida em um curso de Teoria Eletromagnética Aplicada

Sônia Elisa Marchi Gonzatti<sup>1</sup>

#### 1. Contextualização

As abordagens de ensino investigativas têm se consolidado como possibilidade de qualificar processos de ensino e de melhorar a compreensão de conceitos científicos em diferentes áreas do conhecimento, em diferentes contextos educativos. Em sua gênese, partem da premissa de que o conhecimento é construído a partir de situações-problema que mobilizam os conhecimentos prévios dos estudantes, por um lado, e que desencadeiam uma série de práticas epistêmicas que leve à construção de novos conhecimentos (Carvalho, 2018; Sasseron, 2015. Franco e Munford (2020), assinalam que, embora haja diferentes formas de identificar elementos presentes no Ensino por Investigação, há alguns elementos comuns aos diferentes referenciais. Destacam, nesse ínterim, que os objetivos do Ensino por Investigação “giram em torno de aprender ciências e/ou sobre ciências, desenvolver atitudes científicas e compreender/participar do mundo contemporâneo” (ibid., p. 692). Neste trabalho, adotamos os referenciais teóricos do Ensino por Investigação, concebido como uma abordagem didática que parte de um problema que orienta uma sequência estruturada de atividades que promovem a análise, reflexões e tomada de decisão em relação ao objeto de estudo, pautando-nos em referenciais como Carvalho (2018), Franco e Munford (2020) e Sasseron (2015).

Em prol do Ensino por Investigação, Franco e Mundorf (2020, p. 688) assinalam que as tendências inovadoras no ensino de ciências “apontam as potencialidades do engajamento dos estudantes em práticas como argumentação, modelagem e explicação; e que tais práticas estão interligadas ao conhecimento conceitual de Ciências”. Apesar desse reconhecimento, o ensino de Ciências, em suas diferentes disciplinas científicas, quer na Educação Básica, quer na Educação Superior, ainda prioriza modelos de ensino e currículos com ênfase em objetivos de aprendizagem conceituais (Zompero *et al.*, 2022; Franco; Munford, 2020). Entre as alternativas de superação desse cenário, Duschl (2008, *apud* Franco; Munford, 2020), propõe que currículos e práticas de ensino sejam concebidos visando a um equilíbrio entre objetivos de aprendizagens conceituais, epistêmicos e sociais. No domínio epistêmico, isso implicaria incluir práticas epistêmicas nas situações de ensino, oportunizando que os alunos vivenciem aspectos inerentes à produção de conhecimentos. O domínio social, por sua vez, manifesta-se principalmente por meio das interações entre pares, entre alunos e professores. Pode ser contemplado, ainda, através de trabalhos colaborativos, em que os estudantes têm oportunidade de contrastar argumentos, explicações e fortalecê-los nessas interações (Franco; Mumford, 2020). Articulados, estes domínios – conceitual, epistêmico

---

<sup>1</sup> Doutora em Educação (PUCRS). Professora de Física. Pesquisadora no Programa de pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas. soniag@univates.br.

e social – contribuem para o desenvolvimento de uma visão mais crítica sobre as ciências e sua natureza, compreendendo-a como construção humana e interligada a diferentes dimensões da vida humana.

O ensino de diferentes disciplinas científicas do campo das Ciências Exatas, no âmbito de cursos de graduação em Engenharia, pode ser problematizado a partir destas abordagens. É fato que os modelos curriculares e didáticos do Ensino Superior são mais resistentes à mudança e à inovação do que aqueles da educação básica (Zabalza, 2013; Lucarelli, 2009). As estatísticas do Censo da Educação Superior em cursos de Engenharia, Física e correlatos de certa forma corroboram esse fato, já que recorrentemente revelam altos índices de evasão ou reprovação nestes cursos. Na mesma linha reflexiva, Rossato (2011) e Manske e Amorim (2024), alertam que as inovações curriculares têm sido mobilizadas, no Ensino Superior, muito mais em função da influência de tendências como a globalização e as exigências do mercado, que trazem no seu bojo o pensamento neoliberal, do que em função de processos pedagógicos formativos que tensionam e buscam alternativas aos modos tradicionais de ensinar.

Assim, ainda que venham ocorrendo inovações curriculares em diferentes cursos, segue necessário e relevante avançar na análise e implementação de iniciativas que incorporem princípios teórico-metodológicos de abordagens investigativas nos processos de ensino e aprendizagem no contexto do Ensino Superior. Em particular, interessa-nos o campo empírico de cursos de graduação em Engenharia, visto sua interface com ensino de Física, de Cálculo e afins. Neste contexto, este estudo analisa uma prática de ensino investigativa, concebida segundo princípios do Ensino por Investigação, desenvolvida com estudantes do componente curricular de Teoria Eletromagnética Aplicada, ofertada em Regime Especial<sup>2</sup>, do bacharelado em Engenharia Elétrica da Universidade do Vale do Taquari - Univates. O tema escolhido para elaborar a Sequência de Ensino Investigativo foi a indução mútua e suas aplicações (Notaros, 2012). Em termos metodológicos, trata-se de um relato de experiência permeado por análises reflexivas, com ênfase nos conhecimentos e estratégias mobilizados pelos alunos na análise do problema proposto.

Na continuação, este texto detalha a Sequência de Ensino Investigativo desenvolvida e, posteriormente, apresenta as análises feitas a partir da implementação da SEI.

## **2. A Sequência de Ensino Investigativo desenvolvida**

O tema escolhido para a SEI foi a indução mútua, um fenômeno eletromagnético com amplas aplicações na Engenharia Elétrica (Notaros, 2012; Sadiku, 2012). Cabe mencionar que os três estudantes matriculados no componente de Teoria Eletromagnética Aplicada já têm experiências profissionais na área, o que também colaborou para a decisão na escolha do tema e na elaboração do problema mobilizador da SEI. Reverberando Carvalho (2018), a escolha de um bom problema é essencial para desencadear processos investigativos e práticas epistêmicas que levem à sua modelagem, análise e explicação. O problema deve gerar algum nível de desconforto, inquietação e dúvida, o que implica que não seja muito simples ou, em oposição, tão complexo a ponto de não fazer sentido para o estudante. Dito de outra forma, um bom problema precisa mobilizar pontes entre o que o aluno já

---

2 Modalidade de oferta curricular para atender grupos de até 8 estudantes. A turma em questão tinha 3 alunos matriculados, em diferentes etapas do curso (um concluinte, um aluno de 8º semestre e um aluno de 4º semestre, todos de Engenharia Elétrica).

sabe e o que ainda não sabe, situando-se na zona de desenvolvimento proximal (Carvalho, 2018).

Outro preceito que precisa ser observado na organização de uma SEI é o grau de liberdade intelectual concedido ao aluno, que vai desde atividades mais fechadas, com problema, estratégias de resolução do problema e formas de sistematização propostas pelo professor, até atividades com grau de abertura intermediária, em que o professor propõe o problema, mas os alunos é que desenham as estratégias de investigação, até atividades de maior nível de liberdade intelectual, em que os problemas e as estratégias são desenhados pelos estudantes (Carvalho, 2018).

Avançando, o Quadro 1 apresenta uma síntese da SEI desenvolvida, com o delineamento das etapas.

Quadro 1 - Síntese da SEI sobre indução mútua

<b>Problema</b>	
Um engenheiro eletricitista está projetando um dispositivo elétrico que funciona baseado no fenômeno da indução eletromagnética. Ele precisa ajustar parâmetros de um circuito primário de modo que estes produzam alterações eletromagnéticas no circuito secundário do dispositivo. Qual(is) parâmetros ele poderá ajustar de modo a alterar os efeitos indutivos? Justifique sua resposta. Descreva.	
<b>Etapas</b>	<b>Estratégias</b>
<b>Etapa 1 - Apresentação do problema</b>	Registro de hipóteses, de forma individual (google docs) Discussão dos argumentos iniciais em grupo (trio) e (re)formulação das ideias iniciais. Apresentação de questões adicionais para discussão: É possível produzir estas alterações sem alterar a tensão e/ou a corrente do circuito primário? Por quê? É possível produzir estas alterações alterando parâmetros do circuito primário? Justifique: Quais são os parâmetros que influenciam diretamente na indutância do circuito? Pesquise a equação e definição de indutância e compare às suas respostas anteriores. Faça um paralelo entre o parâmetro indutância em um “circuito magnético” e o parâmetro resistência em um circuito elétrico. O que podemos concluir? <b>Registros no Google Formulários</b>
<b>Etapa 2 - Desenvolvimento/ resolução do problema</b>  A professora vai “mapeando” os conhecimentos pertinentes já evidenciados pelos estudantes, para delinear os próximos passos.	<b>2.1 -</b> Discussão entre os alunos, sem intervenção da professora, validando (ou não) e compatibilizando as distintas hipóteses. <b>2.2 -</b> Produção de um texto coletivo que represente as hipóteses e argumentos consensuadas no grupo (cada aluno acrescenta esse texto à sua tarefa inicial, individual). <b>Registro no Google Docs</b>  <b>2.3 - Apresentações e discussões iniciais</b>  <b>2.4 -</b> Aula expositiva-dialogada, com apresentação de equações afins e suas relações com os parâmetros que influenciam na indução mútua. Este momento da aula foi conduzido de forma a contemplar os conhecimentos prévios dos alunos de forma a articular com novos conceitos e mitigar eventuais erros conceituais.

<b>Etapa 3 - Sistematização e aprofundamento dos conhecimentos</b>	<b>3.1</b> - Pesquisa e apresentação individual sobre aplicações práticas da indução mútua em situações, processos ou máquinas à escolha de cada aluno. Fatores práticos e de projeto que devem ser considerados. Avaliação por meio de rubrica, com critérios previamente combinados com os alunos.
<b>Etapa 4 - Comunicação de resultados e feedbacks Retomada do problema, socialização das aprendizagens construídas e avaliação</b>	4.1 - Seminários individuais de apresentação (15 a 20 min por aluno). 4.2 - Aprofundamento do tema, com aula mediada pela professora de física. Aula prática no laboratório de Máquinas Elétricas da universidade.

Fonte: Da autora, 2025.

Quanto à cronologia, a SEI foi desenvolvida no mês de novembro de 2024, envolvendo dois encontros síncronos, com duração aproximada de 2,5 h cada, e um momento assíncrono, em que os alunos realizaram seus estudos individualizados. No primeiro encontro, foram implementadas as etapas um e dois da SEI. É importante ressaltar que a organização de uma SEI em etapas é flexível, já que o propósito principal é possibilitar que diferentes estratégias, metodologias e práticas epistêmicas sejam encadeadas de modo a retornar ao problema e respondê-lo com novos conhecimentos.

A etapa 3 foi encaminhada ao final do primeiro encontro, ocorrendo de forma assíncrona e no intervalo entre os dois encontros síncronos. A professora titular ficou à disposição para orientações individualizadas, tanto de forma síncrona quanto assíncrona. A conclusão da SEI ocorreu no segundo encontro síncrono, dedicado à atividade prática em laboratório (com propósito de aprofundar e consolidar aprendizagens) e à etapa 4, da comunicação de resultados e avaliação.

De modo geral, cabe destacar que a mediação docente ocorreu de forma situada e deliberada. Situada porque as explicações e questionamentos foram articulados aos conhecimentos prévios dos alunos, às dúvidas emergentes e às imprecisões conceituais evidenciadas durante as discussões. Foi deliberada, pois modelos investigativos pressupõem que o professor inclua, em seu planejamento, objetivos de aprendizagem epistêmicos, como a argumentação, modelagem, explicação, confrontação de ideias. Em efeito, na ótica do Ensino por Investigação, os conhecimentos conceituais precisam ser articulados aos domínios epistêmico e social da construção de conhecimento científico, já que investigar pressupõe não só aprender algo (ciências), mas aprender sobre ciências, entendendo-a como construção humana.

### 3. Análise do desenvolvimento da SEI

O primeiro encontro com o grupo de alunos contemplou a apresentação do problema, sua contextualização, levantamento e discussão de hipóteses, inicialmente de forma individual e depois em grupo. Apresentamos, no Quadro 2, as hipóteses iniciais individuais e algumas inferências que tomamos como pertinentes.

## Quadro 2 - Hipóteses emergentes sobre parâmetros que interferem na indução mútua

<p><b>Problema:</b> Um engenheiro eletricitista está projetando um dispositivo elétrico que funciona baseado no fenômeno da indução eletromagnética. Ele precisa ajustar parâmetros de um circuito primário de modo que estes produzam alterações eletromagnéticas no circuito secundário do dispositivo. Qual(is) parâmetro(s) ele poderá ajustar de modo a alterar os efeitos indutivos? Justifique sua resposta. Descreva.</p>	
hipóteses individuais	Observações e comentários
<p><i>Alterando a corrente da bobina primária ele causa um efeito proporcional na bobina secundária. Alterando a espessura do condutor.</i></p> <p><i>Alterando o tipo de ferro magnético, geometria ou dimensões, a fim de se obter uma maior carga eletromagnética e assim transferir a bobina secundária.</i></p> <p><i>Alterar a quantidade de voltas em cada bobina para assim aumentar ou diminuir a indução, isso atrelado ao núcleo ferromagnético com um gape no fechamento para obter a maior concentração de carga magnética.</i></p> <p><i>Distância entre as bobinas... Frequência da rede...</i></p> <p><i><math>E = N \cdot (d\Phi/dt)</math> qualquer parâmetro que seja alterado desta função resulta em valores diferentes.</i></p>	<p>O estudante A1 evidencia domínio de vários conceitos físicos relacionados ao fenômeno da indução mútua, embora o termo não tenha sido citado no problema ou em sua explicação. Sua explicação também inclui termos técnicos usuais no estudo e análise de máquinas elétricas, o que possivelmente se explica pelo fato de o estudante trabalhar como projetista em uma fábrica de transformadores. Foi o único que incluiu uma equação na sua explicação e associou, ainda que de forma indireta, as variações de geometria, alinhamento ou dimensões à variação temporal do fluxo magnético através do circuito acoplado.</p> <p>Manejo do professor</p>
<p><i>Como partida pode variar a corrente no circuito primário, aumentando sua amplitude ou frequência para intensificar o campo magnético variável. Também pode modificar o número de espiras da bobina primária, já que mais espiras geram um campo magnético mais forte. A distância e o alinhamento entre os circuitos são fatores importantes, pois reduzir a separação ou melhorar o alinhamento aumenta o acoplamento magnético. Além disso, o uso de um núcleo magnético com alta permeabilidade, como ferro, intensifica o fluxo magnético entre os circuitos, como por exemplo em transformadores. Por fim, ajustar a frequência da corrente no circuito primário influencia a força eletromotriz induzida no secundário e pode otimizar a resposta do sistema, especialmente em configurações ressonantes. Esses ajustes baseiam-se na Lei de Faraday e visam melhorar a eficiência da transferência de energia eletromagnética. (A2)</i></p>	<p>A2 também evoca um conjunto de conhecimentos prévios em suas explicações, associando parâmetros práticos – distância, número de espiras – com grandezas físicas como corrente, frequência, permeabilidade magnética e sua interferência no valor do fluxo magnético.</p> <p>O estudante evidencia, ainda, relativa facilidade para associar e articular conceitos e grandezas da Física com os parâmetros “práticos” que influenciam o funcionamento de dois circuitos acoplados magneticamente</p>
<p><i>O engenheiro poderá ajustar a intensidade e a frequência da corrente elétrica no circuito primário, pois modificar a intensidade e a frequência da corrente vai alterar a taxa de variação do campo magnético, que influencia a força eletromotriz no segundo dispositivo, ele também poderá alterar o número de espiras ou utilizar um material com maior permeabilidade magnética, pois isso deverá aumentar o fluxo magnético total que atravessa o circuito secundário.</i></p>	<p>A3 é o estudante que produz uma explicação mais genérica. Embora tente fazer algumas associações com conhecimentos que já haviam sido discutidos em aula, percebe-se algumas imprecisões: além da corrente, outros parâmetros interferem na indução mútua. Também nota-se uma indistinção entre taxa de variação do campo magnético e taxa de variação do fluxo magnético, já que, em algumas situações, mesmo com campo magnético constante no tempo poderá ocorrer variação do fluxo magnético.</p>

Fonte: Da autora, 2025.

Após este momento inicial, os três estudantes foram orientados a se organizarem em um único grupo, com o propósito de discutirem sobre suas hipóteses, comparando-as e propondo, se possível, uma resposta conjunta. Nesta fase, a professora não interveio, permaneceu observando as discussões.

Desta etapa, foi possível observar que as discussões orais incluíram mais elementos ou argumentos do que o texto entregue como forma de registro do grupo, já que o registro do grupo ficou muito similar ao registro individual de A2. Por um lado, isso pode estar relacionado ao fato de que os alunos A1 e A2 evocaram os mesmos conceitos físicos e parâmetros, mas com formas de linguagem diferentes. Chamou a atenção, por outro lado, que a equação apresentada por A1 não foi incluída. Questionados, o grupo argumentou que somente um dos alunos tinha um bom domínio das equações envolvidas, e por isso tomaram a decisão de não colocar na resposta coletiva. Abaixo, transcrevemos o texto elaborado em conjunto pelos alunos.

*Como partida pode variar a corrente no circuito primário, aumentando sua amplitude ou frequência para intensificar o campo magnético variável, com a utilização de inversores de frequência. Também pode modificar o número de espiras da bobina primária, já que mais espiras geram um campo magnético mais forte. A distância e o alinhamento entre os circuitos são fatores importantes, pois reduzir a separação ou melhorar o alinhamento aumenta o acoplamento magnético. Além disso, o uso de um núcleo magnético com alta permeabilidade, como ferro, intensifica o fluxo magnético entre os circuitos, inclusive quanto maior a permeabilidade elétrica dos materiais utilizados maior será o fluxo magnético que atravessa o circuito secundário, como por exemplo em transformadores, também possibilitando a utilização de núcleos com diferentes tamanhos ou formas construtivas para melhorar a eficiência do sistema. Por fim, ajustar a frequência da corrente no circuito primário influencia a força eletromotriz induzida no secundário e pode otimizar a resposta do sistema, especialmente em configurações ressonantes. Esses ajustes baseiam-se na Lei de Faraday e visam melhorar a eficiência da transferência de energia eletromagnética.  $E (fem) = I \times R$ , onde alterarmos qualquer valor desta equação estamos afetando diretamente a indução eletromagnética.*

Essas percepções foram fundamentais para a professora mediar a continuação da etapa 2 (resolução do problema). A docente havia preparado previamente materiais de apoio (texto e apresentação de slides), explorando conceitos, equações e interpretações relativas à indução mútua. A aula dialogada, assim, foi conduzida pela professora de modo a destacar i) conhecimentos e conceitos já abordados pelos alunos; ii) relações entre suas explicações e novos conceitos; iii) diferenciação e esclarecimentos sobre imprecisões ou erros conceituais identificados.

Neste terceiro aspecto, destaca-se a discussão sobre força eletromotriz, já que, embora os alunos saibam que tem dimensão de tensão elétrica (volts), é comum utilizarem o termo força de forma indistinta de seu significado físico correto. Também avançou-se para a distinção dos conceitos de densidade do fluxo magnético e intensidade do campo magnético, já que esta diferenciação é fundamental para a compreensão das curvas de magnetização de materiais ferromagnéticos típicos, “os núcleos ferromagnéticos” mencionados pelos três alunos e que interferem na intensidade dos campos magnéticos induzidos.

### **Etapa de Sistematização e aprofundamento dos conhecimentos**

Esta etapa da SEI intercalou momentos de aula síncrona, com aprofundamentos conceituais desenvolvidos pela professora, com momentos assíncronos em que cada aluno, de forma individualizada, fez uma pesquisa e preparou um seminário sobre uma aplicação da indução mútua.

Uma das estratégias adotadas pela professora foi a de vincular sua linguagem para abordar aspectos físicos do fenômeno em análise ao vocabulário mais típico adotado no contexto da prática profissional dos engenheiros eletricitas sobre o funcionamento de máquinas elétricas (Del Toro, 1994; Notaros, 2012; De Lorenzo, s/d). Dentre os conceitos que foram enfatizados, cabe destacar as curvas de magnetização, a relutância magnética e a permeabilidade magnética diferencial.

Segundo Del Toro (1994), as curvas de magnetização são baseadas em resultados consistentes de muitos testes experimentais, para diferentes materiais e variando-se as correntes de excitação. São essenciais para analisar e parametrizar o funcionamento de máquinas elétricas, já que expressam a variação da densidade de fluxo de campo magnético  $B$  ( $\text{Wb}/\text{m}^2$ ) em função da intensidade do campo magnético  $H$ . A densidade de fluxo é controlada, em termos práticos, em função de variáveis de circuito ou de dimensionamento, com dependência dos materiais utilizados e da permeabilidade relativa. A permeabilidade magnética relativa “é um número que expressa a taxa na qual a densidade de fluxo magnético aumenta ou diminui, em relação ao vácuo” (Del Toro, 1994, p. 4). Essa permeabilidade, ainda, é dependente da densidade de fluxo magnético no circuito magnético, podendo ser expressa como a relação entre  $B$  e  $H$  num gráfico de magnetização, no qual a relação não linear entre  $B$  e  $H$  confirma esta dependência.

Ainda sobre tais curvas, é essencial que os engenheiros projetistas de máquinas elétricas façam distinção entre densidade de fluxo magnético, fluxo magnético e intensidade de campo magnético. Enquanto os primeiros apresentam dependência em relação à permeabilidade magnética do material, a intensidade do campo magnético depende apenas da corrente elétrica de excitação e da geometria do indutor. Segundo Del Toro (1994, p. 5),

É frequentemente útil, em cálculos de circuitos magnéticos, trabalhar-se com uma grandeza representando o campo magnético que seja independente do meio no qual o fluxo magnético está imerso. Isso é especialmente verdadeiro em situações reais tais como as que são encontradas nas máquinas elétricas, onde um fluxo comum penetra diversos materiais diferentes.

A Lei Circuitual de Ampère também foi revisitada na noção de circuito magnético como um “caminho” que confina o fluxo magnético à região da máquina elétrica em que é necessário intensificar o campo. Em termos práticos, esse circuito é constituído de materiais ferromagnéticos, circundados ou intercalados com entreferros, o que reduz a circulação de campo magnético a um problema unidimensional. Fisicamente, este circuito representa a circulação de campo magnético provocada ao longo de um contorno e, matematicamente, equivale ao rotacional do fluxo de campo magnético expresso na Lei de Maxwell-Ampère.

Quanto às pesquisas individualizadas as aplicações escolhidas pelos alunos e os principais conceitos desenvolvidos são sistematizados no Quadro 3.

Quadro 3 - Síntese das pesquisas individualizadas

Aluno	Aplicação	Conceitos sistematizados
A1	dimensionamento de um indutor de 12 mH e 6 A	Trouxe a demanda de um circuito RLC de proteção em rede de entrada e analisou os conceitos envolvidos no dimensionamento do indutor. Cálculo do número de espiras, do tipo de núcleo ferromagnético em função do desempenho esperado (indutância); cálculo da força magnetomotriz e estimativa da densidade de fluxo magnético, em tesla.
A2	Carregamento de dispositivos por indução	Apresentou o protótipo de um carregador por indução fabricado pelo próprio estudante, por meio de um sistema de bobinas com primário e secundário. Relacionou o protótipo ao funcionamento de transformadores. Indutância magnética. Acoplamento de bobinas.
A3	Sistemas de Proteção de Descargas Atmosféricas (SPDA)	Relacionou conceitos como a lei de Gauss da eletricidade; blindagem eletrostática; fluxo de campo elétrico, poder das pontas, ao dimensionamento de barras e para-raios de um projeto SPDA.

Fonte: Da autora, 2025.

No seminário de apresentação, o estudante A1 foi o que evidenciou um nível ótimo de articulação de conceitos e modelos físicos à aplicação abordada. Além de determinar o número de espiras a partir da escolha, em tabela de fabricante, da indutância necessária, o aluno avançou, calculando a intensidade do campo magnético induzido no núcleo ferromagnético do indutor. Partindo da força magnetomotriz determinada em ampère. espira (A.espira), determinou a relutância do circuito e o fluxo de campo magnético, para então obter uma estimativa do campo magnético induzido B. Nota-se que a diferenciação entre H (intensidade do campo magnético, dimensionado em A.espira/m, e B (SI: Wb/m<sup>2</sup> ou T) – a densidade de fluxo magnético –, que apresenta dependência do meio (Del Toro, 1994), havia sido abordada na aula de sistematização e aprofundamento ministrada.

