

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE  
CIÊNCIAS EXATAS  
DOUTORADO

# **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM**

UMA ABORDAGEM INTERPRETATIVA DE  
ENSINO COM O POWERSIM

**ODAIR JOSÉ TEIXEIRA DA FONSECA  
MARIA MADALENA DULLIUS**

2025

**ODAIR JOSÉ TEIXEIRA DA FONSECA  
MARIA MADALENA DULLIUS**

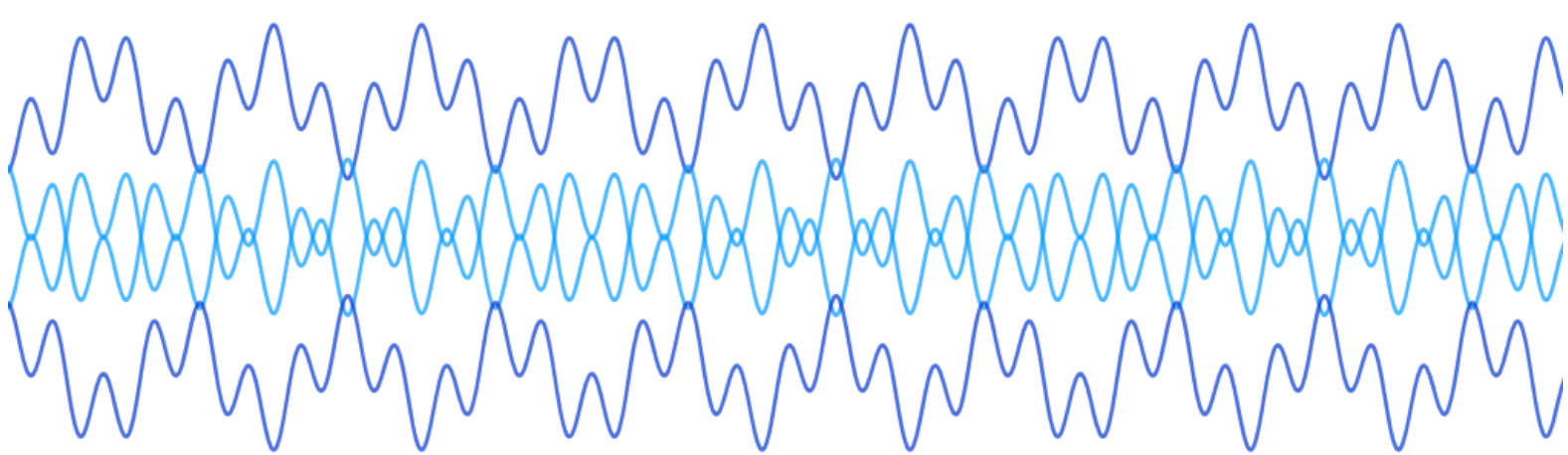
# **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM**

**UMA ABORDAGEM INTERPRETATIVA DE  
ENSINO COM O POWERSIM**

LAJEADO, RS



2025



# Sumário

<b>1 Apresentação</b>	<b>3</b>
<b>2 Conhecendo o Powersim</b>	<b>5</b>
2.1 Construindo gráficos de funções com o POWERSIM . . . . .	18
2.2 Configurações de simulações no POWERSIM . . . . .	22
<b>3 Sequência de Atividades</b>	<b>26</b>
3.1 Sistemas Equivalentes de Equações Diferenciais Ordinárias . . .	27
3.2 Atividades Propostas . . . . .	33
<b>4 Considerações Finais</b>	<b>69</b>
<b>Referências</b>	<b>70</b>



# 1 APRESENTAÇÃO

Prezado leitor, este texto foi elaborado como produto educacional relacionado à pesquisa de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE, na Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES. Propomos uma perspectiva de abordagem para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de Segunda Ordem. Priorizamos o ensino com foco interpretativo, explorando os aspectos gráficos e numéricos da solução de uma EDO de segunda ordem. Para isso, utilizaremos o *software* POWERSIM (<<https://powersim.com/>>), um programa computacional disponível na versão de licença comercial e também de acesso livre.

Conforme mencionado anteriormente, este Produto Educacional está vinculado à tese de doutorado intitulada “*Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem: abordagem exploratória com o uso didático do Powersim*”, a qual está disponível no repositório institucional e pode ser acessada na página oficial do PPGECE por meio do link <<https://www.univates.br/ppgece/producoes/teses>>.

As atividades serão propostas na forma de uma Sequência Didática, cuja estrutura “é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática” (Nascimento; Schimiguel, 2017, p. 121). Para Zabala (2014, p. 16), as sequências didáticas “são uma maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática”. Nessa perspectiva, as atividades foram formuladas de maneira articulada, favorecendo a prática de ensino exploratório mediada

pelo uso didático do Powersim, em consonância com os pressupostos da Teoria do Uso Didático das Tecnologias Digitais (TUDITEC) discutida por Dullius, Quartieri e Neide (2023).

A proposta apresenta uma sequência de atividades envolvendo o conceito de equações diferenciais ordinárias, com sugestões sobre como poderiam ser apresentadas em sala de aula. A abordagem metodológica que propomos prioriza, em um primeiro momento, a elaboração intuitiva do gráfico da solução utilizando apenas lápis e/ou caneta. Em seguida, sugerimos a implementação da situação no POWERSIM, de forma que o estudante possa confrontar o gráfico construído intuitivamente com o que foi plotado com o recurso computacional.

O texto está organizado de forma que o leitor possa primeiro compreender o funcionamento do POWERSIM para, em seguida, desenvolver as atividades propostas. Desse modo, no capítulo 2 trazemos um tutorial sobre a utilização do POWERSIM, onde mostramos as funcionalidades que serão exploradas durante o desenvolvimento das atividades propostas. Ainda neste capítulo, construímos um diagrama básico utilizando o POWERSIM com o intuito de familiarizar o leitor com a interface do *software* e seus recursos.

O capítulo 3 está organizado em dois momentos: inicialmente discutimos de forma breve a equivalência entre uma Equação Diferencial Ordinária de ordem  $n$  e um sistema de  $n$  Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem. Em seguida, apresentamos uma sequência didática composta por seis atividades envolvendo equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, as quais apresentam grau de dificuldade crescente, tanto do ponto de vista interpretativo quanto da construção dos diagramas com o POWERSIM.

No capítulo 4 apresentamos as considerações finais sobre o produto educacional, na qual apresentamos, de forma sintética, uma avaliação/reflexão sobre o desenvolvimento das atividades destacando as potencialidades e fragilidades, bem como possíveis adaptações.

Durante todo o texto as figuras apresentadas foram elaboradas pelos autores, exceto quando mencionada a fonte. Por fim, destacamos que as atividades propostas neste Produto Educacional foram implementadas em duas turmas, sendo uma de graduação em Engenharia de Alimentos e uma de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE). No caso da graduação a intervenção ocorreu na disciplina de Cálculo III, ministrada no quarto semes-

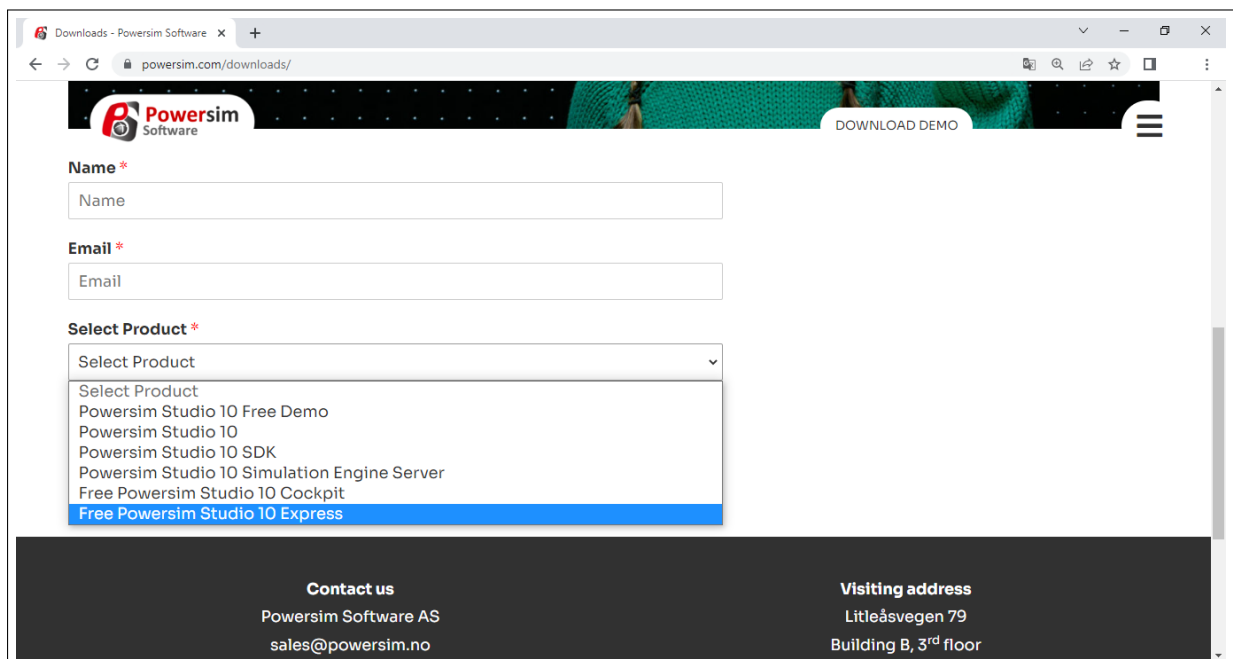
tre do curso. Por outro lado, na turma do PPGECE, as aulas foram desenvolvidas na disciplina de Tópicos de Matemática II.

Cabe destacar que, ao longo do texto, disponibilizamos um tutorial didático no *YouTube* com o propósito de auxiliar o leitor desde o processo de *download* e instalação do Powersim até a construção dos diagramas para cada uma das atividades propostas no Produto Educacional.

## 2 CONHECENDO O POWERSIM

Iniciamos esse capítulo apresentando os caminhos para obtenção do *software*, voltado para plataforma *windows* (extensão *.exe*). Neste caso, optamos pela versão *Free Powersim Studio 10 Express*, que pode ser obtida na página oficial de *download* por meio do link (<https://powersim.com/downloads/>). Após acessar o sítio eletrônico será solicitado um breve cadastro, no qual o usuário insere nome, endereço de e-mail e escolhe a versão do produto, conforme Figura 2.1.

**Figura 2.1:** Acessando a página oficial de *download* do POWERSIM.



The screenshot shows a web browser window with the URL [powersim.com/downloads/](https://powersim.com/downloads/). The page has a dark header with the Powersim logo on the left and a 'DOWNLOAD DEMO' button on the right. Below the header is a registration form with the following fields:

- Name \***: A text input field with the placeholder text 'Name'.
- Email \***: A text input field with the placeholder text 'Email'.
- Select Product \***: A dropdown menu with the placeholder text 'Select Product'. The dropdown is open, showing a list of products: 'Select Product', 'Powersim Studio 10 Free Demo', 'Powersim Studio 10', 'Powersim Studio 10 SDK', 'Powersim Studio 10 Simulation Engine Server', 'Free Powersim Studio 10 Cockpit', and 'Free Powersim Studio 10 Express' (which is highlighted in blue).

At the bottom of the page, there is a dark footer with the following information:

- Contact us**: Powersim Software AS, sales@powersim.no
- Visiting address**: Littleåsvegen 79, Building B, 3<sup>rd</sup> floor

Após selecionar a opção desejada será gerada uma chave para acessar o produto (*product key*), em seguida basta clicar em *submit* que o sistema abrirá a janela para *download*. Após a conclusão do *download*, proceda com a instalação do aplicativo seguindo todos os passos indicados. Para efetivação da instalação será solicitada a chave de 25 dígitos gerada anteriormente.

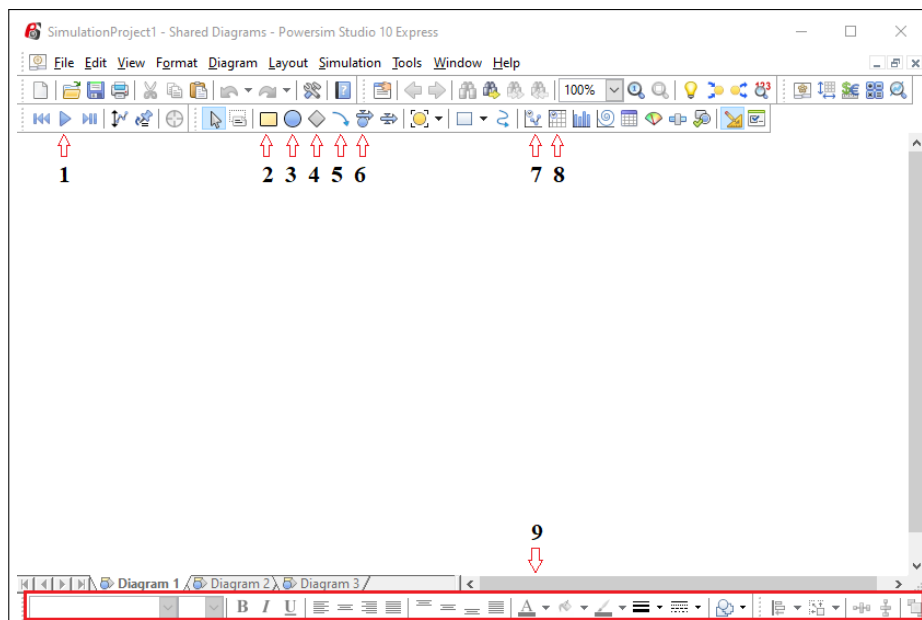
CARO LEITOR, PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O *download* E A INSTALAÇÃO DO POWERSIM, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<<https://www.youtube.com/watch?v=ja08R4k7tP4>>

Na Figura 2.2 apresentamos a captura da tela inicial do POWERSIM destacando os recursos que serão utilizados nas atividades desenvolvidas neste texto.

**Figura 2.2:** Captura da tela inicial do POWERSIM.



Na Figura 2.2:

1. *Toggle Play*: Botão executar (iniciar), utilizado para realizar as simulações após a construção do diagrama.
2. *Activate Tool for a Creating a Level*: Recurso (nível/tanque) para construir um nível, representa a variável dependente na equação diferencial. Onde inserimos o valor da condição inicial da respectiva variável.
3. *Activate Tool for a Creating an Auxiliary*: Recurso para definir uma variável auxiliar.
4. *Activate Tool for a Creating a Constant*: Recurso para definir uma constante.
5. *Activate Tool for a Creating a Link*: Ferramenta (seta conectiva) para definir as relações/conexões entre as variáveis e/ou os parâmetros.
6. *Activate Tool for a Creating a Flow with Rate*: Recurso (torneira) para definir as taxas de entrada e de saída.
7. *Activate Tool for a Creating a Time Graph*: Recurso para construir gráficos de uma variável em função do tempo.
8. *Activate Tool for a Creating a Time Table*: Recurso para criar tabelas de evolução temporal das variáveis.
9. Barra de configurações adicionais, como fonte e tamanho de letra, preenchimento de formas e linhas, dentre outras funcionalidades.

A aplicabilidade de cada um desses recursos será explanada com mais detalhes à medida em que formos construindo um diagrama básico com o POWERSIM.

MAS, COMO CONSTRUIR UM  
DIAGRAMA COM O POWERSIM?

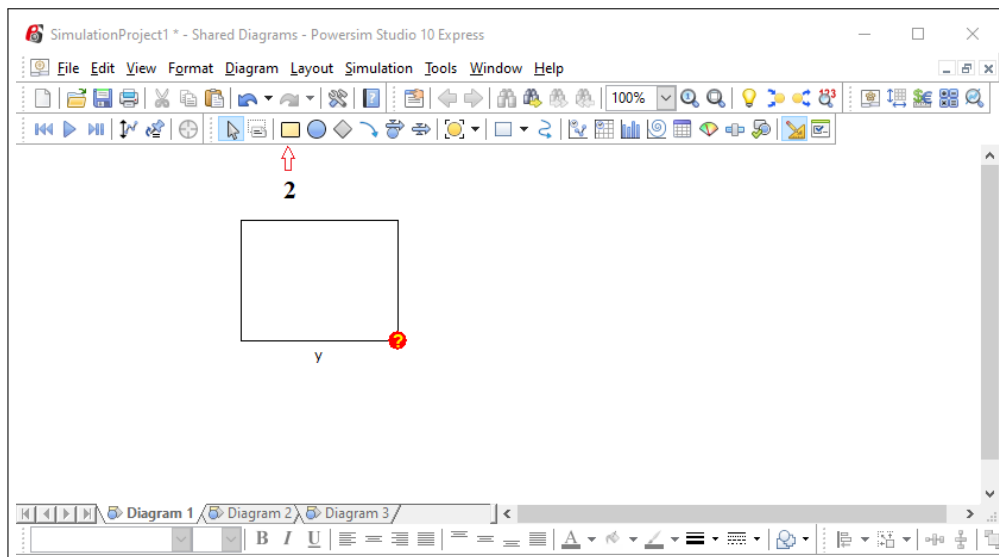
Pois bem, vejamos como construir um diagrama básico com o POWERSIM. Por conveniência didática utilizaremos o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \alpha(\beta - y) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot y \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \quad (2.1)$$

como modelo para exemplificar a construção do diagrama.

Inicialmente inserimos o tanque/nível acionando o recurso *Activate Tool for Creating a Level*, representado por um retângulo (nº 2 conforme Figura 2.3), após seleccionar o recurso, clicamos na tela inicial do aplicativo. Feito isso, um retângulo será criado e nomeado automaticamente por *Level\_1*, para renomeá-lo basta dar um duplo clique na caixa de diálogo e digitar o novo nome, neste caso, utilizaremos o nome da variável dependente *y*, conforme Figura 2.3.

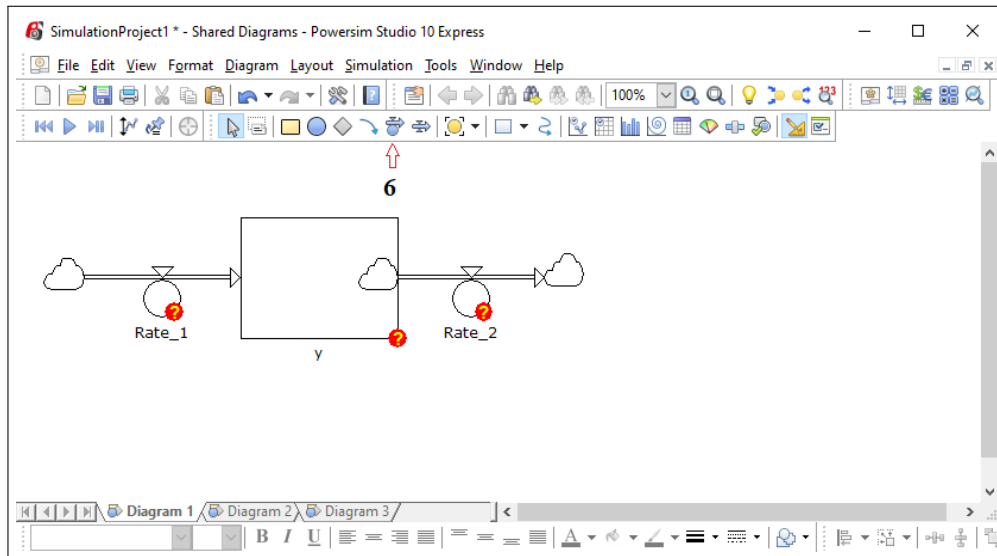
**Figura 2.3:** Inserindo um nível/tanque no POWERSIM.



Em seguida, utilizamos a opção *Activate Tool for Creating a Flow with Rate* para conectar as torneiras de entrada e saída ao tanque/nível (nº 6 conforme a Figura 2.4).

CHAMAMOS A ATENÇÃO AO FATO DE QUE PARA A TORNEIRA DE ENTRADA ESTAR DEVIDAMENTE CONECTADA AO TANQUE/NÍVEL A NUVEM DA PONTA DA SETA DEVERÁ DESAPARECER AO TOCAR A BORDA DO TANQUE/NÍVEL.

**Figura 2.4:** Conectando as torneiras (taxa de entrada e de saída) ao nível/tanque no POWER-SIM.

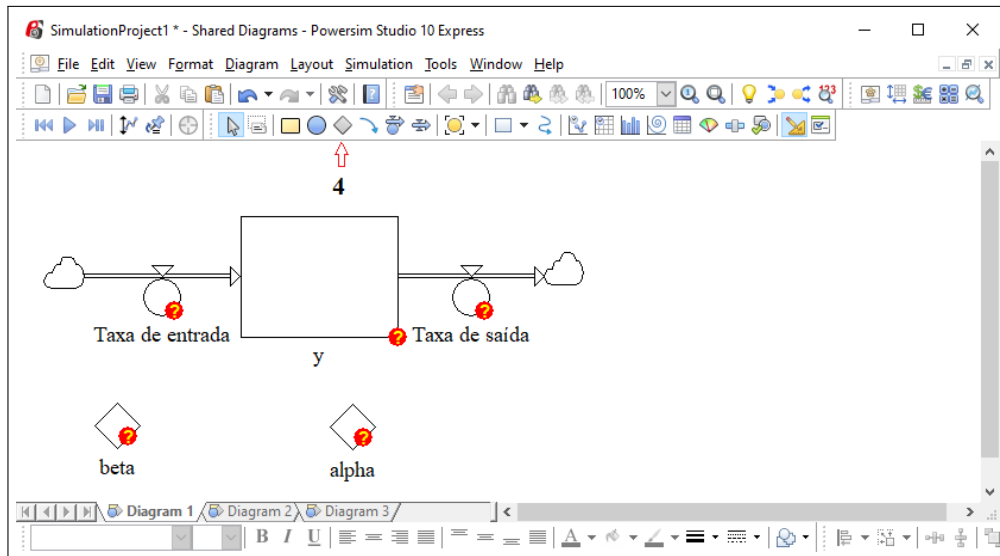


Analogamente, a torneira de saída estará devidamente conectada quando a nuvem do início da seta desaparecer ao tocar a borda do tanque/nível, observe na Figura 2.4 que a torneira de saída não está corretamente conectada ao retângulo  $y$ . Ademais, esses parâmetros serão nomeados automaticamente por  $Rate\_1$  e  $Rate\_2$ , respectivamente, e podem ser renomeados, conforme o interesse do usuário.

LEMBRE-SE DE VERIFICAR SE AS TORNEIRAS FICARAM CONECTADAS CORRETAMENTE!!!