### Considerações finais

Este trabalho teve como propósito relatar e analisar uma sequência de ensino investigativo desenvolvida no âmbito de uma disciplina de Teoria Eletromagnética aplicada de um curso de Engenharia Elétrica. Os resultados analisados corroboram a importância da abordagem didática investigativa para intermediar a aprendizagem dos estudantes envolvidos de forma mais individualizada. Foi possível perceber que os alunos avançaram em relação aos seus níveis de conhecimentos prévios, já que foram agregando novos conhecimentos a partir das atividades propostas e desenvolvidas de forma autônoma por eles.

Ainda que o problema que desencadeou a SEI tenha sido proposto pela professora, o que coloca a SEI em um grau de liberdade intelectual mais fechado em comparação àquelas situações em que o problema é escolhido pelo aluno (Carvalho, 2018), é possível inferir que as diferentes atividades da SEI favoreceram a argumentação, o confronto e a

comunicação de ideias, fatores importantes para a necessária e almejada articulação entre os domínios conceitual, epistêmico e social do conhecimento científico (Franco e Munford, 2020). Especialmente, ressaltamos a importância dessa atividade para aproximar e integrar os conceitos clássicos da teoria eletromagnética, geralmente considerados muito difíceis pelos estudantes, às suas futuras ou atuais vivências na área de formação profissional em Engenharia Elétrica.

## Referências

CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. Fundamentos Teóricos e Metodológicos do Ensino por Investigação. **Revista Brasileira De Pesquisa Em Educação Em Ciências**, v. 18, n. 3, p. 765–794, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.28976/1984-2686rbpec2018183765>. Acesso em: 06 ago. 2021.

DE LORENZO. **Máquinas elétricas rotativas**. Manual OpenLab, volume 2.

DEL TORO, Vincent. **Fundamentos de máquinas elétricas**. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1994.

FRANCO, Luiz Gustavo; MUNFORD, Danusa. O Ensino de Ciências por Investigação em Construção: Possibilidades de Articulações entre os Domínios Conceitual, Epistêmico e Social do Conhecimento Científico em Sala de Aula. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, [S. l.], v. 20, n. u, p. 687–719, 2020. DOI: 10.28976/1984-2686rbpec2020u687719. Disponível em: <https://periodicos.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/19262>. Acesso em: 1 out. 2023.

LUCARELLI, Elisa. **Teoría y Práctica en la universidad: La innovación en las aulas**. Buenos Aires: Miño y Dávila Editores, 2009.

MANSKE, Luísa Pereira; AMORIM, Mário Lopes. As diretrizes curriculares nacionais dos cursos de engenharia: discussões sobre tecnologia e formação por competências. **Revista Trabalho Necessário**, v. 22, n. 48, p. 01-24, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.22409/tn.v22i48.62216>. Acesso em 21 mai. 2025.

NOTAROS, Branislav M. **Eletromagnetismo**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

ROSSATO, Ricardo. Universidade Brasileira: novos paradigmas institucionais emergentes. In: ISAIA, Silvia Maria de Aguiar (org). **Qualidade da Educação Superior: a universidade como lugar de formação**. Porto Alegre, EDIPUCRS, 2011, p. 15-34.

SADIKU, Matthew N. O. **Elementos de eletromagnetismo**. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

SASSERON, L. H. Alfabetização científica, ensino por investigação e argumentação: relações entre ciências da natureza e escola. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v.17, n. Especial, p. 49-67, 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1983-2117201517s04>. Acesso em: 02 ago. 2025.

TELLES, Fábio. “Um olhar sobre as mudanças e os desafios para a implementação das Diretrizes Curriculares Nacionais de 2019 nos cursos de Engenharia.” **Revista Thema**, v. 22, n. 2, p. 565–583, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.15536/thema.V22.2023.565-583.2988>. Acesso em 21 mai. 2025.

ZABALZA, Miguel. Angel. Innovación en la enseñanza universitaria. Contextos Educativos. **Revista de Educación**, [S. l.], n. 6, p. 113–136, 2013. DOI: 10.18172/con.531. Disponível em: <https://publicaciones.unirioja.es/ojs/index.php/contextos/article/view/531>. Acesso em: 23 may. 2025.

ZOMPERO, Andreia de Freitas *et al.*. PRÁCTICAS EPISTÉMICAS EN LOS CURRÍCULOS DE CIENCIAS NATURALES DE PAÍSES DE AMÉRICA LATINA: ESTUDIO ENTRE BRASIL, CHILE Y COLOMBIA. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 24, p. e39681, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1983-21172022240131>. Acesso em 21 mai. 2025.

## Capítulo 3

### Tarefas exploratórias e investigativas: abordagem prática de percentuais de inclinação

Ieda Maria Giongo<sup>1</sup>

Márcia Jussara Hepp Rehfeldt<sup>2</sup>

Marli Teresinha Quartieri<sup>3</sup>

#### 1. Introdução

O ensino de disciplinas matemáticas nos cursos de Engenharia permanece como um dos desafios da formação de engenheiros, evidenciado por elevados índices de reprovação, dificuldades conceituais recorrentes e pela percepção, por parte dos estudantes, de um distanciamento entre os conteúdos matemáticos e as práticas profissionais da área (Song, 2019; Christensen, Dahl e Fajstrup, 2023; Wilkinson, 2023). Pesquisas recentes (Tossavainen, Rensaa e Johansson, 2019; Sexton, Lane e Arnett, 2022) também indicam que tais dificuldades estão associadas, em grande medida, às abordagens pedagógicas excessivamente formalistas e centradas em procedimentos algorítmicos, as quais limitam a construção de significados e a compreensão conceitual necessária à resolução de problemas em contextos reais da Engenharia.

Diante desse cenário, estudos no campo da Educação Matemática têm destacado o potencial das tarefas exploratório-investigativas como estratégia para promover o envolvimento ativo dos estudantes, a produção de conjecturas, uso de diferentes estratégias e a articulação entre distintas representações matemáticas, favorecendo uma aprendizagem mais profunda e com significado (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2016; Ponte *et al.*, 2019). Ao possibilitar que os estudantes investiguem situações problematizadoras abertas e contextualizadas, esse tipo de tarefa contribui para reduzir a fragmentação curricular e ampliar a mobilização dos conhecimentos matemáticos em situações de tomada de decisão técnica, aspecto particularmente relevante na formação em Engenharia (Viennot, 2016; Niss; Højgaard, 2019).

Frente às inovações curriculares necessárias, a Univates implementou, em 2021, o Programa chamado Aula+. Neste programa, os alunos contam com formação orientada às demandas do mercado e ao desenvolvimento regional, o que também é preconizado pelas Diretrizes Curriculares Nacionais das Engenharias. Nos cursos de Engenharia da Univates – nos projetos pedagógicos –, é possível encontrar apontamentos basilares que indicam princípios que servem

[...] de sustentação conceitual, metodológica e filosófica para a proposta, quais sejam: transversalidade, experimentação, criação, alteridade e aprendizagem. Cada um desses princípios diz respeito a uma perspectiva pedagógica e, ao mesmo tempo, encontram-se

1 Professora titular da Universidade do Vale do Taquari - Univates.

2 Professora titular da Universidade do Vale do Taquari - Univates.

3 Professora titular da Universidade do Vale do Taquari - Univates.

articulados entre si. Por sua vez, em meio a tais princípios, configura-se mais uma vez a centralidade da aula, o que faz acreditar que a mudança curricular emerge no espaço e tempo de uma aula (Univates, 2021, p. 8).

E neste cenário, a IES propõe dois formatos de aula para que os estudantes se apropriem dos saberes do mundo,

[...] Para tal propósito, os diferentes componentes curriculares que integram um curso de graduação passam a ser ofertados em formatos de aula denominados como atelier e seminário. O atelier pode ser pensado como um espaço de aprendizagem, espaço da matéria-prima, da artesanaria, da criação de pensamentos e de materialidades, de procedimentos, de exercícios, de experimentações, de tentativas e errâncias. O seminário, como espaço de estudo e de um pensar coletivo, de um saber compartilhado, espaço de pesquisa, de escrita, de construção conceitual. Sendo assim, a aula seminário e aula atelier indicam escolhas metodológicas pelos professores de como pensar e criar uma aula, considerando permanentemente a indissociabilidade entre teoria e prática, bem como entre ensino, pesquisa e extensão (Univates, 2021, p. 9-10).

Desta forma, as aulas possibilitam ao professor ensaiar, criar, pesquisar e experienciar distintos modos de se conectar com a matéria de estudo. “Uma aula é necessariamente relacional, assim o professor é um mediador, mas não mediador entre pessoas e, sim, entre o sujeito e o mundo [...]” (Univates, 2021, p. 9-10). E neste cenário se desenvolve um componente curricular denominado Modelagem de Situações Dinâmicas, cuja ementa é “Estudo do comportamento de situações dinâmicas e aperfeiçoamento das diversas formas de representação, seja na forma de texto técnico, gráfico, tabela, equação ou lei matemática” (Univates, s.d.).

Este é um componente curricular que antecede as disciplinas de Cálculo e Física e, de certa forma, retoma conteúdos do Ensino Médio, mas em uma perspectiva mais experimental, aberta e com significado para os estudantes. Assim sendo, nela são exploradas tarefas exploratório-investigativas, pois entende-se que elas posicionam o estudante no centro dos processos de ensino e de aprendizagem, requerem que o professor seja um mediador e favorecem a aprendizagem.

Diante desse contexto, o objetivo deste capítulo do livro é ilustrar como foi desenvolvida uma tarefa exploratório-investigativa junto a três turmas de estudantes no componente curricular Modelagem de Situações Dinâmicas<sup>4</sup>. A tarefa, que aborda o percentual de inclinação de ruas do Vale do Taquari, foi planejada de forma conjunta pelas professoras pesquisadoras, e alguns resultados são expressos na seção resultados.

## 2. Alguns pressupostos de Investigação Matemática

De acordo com Rehfeldt *et al.* (2019, 2021), a investigação matemática pode ser entendida como uma tendência de ensino centrada em tarefas de natureza exploratória-investigativa que desafiam os estudantes a enfrentar situações-problemas abertas, mobilizando estratégias diversas, elaborando conjecturas e construindo significados por meio da interação e da discussão coletiva. Palhares (2004) também assevera que elas são de natureza aberta e se diferenciam dos problemas tradicionalmente explorados em sala de aula, uma vez que admitem múltiplas respostas e/ou diferentes estratégias de resolução.

---

4 As ideias da tarefa investigativa estão atreladas ao projeto de pesquisa financiado pela FAPERGS pelo edital 07/2021.

Em razão dessas características, tais tarefas exigem dos estudantes envolvimento, tempo para exploração, criatividade e interesse na sua resolução.

Em complemento, a investigação matemática se constitui em uma metodologia que favorece o desenvolvimento de habilidades do pensamento, relacionadas à busca, ao questionamento e à curiosidade intelectual, contribuindo para que o estudante assuma um papel ativo e responsável na construção do próprio conhecimento. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 20):

Podemos dizer que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Esses momentos, sugeridos por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), são desenvolvidos, prioritariamente, em grupos. Nesse sentido, Deaquino (2008) também sugere que as tarefas sejam resolvidas em pequenos grupos, de modo que, posteriormente, as produções sejam socializadas e discutidas no grande grupo. Nessa dinâmica, os estudantes apoiam-se mutuamente na elaboração de conjecturas e na definição de estratégias de resolução, o que potencializa a interação e a colaboração. Esse processo contribui para o desenvolvimento da confiança, para o enfrentamento das próprias dificuldades e para a aprendizagem por meio da troca de ideias e da discussão coletiva dos problemas propostos.

No que se refere ao papel do professor, Ponte, Brocardo e Oliveira (2015) ressaltam que, na exploração de tarefas investigativas, sua atuação assume predominantemente a função de mediador do processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, o professor questiona, provoca reflexões e solicita explicações acerca das estratégias e conjecturas construídas pelos alunos, favorecendo uma postura ativa e autônoma dos estudantes ao longo da resolução das tarefas. Cabe salientar que na tarefa proposta aos estudantes, estes tiveram a liberdade de realizar questionamentos e mostrar conjecturas preliminares no decorrer dos dias em que estavam resolvendo a situação-problema.

A partir dessas ideias, três professoras que ministram o componente curricular Modelagem de Situações Dinâmicas planejaram, descreveram e incentivaram estudantes de três distintas turmas para resolver uma tarefa exploratório-investigativa. Cabe frisar que a referida tarefa não foi desenvolvida em sala de aula, mas sim em horário extraclasse, sendo um item que compunha 15% da avaliação do semestre. A seguir a descrição da tarefa com algumas respostas dadas pelos estudantes.

### **3. Descrição das práticas realizadas e alguns resultados**

Nesta seção é apresentada a tarefa que foi entregue para os estudantes, bem como a descrição de algumas respostas dadas por eles. A proposta foi desenvolvida como Estudos Independentes, em três turmas paralelas do componente curricular Modelagem de Situações Dinâmicas. Os Estudos Independentes no Ensino Superior constituem uma abordagem pedagógica centrada na autonomia discente, em que o estudante se responsabiliza pelo próprio processo de aprendizagem, investigando temas de interesse específico. No caso desta tarefa, ela contou com orientação docente, porém com flexibilidade de tempo e sem a exigência de frequência contínua em atividades presenciais. Os estudantes dispunham

de 30 dias para efetuá-la, e as aulas entre o período de disponibilização e entrega serviram de espaço para tirar dúvidas. Ademais, a tarefa, a seguir descrita, podia ser realizada individualmente ou em duplas.

#### DESCOBRINDO INCLINAÇÕES

Leitura do artigo “Inclinações das ruas e das estradas” do prof. Fernando Lang da Silveira publicado na revista Física na Escola, São Paulo, 8(2):16-18, 2007. Link de acesso:

<https://drive.google.com/file/d/1PgepH2AToaRklUqljydRSGx2AKXxDv8e/view>

Após a leitura e análise do artigo, a tarefa consiste em determinar inclinações máximas de ruas da cidade de vocês. Para tanto, procure um trecho em declive para calcular a respectiva inclinação. A tarefa deve conter os seguintes itens:

a) Foto recente da rua, com o respectivo nome, incluindo o do município. Elenque suas principais características, enfocando condições de trafegabilidade, região central ou periférica, principais estabelecimentos existentes, dentre outras que julgar relevantes.

b) Cálculo detalhado da inclinação da rua. Caso não faça uso de algoritmos, explique detalhadamente o raciocínio utilizado.

c) Pesquise os valores máximos de inclinação permitidos. Verifique se a rua em questão está de acordo com a legislação vigente. Não esqueça de evidenciar as referências bibliográficas consultadas. A ausência delas implicará na nulidade deste item.

d) Por fim, expresse o que achou da inclinação encontrada, comentando se a superestimou ou subestimou.

Inicialmente, a tarefa gerou algumas dúvidas, haja vista os estudantes (a maioria estava cursando o primeiro semestre no Ensino Superior) estarem habituados a resolver exercícios, o que difere de resolver tarefas exploratório-investigativas, como assevera Palhares (2004). Os exercícios são atividades fechadas, com resposta única e precisa, já as tarefas, em especial as abertas, geram distintas possibilidades que carecem de justificativas para as escolhas feitas. Ademais, os grupos de estudantes moram em distintas ruas e municípios, o que trouxe uma quantidade considerável de respostas.

Os estudantes tiveram que ler o artigo do professor Fernando Lang da Silveira. Neste artigo “*Inclinações das ruas e das estradas*”, o autor discute a discrepância entre a percepção comum – especialmente de estudantes – e as inclinações reais de ruas e rodovias, evidenciando que essas inclinações costumam ser significativamente superestimadas. Por meio de exemplos do cotidiano e de medições simples realizadas a partir de fotografias, o autor mostra que ladeiras consideradas “muito íngremes” geralmente apresentam ângulos relativamente pequenos quando comparados às estimativas intuitivas. O texto fundamenta essa análise em conceitos físicos, como declividade, forças envolvidas no movimento em planos inclinados e o papel do atrito entre pneus e pavimento, explicando por que inclinações elevadas são raras ou inviáveis do ponto de vista da engenharia viária e da segurança dos veículos. Ao final, o autor destaca o potencial didático do tema, ressaltando que a análise das inclinações de ruas e estradas constitui um exemplo potente para aproximar a Física escolar de situações reais, favorecendo a compreensão conceitual e o desenvolvimento da leitura crítica do cotidiano. No caso deste componente curricular, o objetivo foi propor uma discussão acerca da aplicabilidade da trigonometria no triângulo retângulo.

O objetivo aqui não é apresentar todas as respostas dos estudantes das três turmas, mas problematizar algumas estratégias usadas, discutir resultados obtidos e observar se também ocorreu alguma superestimação de resultados, como apresenta o estudo do professor Silveira.

No que concerne à inclinação da rua, um dos grupos da Turma 1<sup>5</sup>, G1T1, apresentou, inicialmente, a imagem da Figura 1 e, posteriormente, identificou o ângulo de inclinação.

Figura 1 - Imagem da rua escolhida pelo G1T1 e a demarcação do ângulo de inclinação



Fonte: G1T1, 2025.

Acerca da rua, mencionaram que ela é denominada por Rua das Flores, cidade de Arroio do Meio - RS, se localiza no Morro da cidade de Arroio do Meio, é inclinada e com diversas residências. Fica na região central, localizada bem próxima ao bairro Centro. Neste bairro se encontram vários estabelecimentos, como o Mercado da Família, a Associação Esportiva Bola Cheia, Academia ao Ar Livre, Clínica Belas Águas e o CT Reabilitação e Condicionamento Físico. Também o Presídio de Arroio do Meio e o Posto de Saúde estão localizados próximos a essa rua (G1T1, 2025).

Já os cálculos foram descritos da seguinte forma:

$$\tan 8^\circ = \text{aprox. } 0,14$$

$$\text{inclinação} = \text{elevação} / \text{distância}$$

a cada 1 metro horizontal a rua sobe cerca de 0,14m.

$$\text{Inclinação em Porcentagem: } \tan 8^\circ \times 100\%$$

$$0,14 \times 100 = 14\% \text{ é a porcentagem de inclinação}$$

Fonte: G1T1, 2025.

O grupo observou que o ângulo de inclinação foi de 8°, mas não mencionou como encontrou a resposta. Possivelmente, foi utilizado um transferidor online, haja vista este ter sido apresentado em sala de aula para fins de cálculo de inclinações de outras imagens. Com relação aos cálculos efetuados, o grupo compreendeu que o valor da tangente em graus equivale ao percentual de inclinação e também interpretou que o percentual de inclinação de 14% significa que “a cada 1 metro horizontal a rua sobe cerca de 0,14m” ou 14 cm.

5 Os grupos de estudantes serão denominados de G1T1, G1T2 até GnT3. G é a denominação do grupo e T são as distintas turmas.

Sobre a inclinação, um dos estudantes comentou:

A inclinação calculada, de aproximadamente  $8^\circ$  (cerca de 14%), ficou **abaixo do que nós imaginávamos inicialmente**. Visualmente, eu tinha a impressão de que o morro era bem mais íngreme, então acabei superestimando a inclinação antes de fazer o cálculo. O cálculo mostrou que, apesar de parecer bastante inclinado, o valor real é mais moderado do que nossa expectativa inicial sugeria.

Da mesma forma como Silveira (2007) ilustrou os resultados, este grupo superestimou a inclinação, pois acreditavam que o ângulo/percentual de inclinação seria maior. De maneira similar no que concerne à inclinação, um dos integrantes do G2T1 comentou que a rua escolhida está

localizada na região central de Arroio do Meio. Tráfego alto, lojas e uma praça próximas. Muitas pessoas passam por este local todos os dias. **Vivendo na região por anos**, eu sempre achei a rua levemente inclinada. Porém, fazendo os cálculos, a inclinação foi **menor** do que na perspectiva real (G2T1, 2025).

O que chama atenção aqui é o fato de um dos estudantes do grupo residir há anos na região, mas sua percepção acerca da inclinação estava equivocada. Distintamente, dos dois grupos anteriores, outro (G3T1) subestimou o valor do percentual de inclinação. Acerca disso, os estudantes afirmaram que “A inclinação encontrada foi subestimada por nossa parte, pois acreditávamos que a inclinação da via seria maior, em vista da dificuldade de veículos pesados circularem nela, especialmente em dias de chuva”. Aqui cabe mencionar que a rua e casa escolhidas é de um dos estudantes, ou seja, também está presente no cotidiano do aluno.

Ainda sobre o G3T1, o grupo mencionou que usaram o transferidor online para averiguar o ângulo e o determinaram como ilustra a Figura 2. O ângulo de inclinação foi de  $12^\circ$ , o que corresponde a um percentual de 21,25% de inclinação.

Figura 2 - Imagem apresentada do Grupo G3T1



Fonte: G3T1, 2025.

Apesar de o grupo acreditar que sua inclinação seria maior do que a encontrada, responderam que, com base no documento Manual de Projeto Geométrico de Travessias Urbanas, publicado em 2010, “a inclinação máxima permitida para vias locais é de 6% (desejável) e 15% (Absoluto)” (G3T1), e portanto, sua inclinação está acima do permitido, de acordo com este manual.

Ainda em relação aos declives/aclives discutidos em sala de aula, um dos integrantes do Grupo G4T1 mencionou um fato relevante acerca da rua que escolheram, qual seja, a notícia, publicada em órgão de imprensa local de que uma carreta interrompeu o trânsito no Bairro Campestre, em Lajeado. O grupo insere a imagem da carreta interrompendo a rua e sobre isso escreve: “embora tecnicamente a inclinação não esteja muito acima do limite para vias urbanas, na prática ela representa um declive significativo e potencialmente problemático” (G4T1). Isso denota que a tarefa suscitou reflexões e os fez lembrar de uma situação já vivenciada e observada.

O grupo denominado G5T1 escolheu uma rua da cidade de Guaporé, mais especificamente, perto de um mercado da cidade (Figura 3). Descreveu a localização e a relevância da escolha deste local da seguinte forma:

A Rua Ângelo José Bordin é uma das principais vias da cidade de Guaporé, sendo uma rua na região do centro da cidade. Apesar desta suposta grande inclinação, sempre foi bem cuidada e é totalmente asfaltada. Além de casas e prédios, alguns comércios tem esta rua como endereço, e um deles é o “Mercado Milesi”, como podemos ver na Figura 1. Devido a rua com inclinação acentuada, o Mercado Milesi enfrenta preocupações primárias relacionadas à **acessibilidade e à logística**. A inclinação dificulta o acesso e manobra de veículos para estacionamento e, **principalmente, a carga e descarga de mercadorias**, exigindo maior cuidado e tempo dos fornecedores. Para os clientes, há um desafio de mobilidade e segurança, especialmente para idosos ou pessoas com dificuldade de locomoção, pois o esforço físico aumenta e o risco de escorregões em calçadas molhadas ou irregulares é elevado.

Figura 3 - Imagem apresentada do Grupo G5T1



Fonte: G5T1

A imagem escolhida pelo grupo denota que, além de atender ao enunciado da questão, escolheram um problema que lhes trouxe significado, ressaltando a importância de problematizar a acessibilidade, mas também a logística, uma vez que mencionaram a necessidade de cuidado na carga e descarga no local, além do tempo de manobra dos veículos. Para Sexton, Lane e Arnette (2022), as intervenções em sala de aula são eficazes quando incluem aprendizagem contextualizada em exemplos específicos da área, o que contribui para o aumento dos índices de aprovação e reduz as altas taxas de evasão. No caso deste problema apresentado aos estudantes, houve conjecturas reais em relação à acessibilidade e à logística.

Após essas discussões iniciais, o grupo apresentou os cálculos mencionando as dimensões dos dois catetos, conforme Figura 4.

Figura 4 - Imagem apresentada do supermercado



Fonte: G5T1.

Os cálculos efetuados pelo grupo estão na Figura 5.

Figura 5 - Cálculos efetuados pelo G5T1

Logo, é necessário usar a função tangente:

$$\tan(\alpha) = \text{Cateto Oposto} / \text{Cateto Adjacente}$$

Substituindo com os nossos valores:

$$\tan(\alpha) = 1,47 / 3,95$$
$$\tan(\alpha) \approx 0,37215$$

Agora, utilizamos a função Arco-Tangente ( $\arctan$  ou  $\tan^{-1}$ ), que é a função inversa da tangente. Esta função nos permite determinar o ângulo cuja tangente é o valor encontrado:

$$\alpha = \arctan(0,37215)$$

Utilizando uma calculadora científica, encontramos o valor de  $\alpha$  em graus:

$$\alpha \approx 20,41^\circ$$

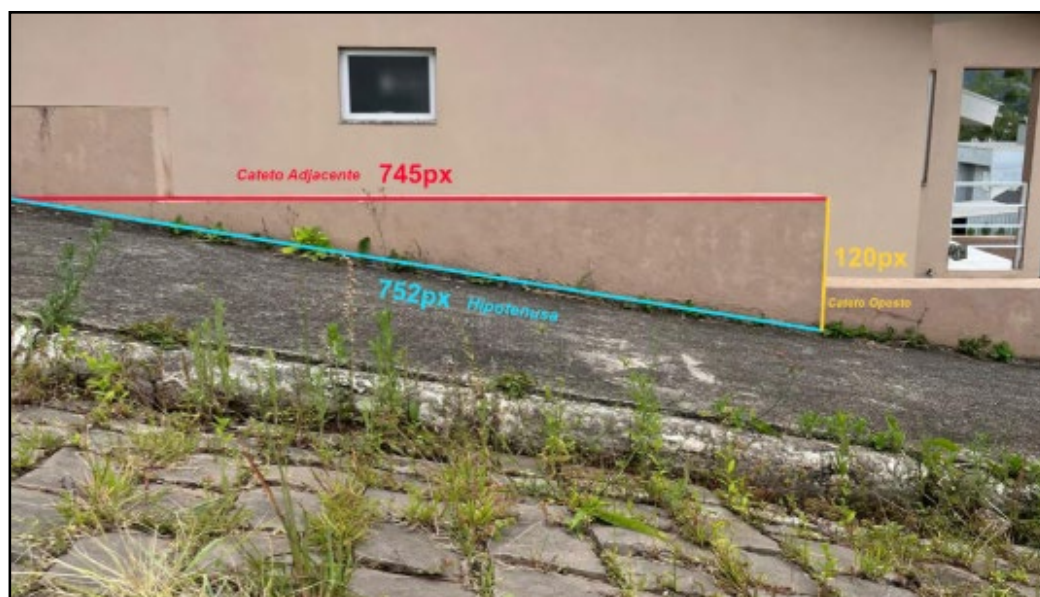
Fonte: Grupo G5T1

Ao interpretarem a resposta afirmaram:

Nós sabíamos, através da foto, que a inclinação estava fora dos padrões recomendados, mas não tínhamos dimensão exata do quão acentuada ela realmente se apresentava. Nossa estimativa variava de  $13^\circ$  a  $15^\circ$ , ficando um pouco fora dos limites. No entanto, fomos **surpreendidos pelo cálculo preciso**, que demonstrou uma inclinação de  $20,41^\circ$  (G5T1).

Outro grupo G6T1 merece destaque em função da estratégia de resolução utilizada. A imagem captada por este grupo (Figura 6) foi registrada na Rua Avelino Fuchs, Conventos, Lajeado – RS.

Figura 6 - Imagem apresenta pelo grupo G6T1



Fonte: G6T1.

Nela pode-se observar o registro da rua inclinada e as dimensões dos catetos oposto e adjacente, além da hipotenusa, todos em *pixels*. Os estudantes deste grupo escreveram que obtiveram as medidas, por meio do software *Affinity*. O *Affinity* é um conjunto de softwares de criação gráfica desenvolvido pela empresa Serif, voltado para profissionais e estudantes das áreas de design gráfico, ilustração, edição de imagens e editoração eletrônica, capaz de informar as medidas horizontais e verticais das imagens (SERIF, 2024).

O cálculo apresentado foi resolvido conforme consta na Figura 7

Figura 7 - Desenvolvimento do G6T1

3.1.2 Cálculos iniciais

Calculando a tangente de um ângulo desconhecido:

$$\tan(x) = \frac{120}{745} \quad | \quad \tan(x) = 0.1610738255$$

3.1.3 Ângulo e percentual de inclinação

Calculando o percentual de inclinação:

$$\begin{aligned} \text{Percentual Inclinação} &\approx 0,16107 * 100 \\ \text{Percentual Inclinação} &\approx 16,107\% \end{aligned}$$

Portanto, a inclinação observada na fotografia é aproximadamente 16,1%.

Calculando o ângulo de inclinação (em graus), através da tangente obtida:

$$\begin{aligned} \text{Ângulo de Inclinação} &\approx \arctan(0.1610738255) \\ \text{Ângulo de Inclinação} &\approx 9.15^\circ \end{aligned}$$

Fonte: G6T1

Como se pode observar, a estratégia usada foi o uso da fórmula  $\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ . Desse modo, conseguiram calcular o percentual de inclinação, que foi de 16,1%, assim como o ângulo de inclinação que corresponde a 9,15°. O grupo conseguiu calcular os valores em porcentagem, conforme solicitado, mas também mostraram esse valor e sua forma de conversão para graus.

Sobre a rua, questionamento feito no roteiro de atividades, o grupo registrou:

A parte mais inclinada da rua não possuía muro ou cerca que permitisse fazer a fotografia desse ponto. Isso ocorre porque é uma rua onde as moradias são recentes e, por enquanto, essa é a única função que ela cumpre – servir às residências. A rua está localizada em uma parte do bairro Conventos que ainda está em desenvolvimento. Ao longo da via, observam-se diversos terrenos nos quais novas moradias estão em construção. Por se tratar de uma rua que serve principalmente como acesso à via principal – além de apresentar acentuada inclinação e uma largura reduzida – é pouco provável que venha a abrigar estabelecimentos comerciais (G6T1, 2025).

Em outras palavras, o grupo identificou e inferiu que nesse local somente ocorrerá a construção de casas, sendo pouco provável edificações maiores ou a emergência de casas comerciais. Mas ao serem questionados sobre qual inclinação pensavam a rua ter, mencionaram:

Antes de realizar o cálculo, acreditava-se que a rua teria por volta de 10% de inclinação e que esse nível não traria grandes impactos no tráfego, no comércio ou nas residências. Também se imaginava que, por ser uma via residencial e com pouco movimento, uma inclinação moderada não afetaria tanto o dia a dia das pessoas nem dificultaria o uso da rua para novas moradias. Durante a visita a rua, foi percebido que a inclinação afetava o equilíbrio de pedestres, apesar de não atrapalhar o caminhar. Porém, acreditamos que o acesso **poderia ser mais adaptado para pessoas com deficiência motriz, ou de idade avançada** (G6T1).

Este grupo, assim como o G3T1, também subestimou o percentual de inclinação, pois o valor encontrado foi em torno de 16%.

O grupo G1T3 também usou a ideia de pixels ao calcular o ângulo de inclinação da rua escolhida em outra cidade:

Está localizada no sudeste da cidade de Santa Cruz do Sul, faz parte de um dos bairros mais antigos e o sexto mais populoso da cidade de Santa Cruz do Sul. É uma rua em território residencial, porém em um bairro com uma certa presença de comércio e serviços como o Centro Esportivo SESI, Clube Aliança e relativamente perto de atrações turísticas como o Parque da Santa Cruz, sendo assim não se classificando como parte de uma região periférica pela quantidade de serviços, ao mesmo tempo não é tão próximo de bairros que possuem uma atividade comercial e maior movimento, como o centro e o bairro universitário. O bairro possui uma trafegabilidade alta em horários de pico por conta de sua concentração populacional, porém a Rua Helmuth F. Dreher não possui tanta trafegabilidade por conta de sua posição geográfica.

O grupo então tirou uma foto da rua destacando que para encontrar o ângulo de inclinação deveriam identificar o cateto oposto e o cateto adjacente. E destacaram: “Na figura abaixo [Figura 8], o cateto oposto se identifica pela linha vermelha, a linha azul é o cateto adjacente e a linha verde é a hipotenusa (auxiliando para demarcar o comprimento total do cateto adjacente)”. E continuaram na descrição do que fizeram:

Em seguida, identificamos as medidas dos catetos, nesse caso a unidade de medida não é tão relevante, pois se fizessemos o cálculo tanto por pixels ou por centímetros a porcentagem de inclinação continuaria a mesma. De acordo com a régua, a linha vermelha (cateto oposto) possui 243 pixels, já a linha azul (cateto adjacente) possui 1178 pixels.

Figura 8 - Imagem apresenta pelo grupo G1T3



Fonte: G1T3

Observa-se que o grupo está ciente de que calcular o percentual usando pixels ou medidas de comprimento (neste caso, uso de centímetros) o resultado será o mesmo. Importante essa relação, pois ocorre em alguns casos que os alunos não conseguem identificar essas relações com o uso do percentual. Segue, na Figura 9, o cálculo realizado por esse grupo:

Figura 9 - Desenvolvimento do G1T3

Seguindo essa lógica, realizamos o cálculo da tangente do ângulo:

$$\tan(\theta) = 243/1178 \approx 0.2063.$$

Esse resultado é a tangente do ângulo, para sabermos a inclinação da rua em porcentagem, multiplicamos por cem, assim nos dando o resultado de uma estimativa de 20,63% aproximado.

No entanto, esse resultado não é a inclinação em GRAUS, apenas a inclinação percentual. Para descobrirmos esse valor em graus, realizamos o cálculo de arco-tangente (recomenda-se utilizar a calculadora visto que é um cálculo muito trabalhoso). Realizando o cálculo, descobrimos um valor aproximado de 11,65°.

$$\theta = \arctan(0.2063) \approx 11.65^\circ$$

Fonte: G1T3

O grupo destacou que o município de Santa Cruz do Sul não apresenta de forma explícita a declividade máxima permitida para vias urbanas, indicando apenas que não são autorizados loteamentos com declividade superior a 30%. Além disso, encontraram que a “faixa carroçável não pode ultrapassar 20% de inclinação”. Assim, concluíram que a rua que escolheram encontra-se no limite aceitável, ultrapassando levemente os 20%. Aliado a isso, inferiram que “Essa variação pode ser explicada pelo fato de vias pavimentadas com paralelepípedos possivelmente sofrerem acomodação ou afundamento ao longo do tempo, alterando de maneira sutil a inclinação original”. Por fim, destacaram que a inclinação da rua foi menor do que imaginavam, sendo assim superestimaram a inclinação da rua.

O grupo G3T2 que calculou a declividade de uma rua da cidade de Lajeado, na qual uma das componentes passa diariamente na rua para ir ao seu trabalho, usou ideia semelhante ao G1T3, fazendo os cálculos por meio das medidas em centímetros, conforme segue na Figura 10.

Figura 10 - Desenvolvimento do G3T2



Imagem 03

Neste caso, foi utilizada para fins de determinação do ângulo de inclinação da rua, a função trigonométrica tangente. Ao realizar a divisão do cateto oposto a  $\alpha$  pelo cateto adjacente a  $\alpha$  (identificados na imagem 3, como sendo 51 cm e 410 cm, respectivamente), encontra-se o valor da tangente, que será, aproximadamente, 0,1245. Como deseja-se descobrir o valor do ângulo, pode-se utilizar a tecla “2nd F” da calculadora científica, que dará o valor do ângulo.

Sendo assim, a rua é inclinada por  $7,1^\circ$ , e sua inclinação percentual é de 12,5% (determinada pela tangente de  $7,1^\circ$ ). Isso nos mostra que, em uma rua com essa inclinação, sobe-se cerca de 12,5 m a cada 100m de deslocamento horizontal.

Fonte: G3T2

O grupo superestimou o valor da inclinação da rua. A estudante do grupo G3T2 que faz o trajeto a pé da referida rua, diariamente, destacou:

Como é um trecho que normalmente realizo a pé, a sensação que temos é de que está muito mais inclinada do que realmente é, muito provavelmente em função da força que temos que exercer para subí-la, ou da força necessária para nos mantermos na descida. Confesso que foi uma atividade interessante para medir nossos critérios de dedução.

Essa sensação, sentida pela estudante, de que o ângulo de inclinação é muito maior do que realmente é, corrobora com as ideias de Silveira no texto lido pelos estudantes da disciplina.

Por fim, apresenta-se a resolução do G7T2 que analisou a Rua Sete de Setembro, no município de Santa Clara do Sul, a qual, segundo o grupo, apresenta “pontos bastante íngremes e em dias de chuva os carros que passam por ela costumam patinar, mas no geral a trafegabilidade por ela não é ruim”. Para calcular o ângulo de inclinação, este grupo traçou, algumas linhas na própria rua, conforme visualizado na Figura 11.

Figura 11 - Imagem usada pelo G7T2



Fonte: G7T2

O grupo mediu os catetos do triângulo, encontrando: cateto adjacente com 300 cm e o cateto oposto com medida de 79 cm. Então fez a divisão de 79 por 300 encontrando a inclinação de 26,33%. Calculou o arco tangente de 0,2633 chegando ao ângulo de 14,753°. O grupo destacou que leu bastante antes de realizar as medições e os cálculos e por isso imaginaram “que o ângulo dificilmente chegaria perto de 20° (pois a rua considerada a mais inclinada do mundo possui uma inclinação de 19°)”. E, tal intuição do grupo foi confirmada, uma vez que encontraram um valor próximo de 15°.

### Considerações finais

A pluralidade de estratégias adotadas pelos estudantes na resolução da tarefa investigativa evidencia um movimento de elaboração conceitual que transcende os encaminhamentos didáticos previamente apresentados. Observou-se que os participantes mobilizaram procedimentos diversos, incluindo abordagens não previstas no planejamento pedagógico, nem explicitadas no material de apoio, o que revela um afastamento em relação à mera reprodução de estratégias institucionalizadas em sala de aula.

Tal movimento indica a potência investigativa da proposta, na medida em que favoreceu a construção de percursos autorais de resolução e a mobilização de saberes não previamente sistematizados no contexto das aulas. A emergência dessas estratégias sugere a constituição de um espaço formativo no qual os estudantes puderam exercer maior autonomia intelectual, produzindo conhecimentos para além daqueles diretamente ensinados, o que está em consonância com os estudos de Ponte *et al.* (2019) sobre tarefas exploratório-investigativas.

## Referências

CHRISTENSEN, René Bødker; DAHL, Bettina; FAJSTRUP, Lisbeth. **Transforming first-year calculus teaching for engineering students** – Blocks with field specific examples, problems, and exams. arXiv:2302.05904, 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2302.05904>. Acesso em: 24 fev. 2026.

DEAQUINO, C. T. E. **Como aprender: andragogia e as habilidades de aprendizagem**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

NISS, Mogens; HØJGAARD, Tomas. **Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: the KOM Framework**. Cham: Springer, 2019.

PALHARES, P. **Elementos de Matemática para professores do ensino básico**. Lisboa: Lidel, 2004.

PONTE, J. P., BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. A aula de investigação. In Ponte, J. P. Brocardo; Oliveira, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula** (2a ed.). Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélio. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M.; VILELA, C. **Trabalhar com tarefas de investigação na aula de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2019.

REHFELDT, Márcia Jussara Hepp; GRÄFF, Camila Bassegio; QUARTIERI, Marli Teresinha; GIONGO, Ieda Maria; GONZATTI, Sônia Elisa Marchi. Elaboração de atividades exploratório-investigativas: uma possibilidade de planejamento coletivo. **Debates em Educação**, [S. l.], v. 11, n. 25, p. 202–221, 2019. DOI: 10.28998/2175-6600.2019v11n25p202-221. Disponível em: <https://www.seer.ufal.br/index.php/debateseducacao/article/view/7737>. Acesso em: 24 fev. 2026.

REHFELDT, Márcia Jussara Hepp; RUTHNER, Bruna Zanoni; GIONGO, Ieda Maria; QUARTIERI, Marli Teresinha; GONZATTI, Sônia Elisa Marchi. Tarefas Investigativas nos Anos Iniciais: Estratégias e Conjecturas Desenvolvidas pelas Crianças. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, [S. l.], v. 14, n. 2, p. 163–172, 2021. DOI: 10.17921/2176-5634.2021v14n2p163-172. Disponível em: <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2021v14n2p163-172>. Acesso em: 24 fev. 2026.

SERIF. **About Affinity**. Disponível em: <https://affinity.serif.com/pt-br/about/>. Acesso em: 15 jan. 2026.

SEXTON, Julie M.; LANE, Kelly L. S.; ARNETTE, Sandra L. Mathematical tasks and the student experience: bridging the gap between theory and practice in engineering education. **International Journal of STEM Education**, [s. l.], v. 9, n. 1, art. 44, 2022.

SILVEIRA, Fernando Lang da. Inclinações das ruas e das estradas. **Física na Escola**, v. 8, n. 2, p. 9–18, 2007.

SONG, Jiayou. How to Strengthen Mathematics Teaching in College Education. **Advances in Higher Education**, [s. l.], v. 3, n. 2, p. 117-120, 2019.

TOSSAVAINEN, Timo; RENSAA, Ragnhild Johanne; JOHANSSON, Monica. Swedish first-year engineering students' views of mathematics, self-efficacy and motivation and their effect on task performance. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, [S. l.], v. 52, n. 1, p. 23–38, 2021. DOI: 10.1080/0020739X.2019.1656827. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1656827>. Acesso em: 24 fev. 2026

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES. **Projeto pedagógico do Curso de Administração**. 2021.

UNIVATES. **Graduação** – Engenharia da Computação: Disciplinas. Disponível em: <https://www.univates.br/graduacao/engenharia-da-computacao/disciplinas>. Acesso em: 24 fev. 2026.

VIENNOT, Laurence. Didactics of Physics: the Role of Mathematical Skills. **International Journal of Science and Mathematics Education**, [s. l.], v. 14, n. 2, p. 1-15, 2016.

WILKINSON, E. C. Holistic Review: Math Anxiety and the STEM Profession. **Journal of Engineering Technology**, [s. l.], v. 40, n. 2, p. 20-42, 2023.

## Capítulo 4

### Ferramentas de Apoio: Blender e Impressora 3D

Jean Michel Mallmann<sup>1</sup>

Neste capítulo, apresentam-se dois recursos tecnológicos que desempenham papel metodológico essencial no processo de transposição dos modelos virtuais para o meio físico. O software Blender e a impressora 3D Creality CR-30 operam como ferramentas auxiliares, permitindo que, após a elaboração e a compreensão geométrica dos objetos no ambiente digital, realize-se o refinamento estético e estrutural das superfícies, culminando em sua materialização.

O Blender complementa a modelagem matemática ao viabilizar ajustes técnicos indispensáveis, tais como a atribuição de espessura (volumetria) e a suavização das malhas poligonais. Esses refinamentos adequam os modelos tanto para a visualização hiper-realista quanto para a posterior manufatura aditiva (impressão 3D). A impressora Creality CR-30, por sua vez, atua na etapa final da cadeia de produção, assegurando que os sólidos de revolução desenvolvidos matematicamente sejam materializados de forma palpável.

O objetivo desta seção é estabelecer diretrizes metodológicas para a preparação, o refinamento e a impressão dos objetos físicos. Estrutura-se, assim, um fluxo de trabalho sequencial: a concepção analítica no software GeoGebra, a otimização topológica no Blender e, por fim, a concretização física na impressora 3D. Nos capítulos 5 e 6 o leitor encontrará exemplos de objetos produzidos a partir do software GeoGebra.

#### Guia de Utilização do Blender

##### 1. O que é o Blender?

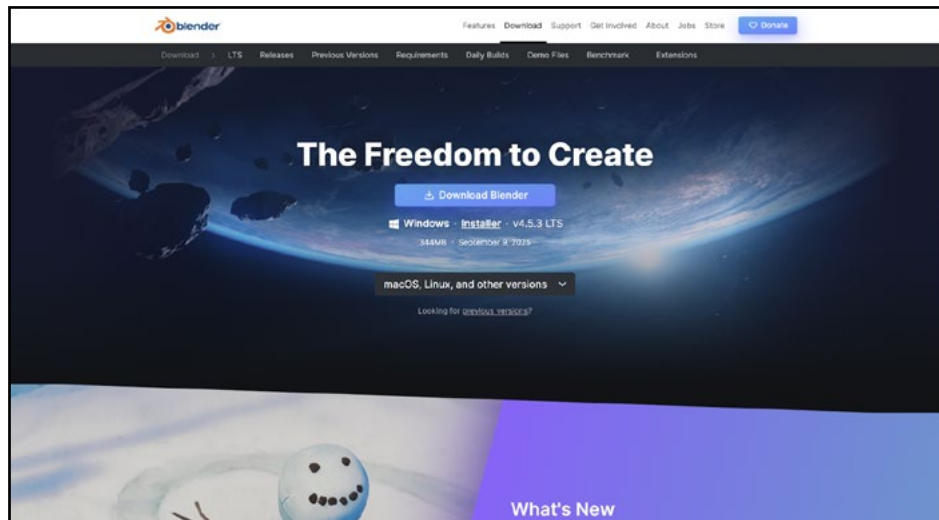
O Blender é um software gratuito e de código aberto que se consolidou como uma das ferramentas mais completas para modelagem 3D, animação e renderização. Dentro do contexto deste e-book, ele desempenha um papel fundamental como ambiente de refinamento dos modelos inicialmente construídos no GeoGebra 3D. Uma vez exportados em formato .stl do GeoGebra, os objetos matemáticos podem ser ajustados no Blender de modo a adquirir maior realismo, volume e suavidade, preparando-os tanto para a visualização quanto para a impressão 3D. Esta seção serve como um guia geral de ajustes, reunindo as orientações práticas que serão utilizadas em cada um dos objetos modelados a seguir.

---

<sup>1</sup> Graduando em Engenharia da Computação e bolsista de Iniciação Científica, Universidade do Vale do Taquari – Univates.

## 2. Download e instalação

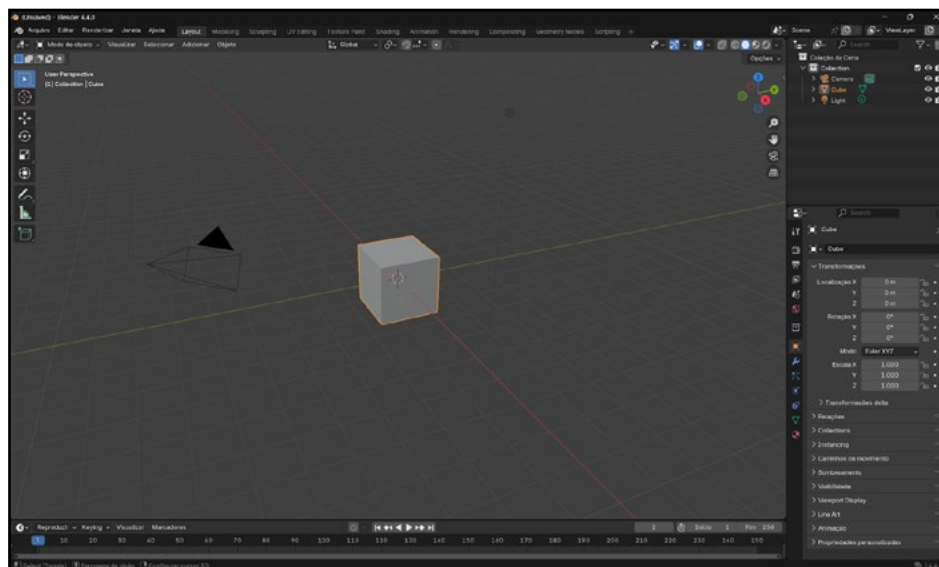
O primeiro passo para utilizar o Blender é realizar a sua instalação. O software pode ser obtido gratuitamente no site oficial ([www.blender.org/download](http://www.blender.org/download)), onde são disponibilizadas versões para diferentes sistemas operacionais, como Windows, macOS e Linux.