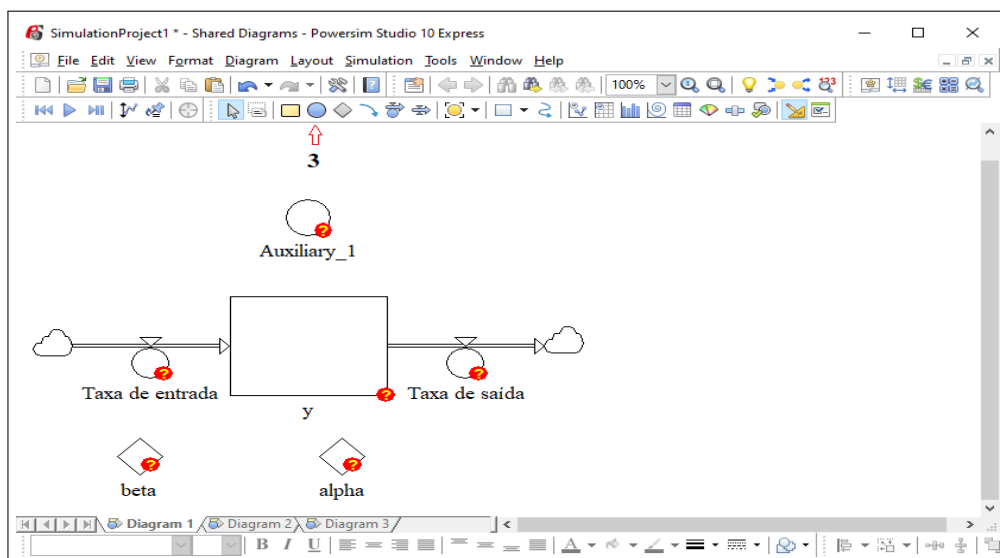
As constantes  $\alpha$  e  $\beta$  são definidas com o recurso *Activate Tool for Creating a Constant*, representado por um losango (nº 4 conforme Figura 2.5), neste caso, os objetos serão nomeados por  $Constant\_1$  e  $Constant\_2$ , basta dar um duplo clique sobre o rótulo e renomeá-los para  $\alpha$  e  $\beta$ , caso seja do interesse do leitor/usuário.

**Figura 2.5:** Inserindo constantes no POWERSIM.



Para inserirmos a taxa de variação utilizamos a opção *Activate Tool for Creating an Auxiliary*, representada por um círculo (nº 3 conforme Figura 2.6). Neste caso o objeto será nomeado automaticamente por *Auxiliary\_1* e, por conveniência didática, o renomearemos para  $dy\_dt$  ou  $dx\_dt$ , conforme a equação diferencial.

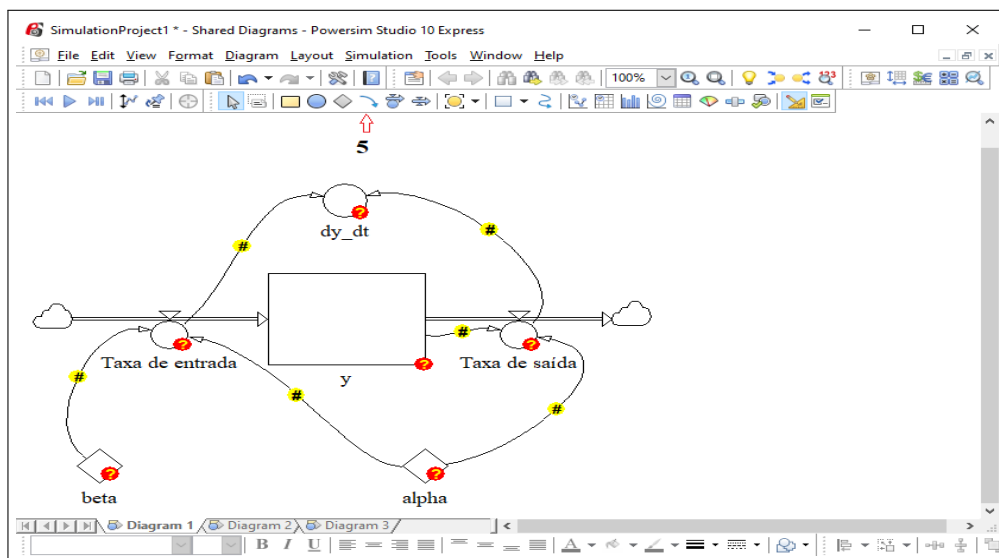
**Figura 2.6:** Inserindo taxa de variação no POWERSIM.



CARO LEITOR, NOTE QUE A FUNÇÃO AUXILIAR NÃO É UM ITEM OBRIGATÓRIO PARA A EFETIVA COMPILAÇÃO DOS RESULTADOS. ISTO É, ELA ASSUME O PAPEL DE FERRAMENTA AUXILIAR PARA CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS E TABELAS.

As relações entre as variáveis e parâmetros são construídas com a ferramenta *Activate Tool for Creating a Link*, representada pela seta “curvada” (nº 5 conforme Figura 2.7). Por exemplo, a taxa de entrada depende de  $\alpha$  e  $\beta$ , pois é definida pelo produto  $\alpha \cdot \beta$ , portanto as setas conectivas devem partir dos respectivos losangos e finalizar no círculo que representa a taxa de entrada (veja Figura 2.7).

**Figura 2.7:** Inserindo taxa de variação no POWERSIM.



Da mesma forma, a taxa de variação  $\frac{dy}{dt}$  nomeada como  $dy\_dt$ , no POWERSIM, é dada pela diferença entre a taxa de entrada e a taxa de saída, dessa forma as setas conectivas têm início nos círculos que definem cada uma das respectivas taxas e, finalizam no objeto/círculo que define  $dy\_dt$ , conforme Figura 2.7. A seguir mostraremos como definir a taxa de variação.

A taxa de saída é dada pelo produto  $-\alpha \cdot y$ , ou seja, depende de  $y$  e  $\alpha$ . Dessa forma, as setas conectivas devem ter início no retângulo e no losango que representam  $y$  e  $\alpha$ , respectivamente, finalizando sobre o círculo da taxa de saída, conforme ilustrado na Figura 2.7.

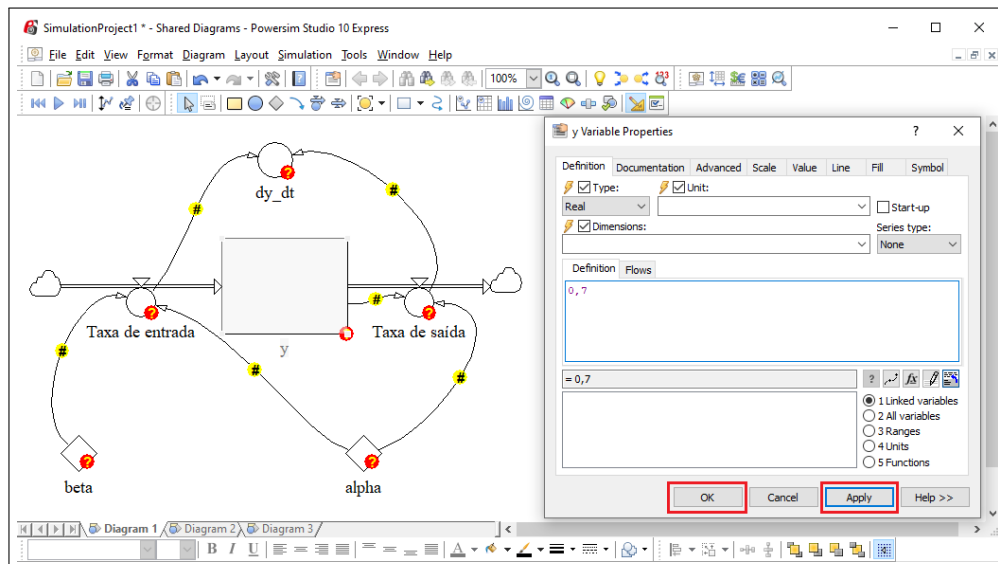
PRONTO, CONSTRUÍMOS UM  
DIAGRAMA COM O POWERSIM!!!

Antes de prosseguirmos com a definição das variáveis e inserirmos os valores numéricos, preste muita atenção na dica a seguir, ela é muito importante!

O POWERSIM UTILIZA A VÍRGULA COMO SEPARADOR DECIMAL.  
POR EXEMPLO, SE FOR DIGITADO 0.7 AO INVÉS DE 0,7 NO  
CAMPO DEFINITION, APARECERÁ UMA MENSAGEM DE ERRO!

Após o término da construção do diagrama precisamos inserir as informações nos respectivos campos. Por exemplo, no tanque/nível inserimos a condição inicial  $y_0$  dada na Equação (2.1). Para isso, efetuamos um duplo clique sobre o retângulo nomeado por  $y$  e abrirá uma caixa de diálogo, na qual inserimos o valor numérico de  $y_0$  no campo *Definition*, depois clicamos em *Apply* e *OK* ou um duplo *Enter*, conforme ilustrado na Figura 2.8.

**Figura 2.8:** Caixa de diálogo do POWERSIM e seus componentes.



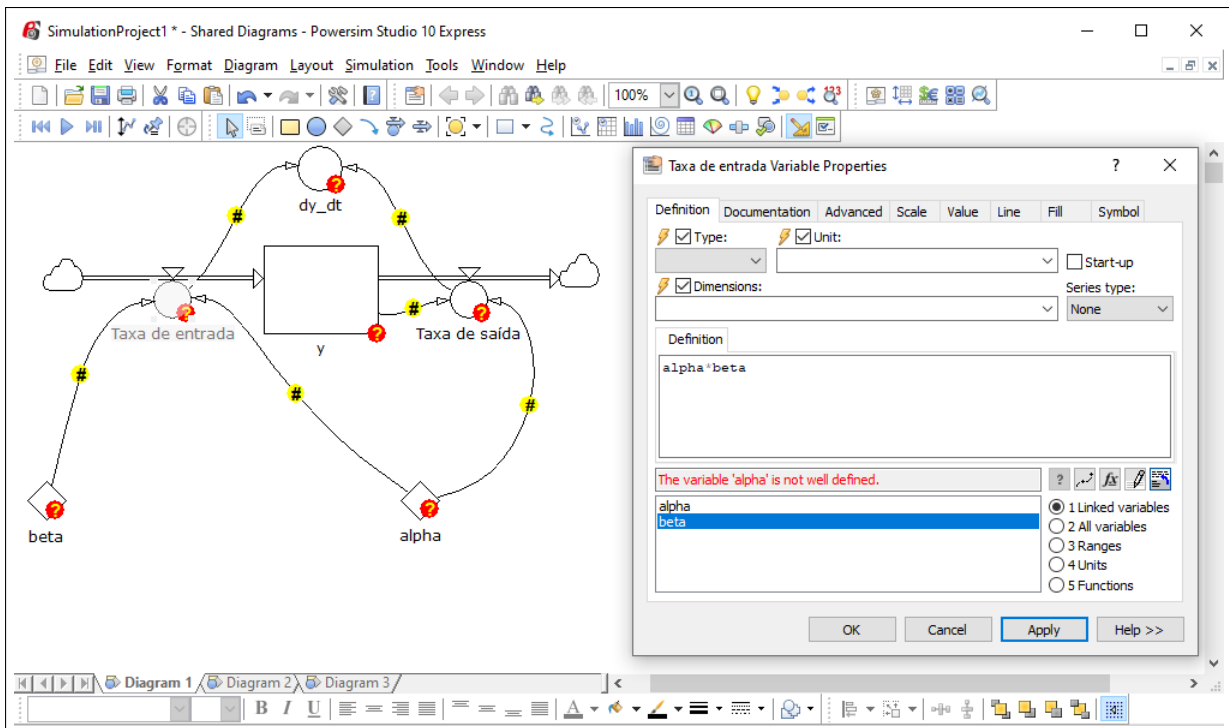
Analogamente, inserimos os valores numéricos das constantes  $\alpha$  e  $\beta$ . Neste caso, utilizamos os valores  $\alpha = 0,05$  e  $\beta = 5$  para realizar as simulações.

Observe que no lado direito da Equação (2.1) o produto  $\alpha \cdot \beta$  tem sinal positivo, isso indica que ele deve ser considerado como taxa de entrada no

diagrama do POWERSIM. Por outro lado o termo  $-\alpha \cdot y$  tem sinal negativo e, portanto, deve ser inserido como taxa de saída no diagrama.

Para inserir o termo  $\alpha \cdot \beta$  no campo da taxa de entrada, damos um duplo clique no círculo da taxa de entrada e uma janela de diálogo será aberta, nesta janela deverá aparecer as variáveis correlacionadas  $\alpha$  e  $\beta$  (veja Figura 2.9), dê um duplo clique sobre o nome `alpha` e ele deverá ser adicionado ao campo *Definition* em seguida clique em asterisco  $*$  para definir a multiplicação e dê um duplo clique em `beta` (veja Figura 2.9), depois clique nos botões *Apply* e *Ok*, respectivamente, ou dê um duplo *Enter*.

**Figura 2.9:** Caixa de diálogo do POWERSIM e seus componentes.



Observe que na Figura 2.9 aparece o símbolo # sobre as setas de conexões, isso acontece quando a regra de relação ainda não foi definida. Ou seja, após adicionarmos a relação de dependência entre as variáveis como descrito anteriormente, o sinal de alerta deve desaparecer.

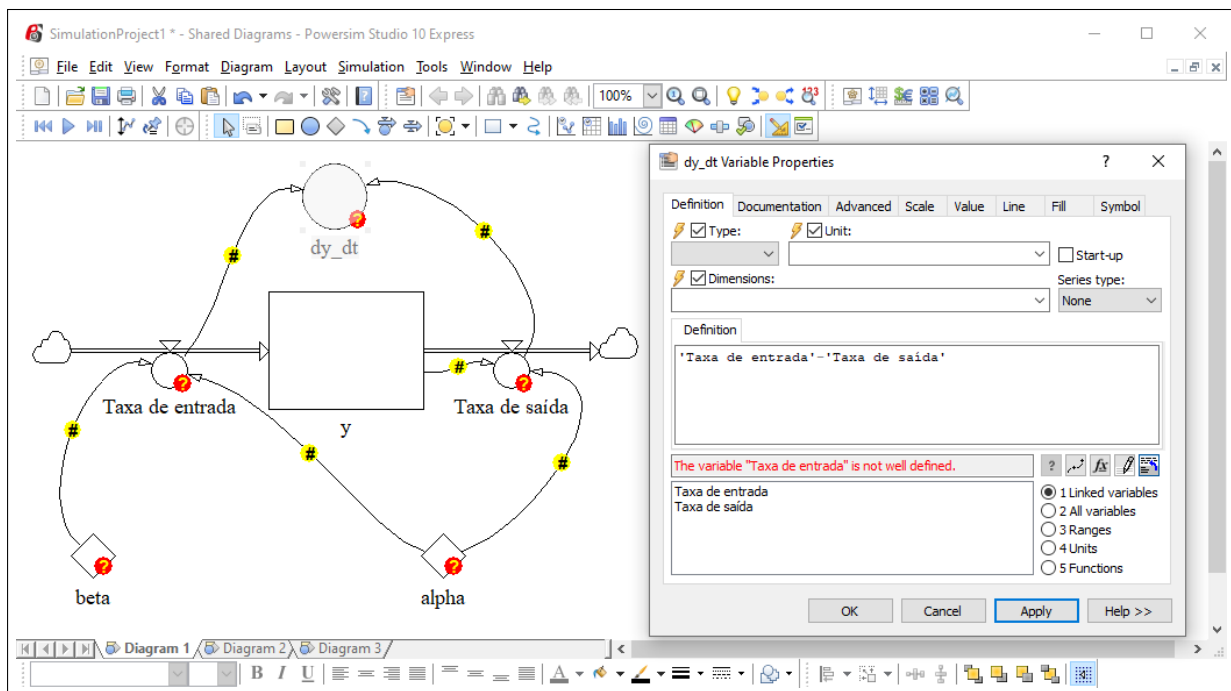
Observe ainda, na Figura 2.9, que na janela de diálogo aparece uma mensagem em vermelho dizendo que a variável  $\alpha$  não está definida, isso ocorre no caso em que seu valor numérico ainda não tenha sido inserido. Neste caso, ao clicar em *Apply* aparecerá uma mensagem reportando que  $\alpha$  não foi definido, basta clicar em *Yes* e inserir o valor numérico de  $\alpha$  posteriormente.

Para definir a taxa de saída efetuamos um duplo clique sobre o círculo que a representa, nomeado como Taxa de saída, neste caso, ao abrir a caixa de diálogo, não precisamos inserir o sinal negativo, pois o POWERSIM entende a torneira de saída como uma subtração, assim sendo, de maneira análoga podemos adicionar o produto  $\alpha \cdot y$ , lembre que no POWERSIM a multiplicação é definida pelo asterisco \*.

Para definir a taxa de variação, dê um duplo clique sobre o ícone renomeado por  $dy\_dt$  e, ao abrir a janela de diálogo, deverá aparecer as variáveis relacionadas pelas setas de conexão, dê um duplo clique em Taxa de entrada e deverá aparecer 'Taxa de entrada' no campo *Definition*, em seguida digite o sinal de subtração e dê um duplo clique em Taxa de saída.

Neste caso, o nome é adicionado entre aspas simples por ter mais de uma palavra. Uma forma de contornar isso seria renomear as variáveis como Taxa\_de\_entrada e Taxa\_de\_saida.

**Figura 2.10:** Caixa de diálogo do POWERSIM e seus componentes.

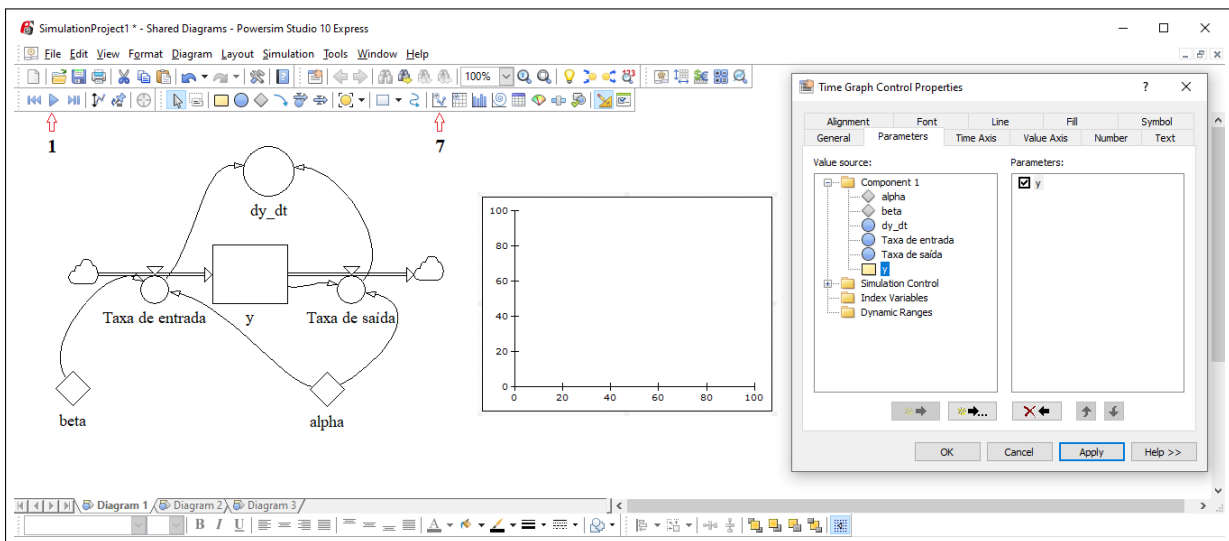


Observe, na Figura 2.10 que aparece uma interrogação nos ícones das variáveis, isto está ocorrendo porque ainda falta inserir os valores numéricos das constantes  $\alpha$  e  $\beta$ . Assim que os respectivos valores forem inseridos, o alerta deve desaparecer.

E OS GRÁFICOS, COMO PODEMOS  
CONSTRUÍ-LOS?

Para construir o gráfico de uma variável em função do tempo, utilizamos o recurso *Activate Tool for Creating a Time Graph* (nº 7 conforme Figura 2.11). Ao construir a janela gráfica dê um duplo clique na borda externa e abrirá uma caixa de diálogo, conforme Figura 2.11.

**Figura 2.11:** Caixa de diálogo do POWERSIM e seus componentes.



Ao abrir a janela de diálogo, clique na opção *Parameters*, depois um duplo clique sobre a pasta *Component 1* e todos os parâmetros/variáveis serão exibidos(as), escolha a variável que desejar construir o gráfico e dê um duplo clique sobre ela para adicioná-la ao campo *Parameters*, clique em *Apply*, depois em *OK*, ou dê um duplo *Enter*.

Com isso, teremos adicionado a variável à janela gráfica. Agora, inserimos os valores numéricos (caso ainda não tenha inserido) e plotamos o gráfico acionando a função *Toggle Play*<sup>1</sup> (nº 1 conforme Figura 2.11).

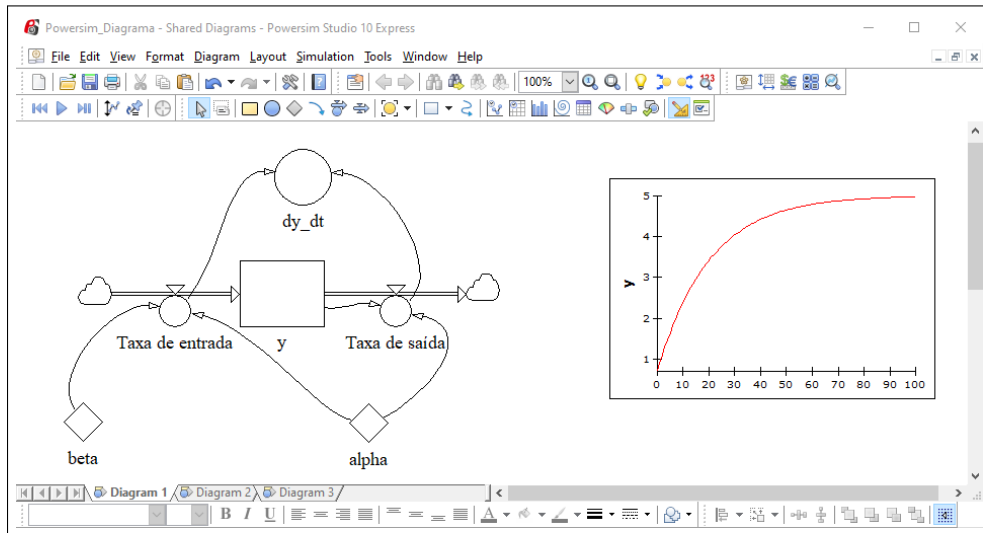
**LEMBRE-SE! O GRÁFICO SÓ SERÁ PLOTADO SE TODOS OS VALORES NUMÉRICOS TIVEREM SIDO INSERIDOS!!!**

Na Figura 2.12 apresentamos o gráfico da solução do PVI (2.1), com  $y_0 = 0,7$ ,  $\alpha = 0,05$  e  $\beta = 5$ . As simulações foram realizadas no domínio  $[0,100]$

<sup>1</sup>O atalho para essa função é Ctrl + espaço

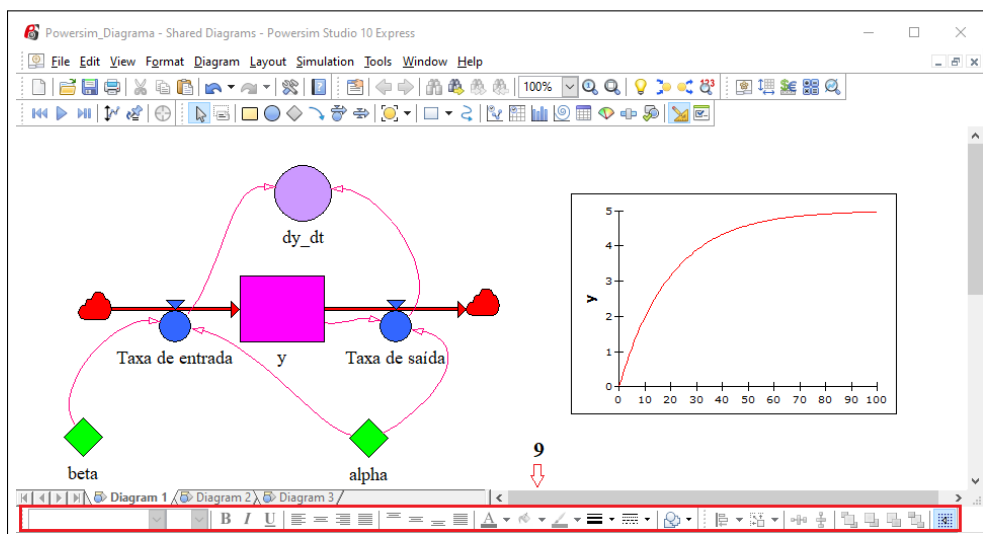
utilizando o método de Euler. Na seção 2.2, mostramos como alterar/definir o método numérico a ser utilizado pelo POWERSIM.