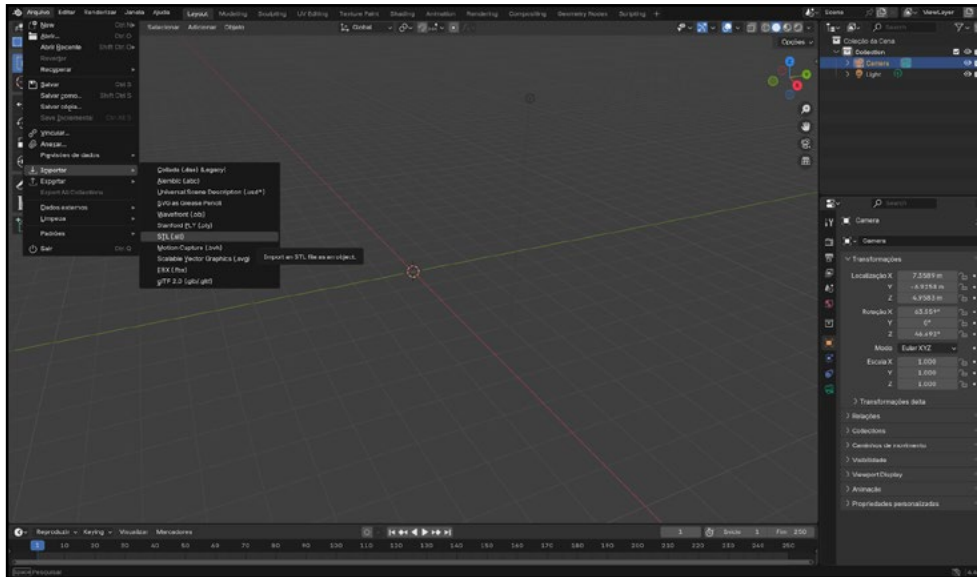
Após o download, o processo de instalação segue os padrões de cada sistema. Ao abrir o programa, o usuário terá acesso a um ambiente completo de criação 3D, cujo foco neste estudo será a aplicação de modificadores nas superfícies importadas do GeoGebra.

## 3. Passos iniciais no Blender

Ao abrir o programa pela primeira vez, é possível ver um cenário padrão, no qual está presente um cubo. Para importar o objeto criado no GeoGebra, recomenda-se remover o referido cubo, selecionando-o e pressionando a tecla Delete.



O modelo pode então ser carregado pelo caminho: Arquivo > Importar > STL.



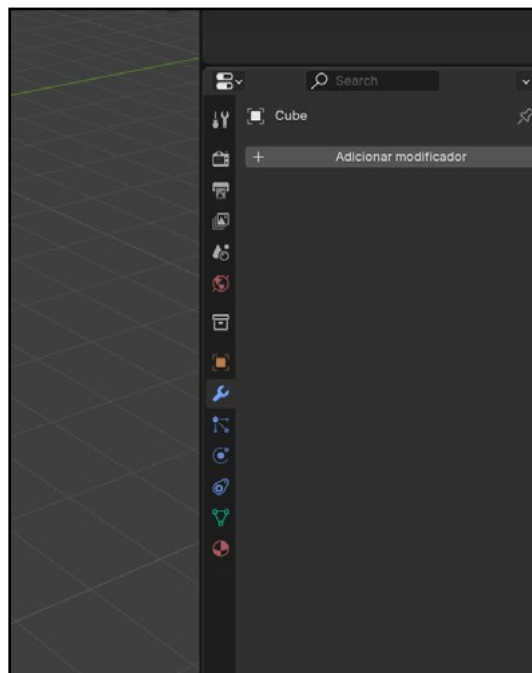
Esse comando permite inserir na cena o objeto previamente exportado do GeoGebra. A partir desse momento, o objeto se torna parte da malha tridimensional no Blender.

#### 4. Aplicação do modificador “Solidificar”

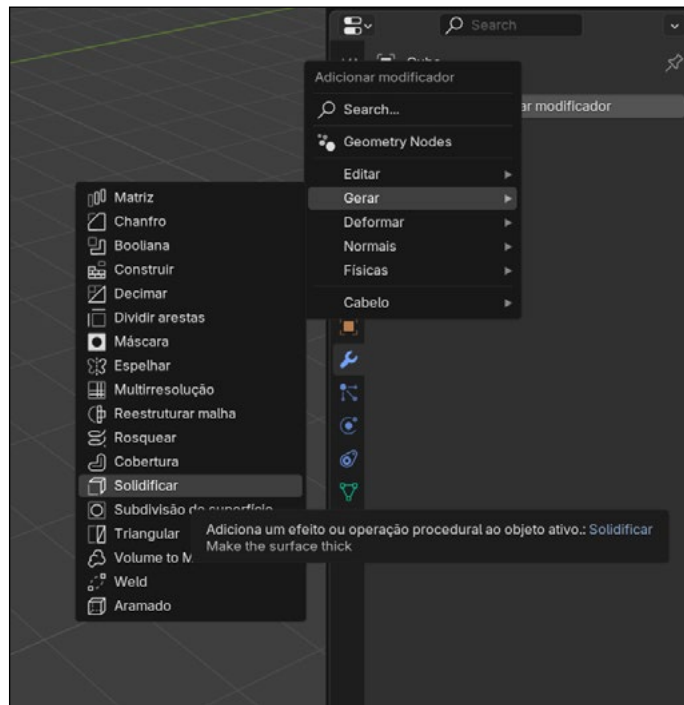
Um dos principais problemas dos arquivos exportados diretamente do GeoGebra é que eles geram apenas superfícies finas, sem espessura física. Isso inviabiliza sua impressão em 3D e limita a percepção de volume. Para corrigir essa limitação, utiliza-se o modificador Solidificar.

O procedimento é o seguinte:

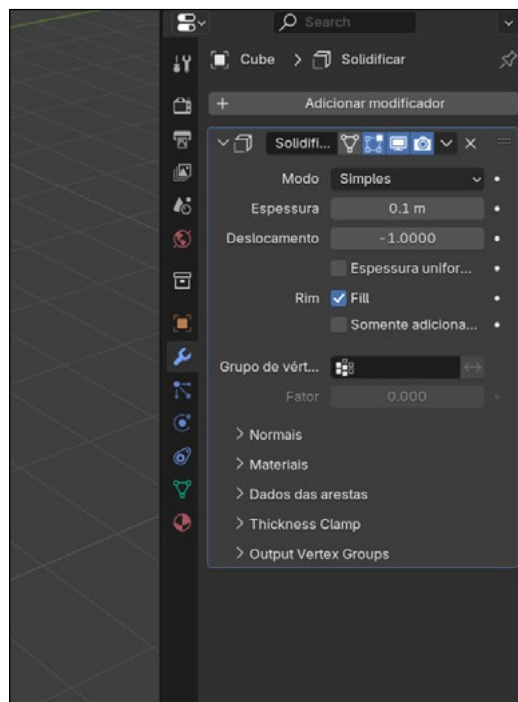
- a. Selecione o objeto com o botão esquerdo do mouse;
- b. Acesse a aba Modificadores (ícone da chave inglesa, à direita da tela);



c. Clique em Adicionar Modificador > Gerar > Solidificar.



Na opção Espessura, atribua um valor numérico que determine a profundidade da superfície. Não existe um valor único ideal para todos os casos; contudo, recomenda-se trabalhar com valores entre 0,01 m e 0,15 m, intervalo adotado nos objetos que serão apresentados nas seções seguintes deste trabalho. Dentro dessa faixa, o valor pode ser ajustado empiricamente conforme o comportamento geométrico do modelo, observando-se visualmente a estabilidade da malha e a preservação da forma original. Esse procedimento confere solidez à estrutura e garante que o objeto possa ser manipulado ou posteriormente preparado para impressão 3D de maneira adequada.

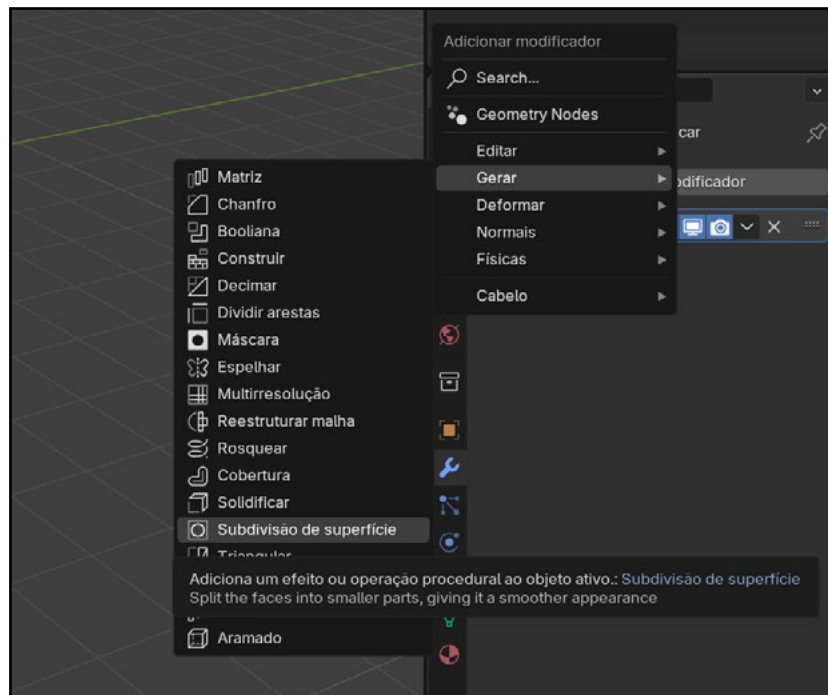


## 5. Aplicação do modificador “Subdivisão de Superfície”

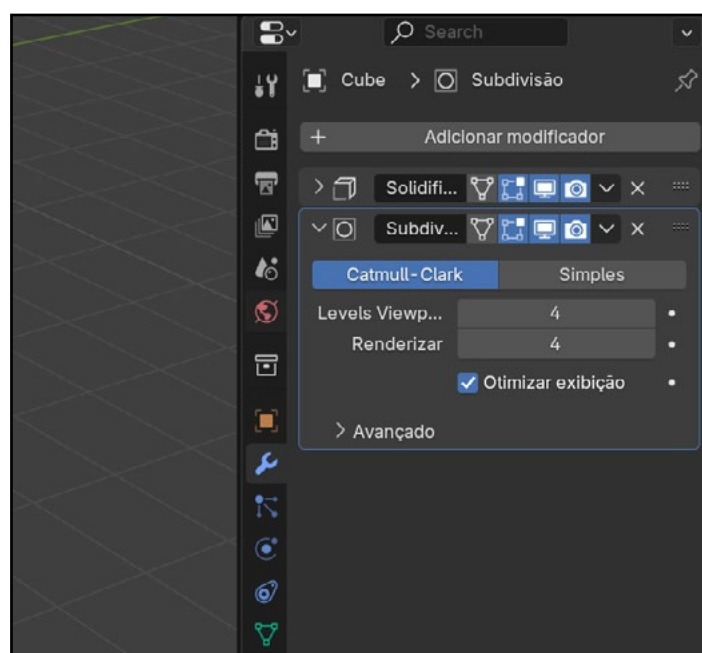
Uma segunda característica dos modelos exportados do GeoGebra é a presença de superfícies facetadas ou pouco suavizadas. Para corrigir isso, aplica-se o modificador Subdivisão de Superfície, responsável por suavizar as curvas e refinar a malha.

O procedimento segue o mesmo caminho:

- a. Com o objeto ainda selecionado, clique em Adicionar Modificador > Gerar > Subdivisão de Superfície;



- b. Defina os níveis de subdivisão. Em geral, valores entre 2 e 4 já oferecem um bom equilíbrio entre suavidade e desempenho do software.





Ao contrário das impressoras tradicionais de base fixa, a CR-30 utiliza uma esteira transportadora que se movimenta continuamente. Esse recurso, além de permitir a impressão de objetos mais longos que a área da máquina, também facilita a produção em sequência.

## **2. Preparando o arquivo para a impressão**

O ponto de partida é o arquivo .stl exportado do Blender, que é o padrão aceito pela maioria das impressoras 3D. Esse arquivo não contém apenas a forma geométrica, mas também as informações da malha refinada, como a espessura e a suavização adicionadas no Blender.

Para que a impressora compreenda esse arquivo, é necessário passar por um software intermediário chamado fatiador (slicer). No caso da CR-30, pode-se utilizar o Creality Belt. O fatiador converte o modelo em instruções específicas, chamado de G-code, que indicam à impressora como mover o bico extrusor, a velocidade de deposição do filamento, a altura das camadas e a velocidade da esteira.

O usuário, nesse estágio, deve apenas importar o arquivo .stl para o fatiador, escolher o perfil da impressora (CR-30 ou "Belt Printer"), definir parâmetros básicos como a altura de camada e a densidade de preenchimento, e então exportar o G-code gerado. Esse arquivo será transferido para a impressora por meio de cartão SD.

## **3. Inserindo o arquivo na CR-30**

Com o G-code feito, o próximo passo é carregá-lo na impressora. Para isso, basta inserir o cartão SD no slot da CR-30 e acessar o menu principal pelo display da máquina. Na tela, há a opção Print from SD, que exibe a lista de arquivos disponíveis. Ao selecionar o arquivo correspondente, a impressora inicia automaticamente o processo de preparação, que inclui o aquecimento do bico extrusor e da mesa de impressão.

É importante observar esse momento inicial, pois é nele que se define se a primeira camada irá aderir corretamente à esteira. Uma boa primeira camada garante a qualidade do restante da peça, evitando que ela se solte durante o processo. Embora a impressora já venha calibrada, recomenda-se sempre verificar se o filamento está saindo de forma contínua e se está fixando-se uniformemente à superfície.

## **4. Acompanhando a impressão**

Uma vez iniciada a impressão, a CR-30 conduz automaticamente o processo. O extrusor deposita o filamento derretido em camadas sucessivas, enquanto a esteira se desloca lentamente para liberar espaço para as camadas seguintes. O usuário deve apenas monitorar alguns aspectos básicos:

- verificar se o filamento não enroscou ou quebrou durante a extrusão;
- acompanhar se a peça permanece bem aderida à esteira, principalmente nas primeiras camadas;
- observar se não há falhas visíveis, como lacunas ou excesso de material.

Se algum problema for detectado, a impressão pode ser pausada ou interrompida pelo menu da impressora. Isso evita desperdício de material e permite corrigir eventuais falhas antes de reiniciar o processo.

## **5. Finalização e remoção da peça**

Quando o arquivo é concluído, a impressora sinaliza o término do trabalho. Em muitos casos, devido ao funcionamento da esteira, a própria peça se desloca e se solta sozinha da superfície. Caso contrário, basta aguardar alguns minutos para que a esteira esfrie e a adesão diminua naturalmente. Então, pode-se retirar o objeto com as mãos ou, se necessário, utilizar uma espátula plástica para auxiliar, sempre com cuidado para não danificar a esteira.

Nesse momento, o usuário já terá em mãos o objeto físico modelado inicialmente no GeoGebra e refinado no Blender. É uma oportunidade valiosa de observar, de forma palpável, os modelos nos quais conceitos matemáticos podem ser identificados. Mais do que um produto estético, a peça impressa funciona como um recurso pedagógico, permitindo o estudo de proporções, curvas, simetrias e relações espaciais de modo tangível.

## Capítulo 5

### Modelagem e Construção de Objetos em 3D: O Cálice e o Vaso

Jean Michel Mallmann<sup>1</sup>

João Pedro Scherer de Sampaio Carvalho<sup>2</sup>

Neste capítulo são apresentadas duas atividades desenvolvidas no âmbito do grupo de pesquisa, em colaboração com alunos bolsistas de Iniciação Científica. As propostas podem servir de inspiração para discussões e problematizações conduzidas por professores, especialmente aqueles que lecionam disciplinas de Cálculo nas Engenharias.

As atividades descritas consistem em mostrar a roteirização do processo de construção e impressão de dois objetos: um vaso e um cálice, cuja modelagem matemática envolve o uso de funções, como a polinomial de 1º grau e a logarítmica.

O objetivo da descrição dessas construções é mostrar como funções desse tipo podem ser exploradas em aulas de Cálculo, Álgebra Linear ou em disciplinas que dialogam com conteúdos semelhantes. Importa destacar que os roteiros apresentados podem ser utilizados integralmente ou de forma parcial. No uso parcial, é possível limitar a atividade à construção dos modelos matemáticos que descrevem os objetos. Caso o professor deseje ir além, pode-se incluir o processo completo, que abrange desde a modelagem matemática até a impressão física do objeto em uma impressora 3D. Cabe salientar que aqui são descritos os processos de criação dos objetos, mas não são discutidos aspectos metodológicos de como o professor poderá explorar estas atividades junto aos estudantes. No entanto, o professor leitor deste capítulo poderá criar ou adaptar atividades inspirando-se em tendências de ensino da Matemática como a Investigação Matemática ou Modelagem Matemática.

Assim, este capítulo percorre somente as etapas de criação das funções, sua modelagem no ambiente digital e a impressão final dos objetos. Em cada proposta são descritos: o objetivo da atividade, os softwares utilizados, o roteiro de construção do objeto, a criação no GeoGebra, a visualização do modelo para o Blender e, por fim, o processo de impressão em 3D.

O GeoGebra é explorado tanto em sua dimensão algébrica, quando as equações e funções são definidas, quanto em sua dimensão geométrica, que permite a visualização do objeto em três dimensões. Já o Blender tem a função de refinar os modelos, proporcionando ajustes como suavização de curvas, correção de proporções, definição da espessura e aplicação de acabamentos visuais. A etapa final é realizada com a impressora 3D Creality CR-30, responsável por transformar o modelo digital em um objeto físico.

A seguir, são apresentados os dois objetos propostos e o detalhamento de suas construções.

---

1 Graduando em Engenharia da Computação e bolsista de Iniciação Científica, Universidade do Vale do Taquari – Univates.

2 Estudante egresso do Centro de Educação Básica Gustavo Adolfo, bolsista voluntário de Iniciação Científica, Universidade do Vale do Taquari - Univates e matriculado na Embry-Riddle Aeronautical University.

## 5.1 A construção do Cálice

### Objetivo da atividade:

Construir um cálice em 3D utilizando uma função logarítmica  $f(x) = a \cdot \log_b x$  no software GeoGebra 3D, explorando como essa função se comporta graficamente e como pode gerar formas tridimensionais por meio da rotação em torno de um eixo.

### Observação:

Esse cálice não foi modelado a partir de uma referência física, mas sim concebido de forma imaginativa, permitindo que uma pessoa crie o formato do cálice, conforme sua própria interpretação e criatividade.

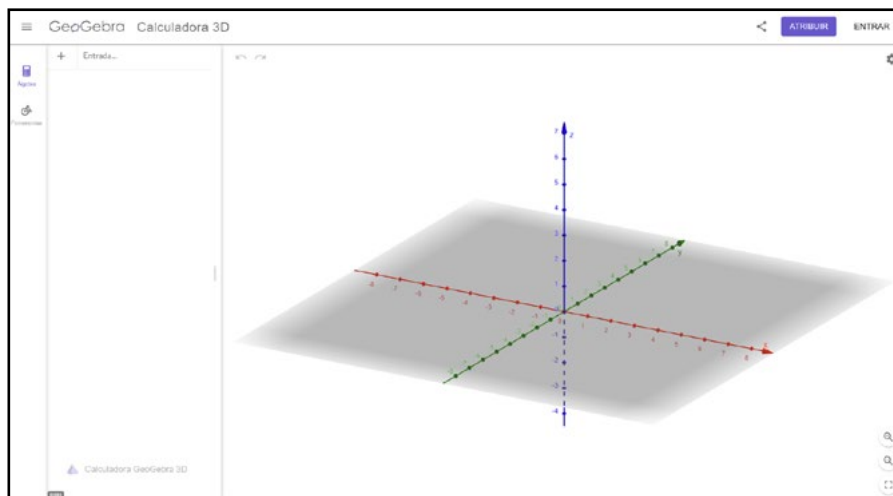
### Acesso à Ferramenta:

Acesse o GeoGebra 3D pelo navegador, no seguinte link: <[www.geogebra.org/3d](http://www.geogebra.org/3d)>.

### Passos para a construção do objeto:

#### 1. Abrir a Calculadora 3D

- Acesse o link acima.
- Certifique-se de estar com a opção “Álgebra” visível à esquerda.

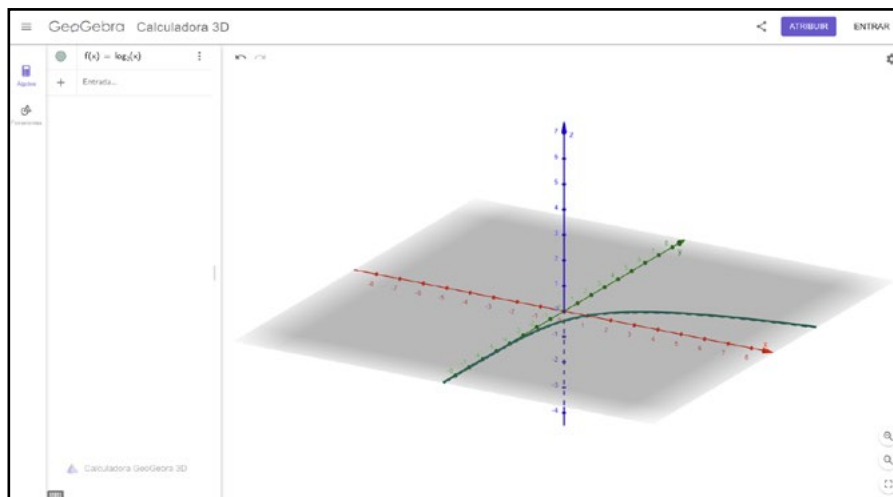


#### 2. Inserir a função logarítmica em 2D

- Clique na barra de entrada.
- Digite a função abaixo e após, clique a tecla *Enter*.

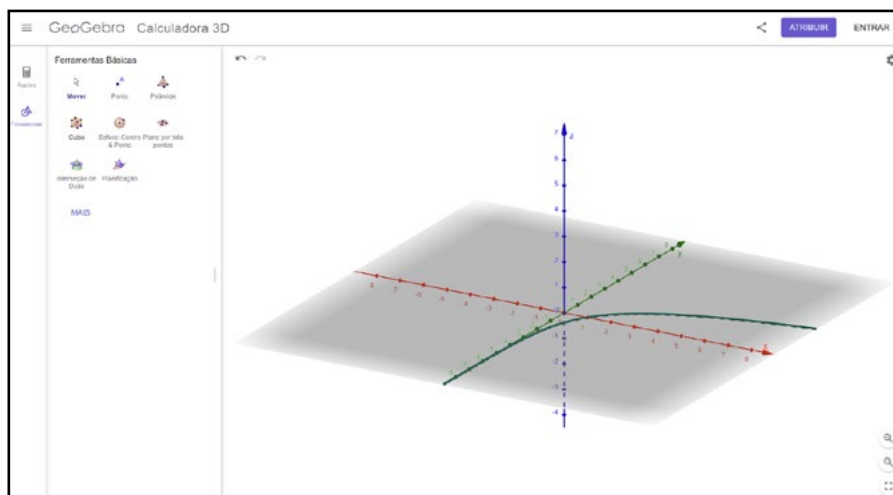
$$f(x) = \log_2 x$$

**Explicação:** Nesta etapa estamos representando a função logarítmica de base 2.



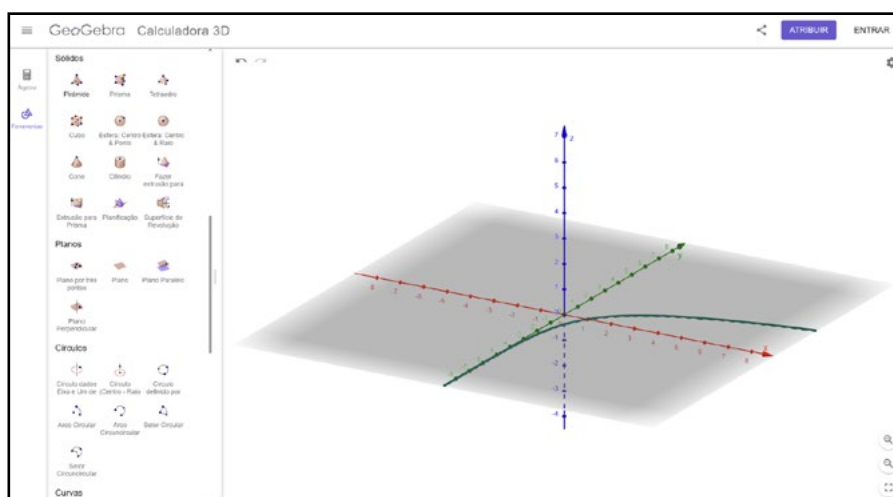
### 3. Ativar a Ferramenta “Superfície de Revolução”

a. Na barra lateral esquerda, clique em “Ferramentas” e em seguida em “Mais”.



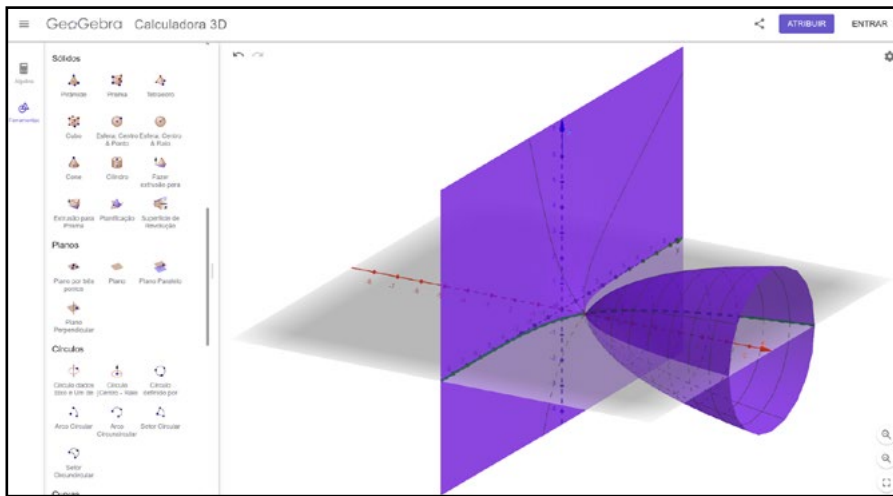
b. Role o menu até encontrar a seção “Sólidos”.

c. Clique na ferramenta chamada “Superfície de Revolução”.



#### 4. Selecionar a curva a ser rotacionada

- Após ativar a ferramenta de “Superfície de Revolução”, clique diretamente sobre a curva da função logarítmica que apareceu na visualização 3D.



- Antes de iniciar os ajustes, retorne para a tela “Álgebra” do GeoGebra, pois é nessa aba que você poderá continuar digitando e editando as fórmulas utilizadas na construção do objeto.

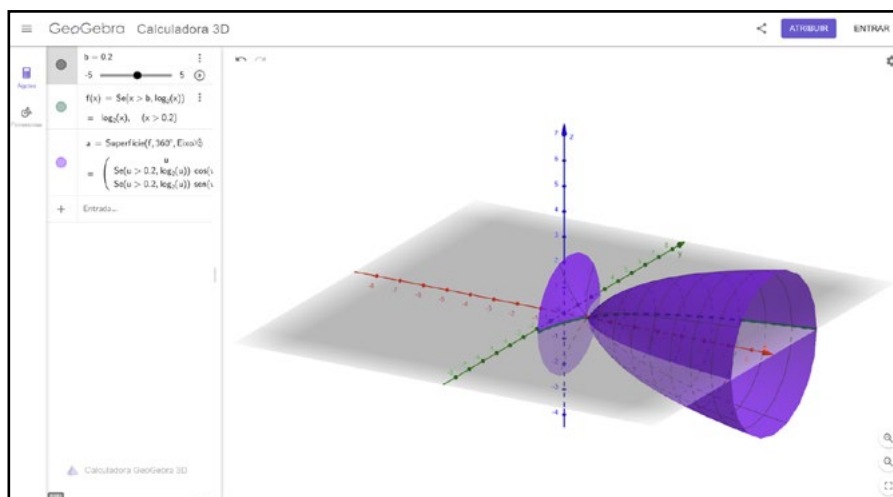
#### 5. Ajustar a base do cálice

Para personalizar o tamanho da base do cálice no GeoGebra 3D, primeiro crie a variável  $b$ . Para isso, insira manualmente uma nova entrada definindo, por exemplo,  $b = 0$ , clique nos três pontos localizados ao lado dessa variável e selecione a opção “Criar controle deslizante”. Isso criará uma barra interativa que permitirá ajustar o valor de  $b$  dinamicamente.

Em seguida, altere a função  $f(x) = \log_2 x$  já inserida para o seguinte formato:

$$f(x) = \text{Se}(x > b, \log_2 x)$$

Ao mover o controle deslizante, será possível modificar visualmente a largura da base do cálice, facilitando a escolha do tamanho ideal. O comando  $\text{Se}(\dots)$  no GeoGebra atua como uma condição lógica, exibindo a curva apenas quando a regra estabelecida é verdadeira. Nesse caso, a função é desenhada apenas para valores de  $x$  maiores que  $b$ , de modo que o trecho anterior é “cortado”.



## 6. Ajustar a parte superior do cálice

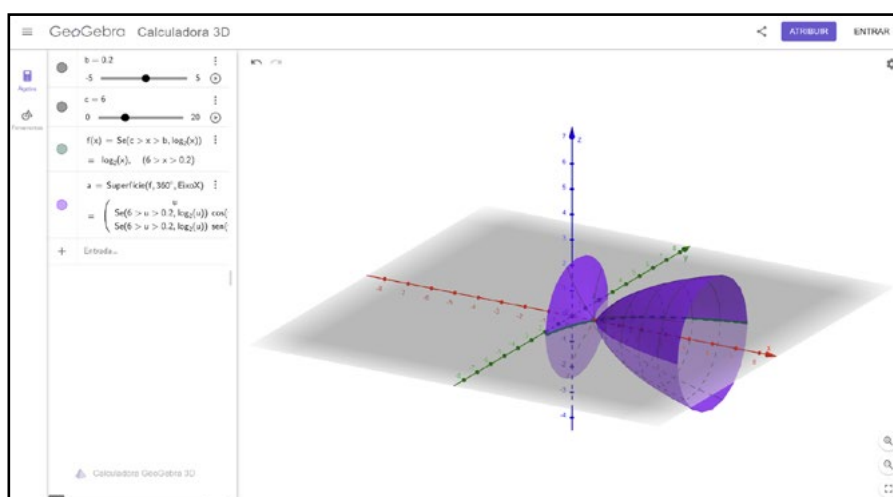
Para controlar a altura máxima da parte superior do cálice, primeiro crie a variável  $c$ . Para isso, insira manualmente uma nova entrada de dados definindo, por exemplo  $c = 0$ , clique nos três pontos localizados ao lado dessa variável e selecione a opção “Criar controle deslizante”. Assim como no ajuste da base, o controle deslizante permitirá alterar o valor de  $c$  dinamicamente.

Em seguida, substitua a função utilizada no passo anterior por:

$$f(x) = Se(c > x > b, \log_2 x)$$

Ao mover o controle deslizante, será possível limitar a extensão da borda superior do cálice, encontrando o formato mais adequado antes de avançar para a próxima etapa.

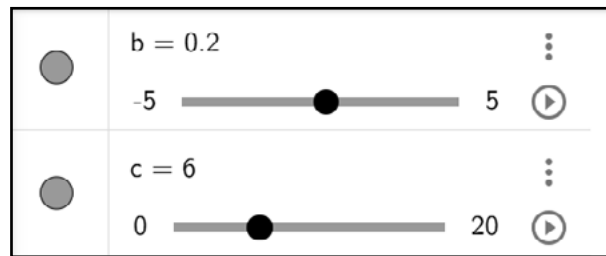
Explicação: a variável  $c$  define o ponto onde o traçado da função é interrompido no topo. Ao diminuí-la, encurtamos a curva e reduzimos a altura da borda superior do cálice.



### OBSERVAÇÃO:

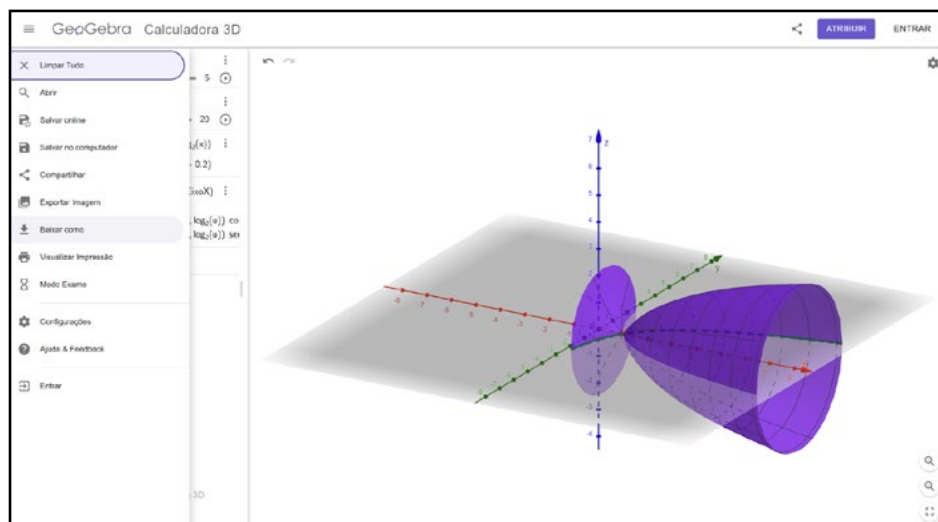
Caso perceba que o valor máximo ou mínimo da barra deslizante não é suficiente para alcançar o formato desejado, é possível modificá-los facilmente. Para isso, clique diretamente no número exibido à direita (para o valor máximo) ou à esquerda (para o valor

mínimo) da barra deslizante e digite um novo valor. Esse ajuste permite ampliar ou reduzir o intervalo de variação, oferecendo mais flexibilidade na personalização do cálice.

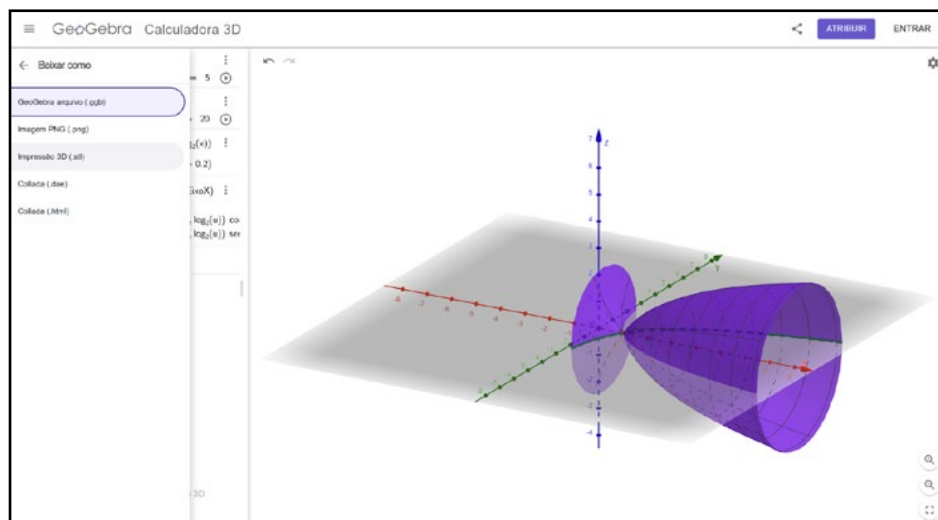


## 7. Baixar o arquivo

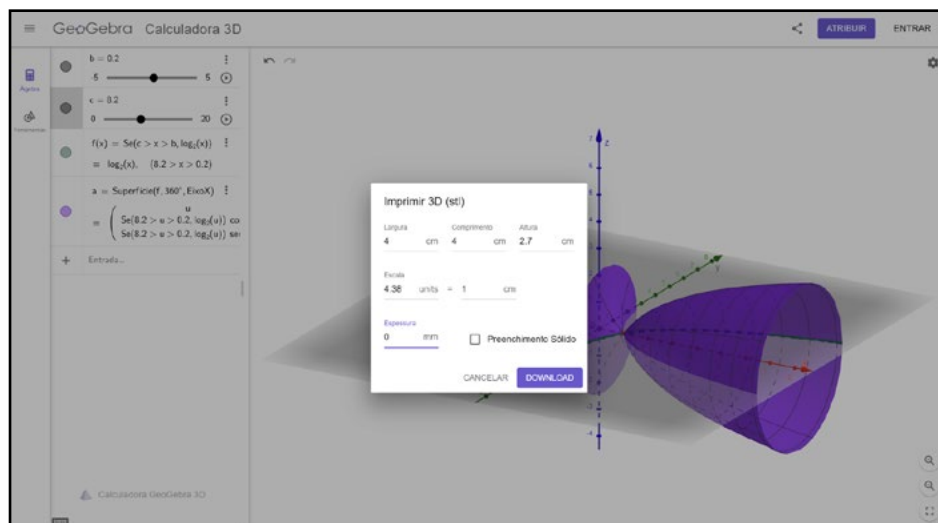
- No canto superior esquerdo da tela do GeoGebra 3D, clique no ícone de “3 risquinhos” para abrir o menu.
- No menu lateral que se abrir, clique na opção “Baixar como”.



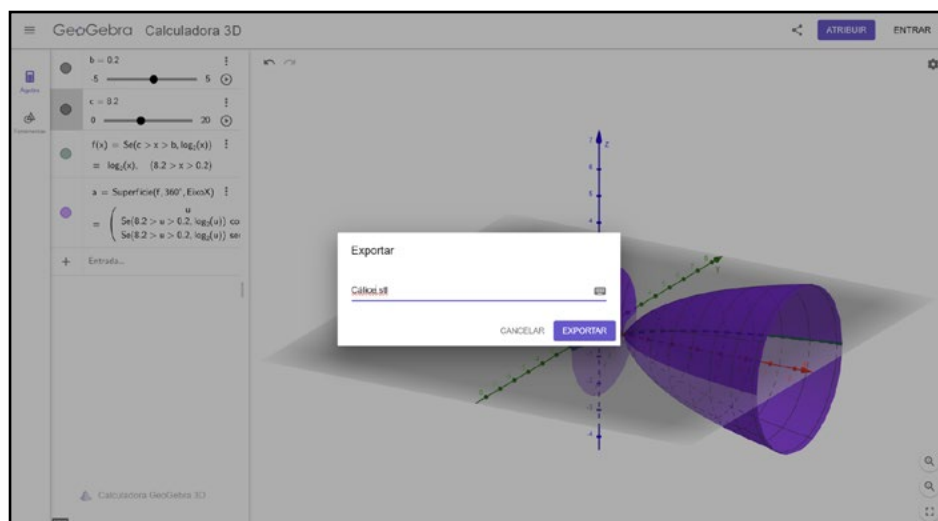
- Na lista de formatos disponíveis para exportação, clique em “Impressão 3D (STL)”.



- d. Antes de confirmar o download, aparecerá uma lista de opções, na caixa perguntando qual será a espessura dos objetos, coloque “0 mm” e clique em “Download”.

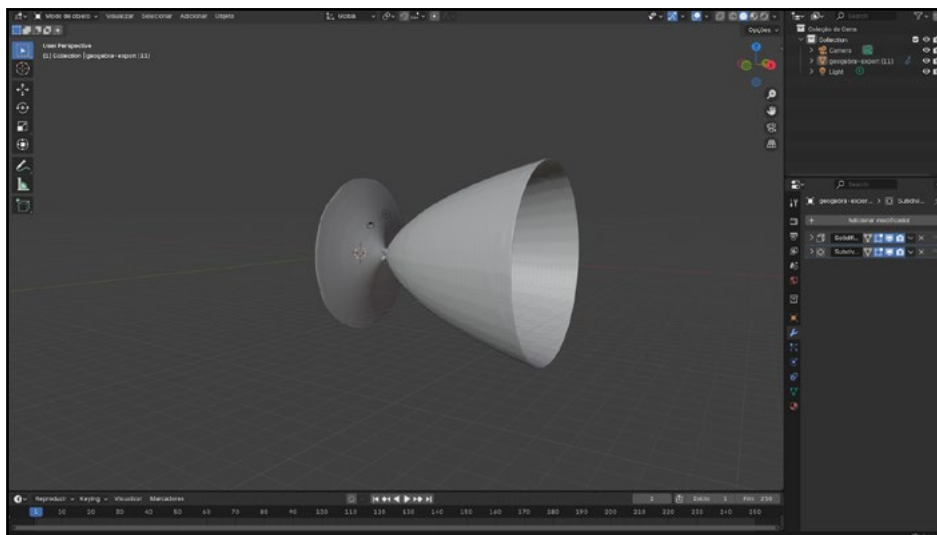


- e. Por fim, escolha um nome para dar ao arquivo e clique em “Exportar”.



## 8. Visualizar o resultado final

Com o modelo concluído no GeoGebra, exporte-o em formato .stl e realize os refinamentos no Blender, conforme vimos no **capítulo introdutório**. Após aplicar os ajustes de espessura e suavização, o cálice adquire sua forma definitiva, apresentada a seguir:



## RESULTADO FINAL: O CÁLICE IMPRESSO



### 5.2 A construção do Vaso

#### Objetivo da atividade

Construir o modelo 3D de um vaso de flor a partir de seu perfil lateral real, utilizando a marcação de pontos coordenados, segmentos de reta e regressão polinomial no software GeoGebra 3D, explorando o processo de transposição de medidas físicas para o ambiente virtual.

### Observação:

Esse vaso foi modelado a partir de um objeto de referência concreto, medido com o auxílio de papel milimetrado, permitindo compreender como diferentes aplicações matemáticas (retas para delinear o corpo e regressão polinomial para gerar uma base contínua e suavizada) podem recriar fielmente formas tridimensionais por meio da rotação em torno de um eixo.

### Acesso à Ferramenta:

Acesse o GeoGebra 3D pelo navegador, no seguinte link: <[www.geogebra.org/3d](http://www.geogebra.org/3d)>.

### Passos para a construção do objeto:

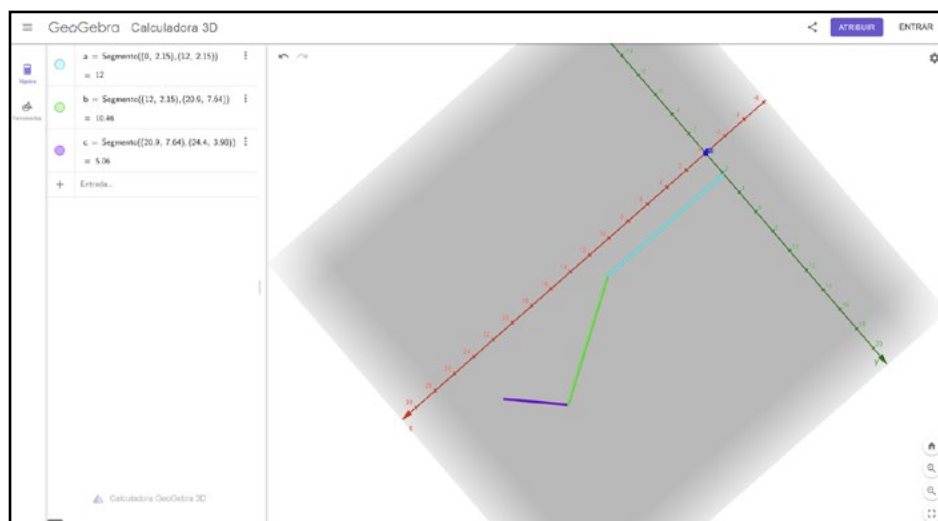
#### 1. Realizar as medições do vaso

- Escolha o vaso e apoie-o deitado sobre o papel milimetrado, alinhando o eixo longitudinal às linhas da folha.
- Trace o contorno lateral visível com lápis e marque a linha do eixo (origem  $b = 0$ ).
- Marque os pontos principais do perfil (mudanças de inclinação) e anote os pares  $(x,y)$  usando a malha como referência.

#### 2. Inserir os segmentos no GeoGebra 3D

Após abrir o GeoGebra 3D, insira na barra de entrada, uma por vez, as definições dos segmentos formadas pelos pares  $(x, y)$  que você anotou. Abaixo está o exemplo real utilizado neste guia:

- $a = \text{Segmento}((0, 2.15), (12, 2.15))$
- $b = \text{Segmento}((12, 2.15), (20.9, 7.64))$
- $c = \text{Segmento}((20.9, 7.64), (24.4, 3.98))$



Esses três segmentos definem o perfil lateral do vaso por trechos. Cada segmento corresponde a uma reta entre os pontos medidos no papel milimetrado.

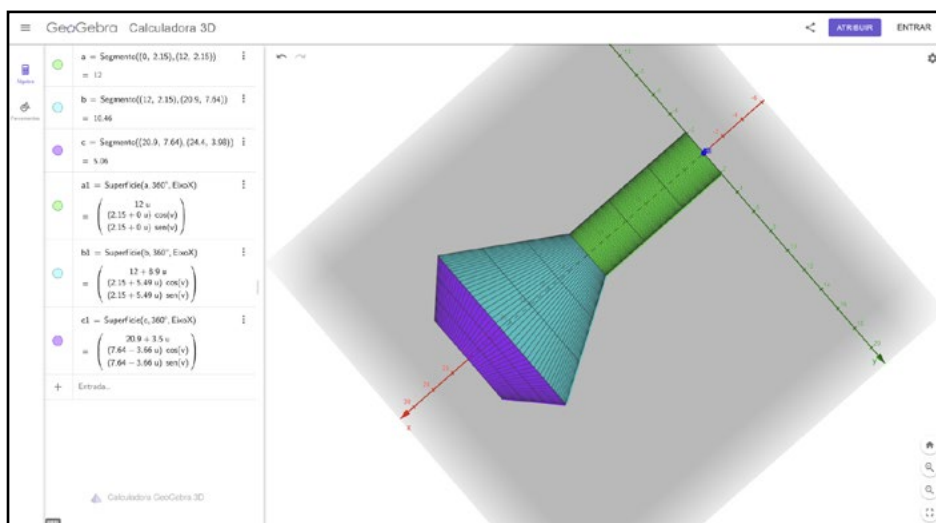
## OBSERVAÇÃO:

Aqui usamos segmentos em vez de regressões polinomiais. Essa abordagem é adequada quando o perfil pode ser bem descrito por retas ou por trechos claramente definidos.

### 3. Gerar as superfícies de revolução

Com os segmentos criados, rotacione cada um em  $360^\circ$  em torno do Eixo X para gerar as partes do sólido:

- $a1 = \text{Superfície}(a, 360^\circ, \text{EixoX})$
- $b1 = \text{Superfície}(b, 360^\circ, \text{EixoX})$
- $c1 = \text{Superfície}(c, 360^\circ, \text{EixoX})$



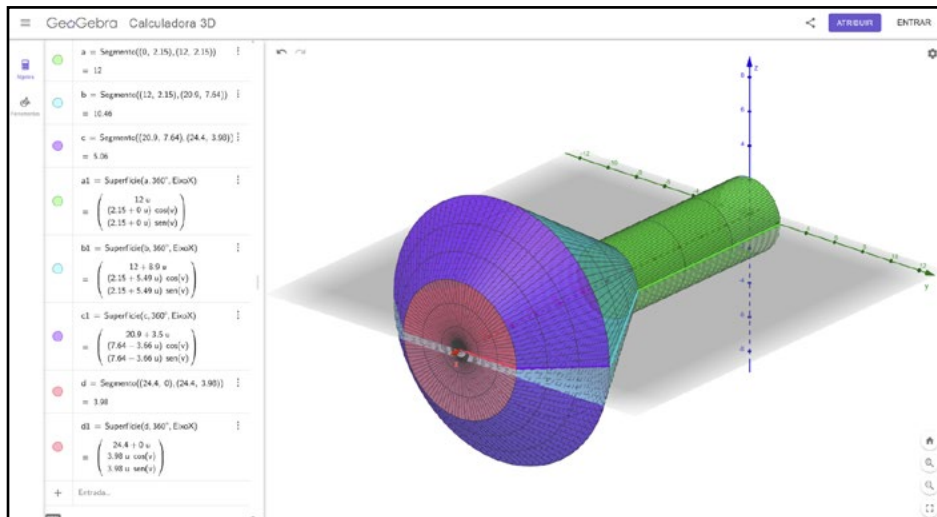
Você verá três superfícies coloridas que, juntas, compõem o corpo do vaso. Use os círculos ao lado das entradas para ocultar as definições/intermediárias e visualizar apenas  $a1, b1, c1$ .