**Figura 2.12:** Gráfico a solução do PVI (2.1) com  $y_0 = 0,7$ ,  $\alpha = 0,05$  e  $\beta = 5$ .



O diagrama apresentado na Figura 2.12 encontra-se em sua versão mais básica (preto e branco). Porém, é possível construir uma versão personalizada. Na Figura 2.13 apresentamos uma versão de diagrama personalizado.

**Figura 2.13:** Diagrama personalizado com a solução do PVI (2.1), considerando  $y_0 = 0,7$ ,  $\alpha = 0,05$  e  $\beta = 5$ .

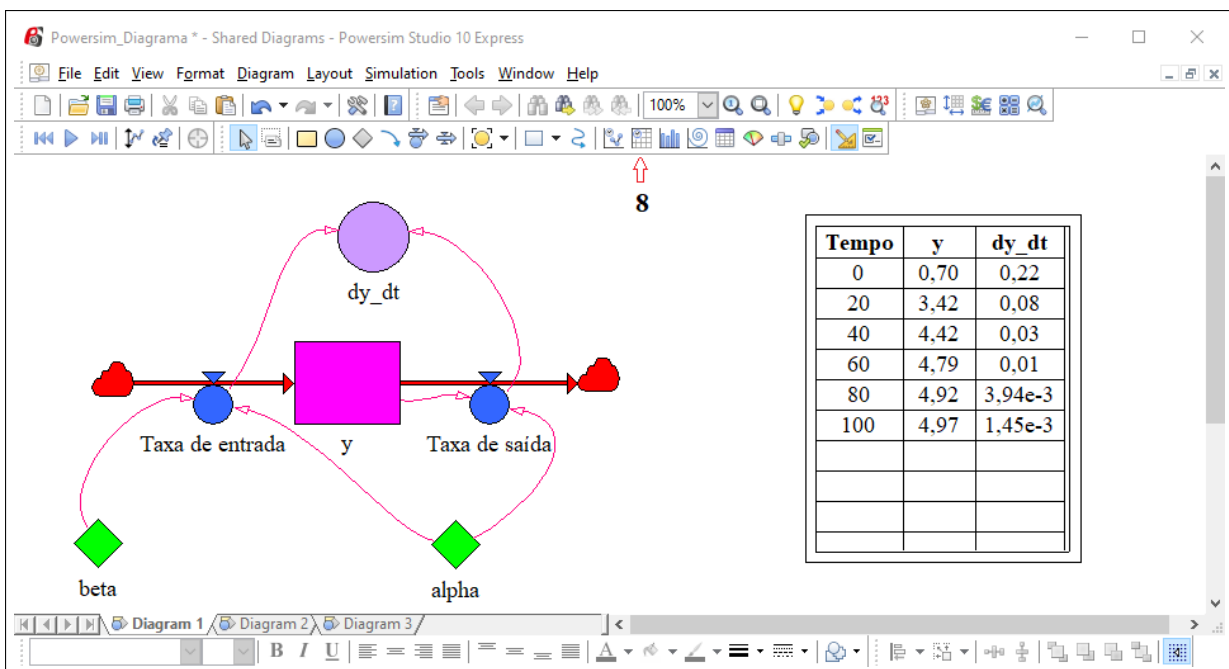


Para colorir o diagrama e alterar o tipo e o tamanho da fonte, utilizamos os recursos de formatação disponíveis na barra de rolagem da janela do POWERSIM (nº 9 conforme Figura 2.13).

COMO CONSTRUIR UMA TABELA COM O POWERSIM?

De maneira análoga à construção de um gráfico, podemos construir uma tabela para apresentar os resultados das simulações em função do tempo com o recurso *Activate Tool for Creating a Time Table* (nº 8 conforme Figura 2.14). Após inserir a tabela na área de trabalho do POWERSIM, dê em duplo clique na borda externa e uma janela de diálogo será aberta. Em *Parameters* acione a opção *Component 1* e selecione as variáveis que desejar inserir na tabela. Na Figura 2.14 apresentamos uma configuração de tabela com os valores numéricos de  $y$  e  $dy\_dt$ . Neste caso, utilizamos  $y_0 = 0,7$ ,  $\alpha = 0,05$  e  $\beta = 5$ , os mesmos valores usados na construção do gráfico.

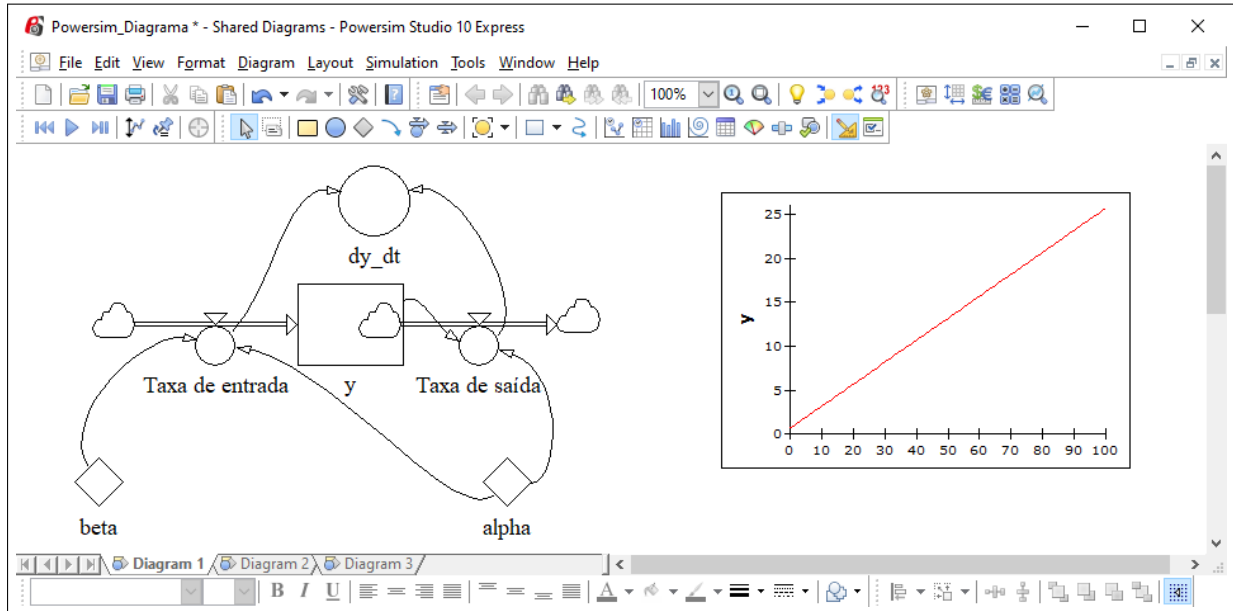
**Figura 2.14:** Diagrama com tabela contendo solução numérica do PVI (2.1) com  $y_0 = 0,7$ ,  $\alpha = 0,05$  e  $\beta = 5$ .



Chamamos a atenção ao fato de que, como mencionado no início desta seção, no caso específico do diagrama apresentado na Figura 2.15, o gráfico foi gerado de forma equivocada. Isso decorre do fato de que a torneira de

saída não está devidamente conectada ao nível/tanque que representa a variável  $y$ . Lembre-se, a torneira estará conectada corretamente se a nuvem da extremidade de contato com a borda do objeto desaparecer.

**Figura 2.15:** Exemplo de um diagrama incorreto no POWERSIM.



CARO LEITOR, PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA NO POWERSIM, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<https://www.youtube.com/watch?v=16dR8qfOc4Q>

Na próxima seção, mostraremos uma alternativa para definir uma função e construir seu respectivo gráfico no POWERSIM.

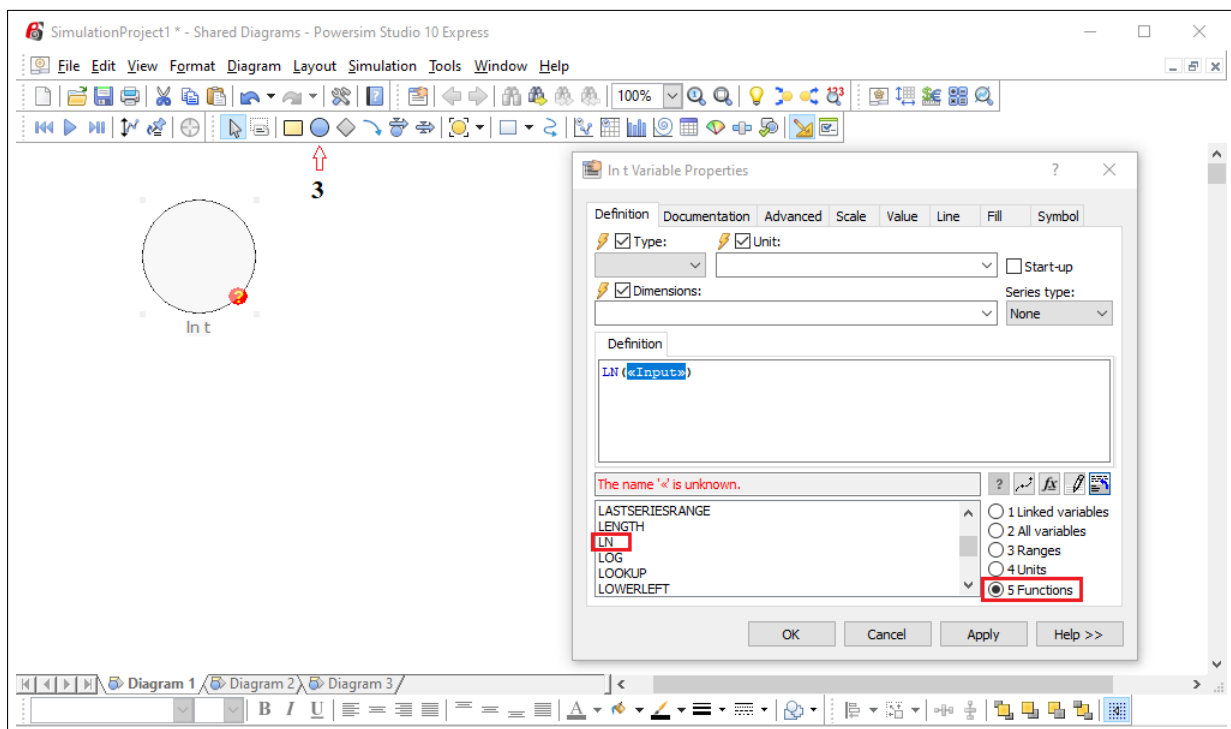
## 2.1 Construindo gráficos de funções com o POWERSIM

O POWERSIM também permite definir funções e construir seus respectivos gráficos.

LEMBRANDO! DURANTE O PROCESSO DE SIMULAÇÃO, O POWERSIM UTILIZA O TEMPO COMO VARIÁVEL INDEPENDENTE!

Por padrão, o POWERSIM está configurado para simulações com valores positivos de  $t$ , porém é possível definir o intervalo do domínio da função para valores negativos, por meio da opção de configuração de simulação, conforme discutiremos na seção 2.2. Como exemplo ilustrativo, mostramos como definir a função  $f(t) = \ln(t)$ . Para isso utilizamos o recurso *Activate Tool for Creating an Auxiliary* (nº 3 conforme Figura 2.16).

**Figura 2.16:** Definindo uma função no POWERSIM.



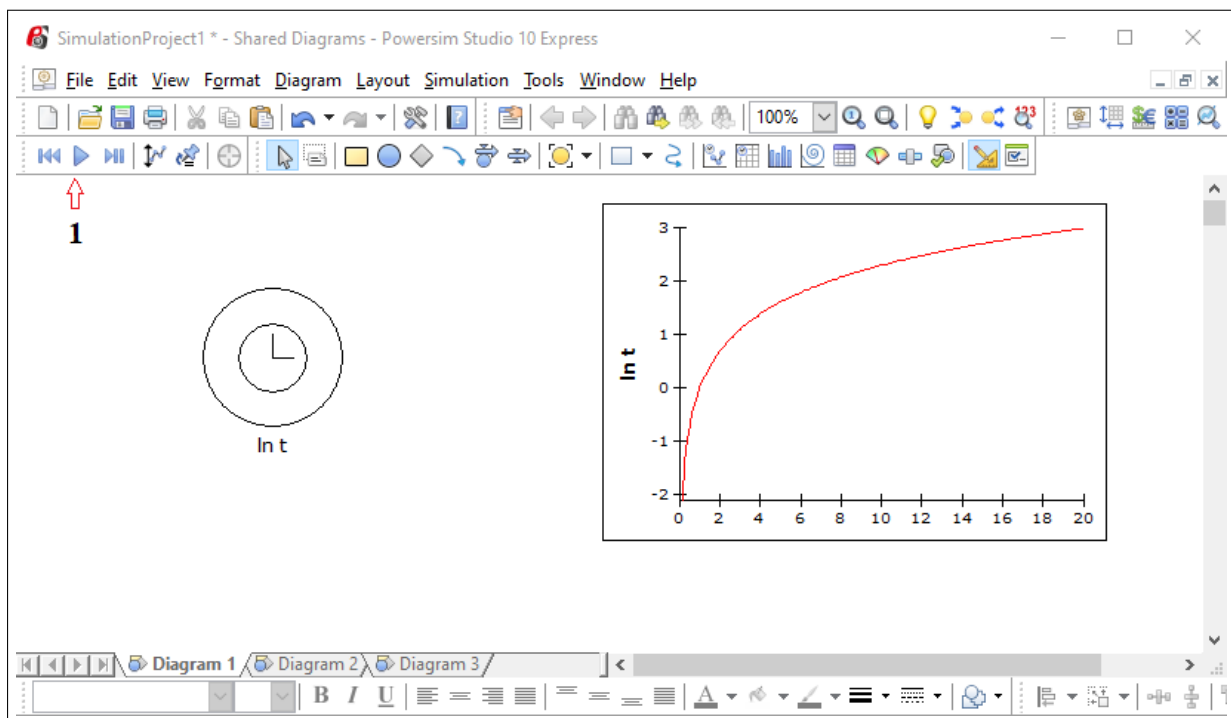
Após a construção do objeto na área de trabalho do aplicativo, efetuamos um duplo clique sobre o círculo que o representa e, ao abrir a janela de diálogo (conforme Figura 2.16), no canto inferior direito, selecione a opção *Functions* e deverá aparecer uma variedade de funções pré-definidas na janela ao lado, procure a função desejada. Neste caso, escolhemos a função LN com um duplo clique e deverá aparecer LN(«Input») no campo *Definition*, apague o termo «Input», mantenha o cursor entre os parenteses e, procure, na tela abaixo, a função *TIME*, dê um duplo clique sobre ela e deverá aparecer

LN(TIME) no campo *Definition*, clique em *Apply*, depois *OK* ou dê um duplo *Enter*.

Também poderíamos ter definido a mesma função digitando  $\ln(\text{time})$  ou LN(TIME) diretamente no campo *Definition*. Observe na Figura 2.17 que o objeto construído para representar a função ficou com o símbolo de um relógio no centro do círculo, isso indica que o objeto depende da variável tempo.

Para construir o gráfico, utilizamos o recurso *Activate Tool for Creating a Time Graph*, conforme descrito anteriormente. E, em seguida, clicamos no botão executar (nº 1 na Figura 2.17) para o programa “rodar” e plotar o gráfico.

**Figura 2.17:** Gráfico da função  $f(t) = \ln(t)$  definida com o POWERSIM.



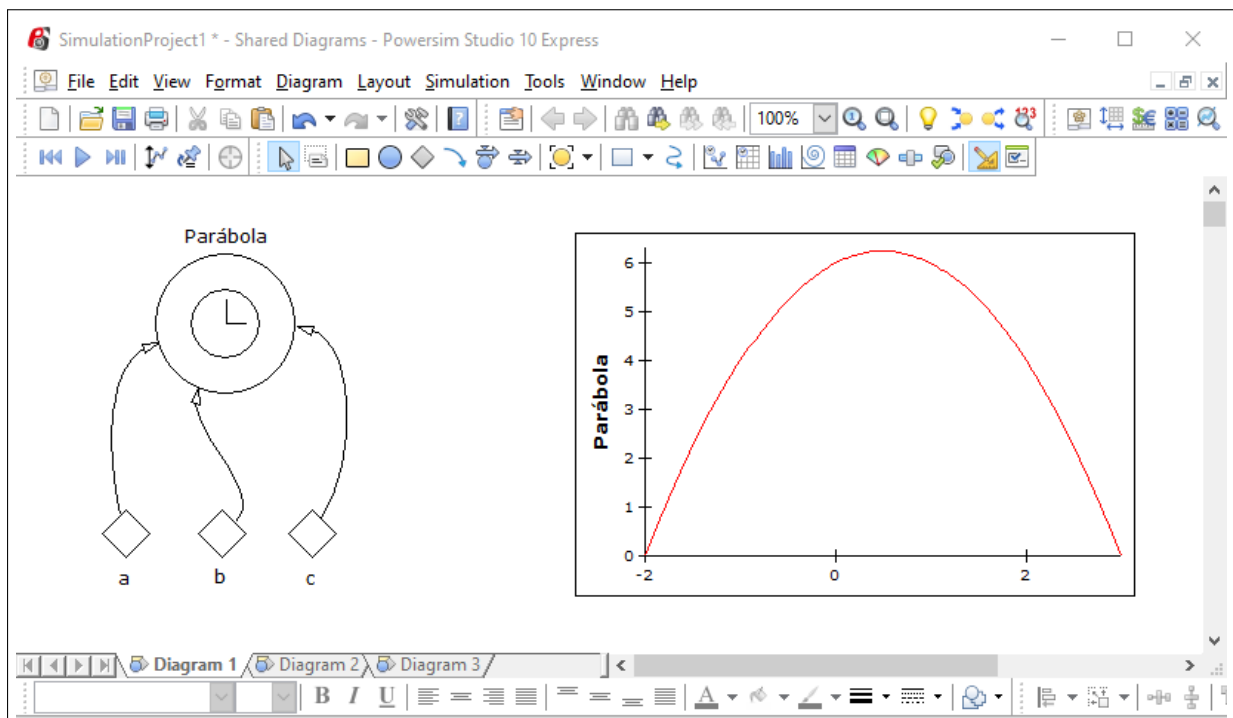
Observe que também podemos definir funções que envolvem coeficientes constantes como polinômios, funções do tipo  $g(t) = a\cos(bt)$ ,  $h(t) = ae^{bt}$ , dentre outras. Por exemplo, podemos definir uma parábola  $f(t) = at^2 + bt + c$ . Utilizando o recurso *Activate Tool for Creating an Auxiliary* para armazenar os valores de  $f$  (note na Figura 2.18 que renomeamos de *Auxiliary\_1* para *Parábola*). Com o recurso *Activate Tool for Creating a Constant* definimos os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Uma vez construídos os objetos e suas conexões, efetuamos um duplo clique no círculo que representa a parábola e, na caixa de diálogo, podemos

dar um duplo clique sobre o  $a$  de forma que ele seja adicionado ao campo *Definition* em seguida efetuamos a multiplicação com o símbolo do asterisco (\*) e buscamos a variável *TIME* nas opções, ou digitamos diretamente *TIME* e inserimos a potência 2 com o símbolo ^2. Analogamente, damos um duplo clique sobre o parâmetro  $b$  e multiplicamos por *TIME*, por fim, após acrescentar o sinal de adição (+), efetuamos um duplo clique no parâmetro  $c$  e um duplo *Enter* e a função  $f(t) = at^2 + bt + c$  estará definida.

Para construir o gráfico de  $f$  utilizamos o recurso *Activate Tool for Creating a Time Graph*, em *Parameters* selecionamos a opção *Parábola*, depois *Apply* e *OK*, ou um duplo clique e, em seguida, executamos o programa para o gráfico ser construído. Na Figura 2.18, apresentamos o diagrama e o gráfico da função  $f(t) = -t^2 + t + 6$ .

**Figura 2.18:** Diagrama e gráfico da função  $f(t) = at^2 + bt + c$  com  $a = -1$ ,  $b = 1$  e  $c = 6$ , construídos com o POWERSIM.



CARO LEITOR! NA FIGURA 2.18, REDEFINIMOS O DOMÍNIO DA FUNÇÃO  $f(t) = -t^2 + t + 6$  DE FORMA QUE O GRÁFICO PUDESSE SER PLOTADO NO INTERVALO  $[-2,3]$ . OS PASSOS PARA ALTERAÇÃO DO DOMÍNIO DE SIMULAÇÃO SERÃO APRESENTADOS NA PRÓXIMA SEÇÃO.

Naturalmente, o gráfico só será preenchido se os valores numéricos dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  estiverem definidos nos seus respectivos objetos.

Alternativamente, poderíamos ter definido a parábola, dando um duplo clique sobre o seu objeto e, ao abrir a caixa de diálogo, digitar

$$a*time^2+b*time+c$$

diretamente no campo *Definition*. Depois um duplo *Enter* ou *Apply* e *OK*.

Na próxima seção, nos dedicamos a uma breve apresentação sobre o recurso “configurações de simulações” do POWERSIM.

## 2.2 Configurações de simulações no POWERSIM

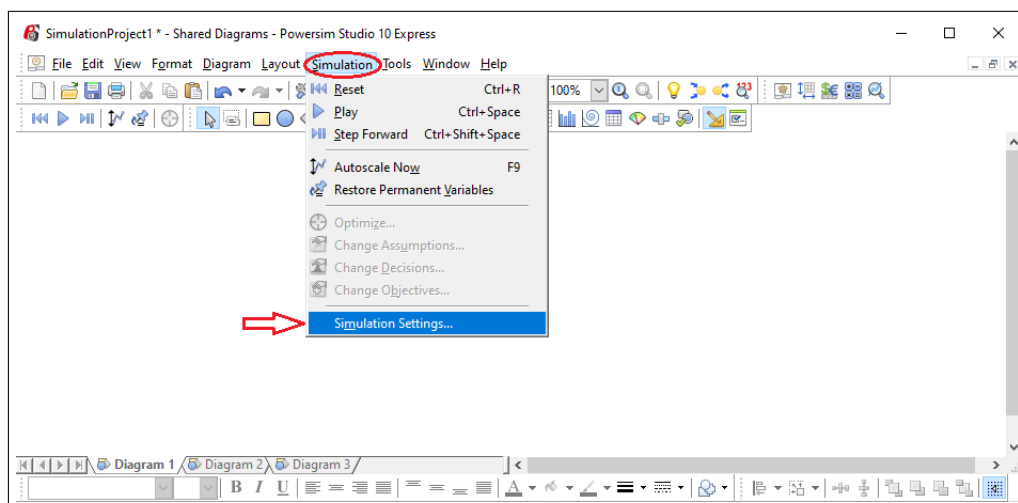
O POWERSIM trabalha com métodos de aproximações numéricas para obtenção das soluções. Essencialmente, o *software* trabalha com os métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta de 2ª, 3ª e 4ª ordem.