### 4. Fechar a base

Agora, vamos criar uma pequena superfície para fechar a base inferior do vaso. Para isso, primeiro defina um segmento radial no eixo X que represente o fechamento.

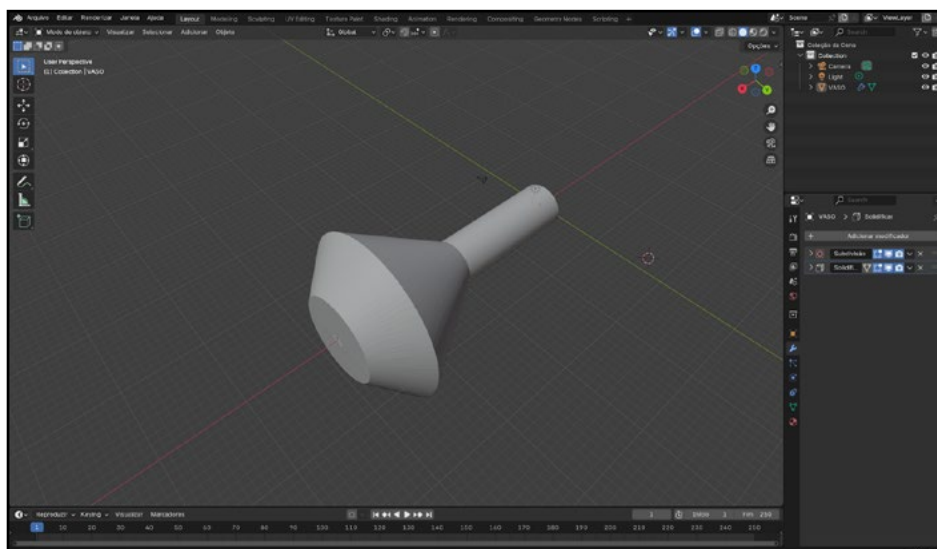
Agora sim, iremos utilizar a superfície de revolução desse segmento para criar a tampa inferior.

- $d = \text{Segmento}((24.4,0), (24.4, 3.98))$
- $d1 = \text{Superfície}(d, 360^\circ, \text{EixoX})$



## 5. Visualizar o resultado final

Depois de finalizar a modelagem do vaso no GeoGebra, basta exportar o arquivo .stl e levá-lo ao Blender para aplicar os refinamentos necessários. Com a adição de espessura e a suavização das curvas, o objeto ganha elegância e realismo. O resultado final pode ser observado abaixo:



## RESULTADO FINAL: O VASO IMPRESSO



## Capítulo 6

### Modelagem e Construção de Objetos em 3D: A xícara, a cuia e a garrafa

Jean Michel Mallmann<sup>1</sup>

João Pedro Scherer de Sampaio Carvalho<sup>2</sup>

Márcia Jussara Hepp Rehfeldt<sup>3</sup>

Dando continuidade às experiências de modelagem matemática, este capítulo apresenta uma nova etapa do trabalho desenvolvido pelo grupo de pesquisa, em parceria com alunos bolsistas de Iniciação Científica. Enquanto o capítulo anterior dedicou-se a objetos de construção mais simples, neste avançamos para modelos de maior complexidade, cuja elaboração demanda o uso de técnicas matemáticas mais sofisticadas e etapas adicionais de refinamento.

As atividades propostas envolvem a elaboração de três objetos: uma xícara, uma cuia e uma garrafa plástica de 500 mL. A construção desses modelos exige não apenas a definição de funções matemáticas, mas também o uso de técnicas como regressões polinomiais para suavizar perfis e cálculo integral para estimar volumes, ampliando o repertório de ferramentas matemáticas exploradas.

Além de evidenciar a versatilidade do GeoGebra na representação algébrica e geométrica, as propostas mostram como o uso combinado de softwares, com o Blender atuando no refinamento dos modelos, permite alcançar resultados próximos da realidade. A etapa final permanece com a impressora 3D Creality CR-30, responsável por materializar os objetos digitais em versões físicas palpáveis.

Assim, este capítulo reforça o caráter investigativo que o professor pode dar para as atividades, destacando o potencial da matemática para compreender, representar e recriar formas do cotidiano em ambientes digitais e físicos.

A seguir, apresentam-se os três objetos selecionados e o detalhamento de suas construções.

#### 6.1 A construção da Xícara

##### Objetivo da atividade:

Construir o modelo 3D de uma xícara a partir de seu contorno físico real, utilizando regressão polinomial e superfície de revolução no software GeoGebra 3D, em conjunto com ferramentas de refinamento no Blender, explorando a transição de um levantamento de dados bidimensionais para uma representação tridimensional realista.

---

1 Graduando em Engenharia da Computação e bolsista de Iniciação Científica, Universidade do Vale do Taquari – Univates.

2 Estudante egresso do Centro de Educação Básica Gustavo Adolfo, bolsista voluntário de Iniciação Científica, Universidade do Vale do Taquari - Univates e matriculado na Embry-Riddle Aeronautical University.

3 Professora titular da Universidade do Vale do Taquari - Univates.

### **Observação:**

Esta xícara foi modelada a partir da coleta manual de pontos em papel milimetrado, permitindo compreender como a regressão matemática suaviza o traçado do perfil. Além disso, a atividade expande o fluxo de trabalho ao demonstrar como a exportação do modelo matemático para um software de modelagem poligonal (Blender) permite aplicar propriedades físicas e estéticas, utilizando modificadores para conferir espessura (Solidificar) e um acabamento orgânico e polido (Subdivisão de Superfície) ao objeto.

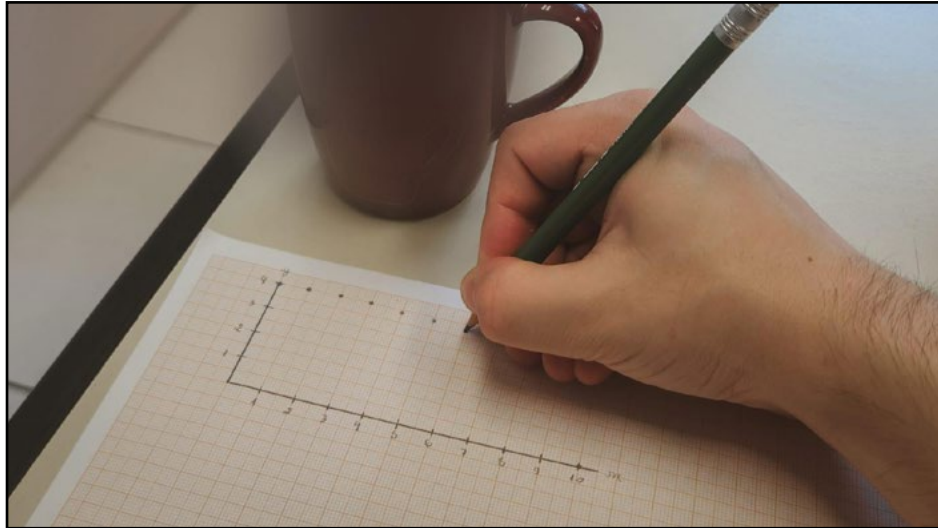
### **Passos para a construção do objeto:**

#### **1. Medir e preparar o perfil da xícara**

- a. Escolha uma xícara real como referência para o modelo. Observe cuidadosamente o formato geral, já que ter uma referência física ajuda a criar um modelo mais preciso no GeoGebra.
- b. Encoste a lateral externa da xícara sobre uma folha de papel milimetrado e trace o contorno da parede e do fundo. Esse desenho será a base para definir os pontos de controle no GeoGebra.



- c. Ao longo do contorno traçado, marque pares de coordenadas  $(x,y)$ . Dê atenção especial às regiões curvas: quanto mais pontos você marcar, mais preciso será o ajuste do polinômio no GeoGebra, garantindo que a curva final represente fielmente o formato da xícara.



### OBSERVAÇÃO:

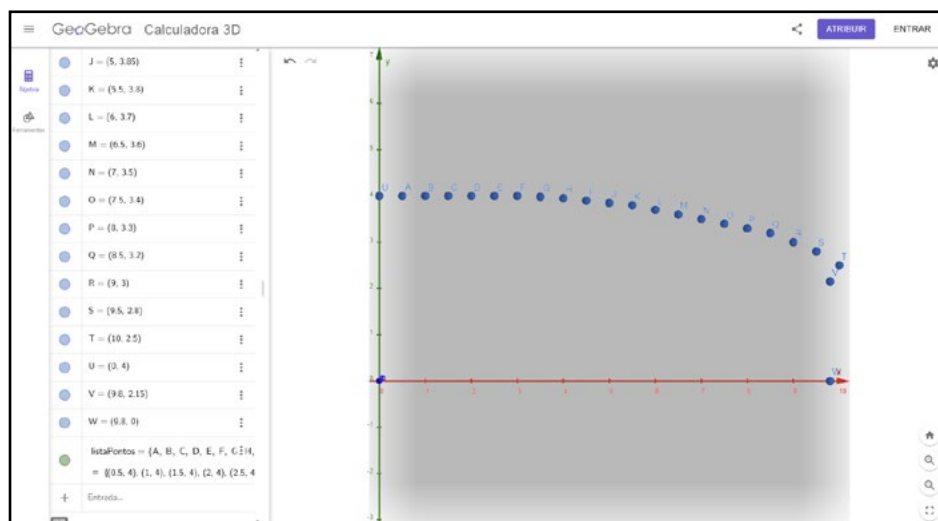
Neste exercício, não modelaremos a alça da xícara. O foco será exclusivamente na construção do corpo da xícara.

### 2. Inserir os pontos no GeoGebra 3D

Para começar, abra o GeoGebra da mesma forma que fez na atividade do vaso, descrita no capítulo anterior. Cole os pontos que você marcou no papel milimetrado na barra de entrada, um de cada vez. Em seguida, defina a lista com os pontos do perfil *lateral* da xícara:

- $A = \text{point}(0.5,4)$
- $B = \text{point}(1,4)$
- $C = \text{point}(1.5,4)$
- $D = \text{point}(2,4)$
- $E = \text{point}(2.5,4)$
- $F = \text{point}(3,4)$
- $G = \text{point}(3.5,3.98)$
- $H = \text{point}(4,3.95)$
- $I = \text{point}(4.5,3.9)$
- $J = \text{point}(5,3.85)$
- $K = \text{point}(5.5,3.8)$
- $L = \text{point}(6,3.7)$
- $M = \text{point}(6.5,3.6)$
- $N = \text{point}(7,3.5)$
- $O = \text{point}(7.5,3.4)$
- $P = \text{point}(8,3.3)$
- $Q = \text{point}(8.5,3.2)$

- $R = \text{point}(9,3)$
- $S = \text{point}(9.5,2.8)$
- $T = \text{point}(10,2.5)$
- $U = \text{point}(0,4)$
- $V = \text{point}(9.8,2.15)$
- $W = \text{point}(9.8,0)$
- $\text{listaPontos} = \{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U\}$



### OBSERVAÇÃO:

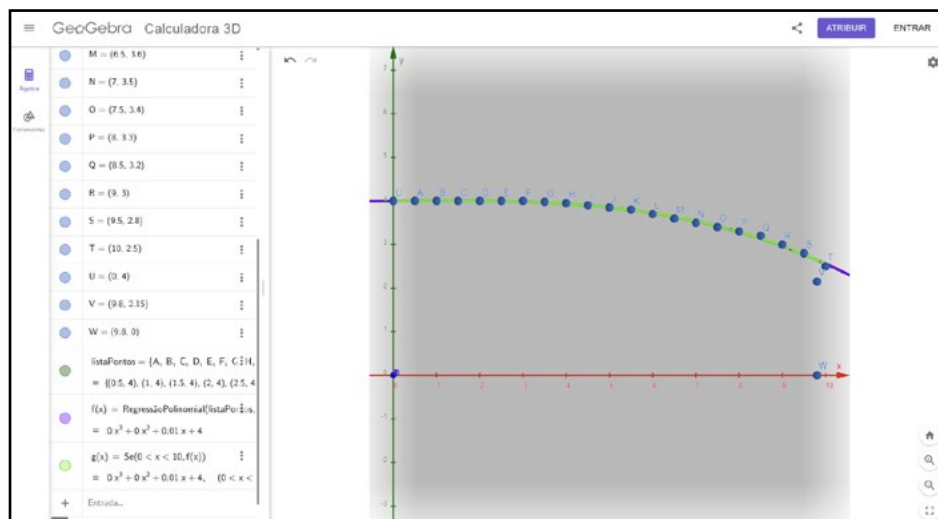
Os pontos V e W não são utilizados neste momento, pois correspondem especificamente ao fundo da xícara. Eles serão aproveitados apenas no passo 5, quando construiremos a base inferior do modelo.

### 3. Ajustar o perfil com Regressão Polinomial e limitar

Neste passo, utilizamos a regressão polinomial para suavizar o perfil da xícara. Esse recurso matemático consiste em encontrar um polinômio que se ajusta da melhor forma possível a um conjunto de pontos, minimizando os desvios entre os valores observados e a curva resultante. Em termos simples, pegamos todos os pontos do contorno da xícara que foram definidos anteriormente e construímos uma função polinomial que descreve a tendência geral desses pontos, sem seguir exatamente cada pequena variação. Isso é importante porque, ao medir no papel milimetrado e transferir para o GeoGebra, é natural que haja pequenas imprecisões. O polinômio, nesse caso de grau 3, funciona como uma suavização, garantindo que a parede da xícara seja contínua e sem ondulações indesejadas.

Depois de gerar essa curva polinomial, limitamos sua exibição ao intervalo correspondente apenas à parte real do objeto, utilizando a condição  $\text{Se}(\dots)$ . Essa limitação evita que a função se estenda para regiões onde não há pontos medidos, o que poderia criar trechos irreais na forma do objeto.

- $f(x) = \text{RegressãoPolinomial}(\text{listaPontos}, 3)$
- $g(x) = \text{Se}(0 < x < 10, f(x))$ 
  - $f(x)$  é o polinômio ajustado ao conjunto de pontos.
  - $g(x)$  desenha apenas o trecho que corresponde à geometria válida do corpo da xícara (de  $x = 0$  até  $x = 10$ ).

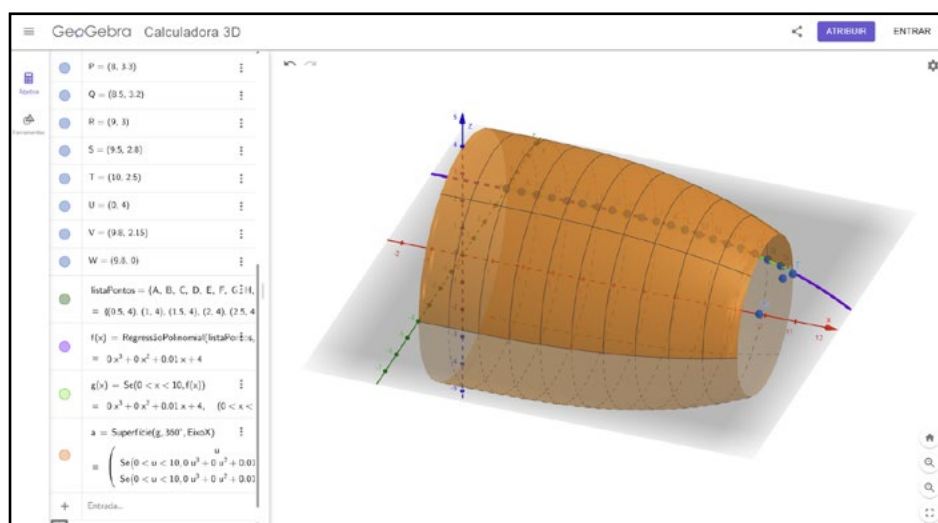


Dica: aumente o grau apenas se notar perda de fidelidade em curvas críticas; graus muito altos podem “ondular” entre os pontos.

#### 4. Gerar a superfície

Com o contorno já ajustado e limitado, o próximo passo é gerar a superfície de revolução. Para isso, giramos a curva obtida em  $360^\circ$  em torno do Eixo X, produzindo o sólido correspondente à parede externa da xícara. Esse procedimento segue o mesmo princípio utilizado anteriormente para a construção do Cálice. Cole a entrada abaixo para visualizar o objeto no GeoGebra:

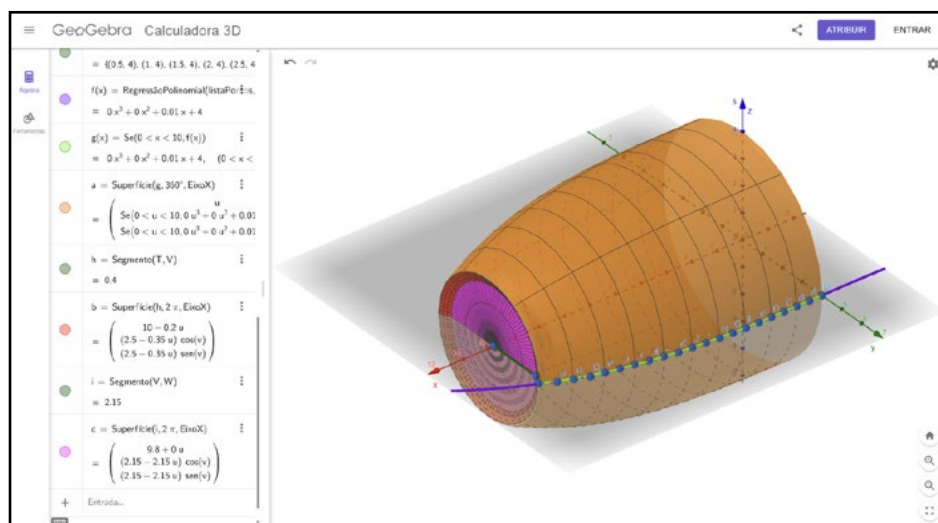
- $a = \text{Superfície}(g, 360^\circ, \text{Eixo X})$



## 5. Modelar o fundo da xícara

Para modelar o fundo da xícara, não utilizamos apenas uma curva, mas sim dois segmentos distintos do perfil da xícara. Cada um desses segmentos representa uma parte do fundo: a base mais interna e a transição para a parede. Ao rotacionar esses segmentos em torno do Eixo X, criamos duas superfícies de revolução que se combinam, formando o sólido completo do fundo da xícara.

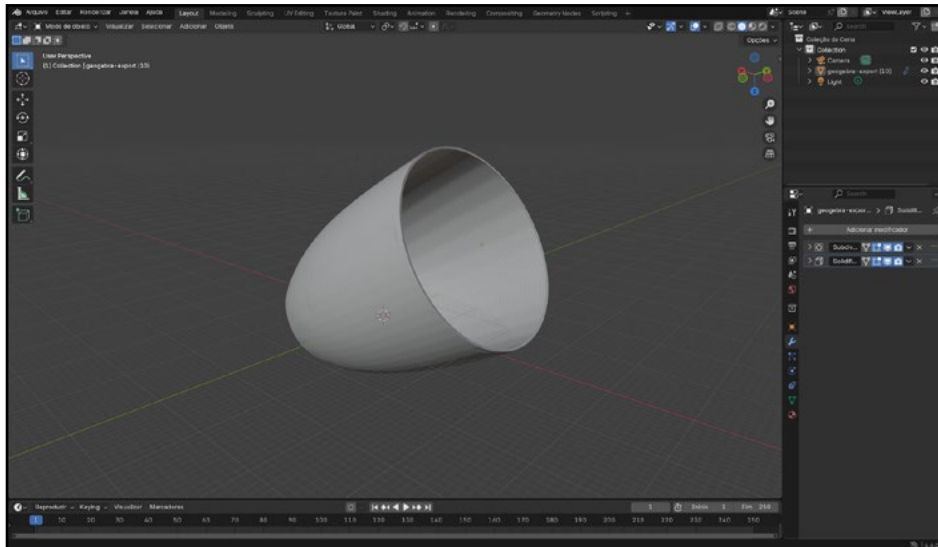
- $h = \text{Segmento}(T, V)$
- $b = \text{Superfície}(h, 2\pi, \text{EixoX})$
- $i = \text{Segmento}(V, W)$
- $c = \text{Superfície}(i, 2\pi, \text{EixoX})$



Agora, com as duas superfícies do fundo da xícara já criadas, juntamente com a parede lateral gerada anteriormente, o modelo da xícara está completo no GeoGebra.

## 6. Visualizar o resultado final

Uma vez concluída a construção da xícara no GeoGebra, exporte o arquivo em .stl e importe-o no Blender. Seguindo o mesmo processo de refinamento descrito anteriormente, a peça adquire volume e suavidade, aproximando-se ainda mais de um modelo realista. O resultado final está representado a seguir:



## RESULTADO FINAL: A XÍCARA IMPRESSA



### 6.2 A construção da Cuiá

#### Objetivo da atividade:

Construir o modelo 3D de uma cuiá a partir de seu perfil lateral, utilizando o mapeamento por listas de pontos e a aplicação de regressões polinomiais por trechos no software GeoGebra 3D, explorando como a combinação de diferentes funções matemáticas se adapta a contornos de curvatura complexa.

### **Observação:**

Esta cuia foi modelada a partir de um objeto de referência concreto, permitindo compreender como o ajuste de curvas suaves em seções específicas do perfil, aliado à técnica de superfície de revolução em torno de um eixo de simetria (eixo X), possibilita a geração precisa de formas tridimensionais, reproduzindo de maneira fiel a anatomia sinuosa e característica do objeto.

### **Passos para a construção do objeto:**

#### **1. Preparar o perfil da cuia**

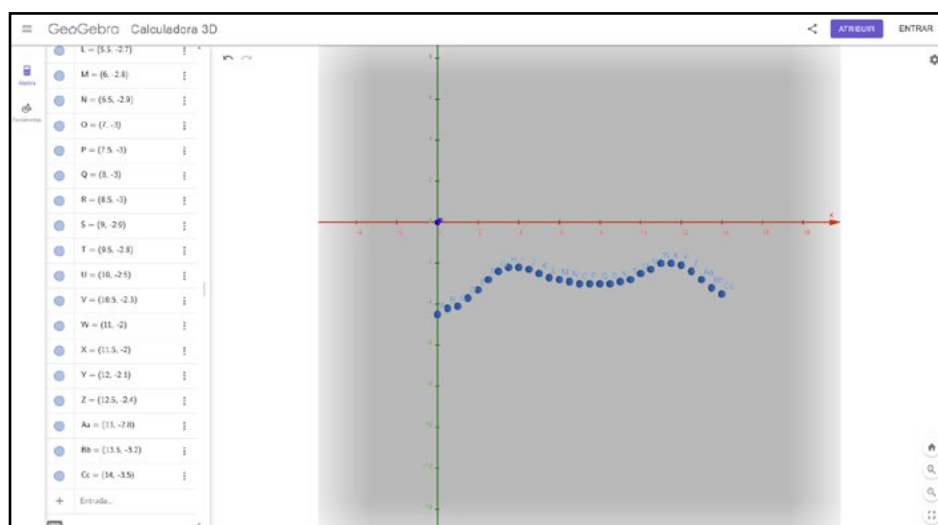
- a. Escolha uma cuia real como referência para o modelo e observe atentamente o formato geral, pois ter uma referência física ajuda a criar um modelo mais fiel no GeoGebra. Encoste a lateral externa da cuia sobre uma folha de papel milimetrado e trace o contorno da parede e do fundo, que servirá como base para definir os pontos de controle.
- b. Ao longo do contorno traçado, marque pares de coordenadas  $(x, y)$ , lembrando que no perfil  $x$  representa a altura (direção longitudinal) e  $y$  representa o raio (distância até o eixo de revolução). Estes pontos serão utilizados para criar o modelo matemático da cuia no GeoGebra.
- c. Dê atenção especial às regiões curvas, pois quanto mais pontos forem registrados, mais preciso será o ajuste do polinômio. Isso garante que a curva final represente fielmente o formato da cuia e permita uma modelagem 3D mais precisa.