POR PADRÃO O POWERSIM UTILIZA O MÉTODO DE EULER PARA REALIZAÇÃO DAS SIMULAÇÕES!

O POWERSIM possui o recurso *Simulation* que permite selecionar o método de numérico, bem como realizar configurações adicionais.

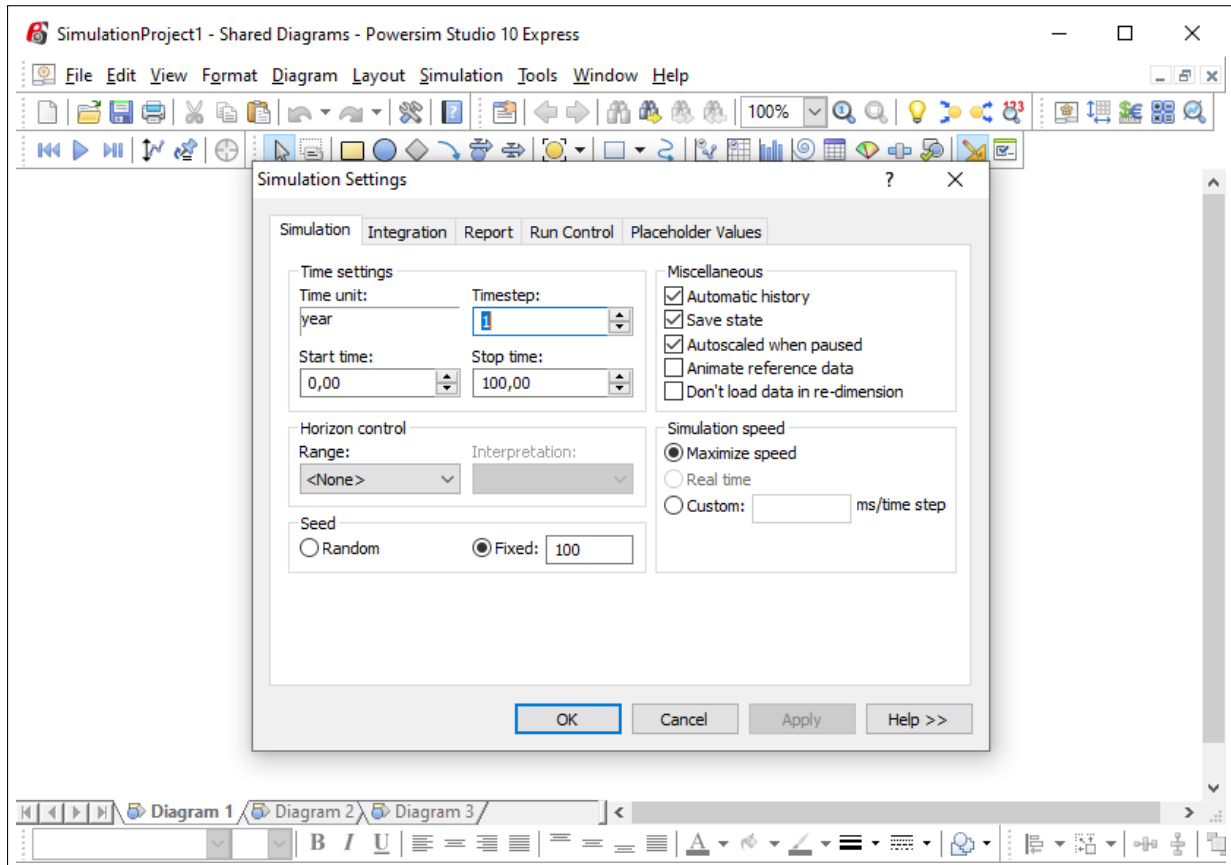
Para alterar o método de aproximação acesse o recurso *Simulation*, em seguida selecione a opção *Simulation Settings*, conforme Figura 2.19, uma janela de diálogo será aberta.

**Figura 2.19:** Configuração dos métodos de simulação no POWERSIM.



Na janela de diálogo, conforme Figura 2.20, em *Simulation*, podemos configurar o tamanho do passo, normalmente denominado por  $h$ , por meio do botão *Timestep*.; os limites do intervalo de simulação  $[a, b]$  podem ser ajustados com os botões *Start time* e *Stop time*. Esses três recursos vêm, por padrão, com valores 1, 0 e 100, respectivamente. Uma vez ajustados, clique em *Apply*.

**Figura 2.20:** Janela de diálogo do ambiente *Simulation* do POWERSIM.

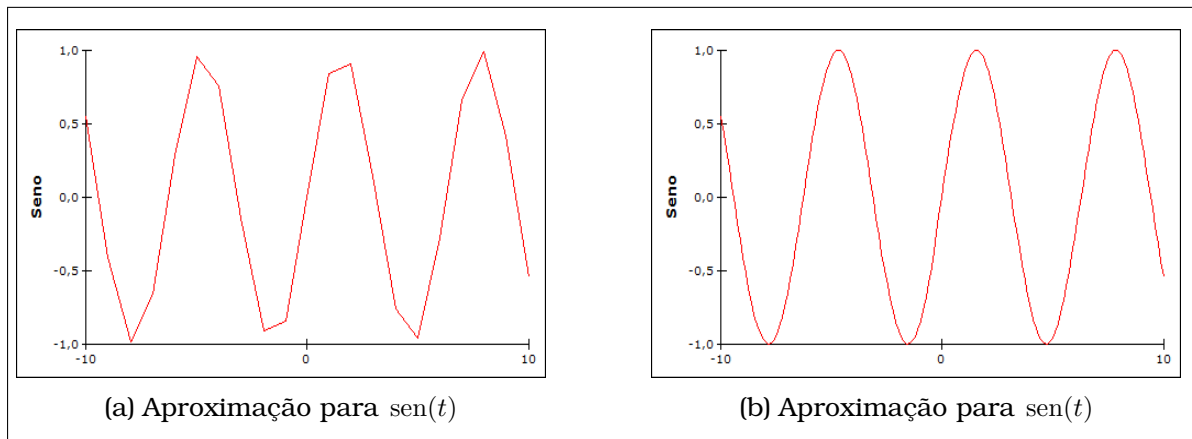


Para alterar o método de solução, acesse o recurso *Integration*, na janela de diálogo, depois selecione o método de interesse por meio da opção *Order*. Na opção *Report*, em *Intervals*, podemos desmarcar a caixa de configuração automática e fazer os ajustes, conforme o interesse de visualização dos valores numéricos do eixo horizontal. Esta opção (*Report*) permite configurar as escalas dos eixos, bem como a escala temporal da tabela.

Observe que, dependendo da natureza do modelo a ser estudado, pode ocorrer que os erros de aproximações comprometam o resultado final, seja na construção dos gráficos ou das tabelas temporais. Por exemplo, nas Figuras 2.22(a) e 2.22(b), apresentamos o gráfico da função  $f(t) = \text{sen}(t)$ , no intervalo

$[-10,10]$ , construído no POWERSIM com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com  $h = 1$  e  $h = 0,125$ , respectivamente.

**Figura 2.21:** Gráficos da função  $f(t) = \text{sen}(t)$  construídos com o POWERSIM. (a) aproximação pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem com  $h = 1$ . (b) aproximação pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem com  $h = 0,125$ .



Dentre a vasta variedade de funcionalidades e recursos existentes no POWERSIM, acreditamos que as apresentadas até aqui sejam suficientes para desenvolver as atividades que serão propostas.

CARO LEITOR, PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES NO POWERSIM, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<https://www.youtube.com/watch?v=XhGjYXUQpQ0>

Como referência de leitura, sugerimos o livro intitulado *Modelagem Computacional Utilizando STELLA: considerações teóricas e aplicações em Gerenciamento, Física e Ecologia de Sistemas* de autoria de Santos *et al* (2002).

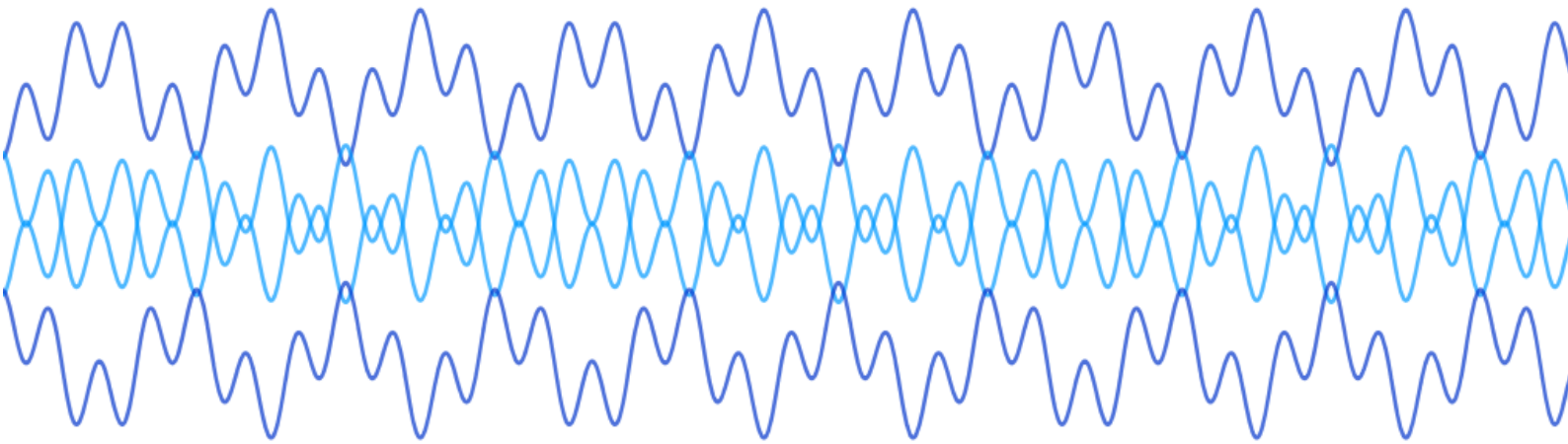
As discussões apresentadas no texto de Santos *et al* (2002) podem ser utilizadas como referência de estudo do POWERSIM, pois o *software* STELLA possui interface e linguagem computacional similares ao POWERSIM. O leitor interessado poderá acessar a versão digital do livro na página oficial da editora

da Universidade Federal do Rio Grande (FURG) acessando o *qr code* ou o *link*, disponíveis a seguir.



[<http://www.modelciencias.furg.br/princisist/livrostel/index.html>](http://www.modelciencias.furg.br/princisist/livrostel/index.html)

No próximo capítulo, apresentamos uma sequência de atividades sobre equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, com ênfase em uma abordagem interpretativa por meio de soluções gráficas e numéricas, utilizando o POWERSIM.



### 3 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira, apresentamos uma discussão sobre a equivalência entre uma equação de ordem  $n$  e um sistema de  $n$  equações de primeira ordem. Essa seção se faz necessária, pois servirá de base para compreensão do funcionamento dos diagramas com o POWERSIM.

Na segunda seção, apresentamos uma sequência de atividades sobre equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. As atividades foram elaboradas com o intuito de promover uma abordagem que privilegie a obtenção da solução de forma intuitiva, sem a utilização das técnicas de soluções analíticas, essa é a principal diferença com relação à prática convencional de ensino.

O foco desta proposta consiste em construir um raciocínio intuitivo que possa conduzir à construção do gráfico da solução da equação diferencial manualmente. Em seguida propomos a obtenção da solução gráfica com o POWERSIM. Acreditamos que a utilização deste recurso computacional seja um fator importante no desenvolvimento das atividades, pois ele permitirá que o estudante possa contrastar a solução construída intuitivamente com a solução apresentada computacionalmente e, com isso, poderá reforçar ou refutar a lógica elaborada para esboçar o gráfico manualmente.

Além da disposição gráfica, o POWERSIM também permite explorar a representação numérica por meio da tabela de evolução temporal. Com os valores dispostos na tabela é possível observar o que acontece em cada intervalo de tempo e pode ajudar a compreender o comportamento do gráfico da

solução.

Nesse sentido, orientamos que o POWERSIM seja utilizado somente após a construção manual da solução gráfica. Com isso, esperamos promover o estudo interpretativo da solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Cada exemplo está acompanhado de sugestões de possíveis formas de pensar intuitivamente nas soluções e construção do gráfico, bem como de construção dos diagramas com o POWERSIM. Portanto, as respostas/comentários desempenham o papel de auxiliar o leitor com o desenvolvimento das atividades.

CARO LEITOR, NA MAIORIA DAS VEZES UTILIZAREMOS AS NOTAÇÕES  $\frac{dx}{dt}$  E  $\frac{d^2x}{dt^2}$ . NO ENTANTO, QUANDO FOR CONVENIENTE, UTILIZAREMOS  $x'(t)$  E  $x''(t)$ , RESPECTIVAMENTE.

### 3.1 Sistemas Equivalentes de Equações Diferenciais Ordinárias

Considerando que o POWERSIM trabalha com diagramas de níveis e fluxos. Abordaremos o conceito de equivalência entre uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e um sistema de duas equações de primeira ordem. Acreditamos que essa transformação seja essencial para o processo de construção dos diagramas no POWERSIM durante o desenvolvimento das atividades que serão propostas.

Faremos uma abordagem a partir de exemplos didáticos, sem apresentar a formalidade matemática sobre o tema. Ao leitor interessado na construção formal, recomendamos o texto de Edwards, Penney e Calvis, (2018) ou a tese à qual este Produto Educacional está vinculado. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 3.1.** Considere a equação diferencial  $y''(t) - y'(t) = \cos(t)$  e encontre o sistema equivalente de duas equações de primeira ordem.

A ideia central consiste em explicitar  $y''(t)$ , fazer uma mudança de variáveis adequada e realizar as transformações necessárias.

Neste caso, temos que:

$$y''(t) = y'(t) + \cos(t) \quad (3.1)$$

Fazendo as mudanças de variáveis:

$$y_1(t) = y(t) \text{ e } y_2(t) = y'(t) = y_1'(t).$$

Segue que:

$$y_2'(t) = y''(t) = \underbrace{y_1'(t)}_{y_2(t)} + \cos(t).$$

Portanto,

$$y_2'(t) = y_2(t) + \cos(t).$$

Assim, obtemos o sistema equivalente:

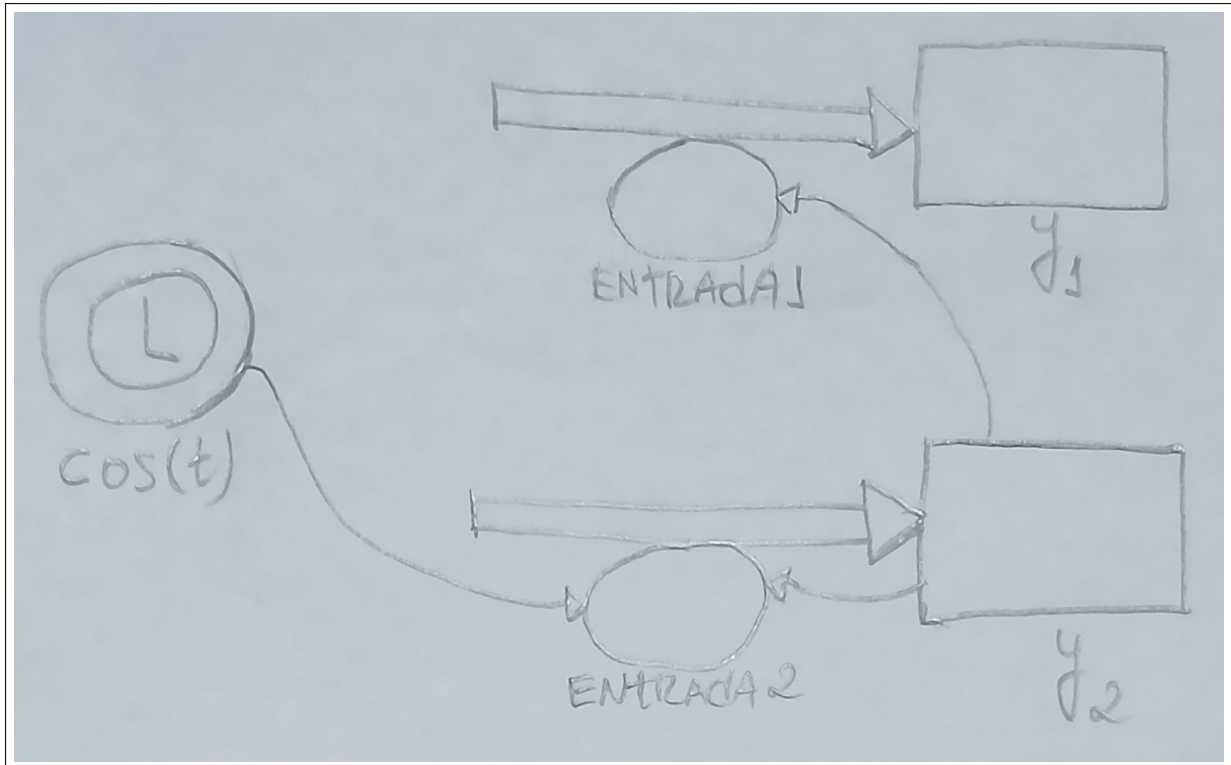
$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_2(t) + \cos(t) \end{cases}$$

CARO PROFESSOR. SUGERIMOS QUE, NESTE MOMENTO, OS ESTUDANTES FAÇAM O ESBOÇO DO DIAGRAMA A PARTIR DA ANÁLISE DO SISTEMA OBTIDO.

A partir do sistema equivalente, fica fácil verificar como as variáveis se relacionam e, portanto, poderá auxiliar no processo de construção do diagrama. Conforme mencionado acima, é importante fazer um esboço manual do diagrama antes de construí-lo no Powersim. Neste caso, observe que o primeiro nível recebe (torneira de entrada) a variável  $y_2$ , ao passo que o segundo nível deve receber (torneira de entrada) a variável  $y_2$  e a função  $\cos(t)$ .

Em ambas as equações do sistema obtido, os termos dos respectivos lados direito têm sinal positivo, por isso, os níveis deverão ter apenas torneiras de entrada. Na Figura 3.1, apresentamos a representação de um esboço manual do diagrama para descrever a situação.

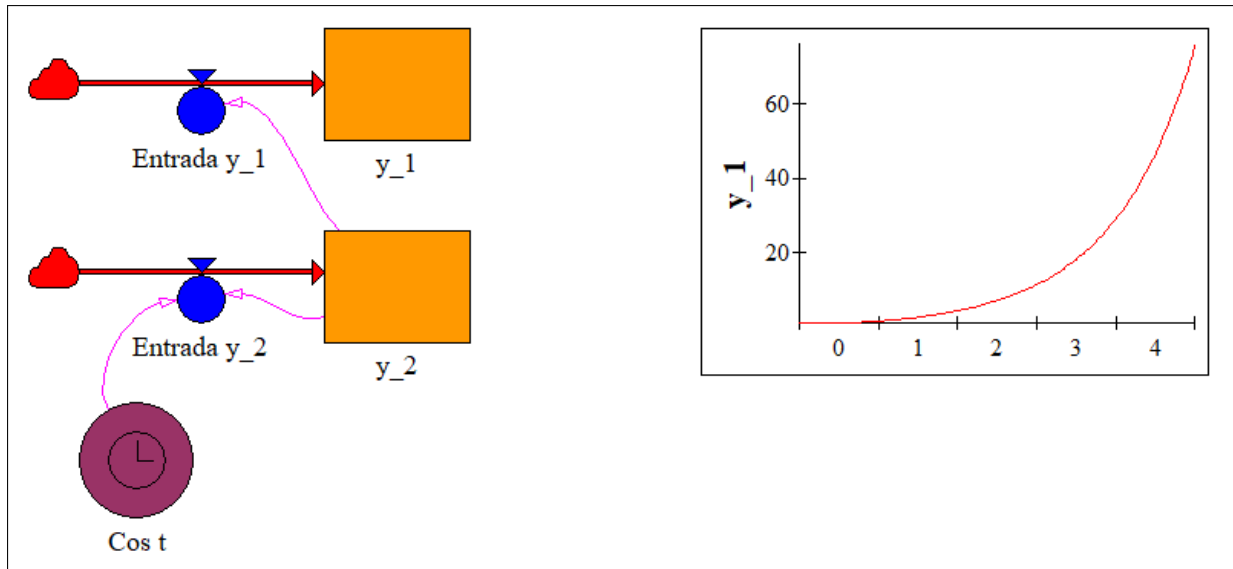
**Figura 3.1:** Esboço manual do diagrama para representar o sistema de equações equivalente à equação de segunda ordem  $y''(t) - y'(t) = \cos(t)$ . Neste caso, pela construção,  $y_1$  representa a solução  $y(t)$  da equação diferencial dada.



Após a elaboração do esboço manualmente, o estudante poderá construir o diagrama no Powersim para realizar simulações e obter a solução da equação diferencial dada. Com isso, o aluno irá se familiarizando com o processo de implementação computacional com o Powersim e, conseqüentemente, amenizando possíveis dificuldades durante o desenvolvimento das atividades propostas neste Produto Educacional.

Essa etapa desempenha um papel pedagógico importante, pois permite ao estudante, consolidar de forma articulada, a relação conceitual entre a expressão algébrica da equação e a sua representação na linguagem computacional. Além disso, favorece a compreensão as premissas teóricas do recurso digital, evidenciando como cada nível do diagrama representa uma das equações obtidas no sistema equivalente. Na Figura 3.2, apresentamos o diagrama construído no Powersim com a solução da equação diferencial de segunda ordem deste exemplo.

**Figura 3.2:** Diagrama do POWERSIM para resolver a equação  $y''(t) - y'(t) = \cos(t)$ . O gráfico da solução foi obtido por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com  $\text{timestep}=0,03125$ , no intervalo  $[0,5]$ , com condições iniciais  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 0$ .



CARO LEITOR, PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE OBTENÇÃO DO SISTEMA EQUIVALENTE DESSE EXEMPLO, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<https://www.youtube.com/watch?v=Q31a2IOP3g8>

**Exemplo 3.2.** Considere a equação diferencial  $x''(t) + 3x'(t) - 2x(t) = 0$  e encontre o sistema equivalente de duas equações de primeira ordem.

Nesta caso, explicitando a segunda derivada, obtemos:

$$x''(t) = -3x'(t) + 2x(t) \quad (3.2)$$

Fazendo as mudanças de variáveis:

$$x_1(t) = x(t) \text{ e } x_2(t) = x'(t) = x'_1(t)$$

Segue que:

$$x_2'(t) = x''(t) = -3 \underbrace{x'(t)}_{x_2(t)} + 2 \underbrace{x(t)}_{x_1(t)}.$$

Portanto,

$$x_2'(t) = -3x_2(t) + 2x_1(t).$$

Assim, obtemos o sistema equivalente:

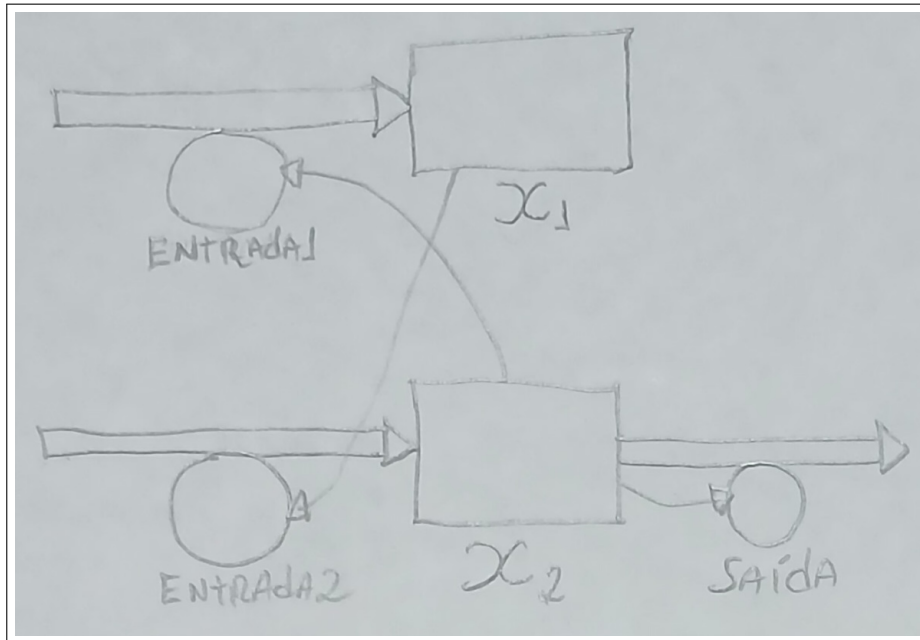
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -3x_2(t) + 2x_1(t) \end{cases}$$

CARO LEITOR. OBSERVE QUE A SEGUNDA EQUAÇÃO DO SISTEMA OBTIDO POSSUI UM TERMO POSITIVO E OUTRO NEGATIVO. NESTE CASO, O SEGUNDO NÍVEL DO DIAGRAMA DEVERÁ TER UMA TORNEIRA DE ENTRADA E UMA DE SAÍDA.

Intuitivamente, cada uma das equações do sistema obtido implicará um nível no diagrama do Powersim. A primeira equação está relacionada ao primeiro nível e fornecerá a solução da equação diferencial dada. A segunda equação está relacionada ao segundo nível (primeira derivada). Ao proceder com o esboço manual do diagrama, o estudante tem a oportunidade de se familiarizar com o processo de transcrição da linguagem algébrica para a linguagem visual, por meio da observação das relações entre níveis e taxas fluxo, representados por tanques e torneiras, respectivamente. Além disso, esse processo permite compreender como os sinais dos termos das equações determinam a condição das torneiras (entrada ou saída).

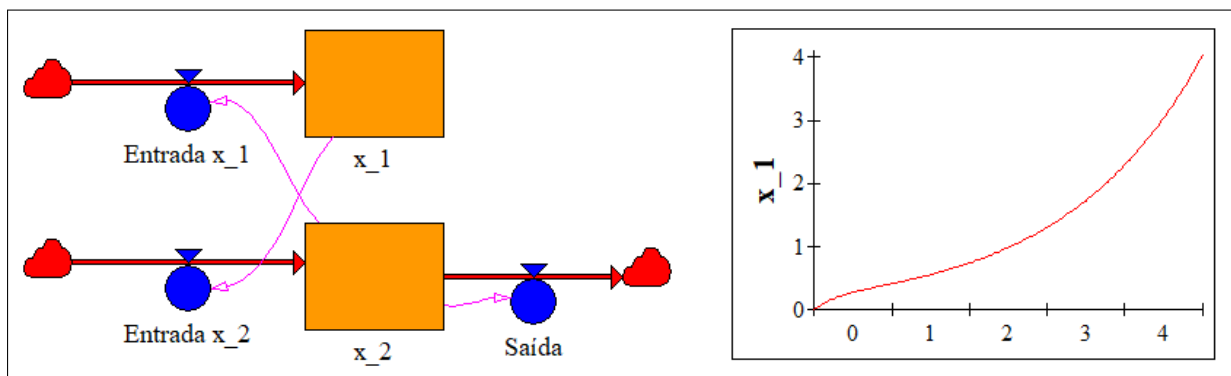
Esse procedimento desempenha um papel central no processo de construção do conhecimento, pois permite ao estudante compreender como os termos das equações obtidas se relacionam com os fluxos e níveis do diagrama, favorecendo uma percepção mais intuitiva da situação explorada e facilitando a posterior construção do diagrama no Powersim. Na Figura 3.3, apresentamos um esboço manual do diagrama, construído a partir do sistema de equações equivalente.

**Figura 3.3:** Esboço manual do diagrama para representar o sistema de equações equivalente à equação de segunda ordem  $x''(t) - 3x'(t) - 2x(t) = 0$ . Neste caso, pela construção,  $x_1$  representa a solução  $x(t)$  da equação diferencial dada.



Na Figura 3.4, apresentamos o diagrama construído no Powersim para realização de simulações e obtenção da solução da equação diferencial dada neste exemplo.

**Figura 3.4:** Diagrama do POWERSIM para resolver a equação  $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$ . O gráfico da solução foi obtido por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com  $\text{timestep}=0,03125$ , no intervalo  $[0,5]$ , com condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 1$ .



CARO LEITOR, PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE OBTENÇÃO DO SISTEMA EQUIVALENTE DESSE EXEMPLO, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<https://www.youtube.com/watch?v=rMCKgzlBMus>

Acreditamos que os dois exemplos apresentados sejam suficientes para familiarizar o leitor com o processo de transformação de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem em um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem, bem como sua implementação no Powersim.

CARO PROFESSOR. CASO JULGUE NECESSÁRIO, PODERÁS FORMULAR OUTROS EXEMPLOS PARA OS ESTUDANTES DESENVOLVEREM. OU ATÉ MESMO SOLICITAR QUE OS ALUNOS ELABOREM EXEMPLOS SEMELHANTES E OS RESOLVAM.

A próxima seção será dedicada à apresentação de exemplos de atividades acompanhadas de comentários a respeito de possibilidades interpretativas para obtenção das respectivas soluções.

LEMBRE-SE! O FOCO É OBTER SOLUÇÕES GRÁFICAS DE FORMA INTERPRETATIVA. PORTANTO, EVITE O USO DE TÉCNICAS DE SOLUÇÃO ANALÍTICA!

## 3.2 Atividades Propostas

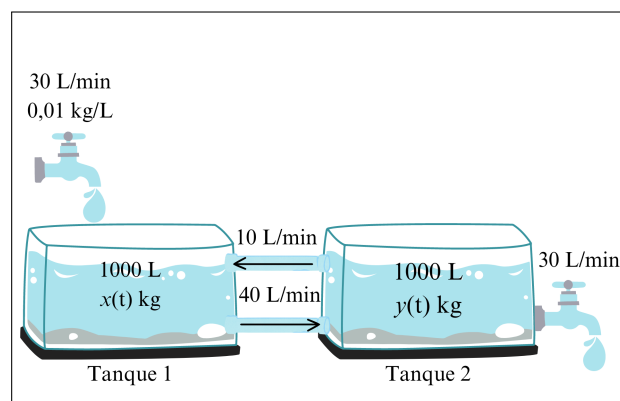
Iniciamos esta seção com uma dica para auxiliar o professor durante o desenvolvimento das atividades propostas.

CARO PROFESSOR! O IDEAL É QUE OS ESTUDANTES SEJAM MOTIVADOS A OBTER AS SOLUÇÕES DE FORMA INTUITIVA. CASO ELES SINTAM DIFICULDADES, FORNEÇA PISTAS/DICAS SOBRE COMO PODERIAM CONCATENAR OS CONHECIMENTOS ADQUIRIDOS NO CÁLCULO DE DERIVADAS E INTEGRAIS PARA PODER CONSTRUIR O GRÁFICO DA SOLUÇÃO! NESSE SENTIDO, OS COMENTÁRIOS QUE ACOMPANHAM CADA UMA DAS ATIVIDADES TÊM POR OBJETIVO CONTRIBUIR COM IDEIAS PARA O DOCENTE CONDUZIR O DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES.

Adaptada de Edwards, Penney e Calvis (2018), a primeira atividade que propomos não envolve necessariamente uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Essencialmente, trata-se do problema clássico da concentração salina em dois tanques com água. A importância de iniciar com esse tipo de atividade decorre do fato de que o Powersim tem a premissa de descrever uma equação diferencial por meio de fluxos de níveis.

**Atividade 1.** Considere uma dinâmica na qual dois tanques estejam conectados, conforme ilustrado na Figura 3.5.

**Figura 3.5:** Ilustração de dois tanques com concentração salina.



**Fonte:** Adaptado de Edwards, Penney e Calvis (2018).

No instante inicial o tanque 1 contém 1000 litros de água pura. Uma torneira despeja água salgada com uma concentração de 0,01 kg de sal por litro a uma taxa de 30 litros por minuto. No instante inicial o tanque 2

contém 1000 litros de água contendo 20 kg de sal. Existe um mecanismo de agitação nos tanques que mantém a mistura de forma homogênea. O sistema se retroalimenta de forma que a mistura salina é bombeada do tanque 2 para o tanque 1 a uma taxa de 10 litros por minuto e do tanque 1 para o tanque 2 a uma taxa de 40 litros por minuto. A torneira de saída está conectada ao tanque 2 e funciona com taxa de vazão também de 30 litros por minuto.

Com base nas informações sobre a concentração salina, pede-se:

- i) Esboce o gráfico da quantidade de sal no tanque 1 e no tanque 2 em função do tempo.
- ii) O que acontece com a quantidade de sal em cada tanque a longo prazo?
- iii) Simule a situação no powersim e verifique se os gráficos do item (i) estão corretos.
- iv) A quantidade de sal, em cada tanque, aumenta em função do tempo? Comente.
- v) A quantidade de sal nos dois tanques tende a se igualar a longo prazo? Comente.
- vi) O que aconteceria se a torneira despejasse água pura no tanque 1?
- vii) O que aconteceria se a água do tanque 1 estivesse salgada com 30 kg de sal no instante inicial?
- viii) Encontre o modelo matemático que descreve o problema apresentado?

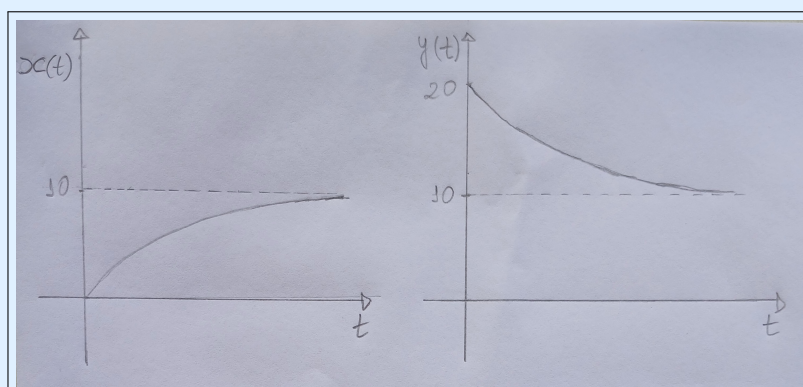
### **Solução:**

Caro leitor, a discussão teórica sobre o processo de modelagem e obtenção do sistema de equações que descreve essa situação foi apresentada na tese. Aqui, focaremos em apresentar ideias/sugestões sobre como pensar/conjecturar hipóteses acerca do comportamento gráfico da quantidade de sal nos Tanques 1 e 2.

- i) Uma das maneiras de se pensar nesse problema consiste em ana-

lisar as quantidades de sal que estão entrando e saindo em cada um dos tanques. O gráfico do tanque 1 deve iniciar na origem do sistema, pois não tem sal no instante inicial. Por outro lado, o gráfico do tanque 2 terá início em 20, visto que ele possui 20 kg de sal no início da dinâmica. Agora, observe que o tanque 2 recebe e envia sal do/para o tanque 1. No entanto, ele envia mais do que recebe, porque sua concentração de sal é, inicialmente, maior. Com isso, é razoável conjecturar que a quantidade de sal no tanque 1 tende a aumentar enquanto a do tanque 2 tenderá a diminuir, até que ambas entrem em equilíbrio. Observe também que a quantidade de sal que entra no sistema, pela torneira que despeja água no tanque 1, é 0,01 kg/L, o que implica 10 kg/1000L. Disto, espera-se que as quantidades de sal nos dois tanques se convirjam para 10 kg. Este fato pode ser explorado no Powersim, modificando o valor da taxa de entrada de sal pela torneira. Na Figura 3.6, apresentamos um esboço do gráfico que respresentam as quantidades de sal nos respectivos tanques.

**Figura 3.6:** Esboço dos gráficos das quantidades de sal no tanque 1 e no tanque 2.

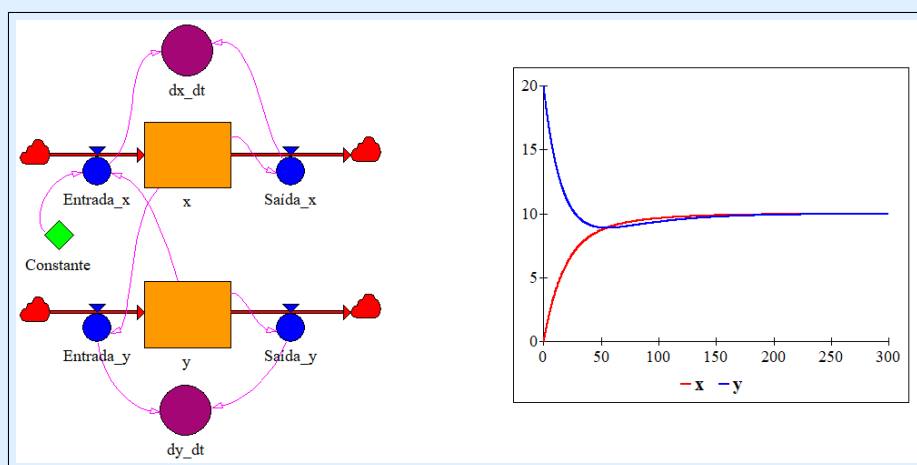


ii) De certa maneira, este item e o anterior se complementam, uma

vez que, aqui, o estudante deve descrever a situação de forma textual. Dessa forma, a partir dos gráficos esboçados anteriormente, pode-se verificar que a quantidade de sal no tanque 1 tende a aumentar. Por outro lado, a quantidade de sal do tanque 2 diminuirá até se estabilizar com a quantidade de sal do tanque 1. Assim, as quantidades de sal convergem para um valor limite que depende da quantidade de sal por litro que entra pela torneira. Isto significa que, a longo prazo, a quantidade de sal nos respectivos tanques será a mesma.

iii) Lembrando que esta atividade foi acrescentada ao Produto Educacional devido ao seu potencial didático para evidenciar as premissas do funcionamento do Powersim. Neste caso, a construção do diagrama pode ser auxiliada pela Figura 3.5, apresentada na Atividade. Na Figura 3.7, apresentamos uma configuração de diagrama para simulação computacional da situação.

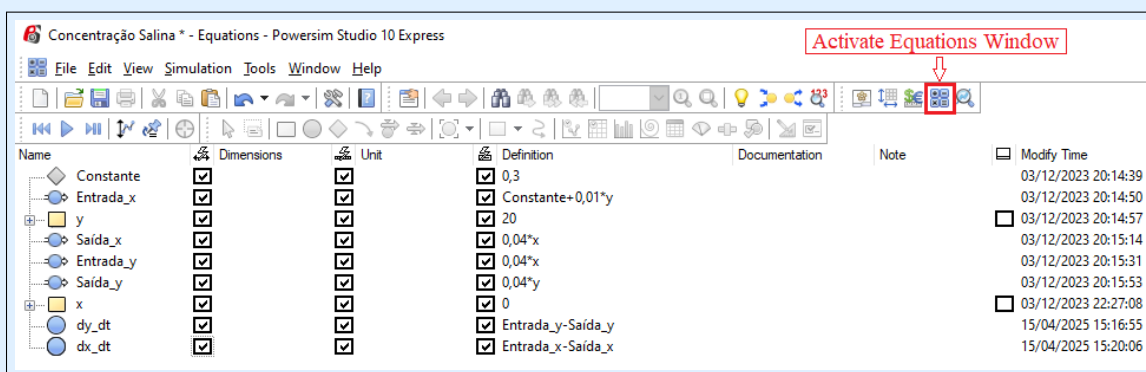
**Figura 3.7:** Diagrama do Powersim para resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias do problema da concentrações salina. Os gráficos foram obtidos por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com  $h = timestep = 0,125$ , no intervalo  $[0,300]$ , com condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $y(0) = 20$ .



Os itens (iv), (v), (vi) e (vii), devem ser explorados a partir da simulação com o Powersim. Dessa forma, não as discutiremos aqui. Sugerimos que o professor fomente a investigação entre os estudantes, promovendo uma análise detalhada de cada caso e, principalmente, incentive os alunos a escreverem sobre os resultados observados.

viii) Naturalmente, o modelo pode ser obtido utilizando técnicas de modelagem matemática (veja a tese). No entanto, neste contexto, sugerimos que o modelo seja construído a partir do Powersim. Para isso, acessamos a ferramenta Activate Equations Window e, então, será exibida uma janela conforme apresentado na Figura 3.8.

**Figura 3.8:** Captura da tela do Powersim exibindo a janela da ferramenta Activate Equations Window para a obtenção do modelo matemático do problema da concentração salina.



Na Figura 3.8, a primeira e a quarta coluna, da esquerda para a direita, exibem os nomes e as definições das respectivas variáveis do diagrama. Neste caso, estamos interessados na informação das duas últimas linhas, pois elas fornecem:

$$dx\_dt = Entrada\_x - Saída\_x$$

$$dy_{dt} = \text{Entrada}_y - \text{Saída}_y$$

Agora, a partir da 1ª, 2ª, 4ª, 5ª e 6ª linhas, obtemos as definições da Constante, da Entrada\_x, da Saída\_x, da Entrada\_y e da Saída\_y, respectivamente. De onde segue que o modelo que descreve a situação é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0,3 + 0,01y - 0,04x \\ \frac{dy}{dt} = 0,04x - 0,04y \end{cases}$$

CARO LEITOR, PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA PARA A ATIVIDADE 1, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<<https://www.youtube.com/watch?v=p5O36osO59k>>

Um exemplo clássico que envolve uma equação diferencial ordinária de segunda ordem é o conceito físico de aceleração. Portanto, iniciaremos nossa discussão com o problema da aceleração constante.

**Atividade 2.** A aceleração de um objeto pode ser descrita pela segunda derivada da função posição. Assim, supondo que  $x(t)$  seja a posição do objeto no instante  $t$ , então

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a.$$

Considerando que  $a$  seja uma constante não nula, responda:

- i) Como seria o gráfico da posição  $x(t)$  em função do tempo?

- ii) O que acontece com o gráfico da posição  $x(t)$  se considerarmos  $a < 0$ ? E no caso em que  $a > 0$ ?
- iii) Esboce o gráfico de  $\frac{d^2x}{dt^2}$  em função do tempo. O que acontece quando  $a < 0$ ? E quando  $a > 0$ ?
- iv) Represente a função velocidade graficamente. O que acontece se  $a < 0$ ? E se  $a > 0$ ?
- v) Encontre o sistema de equações de primeira ordem equivalente à equação de segunda ordem dada.
- vi) Construa um diagrama no POWERSIM para resolver a equação diferencial dada e plote os gráficos de  $x(t)$  e  $\frac{d^2x}{dt^2}$  em função do tempo. Compare com os gráficos obtidos nos itens anteriores.
- vii) Simule cada situação anterior com o powersim.

**Solução:**

- i) Podemos iniciar pensando em uma função tal que sua derivada segunda seja uma constante. Dessa forma, é razoável pensarmos em uma solução polinomial, mais precisamente, uma parábola cujo coeficiente do termo quadrático seja  $a$ . Portanto, se  $a < 0$ , devemos ter uma parábola com concavidade para baixo e, se  $a > 0$ , temos uma parábola com concavidade para cima. Propriedade do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.
- ii) Se  $a < 0$ , o gráfico da função posição será uma parábola com concavidade para baixo. Se  $a > 0$ , será uma parábola com concavidade para cima. Adicionalmente, observe que, se  $a = 0$ , o gráfico da posição será uma reta horizontal passando pela origem do sistema cartesiano.
- iii) Neste caso, o gráfico de  $\frac{d^2x}{dt^2}$  deve ser constante, isto é, uma linha horizontal que intercepta o eixo das ordenadas em  $a$ . Assim, se

$a < 0$ , o gráfico é uma linha horizontal que fica abaixo do eixo das abscissas. Se  $a > 0$ , o gráfico estará acima do eixo das abscissas.

iv) Considerando que a aceleração é constante, o gráfico da função velocidade deverá ser uma reta crescente quando  $a > 0$  e uma reta decrescente quando  $a < 0$ . Essencialmente, a reta terá inclinação  $a$  e termo constante dado pela velocidade inicial, isto é,  $v(t) = at + v_0$ , onde  $v(0) = v_0$ , ou, equivalentemente, uma reta do tipo  $x'(t) = at + x'(0)$ .  
Propriedade do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

v) Caro leitor, considerando os processos apresentados na seção anterior, podemos obter o sistema equivalente fazendo as substituições:  $x_1 = x$  e  $x_2 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt}$ . Assim, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a \end{cases}$$

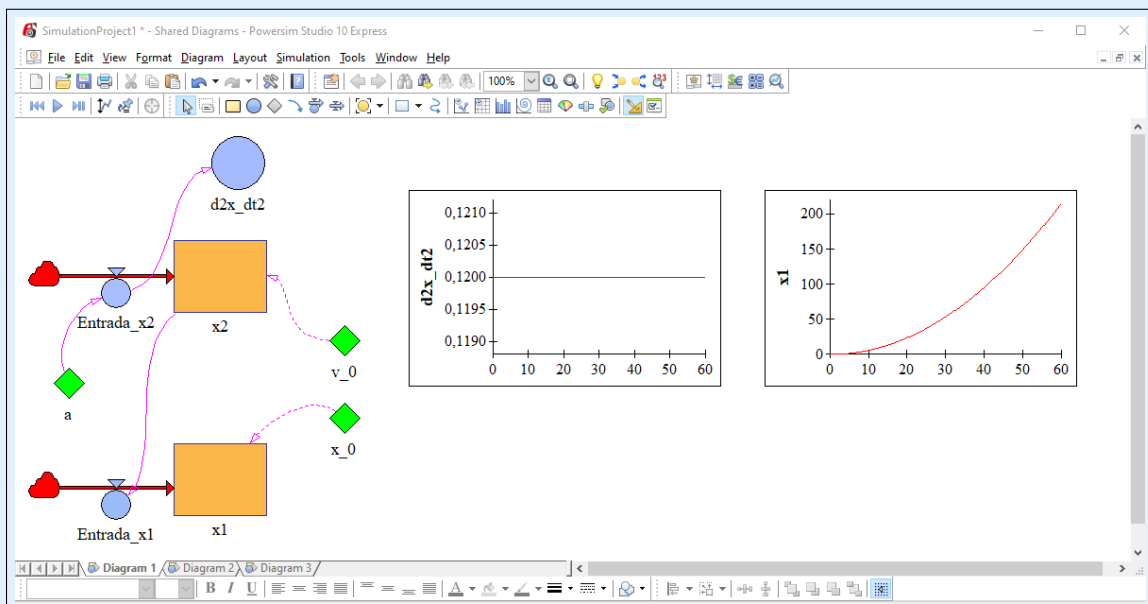
vi) Cada uma das equações acima será representada por um nível. Assim, o diagrama deve ter dois níveis, um para a posição ( $x_1$ ) e outro para a variação da posição ou velocidade ( $x_2$ ). Observe que ambas as equações do sistema equivalente possuem termos positivos nos respectivos lados direitos. Assim, cada nível deverá receber torneiras de entrada.