#### **2. Inserir as listas de pontos no GeoGebra 3D**

Para começar, abra o GeoGebra da mesma forma que fez na atividade anterior. Cole os pontos que você marcou no papel milimetrado na barra de entrada, um de cada vez. Em seguida, defina a lista com os pontos do perfil lateral da cuia:

- $A = \text{\$point}(0,-4.5)$
- $B = \text{\$point}(0.5,-4.2)$
- $C = \text{\$point}(1,-4.1)$
- $D = \text{\$point}(1.5,-3.7)$
- $E = \text{\$point}(2,-3.3)$
- $F = \text{\$point}(2.5,-2.8)$
- $G = \text{\$point}(3,-2.4)$
- $H = \text{\$point}(3.5,-2.2)$
- $I = \text{\$point}(4,-2.2)$
- $J = \text{\$point}(4.5,-2.3)$
- $K = \text{\$point}(5,-2.5)$
- $L = \text{\$point}(5.5,-2.7)$
- $M = \text{\$point}(6,-2.8)$
- $N = \text{\$point}(6.5,-2.9)$

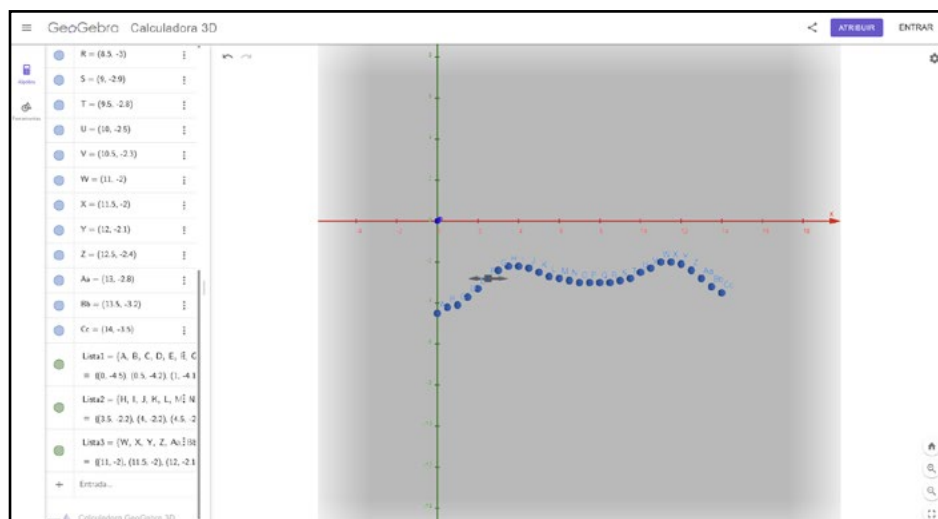
- $O = \text{point}(7,-3)$
- $P = \text{point}(7.5,-3)$
- $Q = \text{point}(8,-3)$
- $R = \text{point}(8.5,-3)$
- $S = \text{point}(9,-2.9)$
- $T = \text{point}(9.5,-2.8)$
- $U = \text{point}(10,-2.5)$
- $V = \text{point}(10.5,-2.3)$
- $W = \text{point}(11,-2)$
- $X = \text{point}(11.5,-2)$
- $Y = \text{point}(12,-2.1)$
- $Z = \text{point}(12.5,-2.4)$
- $Aa = \text{point}(13,-2.8)$
- $Bb = \text{point}(13.5,-3.2)$
- $Cc = \text{point}(14,-3.5)$



### 3. Separar os pontos em listas diferentes

Assim como na atividade anterior, também utilizaremos aqui a regressão polinomial para modelar o perfil da cuia. Para facilitar esse processo e reduzir a chance de erros, é recomendável separar os pontos em listas diferentes. Dessa forma, cada trecho do contorno pode ser ajustado com mais precisão, permitindo um controle maior sobre as curvas e detalhes do modelo. Neste caso, podemos organizar os pontos da seguinte maneira:

- Lista1 = {A, B, C, D, E, F, G, H}
- Lista2 = {H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W}
- Lista3 = {W, X, Y, Z, Aa, Bb, Cc}

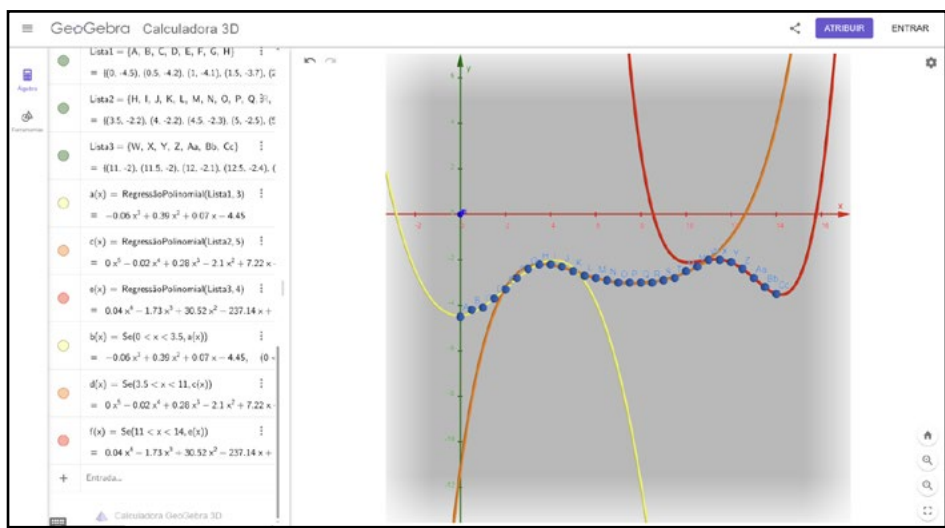


#### 4. Aplicar a regressão polinomial e delimitar os trechos

Para modelar o perfil da cuia de forma precisa, aplicamos a regressão polinomial em cada uma das listas de pontos separadamente. Depois de gerar o polinômio para cada trecho, utilizamos a função  $Se(\dots)$  para limitar sua exibição apenas ao intervalo correspondente ao conjunto de pontos, evitando que a curva se estenda para regiões sem dados e garantindo que o perfil fique contínuo e fiel à geometria real da cuia. Essa divisão em listas permite ajustar melhor os detalhes de cada parte do contorno, mantendo a suavidade das curvas e reduzindo erros na modelagem.

Fórmulas para cada lista:

- Lista1:  
 $a(x) = \text{RegressãoPolinomial}(\text{Lista1}, 3)$   
 $b(x) = \text{Se}(0 < x < 3.5, a(x))$
- Lista2:  
 $c(x) = \text{RegressãoPolinomial}(\text{Lista2}, 5)$   
 $d(x) = \text{Se}(3.5 < x < 11, c(x))$
- Lista3:  
 $e(x) = \text{RegressãoPolinomial}(\text{Lista3}, 4)$   
 $f(x) = \text{Se}(11 < x < 14, e(x))$

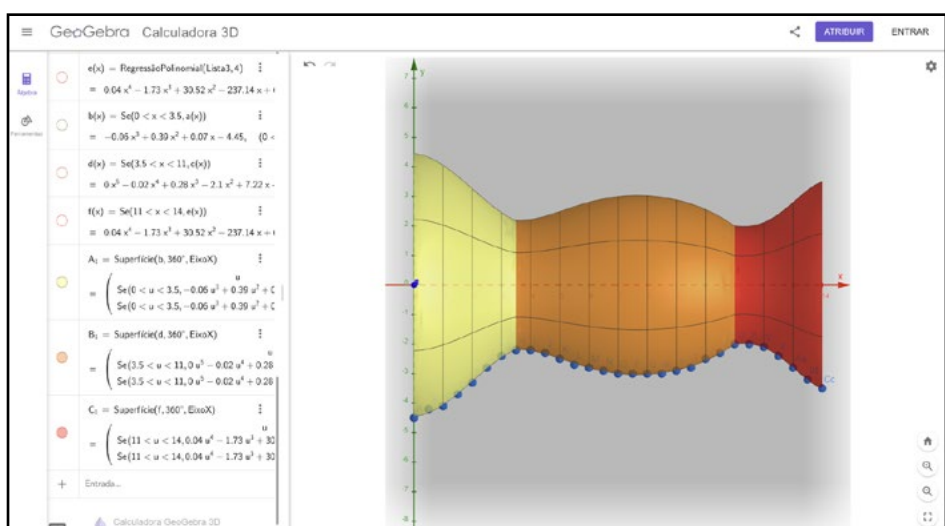


### 5. Gerar a superfície externa da cuia

Com os trechos do contorno já ajustados pelas regressões polinomiais e devidamente limitados, o próximo passo é gerar a superfície de revolução. Para isso, giramos cada curva em 360° em torno do Eixo X, produzindo os sólidos correspondentes às diferentes partes da parede da cuia. Esse procedimento garante que a forma tridimensional represente fielmente o perfil medido, de forma contínua e precisa, assim como fizemos anteriormente na construção do cálice.

Fórmulas para gerar a superfície de cada trecho:

- Trecho 1:  $A_1 = \text{Superfície}(b, 360^\circ, \text{EixoX})$
- Trecho 2:  $B_1 = \text{Superfície}(d, 360^\circ, \text{EixoX})$
- Trecho 3:  $C_1 = \text{Superfície}(f, 360^\circ, \text{EixoX})$

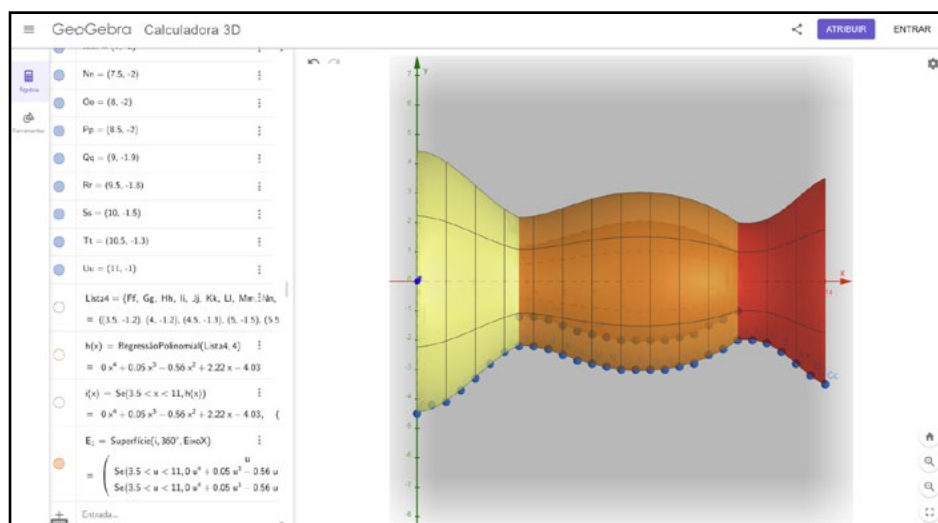


### 6. Construir a parte interna da cuia

Com a superfície externa finalizada, o próximo passo é modelar o interior da cuia, garantindo que as paredes possuam uma espessura realista. Para isso, definimos um conjunto de pontos que representam a curvatura da parede interna. Esses pontos são

ajustados por meio de uma regressão polinomial de grau 4, resultando em uma curva contínua que descreve o contorno interno. Limitamos o intervalo adequado e, em seguida, aplicamos uma revolução em torno do eixo X para gerar a superfície interna.

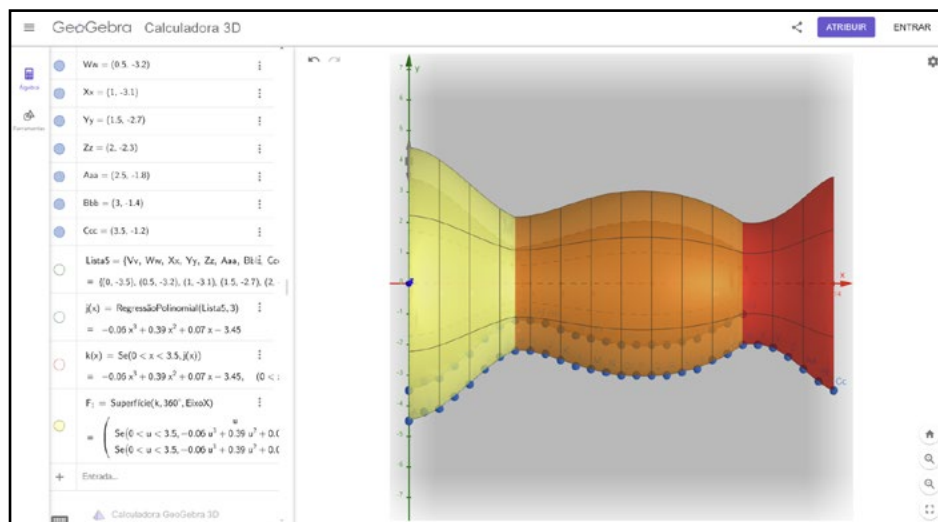
- Ff = \$point(3.5,-1.2)
  - Gg = \$point(4,-1.2)
  - Hh = \$point(4.5,-1.3)
  - Ii = \$point(5,-1.5)
  - Jj = \$point(5.5,-1.7)
  - Kk = \$point(6,-1.8)
  - Ll = \$point(6.5,-1.9)
  - Mm = \$point(7,-2)
  - Nn = \$point(7.5,-2)
  - Oo = \$point(8,-2)
  - Pp = \$point(8.5,-2)
  - Qq = \$point(9,-1.9)
  - Rr = \$point(9.5,-1.8)
  - Ss = \$point(10,-1.5)
  - Tt = \$point(10.5,-1.3)
  - Uu = \$point(11,-1)
- Lista4 = {Ff,Gg,Hh,Ii,Jj,Kk,Ll,Mm,Nn,Oo,Pp,Qq,Rr,Ss,Tt,Uu}
  - $h(x) = \text{RegressãoPolinomial}(\text{Lista4},4)$
  - $i(x) = \text{Se}(3.5 < x < 11, h(x))$
  - $E_{\{1\}} = \text{Superfície}(i,360^\circ, \text{EixoX})$



## 7. Completar a região superior interna

Para dar continuidade ao modelo e suavizar a transição da borda da cuia, criamos uma curva que representa o fechamento superior pelo lado interno. Novamente, definimos um conjunto de pontos e aplicamos uma regressão polinomial, desta vez de grau 3, limitando o intervalo entre 0 e 3.5. Após o ajuste da curva, geramos sua revolução em torno do eixo X para formar a superfície correspondente.

- $V_v = \text{point}(0,-3.5)$
- $W_w = \text{point}(0.5,-3.2)$
- $X_x = \text{point}(1,-3.1)$
- $Y_y = \text{point}(1.5,-2.7)$
- $Z_z = \text{point}(2,-2.3)$
- $A_{aa} = \text{point}(2.5,-1.8)$
- $B_{bb} = \text{point}(3,-1.4)$
- $C_{cc} = \text{point}(3.5,-1.2)$
- $\text{Lista5} = \{V_v, W_w, X_x, Y_y, Z_z, A_{aa}, B_{bb}, C_{cc}\}$
- $j(x) = \text{RegressãoPolinomial}(\text{Lista5}, 3)$
- $k(x) = \text{Se}(0 < x < 3.5, j(x))$
- $F_{\{1\}} = \text{Superfície}(k, 360^\circ, \text{EixoX})$

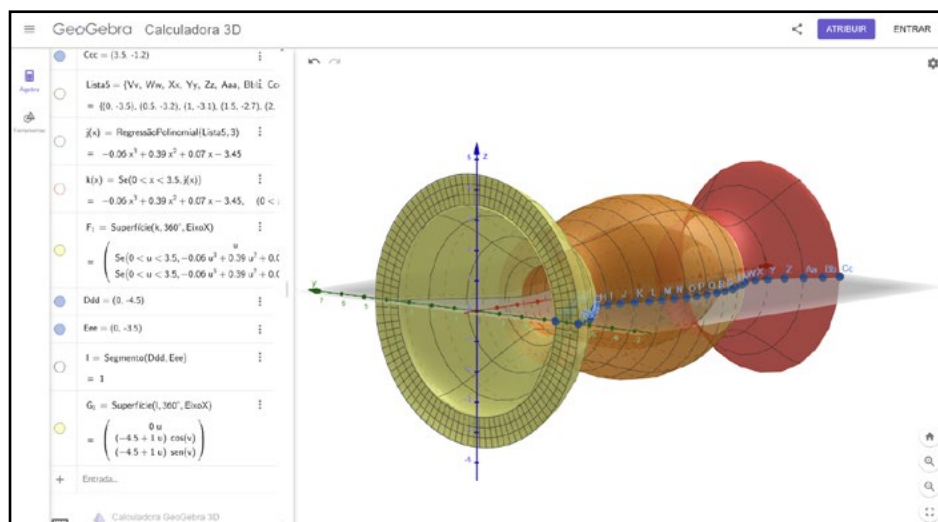


## 8. Criar discos de fechamento

Para garantir que o modelo seja sólido e esteja pronto para exportação, precisamos fechar a cuia em suas extremidades. Isso é feito adicionando discos de fechamento na parte inferior e superior, que conectam o interior ao exterior de forma contínua.

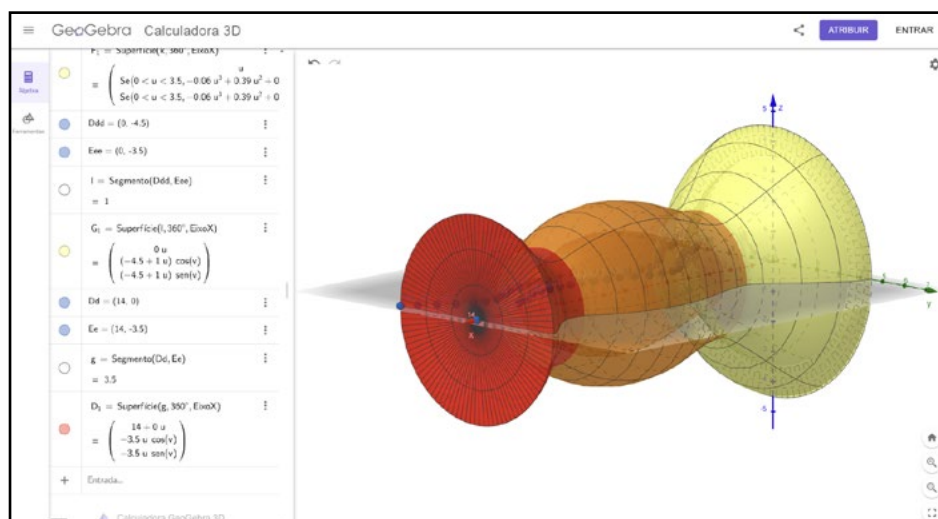
Primeiro, criamos o fechamento inferior a partir de dois pontos no eixo Y. O segmento gerado é então girado em  $360^\circ$  para formar a superfície da base.

- $D_{dd} = \text{point}(0,-4.5)$
- $E_{ee} = \text{point}(0,-3.5)$
- $l = \text{Segmento}(D_{dd},E_{ee})$
- $G_{\{1\}} = \text{Superfície}(l,360^\circ,\text{EixoX})$



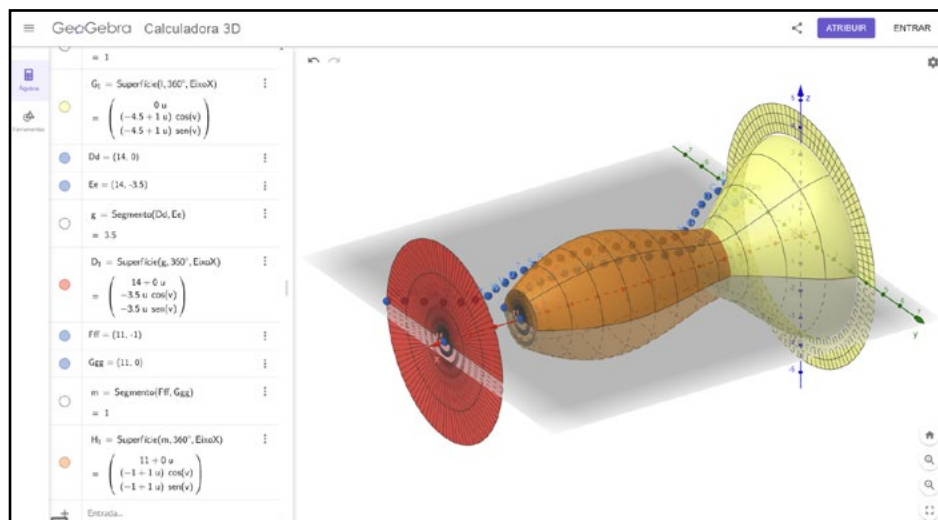
Em seguida, adicionamos outro fechamento inferior utilizando os pontos finais da borda externa e interna, reforçando a união entre as paredes da cuia.

- $D_d = \text{point}(14,0)$
- $E_e = \text{point}(14,-3.5)$
- $g = \text{Segmento}(D_d,E_e)$
- $D_{\{1\}} = \text{Superfície}(g,360^\circ,\text{EixoX})$



Por fim, para o fechamento superior, conectamos o último ponto da curva interna até o eixo X e realizamos a revolução completa. Esse passo garante que a boca da cuia fique devidamente selada, mantendo a coerência geométrica do objeto.

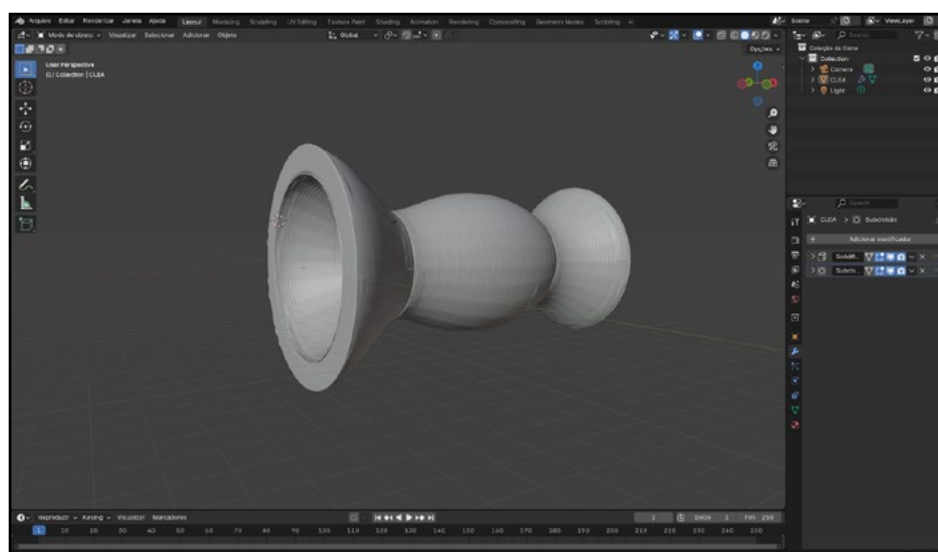
- $F_{ff} = \text{point}(11,-1)$
- $G_{gg} = \text{point}(11,0)$
- $m = \text{Segmento}(F_{ff},G_{gg})$
- $H_{\{1\}} = \text{Superfície}(m,360^\circ,\text{EixoX})$



Com todos esses elementos, a cuia fica completamente modelada por dentro, apresentando superfícies internas contínuas e fechamentos adequados em suas extremidades. O resultado é um objeto sólido, funcional e pronto para exportação e manufatura. A visualização da parte interna destaca a precisão geométrica obtida pelo ajuste polinomial e pela combinação das superfícies de revolução.