A entrada do tanque  $x_1$  deve estar relacionada com o nível  $x_2$ . Por outro lado, a entrada do tanque  $x_2$  recebe a constante  $a$ . A variação da posição  $\frac{d^2x}{dt^2}$  recebe a taxa de entrada do nível  $x_2$ .

Adicionalmente, podemos inserir constantes para representar  $x_0$  e  $v_0$ . No entanto, salientamos que esse recurso é opcional, pois as condições iniciais ( $x_0$  e  $v_0$ ) podem ser inseridas diretamente nos res-

pectivos tanques/níveis. Na Figura 3.9, apresentamos uma configuração de diagrama com os gráficos das funções aceleração e posição, para um valor positivo de  $a$ .

**Figura 3.9:** Diagrama do Powersim para a Atividade 2. Os gráficos foram obtidos por meio de simulação com o método de Euler com  $timestep = 0,25$ , no intervalo  $[0,60]$ , com  $a = 0,12$  e condições iniciais  $v_0 = x'(0) = 0$  e  $x_0 = x(0) = 0$ . A aceleração e a posição estão representadas por  $d2x\_dt2$  e  $x1$ , respectivamente.

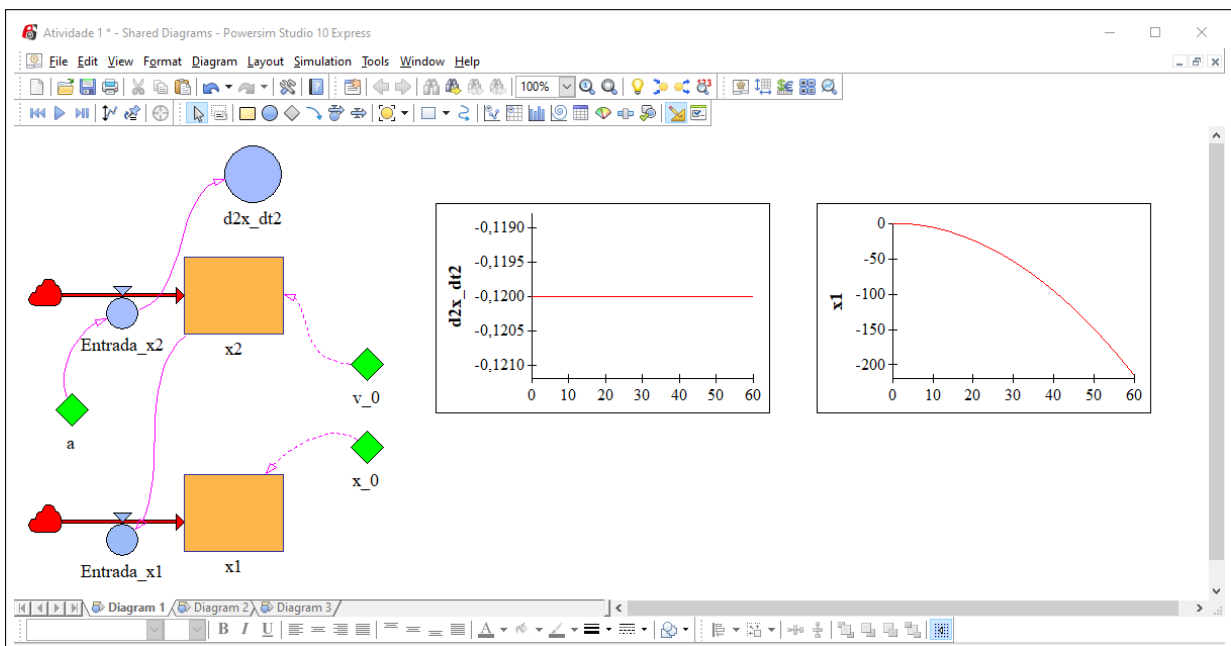


vii) Este item tem por objetivo promover a experimentação computacional como forma de investigar se as respostas elaboradas anteriormente estão corretas. Em caso negativo, sugerimos que este espaço seja utilizado para registrar as correções necessárias. Agora é com você!

CARO LEITOR. OBSERVE QUE, DA FORMA COMO O DIAGRAMA FOI CONSTRUÍDO, OS VALORES NUMÉRICOS DAS CONDIÇÕES INICIAIS  $x_0 = x(t_0)$  E  $v_0 = x'(t_0)$  DEVEM SER INSERIDOS NAS CONSTANTES  $x\_0$  E  $v\_0$ , RESPECTIVAMENTE. CASO CONTRÁRIO, DEVERIAM SER INSERIDAS DIRETAMENTE NOS TANQUES  $x1$  E  $x2$ . GUARDE ESSA DICA PARA OS DIAGRAMAS FUTUROS TAMBÉM.

A partir do diagrama construído, podemos fazer simulações com diversos valores de  $a$ , inclusive para valores negativos, caso que pode ser interpretado fisicamente como desaceleração. Na Figura 3.10, apresentamos o diagrama com os gráficos das funções aceleração e posição para  $a$  negativo ( $a = -0,12$ ).

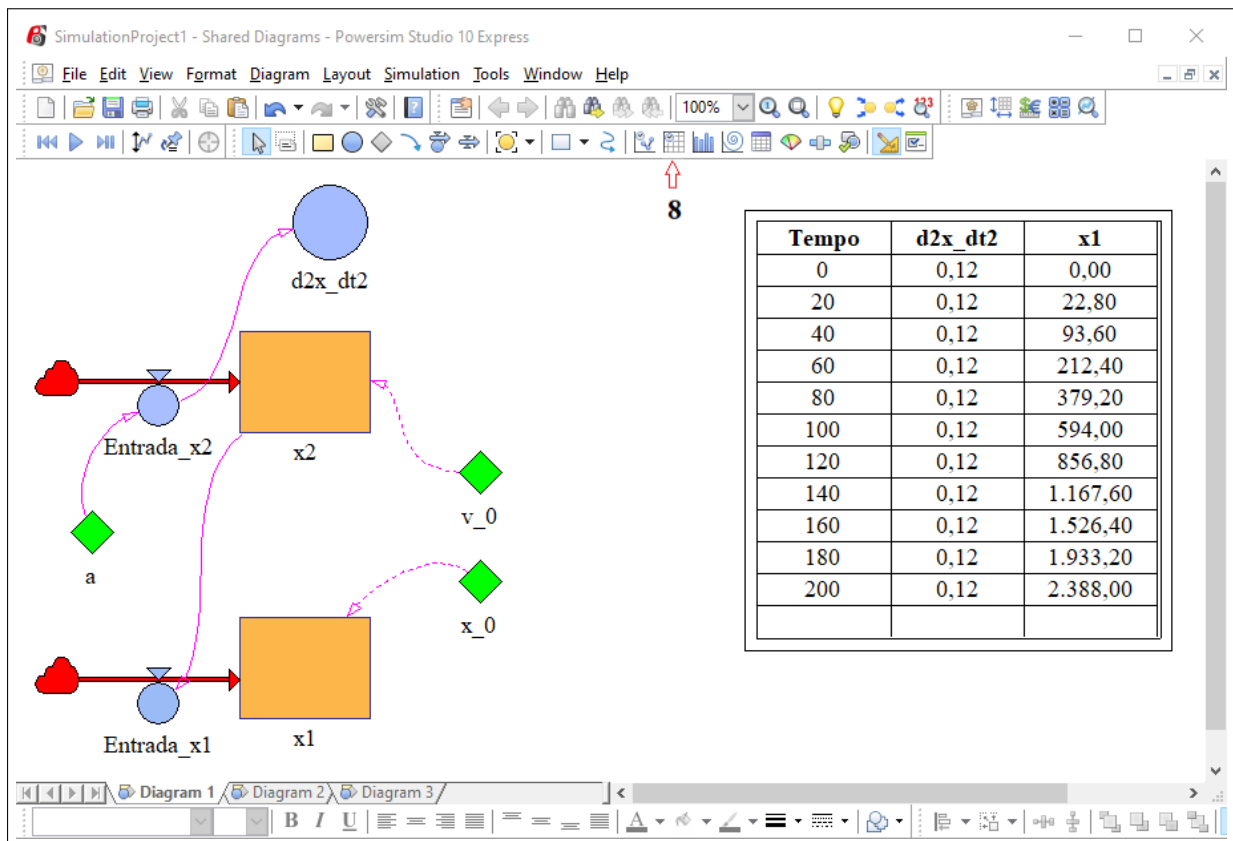
**Figura 3.10:** Diagrama do POWERSIM para a equação da Atividade 2. Os gráficos foram obtidos por meio de simulação com o método de Euler com  $timestep = 0,25$ , no intervalo  $[0,60]$ , com  $a = -0,12$  e condições iniciais  $v_0 = x'(0) = 0$  e  $x_0 = x(0) = 0$ . A aceleração e a posição estão representadas por  $d2x\_dt2$  e  $x1$ , respectivamente.



Na Atividade 2, construímos o diagrama e plotamos os gráficos da aceleração e da posição. No entanto, não exibimos os valores numéricos da solução para as respectivas variáveis. Poderíamos ter feito isso, utilizando o recurso Activate Tool for Criating a Time Table do POWERSIM (nº 8 conforme

Figura 3.11). Após utilizar o recurso e construir a tabela, efetue um duplo clique na borda externa da tabela, depois acione a opção *Parameters*, em seguida, acione a pasta *Component 1* e selecione as variáveis que deseja adicionar à tabela (veja Capítulo 2). Na Figura 3.11, apresentamos o diagrama acompanhado da tabela contendo os valores numéricos das funções posição e aceleração,  $x_1$  e  $d^2x_{dt^2}$ , respectivamente.

**Figura 3.11:** Diagrama do POWERSIM para a equação da Atividade 2. A tabela foi obtida por meio de simulação com o método de Euler com  $timestep = 1$ , no intervalo  $[0,200]$ , com  $a = 0,12$  e condições iniciais  $v_0 = x'(0) = 0$  e  $x_0 = x(0) = 0$ . A aceleração e a posição estão representadas por  $d^2x_{dt^2}$  e  $x_1$ , respectivamente.



CARO LEITOR. PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA PARA A ATIVIDADE 2, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



[https://www.youtube.com/watch?v=\\_YfODBTscaI](https://www.youtube.com/watch?v=_YfODBTscaI)

A equação diferencial da Atividade 2 é o tipo de equação de segunda ordem mais simples que existe. Pois relaciona a segunda derivada de uma função com uma constante.

A próxima atividade apresenta uma situação envolvendo a aceleração com lançamento vertical de objetos.

**Atividade 3.** Agora vamos investigar, também, a variação da posição de um corpo com o tempo e considerar que ele pode se mover tanto para cima quanto para baixo. Vamos adotar um sistema de referência cujo eixo vertical aponta para cima. Assim, quando o corpo se move para cima, sua velocidade é positiva e, para baixo, negativa. A equação que rege a velocidade do corpo é:

$$v' + \frac{k}{m}v = -g \quad (3.3)$$

Seja  $x(t)$  a posição do corpo no instante  $t$ . Das relações cinemáticas usuais temos:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Portanto, escrevendo a Equação (3.3) em termos de  $x(t)$ , teremos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} = -g \quad (3.4)$$

Considere que uma esfera de arremesso de peso, com massa igual a  $7,2\text{kg}$ ,  $g = 9,8\text{m/s}^2$  e  $k = 0,5\text{kg/s}$ , é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de  $100\text{m/s}$ .

- i) Construa no Powersim um diagrama para explorar a posição da esfera em função do tempo nessa situação.
- ii) Construa o gráfico da posição contra o tempo. Quando trabalhamos com situações de lançamento, desprezando a resistência do ar, a curva

que descreve a posição contra o tempo é uma parábola e, no caso com resistência, a curva também resultou numa parábola? Comente.

- iii) Qual é a altura máxima atingida pela esfera?
- iv) Em quanto tempo a esfera chega à altura máxima?
- v) Em quanto tempo a esfera chega ao chão?
- vi) O tempo que a esfera leva para chegar à altura máxima é o mesmo que leva para retornar da altura máxima ao chão?
- vii) Descreva o comportamento da taxa de variação da posição da esfera desde o momento em que ela foi lançada até atingir o chão.

**Solução:**

i) Neste caso, recomendamos que seja obtido o sistema de duas equações de primeira ordem equivalente à Equação 3.4. Para isso, explicitamos

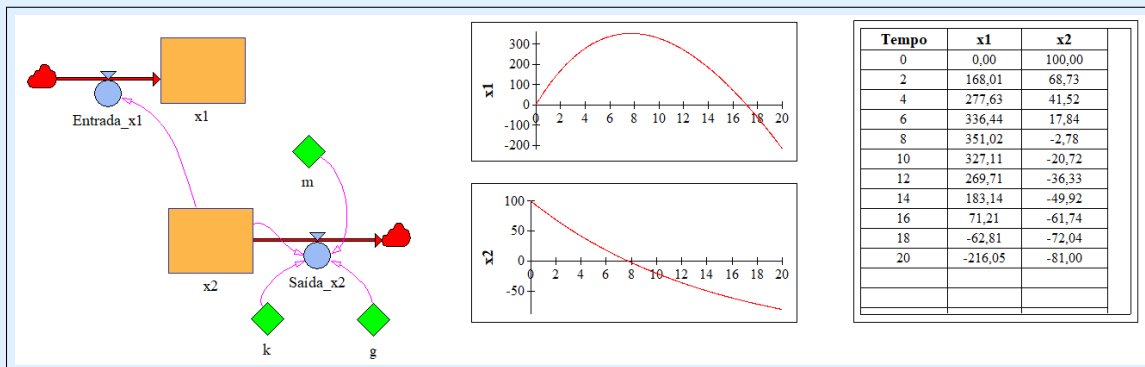
$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{k}{m} \frac{dx}{dt} - g$$

e, em seguida, fazendo a mudança de variáveis  $x_1 = x$  e  $x_2 = \frac{dx}{dt}$ , obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k}{m}x_2 - g \end{cases}$$

A partir do sistema obtido, é possível observar que o primeiro nível terá uma torneira de entrada e o segundo deve ter uma torneira de saída. Na Figura 3.12, apresentamos o diagrama construído no Powersim.

**Figura 3.12:** Diagrama do Powersim para a equação da Atividade 3. Os gráficos e a tabela foram obtidos por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com timestep 0,03125, no intervalo  $[0,20]$ , com  $m = 7,2$ ,  $k = 0,5$ ,  $g = 9,8$  e condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 100$ . A posição e a velocidade estão representadas por  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.

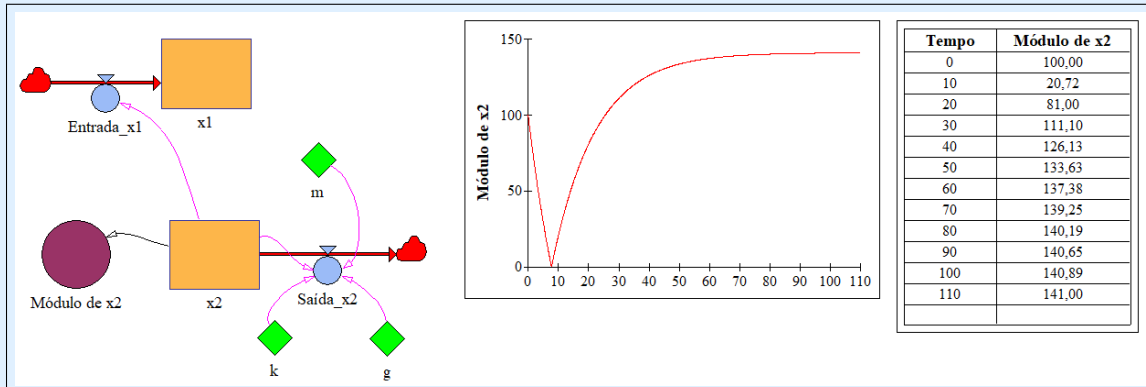


- ii) Neste caso, sugerimos que o gráfico seja construído no Powersim. Dessa forma, o estudante poderá investigar o problema por meio da exploração visual do gráfico exibido. Por questões de escalas, pode ser importante reconfigurar os intervalos de simulação para viabilizar a observação/compreensão. Por exemplo, na Figura 3.12, realizamos as simulações no intervalo  $[0,20]$ . Por fim, espera-se que o aluno possa concluir que o gráfico não será exatamente uma parábola e que isso é uma consequência da resistência do ar. Para verificar isso facilmente, basta realizar simulações considerando  $k = 0$ .
- iii) A altura máxima pode ser observada a partir da análise do gráfico, no entanto, a escala pode não permitir obter o valor com muita precisão. Dessa forma, o ideal seria utilizar o recurso da tabela temporal e configurar para que os valores sejam exibidos de um em um. Caso o leitor tenha dificuldades, no capítulo 2, discuti-

mos como fazer esse ajuste utilizando o recurso "Report" do "menu Simulation". Na Figura 3.12, apresentamos a tabela com os valores da posição ao longo do tempo, a partir da qual é possível verificar que a altura máxima da esfera é de aproximadamente 351,02 m. Este valor é atingido no instante  $t = 8$ . Chamamos a atenção de que essa é uma estimativa, visto que estamos falando de soluções numéricas. Nesse sentido, se combinarmos a análise dos gráficos da posição e da velocidade com os valores tabelados, observamos que o ponto de máximo ocorre imediatamente antes de  $t = 8$ , isso indica que a esfera pode ter atingido uma altura ainda maior antes desse instante de tempo.

- iv) A estimativa pode ser obtida a partir da análise gráfica ou da tabela. Com isso, pode-se observar que a esfera demora aproximadamente 8 segundos para atingir a altura máxima.
- v) Observe que a esfera terá atingido o chão quando o gráfico da posição interceptar o eixo das abscissas. Dessa forma, a análise gráfica combinada com os valores tabelados indica que a esfera atinge o chão 17 segundos após o seu lançamento, aproximadamente.
- vi) Não, pois a análise gráfica indica que o tempo para atingir a altura máxima é de aproximadamente 8 segundos, enquanto o tempo para retornar ao chão é de aproximadamente 9 segundos. Observe que esta estimativa é obtida fazendo a diferença entre o tempo total e o tempo de subida, isto é,  $17 - 8 = 9$ .
- vii) A taxa de variação da posição é exatamente a velocidade. Neste caso, recomendamos que seja considerado o valor absoluto da velocidade para exibição do gráfico e da tabela. Na Figura 3.13, apresentamos o diagrama contendo o gráfico do módulo da velocidade, bem como os valores numéricos dispostos na tabela de evolução temporal.

**Figura 3.13:** Diagrama do Powersim para o problema do lançamento vertical. O gráfico e a tabela foram obtidos por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com timestep 0,03125, no intervalo  $[0,110]$ , com  $m = 7,2$ ,  $k = 0,5$ ,  $g = 9,8$  e condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 100$ . O valor absoluto da velocidade está representado por Módulo de  $x_2$ .



Por construção, a velocidade é representada pela variável  $x_2$ . Neste caso, reconfiguramos o intervalo de simulação para  $[0, 110]$  com o objetivo de compreender melhor a dinâmica. Assim, observa-se que a taxa de variação da posição decresce até se anular (momento em que a esfera atinge a altura máxima) e, em seguida, volta a aumentar assintoticamente. Um fato importante é que o valor absoluto da taxa de variação não cresce indefinidamente. Mais precisamente, os valores exibidos na tabela apontam que ele converge para, aproximadamente, 141 m/s.

Por fim, salientamos que este item se constitui como um momento muito importante para a consolidação conceitual, pois busca fomentar o desenvolvimento da escrita a partir da interpretação da solução em suas múltiplas representações, gráfica e valores numéricos tabelados.

CARO LEITOR. PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA PARA A ATIVIDADE 3, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<https://www.youtube.com/watch?v=UCA-ugPXoqM>

A próxima atividade (adaptada de Guidorizzi (2015, p. 200)) apresenta uma equação diferencial que envolve a 2ª lei de Newton e o movimento de uma partícula.

**Atividade 4.** Considere uma dinâmica em que uma partícula com 1 kg de massa se move sobre o eixo  $x$  sob ação de uma força  $F = -x \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ . Pela segunda lei de Newton (Força = massa  $\times$  aceleração) e, considerando que no instante inicial  $t = 0 \text{ s}$ , a posição e a velocidade da partícula sejam, 1 m e 0 m/s, então o fenômeno pode ser descrito pelo PVI

$$\begin{cases} x''(t) = -x \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

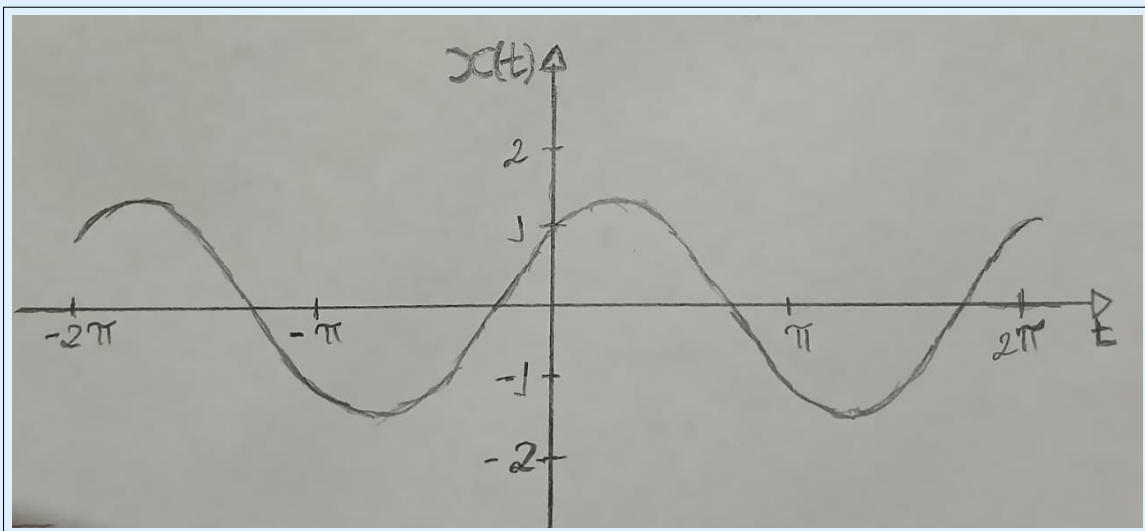
- i) Represente a função posição  $x(t)$  graficamente. Justifique.
- ii) Como seria o gráfico de  $x''(t)$  em função do tempo? Justifique.
- iii) Encontre o sistema de duas equações de primeira ordem equivalente à equação de segunda ordem dada.
- iv) Construa um diagrama com o POWERSIM e esboce os gráficos de  $x(t)$  e  $x''(t)$ . Os gráficos dos itens (i) e (ii) estão corretos?
- v) Descreva o movimento da partícula a partir da interpretação do gráfico da posição?
- vi) Plote o gráfico da velocidade com o Powersim e compare com o gráfico da posição. Existe alguma relação? Comente.

vii) O que acontece se mudarmos as condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 1$ ?

**Solução:**

i) Observe que estamos buscando o gráfico de uma função, cuja segunda derivada seja o seu negativo. Lembrando que as funções seno e cosseno possuem essas características, devemos supor que o gráfico tenha comportamento ondulatório e intercepte o eixo vertical no ponto  $P = (0,1)$ , pois  $x(0) = 1$ . Na Figura 3.14, apresentamos um esboço do gráfico da posição da partícula genericamente, isto é, sem necessariamente atender às condições iniciais apresentadas na situação.

**Figura 3.14:** Gráfico de funções com comportamento ondulatório.



Essencialmente, devemos ter soluções do tipo

$$x(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

Neste caso diremos que  $x(t)$  é a solução geral da equação diferencial de segunda ordem dada, também chamada de família de soluções.

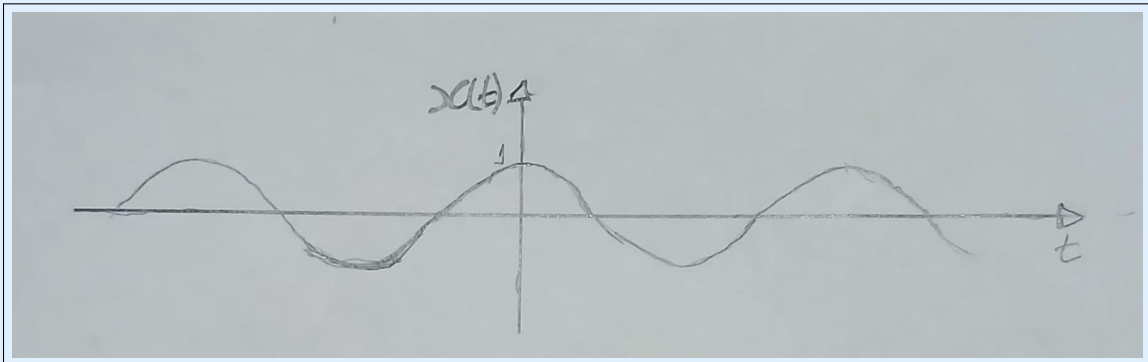
Como foram dadas as condições iniciais, podemos determinar o valor dos coeficientes  $A$  e  $B$ , da seguinte forma

$$x(0) = 1 \Rightarrow A \underbrace{\cos(0)}_{=1} + B \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow -\underbrace{\sin(0)}_{=0} + B \underbrace{\cos(0)}_{=1} = 0 \Rightarrow B = 0$$

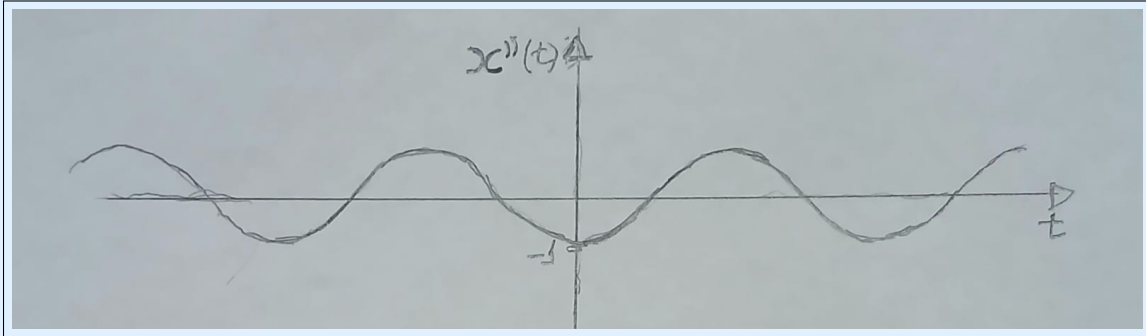
Logo, o gráfico da solução é ondulatório e, é descrito por  $x(t) = \cos(t)$ . Esta solução é chamada solução particular da equação diferencial  $\ddot{x}(t) = -x$ , pois satisfaz às condições particulares  $x(0) = 1$  e  $x'(0) = 0$ . Na Figura 3.15, apresentamos um esboço do gráfico da posição da partícula, satisfazendo as condições iniciais dadas na atividade.

**Figura 3.15:** Esboço do gráfico da função posição da partícula, conforme situação apresentada na quarta atividade.



- ii) Observe que o gráfico de  $x''(t)$  deve ter comportamento semelhante ao gráfico de  $x(t)$ , porém, com as imagens refletidas em torno do eixo dos  $t$ . Assim, devemos ter um gráfico ondulatório interceptando o eixo das coordenadas no ponto  $(0,-1)$ , ao contrário do gráfico de  $x(t)$  que intercepta o referido eixo no ponto  $(0,1)$ . Na Figura 3.16, apresentamos o esboço do gráfico da função aceleração da partícula.

**Figura 3.16:** Esboço do gráfico da função aceleração da partícula, conforme situação apresentada na quarta atividade.



iii) Fazendo as substituições  $x_1 = x$  e  $x_2 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt}$ , obtemos

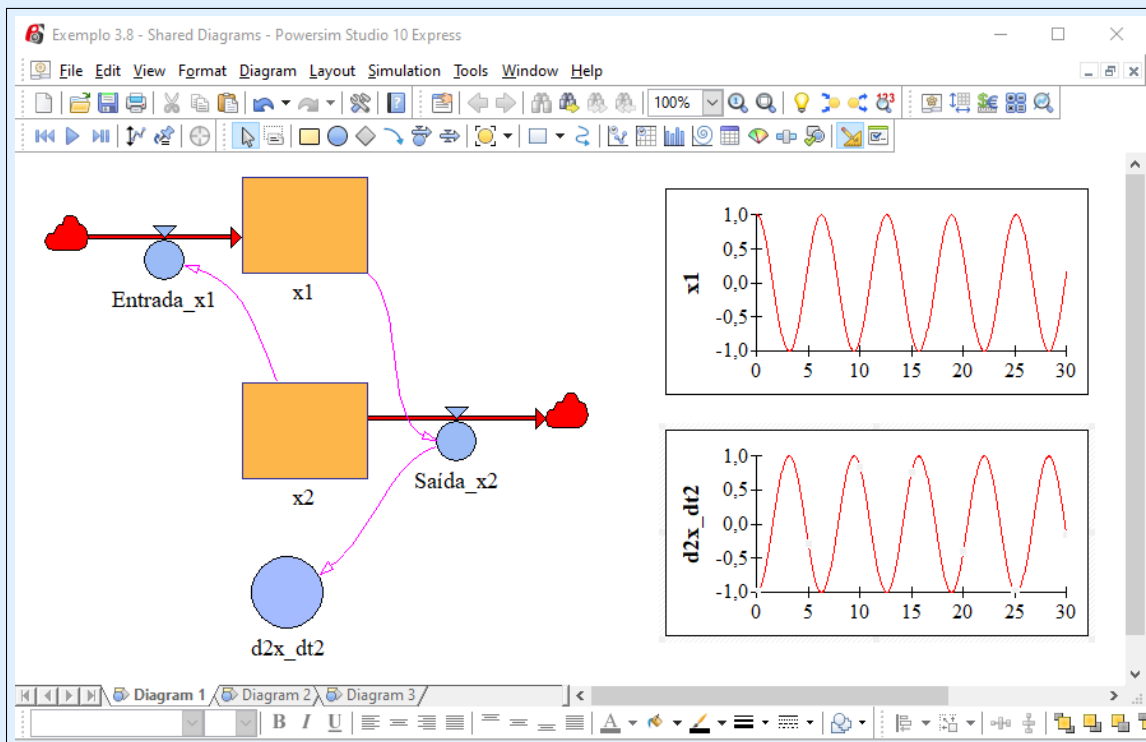
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

iv) Cada uma das equações do sistema será representada por um nível/tanque. Assim, o diagrama deve ter dois níveis. A primeira equação do sistema equivalente possui termo positivo no lado direito, o que implica que o respectivo tanque deverá ter uma torneira de entrada que deve estar relacionada com o nível  $x_2$ .

Por outro lado, a segunda equação do sistema equivalente possui termo negativo no lado direito da igualdade. Dessa forma, deverá ter uma torneira de saída.

Na Figura 3.17, apresentamos o diagrama com os gráficos de  $x(t)$  e  $x''(t)$ , representados por  $x_1$  e  $d^2x/dt^2$ , respectivamente.

**Figura 3.17:** Diagrama do Powersim para Equação da Atividade 4. Os gráficos foram obtidos por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com timestep 0,0625, no intervalo [0,30], com condições iniciais  $x(0) = 1$  e  $x'(0) = 0$ . A aceleração e a posição estão representadas por  $d2x\_dt2$  e  $x1$ , respectivamente.



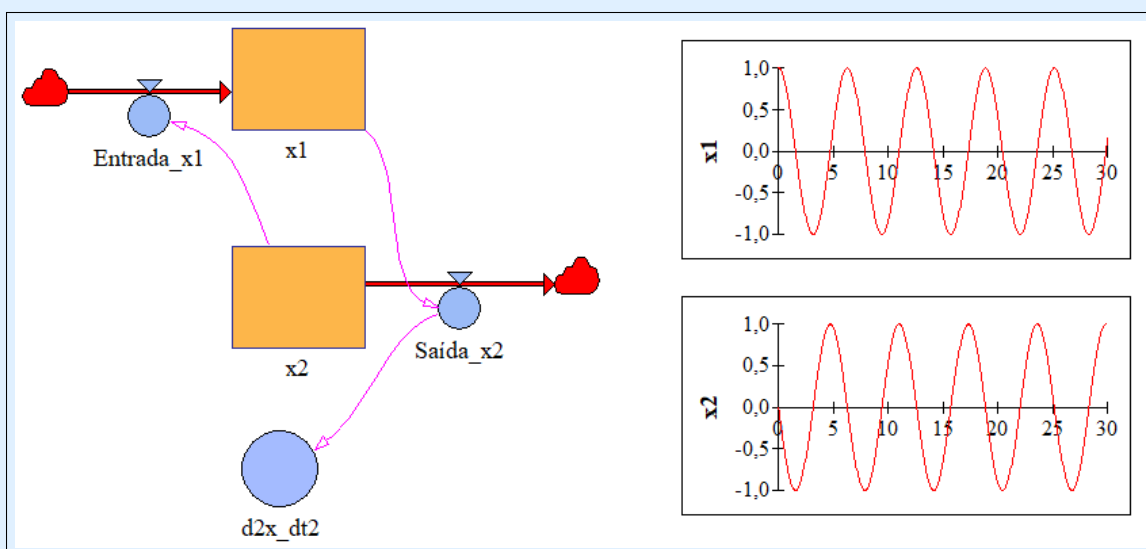
Lembrando que, na Figura 3.17, a variável  $d2x\_dt2$  foi definida inserindo  $-Saida\_x2$  no seu respectivo campo *Definition*.

- v) Esse item tem por objetivo, promover a interpretação a partir da visualização gráfica da solução. Assim, a análise indica que no movimento de 1 até -1 o gráfico da posição é decrescente, o que implica velocidade negativa. Isso decorre do fato de que a partícula está se deslocando no sentido negativo do eixo. Por outro lado, ao se deslocar de -1 até 1, o gráfico da posição é crescente e, portanto, sua velocidade é positiva. Neste caso, a partícula está se movendo

no sentido positivo do eixo.

- vi) Esse item deve ser explorado a partir das simulações com o Powersim e tem por objetivo favorecer a discussão sobre a relação entre a função posição e a função velocidade. Na Figura 3.18, apresentamos os respectivos gráficos, em que  $x_1$  e  $x_2$  representam a posição e a velocidade, respectivamente.

**Figura 3.18:** Representação gráfica da posição e da velocidade, obtidas por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com timestep 0,0625, no intervalo  $[0,30]$ , com condições iniciais  $x(0) = 1$  e  $x'(0) = 0$ . A posição e a velocidade estão representadas por  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.



A análise da Figura 3.18 permite observar que o gráfico da velocidade é positivo nos mesmos intervalos em que o gráfico da posição é crescente. Da mesma forma, nos intervalos em que a posição é decrescente, a velocidade é negativa.

- vii) Este item tem por objetivo promover a investigação a partir da experimentação computacional. O esperado é que o leitor perceba

que, ao alterar as condições iniciais, o gráfico da posição se desloca para a origem, no instante  $t = 0$ , indicando que a solução é uma função seno e, portanto, a velocidade é descrita por um cosseno.

CARO PROFESSOR. RECOMENDAMOS QUE O DIAGRAMA SEJA EXPLORADO PELOS ESTUDANTES POR MEIO DE SIMULAÇÕES VARIANDO OS VALORES DOS PARÂMETROS. COM ISSO, O ALUNO PODERÁ OBSERVAR COMO CADA PARÂMETRO INTERFERE NA SOLUÇÃO. PORTANTO, MOTIVE-OS A REALIZAREM VARIADAS SIMULAÇÕES.

Esse movimento exploratório, caracterizado pela investigação ampliada do comportamento gráfico das soluções e potencializado pelo uso didático do Powersim, favorece a compreensão dos conceitos pelos estudantes de maneira autônoma, investigativa e articulada.

CARO LEITOR. PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA PARA A ATIVIDADE 4, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<[https://www.youtube.com/watch?v=k7PrQB3\\_7us](https://www.youtube.com/watch?v=k7PrQB3_7us)>

**Atividade 5.** Considerando  $\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha \frac{dy}{dt}$ , pede-se:

- Esboce o gráfico de  $y(t)$  contra o tempo  $t$ . Justifique.
- O gráfico de  $\frac{d^2y}{dt^2}$  em função do tempo é crescente, decrescente ou constante? Justifique.
- Encontre o sistema de duas equações de primeira ordem equivalente à equação de segunda ordem dada.
- Construa o diagrama com o POWERSIM e esboce os gráficos de  $y(t)$ ,  $y'(t)$  e  $y''(t)$ .

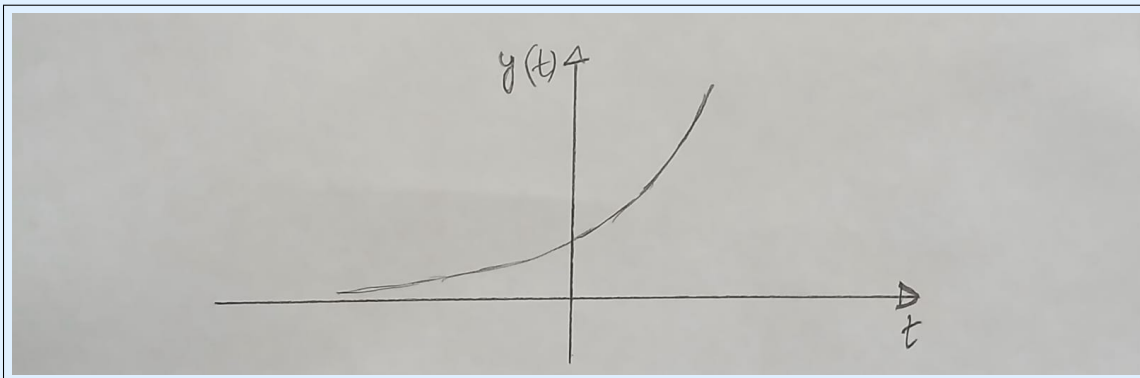
v) O que acontece se  $\alpha$  for positivo? E negativo?

vi) O que acontece se considerarmos condições iniciais do tipo  $y(0) = y_0$  e  $y'(0) = 0$ ?

**Solução:**

i) Neste caso, se  $\alpha \neq 0$  a solução deve ser um gráfico do tipo exponencial, pois as funções exponenciais têm a propriedade da derivada ser um múltiplo dela mesma. Portanto, devemos ter um gráfico com crescimento exponencial ou decrescimento exponencial. Além disso, o gráfico de  $y(t)$  pode ter crescimento exponencial amortecido, conforme mostrado na Figura 3.22. Na Figura 3.19, apresentamos o esboço do gráfico da solução.

**Figura 3.19:** Esboço do gráfico da solução da equação diferencial da quinta atividade.



ii) Neste caso, o gráfico de  $\frac{d^2y}{dt^2}$  será crescente quando o gráfico de  $y(t)$  for crescente e decrescente quando o gráfico de  $y(t)$  for decrescente. Para justificar, observe que, a partir do item anterior temos que a solução deve ser uma função do tipo  $y(t) = c_0 e^{\alpha t} + c_1$ , o que implica  $y'''(t) = \alpha^2 y'(t)$ . Portanto, a derivada de  $y''(t)$  é igual a derivada de  $y(t)$  multiplicada por  $\alpha^2$ , então o sinal da derivada de  $y''(t)$  é

o mesmo da derivada de  $y(t)$ . Assim,  $y''(t)$  e  $y(t)$  têm os mesmos intervalos de crescimento e decrescimento.

Por outro lado, se  $y'(t_0) = 0$  ( $t_0 \in \mathbb{R}$ ), o gráfico de  $y''(t)$  será uma reta horizontal passando pela origem, pois teríamos  $y(t)$  constante.

iii) Fazendo as substituições:

$$y_1 = y \text{ e } y_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt},$$

Segue que:

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \alpha \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{y_2}.$$

Assim, obtemos o sistema equivalente:

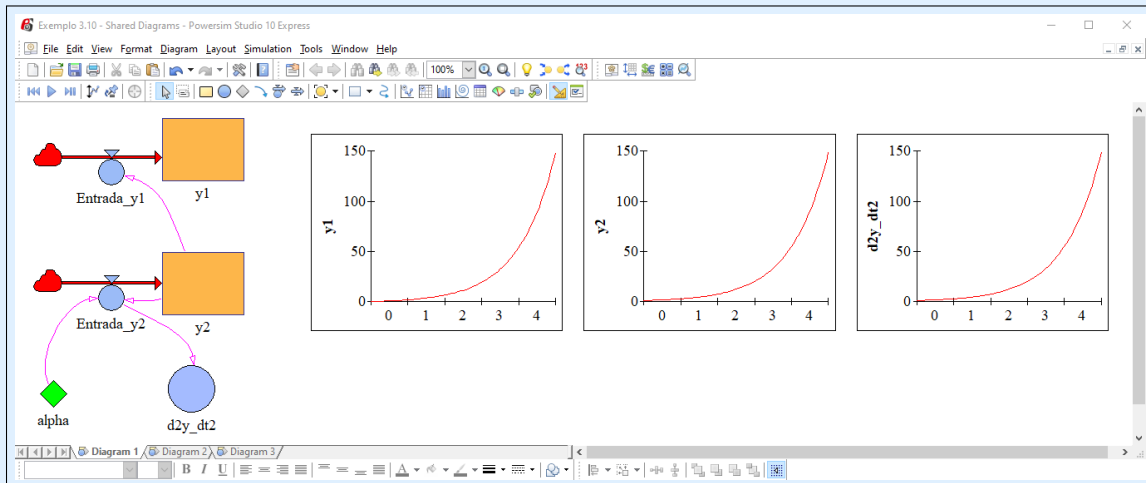
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = \alpha y_2 \end{cases},$$

iv) Cada uma das equações do sistema será representada por um nível/tanque. Assim, o diagrama deve ter dois níveis. As duas equações do sistema equivalente possuem termo positivo no lado direito da igualdade, isso implica que os respectivos tanques devem ter torneiras de entrada.

A torneira do nível referente à primeira equação ( $y_1$ ) deve ser conectada com o  $y_2$ , ao passo que a torneira do tanque da segunda equação ( $y_2$ ), deve estar conectada com  $\alpha$  e  $y_2$ .

Na Figura 3.20, apresentamos o diagrama com os gráficos de  $y(t)$ ,  $y'(t)$  e  $y''(t)$ , representados pelas variáveis  $y_1$ ,  $y_2$  e  $d^2y_{dt^2}$ , respectivamente.

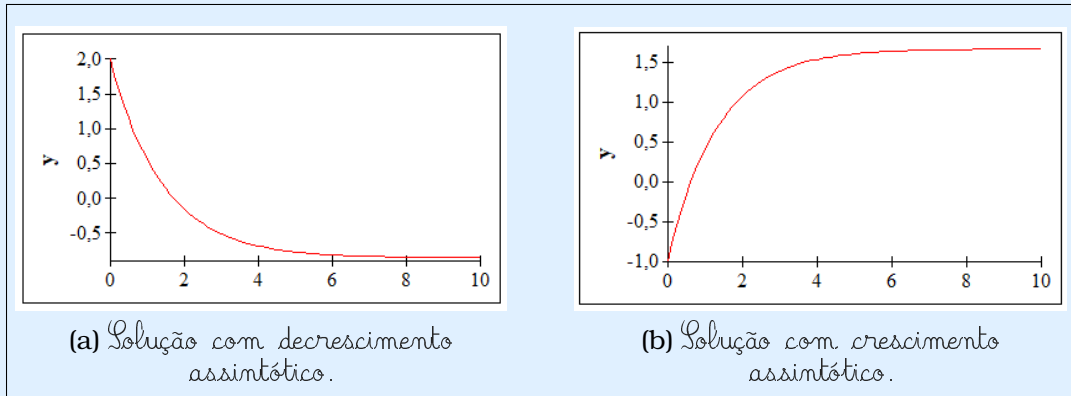
**Figura 3.20:** Diagrama do Powersim para Equação da Atividade 5. Os gráficos foram obtidos por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com timestep 0,0625, no intervalo  $[0,5]$ , com  $\alpha = 1$  e condições iniciais  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$ .



Na Figura 3.20, temos que  $y_1$ ,  $y_2$  e  $d2y\_dt2$ , representam  $y(t)$ ,  $y'(t)$  e  $y''(t)$ , respectivamente.

- v) A partir da exploração com o Powersim é possível observar que para valores positivos de  $\alpha$ , o gráfico terá crescimento ilimitado. Por outro lado, se  $\alpha$  for negativo, o gráfico poderá ter tanto decréscimo quanto crescimento assintótico, conforme ilustrado nas Figuras 3.22(a) e 3.22(b).

**Figura 3.21:** Gráficos da solução para valores negativos de  $\alpha$ . (a) aproximação obtida pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem com  $h = 0,125$ ,  $\alpha = -0,7$  e condições iniciais  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = -2$ . (b) aproximação obtida pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem com  $h = 0,125$ ,  $\alpha = -0,75$  e condições iniciais  $y(0) = -1$  e  $y'(0) = 2$ .



vi) Este item tem o objetivo de fomentar a investigação a partir do Powersim. Agora é com você!