## 9. Visualizar o resultado final

Ao terminar a modelagem da cuia no GeoGebra, exporte-a no formato .stl e realize os ajustes no Blender. Com a aplicação dos refinamentos aprendidos, o objeto ganha proporções mais fiéis e superfícies contínuas, como se observa na imagem a seguir:



## RESULTADO FINAL: A CUIA IMPRESSA



### 6.3 A construção da Garrafa

#### **Objetivo da atividade:**

Construir o modelo 3D de uma garrafa plástica de 500 mL, utilizando o mapeamento de coordenadas, regressões polinomiais por trechos e cálculo de integrais no software GeoGebra 3D, com refinamentos estéticos posteriores no Blender. A atividade explora a geração de superfícies de revolução com curvaturas variadas e demonstra a aplicação prática do cálculo integral na determinação exata do volume do sólido gerado.

#### **Observação:**

Esta garrafa foi modelada a partir de um perfil físico real (extraído do corte longitudinal de uma garrafa PET concreta), permitindo validar a precisão do modelo digital ao comparar a capacidade volumétrica calculada pelo software com o volume real da embalagem. O processo evidencia a integração entre o acabamento visual da modelagem poligonal e o rigor da matemática analítica percebido, por exemplo, ao delimitar o cálculo da integral apenas à área interna útil que comporta o líquido, excluindo o gargalo.

## **Passos para a construção do objeto:**

1. Preparar o perfil da garrafa
  - a. Pegue uma garrafa PET de 500 mL.
  - b. Corte longitudinalmente (de cima a baixo) com estilete, expondo um “meio-perfil”.
  - c. Apoie a parte cortada sobre folha quadriculada milimetrada e trace o contorno de todo o corpo da garrafa.
  - d. Marque pares (x, y) ao longo do contorno (x no eixo longitudinal; y é o raio).

Dica:

Quanto mais pontos você marcar, em regiões curvilíneas, melhor o ajuste da regressão por trecho.

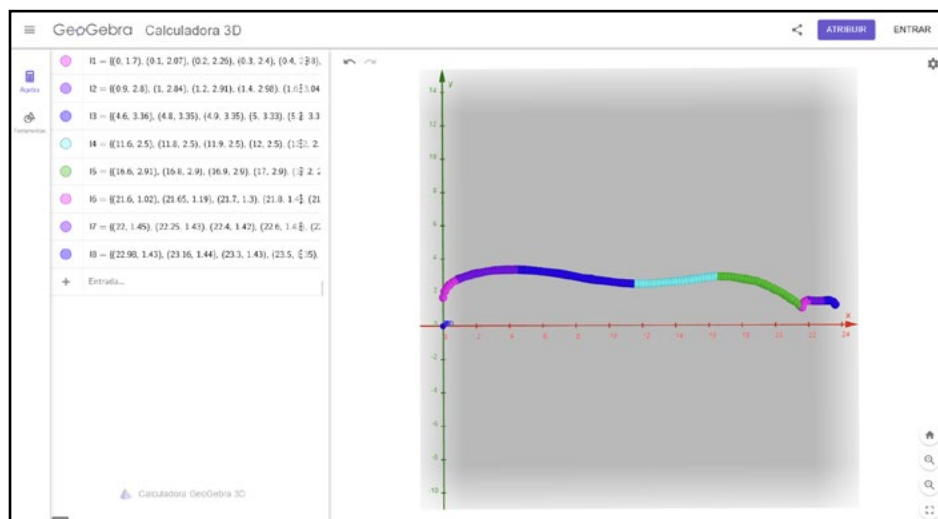
## **2. Inserir as listas de pontos no GeoGebra 3D**

Abra a Calculadora 3D, garanta que o painel Álgebra esteja visível e cole as listas abaixo na barra de entrada (uma por vez). Elas separam o perfil da garrafa em 8 trechos. Sugere-se este procedimento para facilitar o ajuste e compreensão.

- $l1 = \{\$point (0.0,1.7), \$point (0.1,2.07), \$point (0.2,2.26), \$point (0.3,2.4), \$point (0.4,2.48), \$point (0.6,2.64), \$point (0.8,2.75)\}$
- $l2 = \{\$point (0.9,2.80), \$point (1.0,2.84), \$point (1.2,2.91), \$point (1.4,2.98), \$point (1.6,3.04), \$point (1.8,3.1), \$point (2.0,3.14), \$point (2.2,3.18), \$point (2.4,3.22), \$point (2.6,3.26), \$point (2.8,3.28), \$point (3.0,3.31), \$point (3.2,3.33), \$point (3.4,3.34), \$point (3.6,3.35), \$point (3.8,3.36), \$point (4.0,3.36), \$point (4.2,3.36), \$point (4.4,3.368)\}$
- $l3 = \{\$point (4.6,3.36), \$point (4.8,3.35), \$point (4.9,3.35), \$point (5.0,3.33), \$point (5.2,3.32), \$point (5.4,3.30), \$point (5.6,3.28), \$point (5.8,3.26), \$point (5.9,3.25), \$point (6.0,3.24), \$point (6.2,3.22), \$point (6.4,3.20), \$point (6.6,3.17), \$point (6.8,3.14), \$point (7.0,3.11), \$point (7.2,3.08), \$point (7.4,3.05), \$point (7.6,3.01), \$point (7.8,2.97), \$point (7.9,2.95), \$point (8.0,2.93), \$point (8.2,2.89), \$point (8.4,2.85), \$point (8.6,2.82), \$point (8.8,2.79), \$point (8.9,2.78), \$point (9.0,2.76), \$point (9.2,2.73), \$point (9.4,2.70), \$point (9.6,2.68), \$point (9.8,2.65), \$point (10.0,2.63), \$point (10.2,2.60), \$point (10.4,2.58), \$point (10.6,2.56), \$point (10.8,2.55), \$point (10.9,2.537), \$point (11.0,2.53), \$point (11.2,2.52), \$point (11.4,2.50)\}$
- $l4 = \{\$point (11.6,2.50), \$point (11.8,2.50), \$point (11.9,2.50), \$point (12.0,2.50), \$point (12.2,2.50), \$point (12.4,2.50), \$point (12.6,2.52), \$point (12.8,2.53), \$point (12.9,2.537), \$point (13.0,2.55), \$point (13.2,2.56), \$point (13.4,2.58), \$point (13.6,2.59), \$point (13.8,2.61), \$point (13.9,2.615), \$point (14.0,2.62), \$point (14.2,2.64), \$point (14.4,2.65), \$point (14.6,2.68), \$point (14.8,2.71), \$point (14.9,2.727), \$point (15.0,2.74), \$point (15.2,2.77), \$point (15.4,2.80), \$point (15.6,2.82), \$point (15.8,2.85), \$point (15.9,2.86), \$point (16.0,2.87), \$point (16.2,2.90), \$point (16.4,2.92)\}$
- $l5 = \{\$point (16.6,2.91), \$point (16.8,2.90), \$point (16.9,2.90), \$point (17.0,2.90), \$point (17.2,2.89), \$point (17.4,2.88), \$point (17.6,2.84), \$point (17.8,2.81), \$point (17.9,2.80), \$point (18.0,2.77), \$point (18.2,2.74), \$point (18.4,2.70), \$point (18.6,2.66), \$point (18.8,2.62), \$point (18.9,2.60), \$point (19.0,2.56), \$point (19.2,2.48), \$point (19.4,2.40), \$point (19.6,2.30), \$point (19.8,2.20), \$point (19.9,2.15), \$point (20.0,2.10),\}$

$\text{\$point (20.2,2.00), \$point (20.4,1.90), \$point (20.6,1.77), \$point (20.8,1.64), \$point (20.9,1.56), \$point (21.0,1.5), \$point (21.2,1.38), \$point (21.4,1.2), \$point (21.5,1.12)}$

- $l_6 = \{\text{\$point (21.6,1.02), \$point (21.65,1.19), \$point (21.7,1.30), \$point (21.8,1.40), \$point (21.9,1.446), \$point (22,1.446)}\}$
- $l_7 = \{\text{\$point (22,1.45), \$point (22.25,1.425), \$point (22.4,1.415), \$point (22.6,1.415), \$point (22.8,1.415), \$point (22.9,1.42)}\}$
- $l_8 = \{\text{\$point (22.98,1.43), \$point (23.16,1.44), \$point (23.3,1.43), \$point (23.5,1.35), \$point (23.6,1.2)}\}$



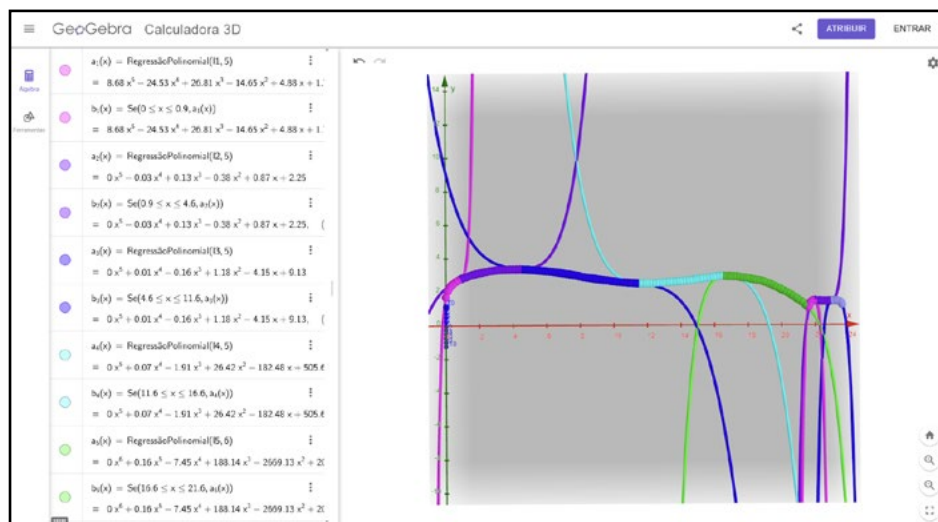
### 3. Ajustar cada trecho com regressão polinomial

Para cada lista utilizada no passo anterior, crie uma função ajustada  $a_i(x)$  utilizando Regressão Polinomial. Em seguida, restrinja o intervalo de validade dessa função com o comando “Se(...)”, de forma que apenas o trecho correspondente da garrafa seja desenhado.

Ao realizar esse procedimento no GeoGebra, você notará que duas linhas serão exibidas para cada uma das listas:

- A primeira, é o gráfico completo do polinômio  $a_i(x)$ , que se estende além da região medida;
- A segunda, é o trecho limitado  $b_i(x)$ , definido com Se(...), que corresponde exatamente à porção válida da garrafa.
  - $a_{\{1\}}(x) = \text{RegressãoPolinomial}(l_1,5)$
  - $b_{\{1\}}(x) = \text{Se}(0 \leq x \leq 0.9, a_{\{1\}}(x))$
  - $a_{\{2\}}(x) = \text{RegressãoPolinomial}(l_2,5)$
  - $b_{\{2\}}(x) = \text{Se}(0.9 \leq x \leq 4.6, a_{\{2\}}(x))$
  - $a_{\{3\}}(x) = \text{RegressãoPolinomial}(l_3,5)$
  - $b_{\{3\}}(x) = \text{Se}(4.6 \leq x \leq 11.6, a_{\{3\}}(x))$

- $a_{\{4\}}(x) = \text{RegressãoPolinomial}(14,5)$
- $b_{\{4\}}(x) = \text{Se}(11.6 \leq x \leq 16.6, a_{\{4\}}(x))$
- $a_{\{5\}}(x) = \text{RegressãoPolinomial}(15,6)$
- $b_{\{5\}}(x) = \text{Se}(16.6 \leq x \leq 21.6, a_{\{5\}}(x))$
- $a_{\{6\}}(x) = \text{RegressãoPolinomial}(16,4)$
- $b_{\{6\}}(x) = \text{Se}(21.6 \leq x \leq 22, a_{\{6\}}(x))$
- $a_{\{7\}}(x) = \text{RegressãoPolinomial}(17,5)$
- $b_{\{7\}}(x) = \text{Se}(22 \leq x \leq 22.98, a_{\{7\}}(x))$
- $a_{\{8\}}(x) = \text{RegressãoPolinomial}(18,4)$
- $b_{\{8\}}(x) = \text{Se}(22.98 \leq x \leq 23.6, a_{\{8\}}(x))$



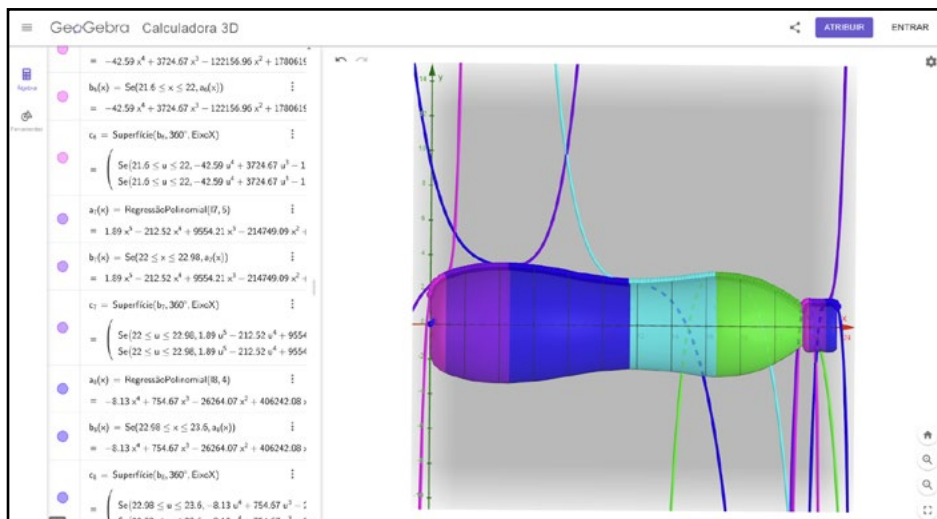
#### OBSERVAÇÃO:

Graus mais altos de funções polinomiais podem melhorar a precisão do modelo matemático. Use o menor grau que capture bem a forma desejada.

#### 4. Gerar a superfície de revolução (sólido 3D)

Com cada trecho preparado, gere o sólido rotacionando  $360^\circ$  em torno do Eixo X:

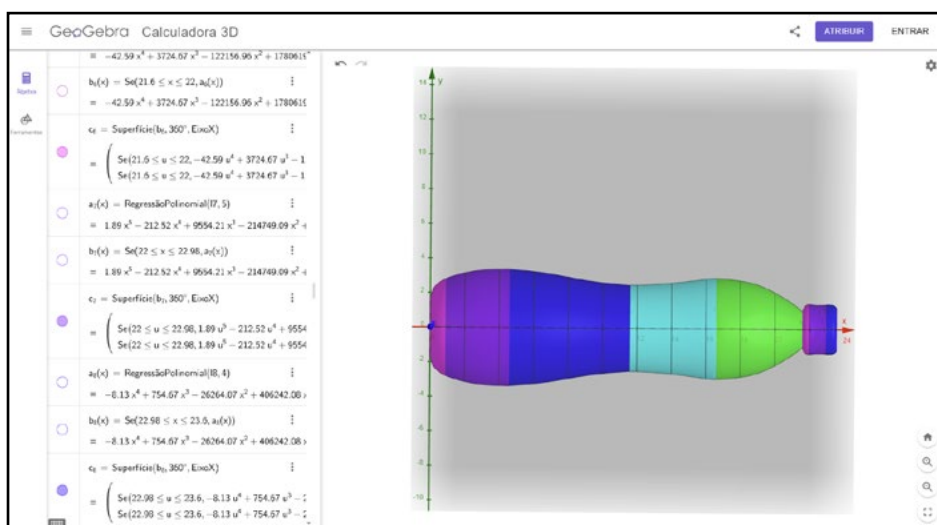
- $c_{\{1\}} = \text{Superfície}(b_{\{1\}}, 360^\circ, \text{EixoX})$
- $c_{\{2\}} = \text{Superfície}(b_{\{2\}}, 360^\circ, \text{EixoX})$
- $c_{\{3\}} = \text{Superfície}(b_{\{3\}}, 360^\circ, \text{EixoX})$
- $c_{\{4\}} = \text{Superfície}(b_{\{4\}}, 360^\circ, \text{EixoX})$
- $c_{\{5\}} = \text{Superfície}(b_{\{5\}}, 360^\circ, \text{EixoX})$
- $c_{\{6\}} = \text{Superfície}(b_{\{6\}}, 360^\circ, \text{EixoX})$
- $c_{\{7\}} = \text{Superfície}(b_{\{7\}}, 360^\circ, \text{EixoX})$
- $c_{\{8\}} = \text{Superfície}(b_{\{8\}}, 360^\circ, \text{EixoX})$



Você verá 8 objetos que, em conjunto, compõem a garrafa.

### OBSERVAÇÃO:

Você pode clicar nos círculos ao lado de cada entrada digitada para ocultá-las da visualização, deixando visíveis apenas as variáveis  $c$ , que correspondem às partes da garrafa.



### 5. Estimar o volume com integrais (chegar se a garrafa tem aproximadamente 500 mL)

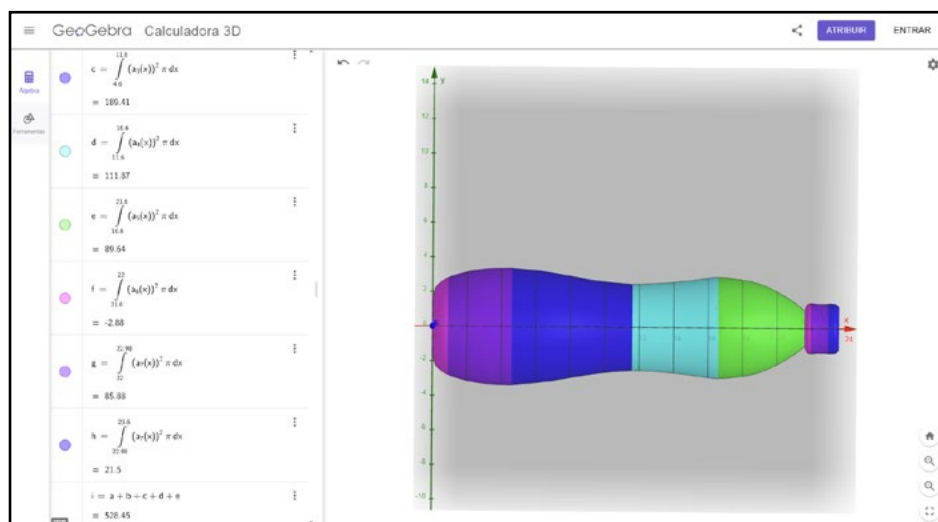
O volume de um sólido de revolução em torno do eixo  $X$  é  $V = \int \pi [f(x)]^2 dx$ , onde  $f(x)$  é a função geratriz do objeto a ser modelado. Integre cada trecho e some:

- $a = \text{Integral}((a_{\{1\}}(x))^2 \pi, 0, 0.9)$
- $b = \text{Integral}((a_{\{2\}}(x))^2 \pi, 0.9, 4.6)$
- $c = \text{Integral}((a_{\{3\}}(x))^2 \pi, 4.6, 11.6)$
- $d = \text{Integral}((a_{\{4\}}(x))^2 \pi, 11.6, 16.6)$
- $e = \text{Integral}((a_{\{5\}}(x))^2 \pi, 16.6, 21.6)$
- $f = \text{Integral}((a_{\{6\}}(x))^2 \pi, 21.6, 22)$

- $g = \text{Integral}((a_{\{7\}}(x))^2 \pi, 22, 22.98)$
- $h = \text{Integral}((a_{\{8\}}(x))^2 \pi, 22.98, 23.6)$
- $i = a + b + c + d + e$

#### OBSERVAÇÃO:

Perceba que aqui não somamos todas as partes da garrafa, pois a porção superior, correspondente à tampa e ao gargalo, não comporta líquido. Assim, consideramos apenas as integrais “  $a + b + c + d + e$  ” que representam a área interna efetiva utilizada para armazenar os 500 mL.

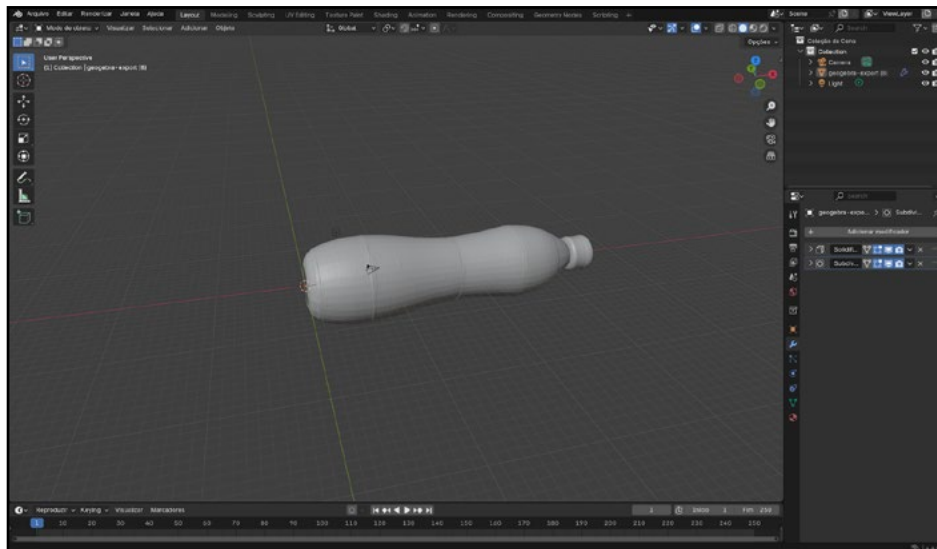


#### Resultado do experimento:

Com os dados desta garrafa, a soma retornou aproximadamente 528,45 (na mesma unidade cúbica dos seus eixos; em cm, isso equivale a aproximadamente  $528,45 \text{ cm}^3 \approx 528,45 \text{ mL}$ ). Esse valor ficou próximo de 500 mL, mostrando na prática como as integrais medem volume e como a matemática pode ser usada para validar um modelo físico.

#### 6. Visualizar o resultado final

Após a criação da garrafa no GeoGebra, salve o modelo em .stl e abra-o no Blender para aplicar os refinamentos essenciais. Os ajustes de espessura e suavização conferem maior realismo e tornam o objeto pronto para impressão 3D. O resultado final pode ser visto a seguir:



## Considerações finais

As experiências e reflexões apresentadas neste e-book evidenciam que a metodologia Estudos de Aula pode constituir-se como um caminho promissor para a qualificação da prática docente na área de Ciências Exatas no Ensino de Engenharia. Ao promover processos de planejamento colaborativo, discussão coletiva e reflexão sistemática sobre as práticas de ensino, essa abordagem favorece a construção compartilhada de conhecimentos pedagógicos entre docentes, contribuindo para o aprimoramento contínuo das estratégias didáticas utilizadas em sala de aula.

As práticas relatadas ao longo dos capítulos demonstram que a proposição de tarefas exploratórias e investigativas tem potencial para ampliar o protagonismo dos estudantes nos processos de aprendizagem, incentivando a formulação de hipóteses, a busca por soluções e a articulação entre conceitos teóricos e situações do cotidiano. Ao integrar conteúdos de Matemática e Física a contextos aplicados e a desafios concretos, as atividades desenvolvidas favorecem a aprendizagem com mais significado, ao mesmo tempo em que estimulam a autonomia intelectual e o pensamento crítico dos estudantes de Engenharia.

Além disso, a incorporação de tecnologias digitais e de processos de modelagem e impressão 3D evidencia novas possibilidades para o ensino de Ciências Exatas, permitindo a construção de sólidos obtidos, via modelagem matemática. Essa aproximação entre teoria e prática amplia as oportunidades de experimentação e compreensão conceitual, reforçando o potencial das abordagens interdisciplinares no contexto da formação em Engenharia.

Por fim, espera-se que as experiências, propostas e reflexões apresentadas neste e-book possam inspirar outros docentes e pesquisadores a explorar caminhos semelhantes em seus contextos de atuação. Mais do que apresentar respostas definitivas, este material busca contribuir para o fortalecimento de uma cultura de investigação sobre a prática docente, incentivando a colaboração entre professores e a construção contínua de estratégias inovadoras para o ensino e a aprendizagem nas Ciências Exatas.



**UNIVATES**

Av. Avelino Tallini, 171 | Bairro Universitário | Lajeado | RS | Brasil  
CEP 95914-014 | Cx. Postal 155 | Fone: 51 3714.7000  
[www.univates.br](http://www.univates.br) | 0800 7 07 08 09