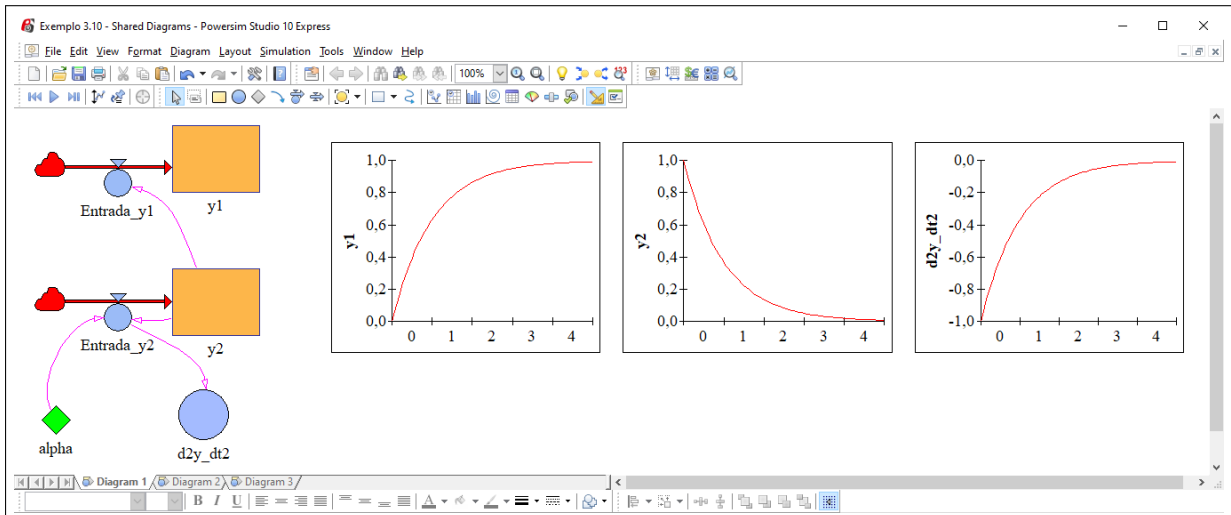
CARO LEITOR. PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA PARA A ATIVIDADE 5, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<<https://www.youtube.com/watch?v=nlH6lwtfcqk>>

Na construção do diagrama da Atividade 5 apresentamos uma configuração com a torneira de entrada no segundo nível, pois o lado direito da equação dada era positivo. Contudo, mesmo para  $\alpha < 0$  o diagrama continua funcionando, conforme mostramos na Figura 3.22. Assim, a ideia das torneiras de entrada e saída estarem associadas aos sinais positivo e negativo, respectivamente, está sendo utilizada como uma espécie de conveniência didática.

**Figura 3.22:** Diagrama do POWERSIM para Equação da Atividade 5. Os gráficos foram obtidos por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com  $timestep = 0,0625$ , no intervalo  $[0,5]$ , com  $\alpha = -1$  e condições iniciais  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$ .  $y_1$ ,  $y_2$  e  $d2y\_dt2$ , representam  $y(t)$ ,  $y'(t)$  e  $y''(t)$ , respectivamente.



Na Figura 3.22, observamos que  $y(t) \rightarrow 1$  quando  $t \rightarrow \infty$ , como  $y(0) = 0$  é razoável supor que  $y(t) = 1 - e^{-\beta t}$  com  $\beta > 0$ . O esperado é que  $\beta$  seja igual a um, pois nesse caso a simulação foi realizada considerando  $\alpha = -1$ . Essa análise ajuda a compreender o comportamento decrescente assintótico do gráfico de  $y'(t)$ .

CARO PROFESSOR. ESPERAMOS QUE ANÁLISES DO TIPO APRESENTADA NO PARÁGRAFO ACIMA SEJAM FOMENTADAS DURANTE O DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES. LEMBREMOS NOVAMENTE QUE O DOCENTE PODE E DEVE POTENCIAR O USO DO RECURSO DIGITAL, INSTIGANDO OS ESTUDANTES A REALIZAREM DIVERSAS SIMULAÇÕES OBSERVANDO COMO OS PARÂMETROS INTERFEREM NO COMPORTAMENTO GRÁFICO DAS SOLUÇÕES.

Na próxima atividade, apresentamos uma equação que relaciona a segunda derivada de uma função  $y(t)$  com um polinômio formado pela variável independente  $t$ .

**Atividade 6.** Considere a equação diferencial ordinária de segunda ordem  $\frac{d^2y}{dt^2} = t^2 + t$ .

- i) Como seria o gráfico da solução  $y(t)$ ? Justifique sua resposta.
- ii) Encontre o sistema de duas equações de primeira ordem equivalente à equação de segunda ordem dada.
- iii) Construa um diagrama no POWERSIM e esboce o gráfico de  $y(t)$ .

**Solução:**

i) Neste caso, podemos pensar em uma função cuja segunda derivada seja um polinômio de grau 2. Naturalmente, podemos supor que seja uma função polinomial cujo grau seja duas vezes maior do que a função quadrática. Logo, o gráfico da solução é uma função polinomial de grau 4. Para justificar essa afirmação, considere  $y(t) = c_4t^4 + c_3t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0$ , então

$$\frac{dy}{dt} = 4c_4t^3 + 3c_3t^2 + 2c_2t + c_1 \quad (3.5a)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 12c_4t^2 + 6c_3t + 2c_2. \quad (3.5b)$$

comparando a equação (3.5b) com a equação diferencial dada, segue que

$$\begin{cases} 12c_4 = 1 & \Rightarrow c_4 = 1/12 \\ 6c_3 = 1 & \Rightarrow c_3 = 1/6 \\ 2c_2 = 0 & \Rightarrow c_2 = 0. \end{cases}$$

As constantes  $c_1$  e  $c_0$  são determinadas a partir das condições iniciais  $y(0) = y_0$  e  $y'(0) = v_0$ . Disto, temos que a solução será o gráfico determinado pela curva  $y(t) = t^4/12 + t^3/6 + c_1t + c_0$ . Observe que

tomando  $c_4 = 1/12$ ,  $c_3 = 1/6$  e  $c_2 = 0$  na equação (3.5b), obtemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} = t^2 + t$$

Também podemos abordar o comportamento gráfico a partir da expressão da Equação de segunda ordem dada na atividade, explorando as características de sua concavidade. Para isso, observe que a curva será côncava para cima quando a segunda derivada for positiva, ou seja, devemos investigar o sinal de  $y''(t)$ . O que é equivalente a estudar o sinal de  $t^2 + t$ . Disto, obtemos que

$$t^2 + t < 0, \text{ para todo } t \text{ em } (-1, 0)$$

e

$$t^2 + t > 0, \text{ para todo } t \text{ em } (-\infty, -1) \text{ e } (0, \infty).$$

Dessa forma, podemos sintetizar os intervalos de concavidade do gráfico da solução, conforme apresentado no Quadro 3.1.

**Quadro 3.1:** Intervalos de concavidade da função solução da equação diferencial dada na Atividade 6

Intervalos	Concavidade
$(-\infty, -1)$	Para cima
$(-1, 0)$	Para baixo
$(0, \infty)$	Para cima

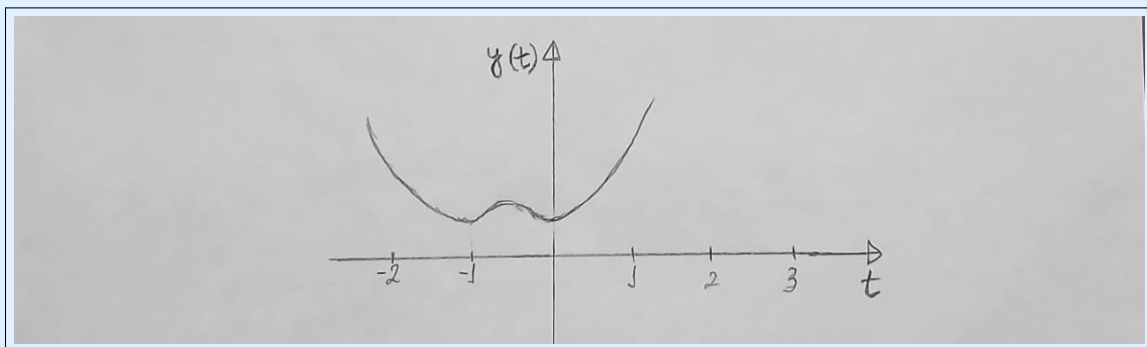
**Fonte:** Elaborado pelos autores.

Do Quadro 3.1, segue que  $t = -1$  e  $t = 0$  são pontos de inflexão da solução. Para uma discussão mais detalhada sobre esse conceito, o leitor pode consultar o livro de Stewart (2009).

CARO PROFESSOR. ESSE PODE SER UM BOM MOMENTO PARA RETOMAR O SIGNIFICADO CONCEITUAL DE PONTO DE INFLEXÃO. SERIA UMA MANEIRA DE REFORÇAR/CONSOLIDAR OS CONCEITOS PRÉVIOS DO ESTUDANTE.

Na Figura 3.23, apresentamos um esboço do gráfico da solução da equação de segunda ordem dada na atividade.

**Figura 3.23:** Esboço do gráfico da solução da Equações da sexta atividade, obtido a partir da análise da concavidade.



ii) Fazendo as substituições  $y_1 = y$  e  $y_2 = \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy}{dt}$ , obtemos

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = t^2 + t \end{cases}$$

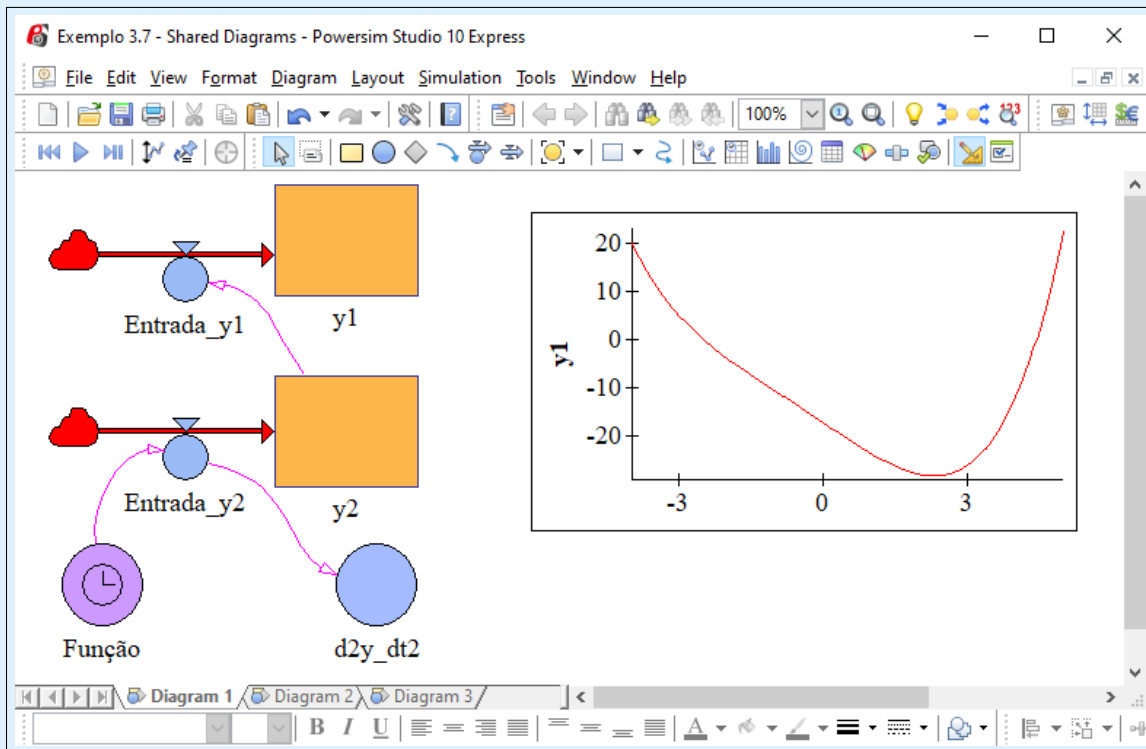
iii) Cada uma das equações do sistema será representada por um nível/tanque. Assim, no diagrama deve ter dois níveis, um para a solução ( $y_1 = y$ ) e outro para ( $y_2$ ). Assim, considerando que ambas as equações do sistema equivalente possuem termos positivos nos respectivos lados direitos, cada nível deverá receber torneiras de entrada. A entrada do tanque  $y_1$  deve estar conectada com o nível  $y_2$ .

Neste caso, temos uma equação diferencial não homogênea, cujo termo não homogêneo é uma função não constante. Assim, precisamos definir a função  $f(t) = t^2 + t$ , conforme descrito no Capítulo 2. Dessa forma, por construção, a entrada do tanque  $y_2$  se conecta com a função  $f(t) = t^2 + t$ .

Apesar do Powersim permitir a configuração para construção de gráficos de funções com valores negativos da variável independente tempo, ao trabalharmos com soluções de equações diferenciais devemos ter a cautela de lembrar que o software considera como condição inicial o limite inferior do intervalo de simulação  $[a, b]$  [Start time, Stop time]. Por exemplo, se quisermos resolver a equação diferencial com condição inicial  $y(-4) = 1$ , devemos configurar o intervalo de forma que o parâmetro Start time seja -4 e o valor numérico de  $y$  (retângulo laranja) seja 1.

Na Figura 3.24, apresentamos o diagrama com o gráfico da solução  $y(t)$ , obtido por meio de simulações utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com timestep = 0,03125, no intervalo  $[-4, 5]$ , com condições iniciais  $y(-4) = 20$  e  $y'(-4) = -20$ .

**Figura 3.24:** Diagrama do Powersim para a Atividade 6. O gráfico foi obtido por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com timestep = 0,03125, no intervalo [-4,5], com condições iniciais  $y(-4) = 20$  e  $y'(-4) = -20$ . A solução da equação está representada por  $y_1$ .



CARO LEITOR. PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA PARA A ATIVIDADE 6, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<<https://www.youtube.com/watch?v=KBMVsrOGiYk>>

**Atividade 7.** Considere a equação diferencial ordinária de segunda ordem  $y'' + t^2y' - ty = 0$ . Construa um diagrama no POWERSIM e plote o gráfico da

solução  $y(t)$ .

**Solução:**

Iniciamos reescrevendo a equação na forma  $y'' = ty - t^2y'$ , para facilitar a obtenção do sistema equivalente de equações de primeira ordem. Assim, fazendo as substituições  $y_1 = y$  e  $y_2 = \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy}{dt}$ , obtemos

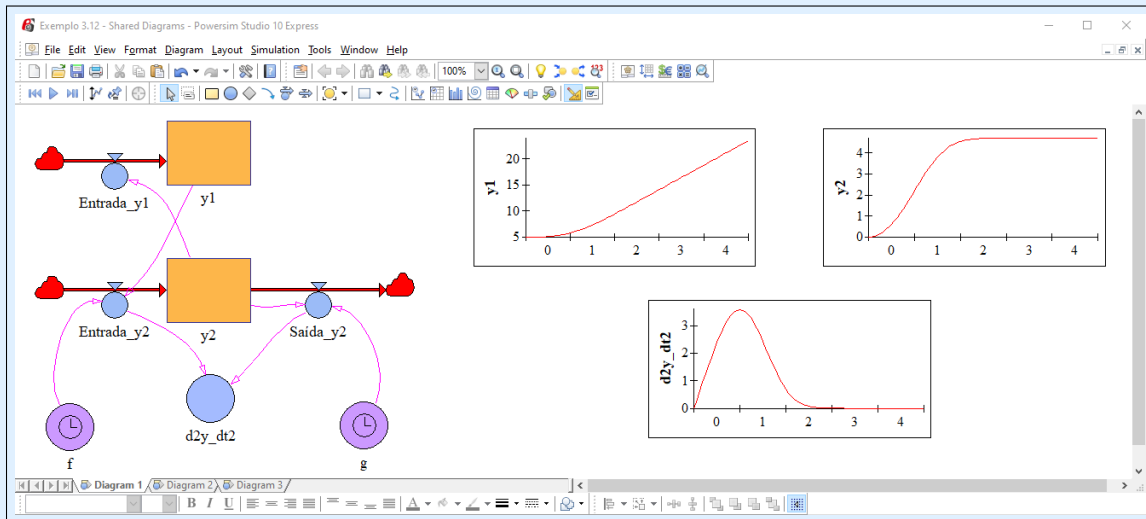
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = ty_1 - t^2y_2 \end{cases}$$

O nível referente à primeira equação do sistema equivalente ( $y_1$ ) terá uma torneira de entrada que deverá ser conectada ao nível da segunda equação do sistema ( $y_2$ ).

Observe que a segunda equação do sistema equivalente ( $y_2$ ) possui um termo positivo e um negativo. Assim recomenda-se que o respectivo nível tenha uma torneira de entrada e uma de saída. A de entrada deve se conectar com o nível da primeira equação ( $y_1$ ) e com uma função  $f(t) = t$ . A torneira de saída terá que ser conectada ao próprio nível ( $y_2$ ) e a uma função  $g(t) = t^2$ .

Na Figura 3.25 apresentamos uma possível configuração para o diagrama. Neste caso, temos  $f(t) = t$  e  $g(t) = t^2$ , dessa forma,  $f(t)$  se relaciona com a torneira de entrada e  $g(t)$  se conecta com a torneira de saída. Na Figura 3.25, apresentamos o diagrama com os gráficos da solução  $y(t)$ ,  $y'(t)$  e  $y''(t)$ , obtidos por meio de simulações utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com timestep 0,0625, no intervalo  $[0,5]$ , com condições iniciais  $y(0) = 5$  e  $y'(0) = 0$ .

**Figura 3.25:** Diagrama do Powersim para Atividade 7. Os gráficos foram obtidos por meio de simulação com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com timestep 0,0625, no intervalo  $[0,5]$ , com condições iniciais  $y(0) = 5$  e  $y'(0) = 0$ .  $y_1$ ,  $y_2$  e  $d2y\_dt2$ , representam  $y(t)$ ,  $y'(t)$  e  $y''(t)$ , respectivamente.



No diagrama da Figura 3.25 definimos  $f$  e  $g$  inserindo  $\text{TIME}$  e  $\text{TIME}^2$  nos respectivos campos *Definition*. As condições iniciais  $y(0) = 5$  e  $y'(0) = 0$  foram adicionadas ao diagrama inserindo os valores numéricos 5 e 0 nos campos de definição dos níveis (retângulos laranjas)  $y\_1$  e  $y\_2$ , respectivamente.

CARO LEITOR. PARA MAIS INFORMAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA PARA A ATIVIDADE 7, ACESSE O QR CODE OU O *link* A SEGUIR E ASSISTA AO VÍDEO.



<<https://www.youtube.com/watch?v=Si2g494lQIQ>>

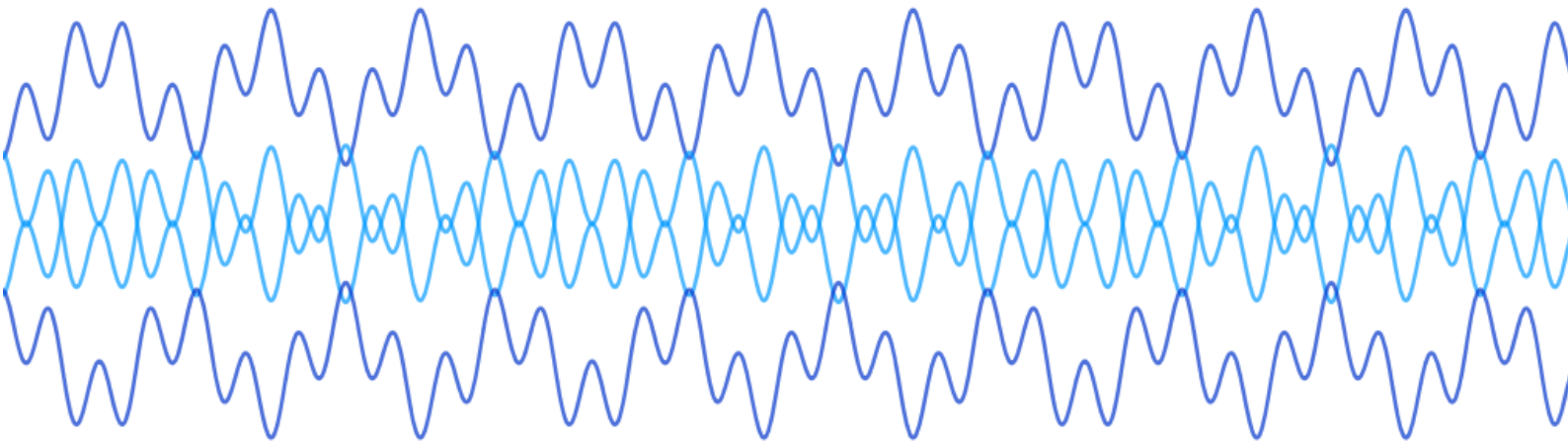


## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste produto educacional, propomos uma sequência de atividades sobre o ensino de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com foco interpretativo por meio de representações gráficas e numéricas das soluções. As atividades propostas estão acompanhadas de comentários sobre possíveis formas de se construir intuitivamente o gráfico da solução da equação dada. Uma das características intrínsecas das atividades é que elas exigem constantemente que o leitor revise os conceitos de derivadas e integrais. Com isso, esperamos que além de contribuir com o ensino de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, este produto educacional possa favorecer a consolidação dos conceitos de derivadas.

Consideramos que o caráter investigativo das atividades se constitui como a essência do Produto Educacional. Dessa forma, o professor deve considerar os comentários como um recurso que lhe forneça ideias para poder fomentar a criatividade interpretativa dos estudantes. Ou seja, defendemos que os comentários sejam vistos como suporte para que o professor possa elaborar dicas para sanar possíveis dúvidas dos alunos durante o desenvolvimento das atividades.

Cabe destacar que esse Produto Educacional foi submetido à crítica especializada, passando pela avaliação por pares, pela banca de qualificação, banca de defesa de tese e, além disso, foi implementado em dois ambientes de ensino. Assim, acreditamos que o seu potencial didático pode contribuir para práticas de ensino de equações diferenciais ordinárias mediadas pelo uso de tecnologias digitais, em especial, o Powersim.



## REFERÊNCIAS

DULLIUS, M. M.; QUARTIERI, M. T.; NEIDE, I. G. Teoria do uso didático das tecnologias digitais – tuditec. In: DULLIUS, M. M.; NEIDE, I. G. (Ed.). **Tecnologias digitais no ensino de ciências e matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E.; CALVIS, D. T. **Differential equations & linear algebra**. Fourth edition. Boston: Pearson, 2018.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**: Vol. 4. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

NASCIMENTO, E. L.; SCHIMIGUEL, J. Referenciais teóricos-metodológicos: sequências didáticas com tecnologias no ensino de matemática na educação básica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 8, n. 2, p. 115–126, 2017. ISSN 2179-426X. Disponível em: <<https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1281/886>>.

SANTOS, A. C. K. *et al.* **Modelagem Computacional Utilizando STELLA**: considerações teóricas e aplicações em gerenciamento, física e ecologia de sistemas. 1. ed. Rio Grande: Editora da FURG, 2002.

STEWART, J. **Cálculo**: Vol. 2. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Penso, 2014. E-book.

## **SOBRE OS AUTORES**

### **ODAIR JOSÉ TEIXEIRA DA FONSECA**

LICENCIADO EM CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA, COM HABILITAÇÃO EM MATEMÁTICA, PELA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO (UFMT), CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP; MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL PELA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS (UNICAMP) E DOUTORANDO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS PELA UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI (UNIVATES). ATUALMENTE É PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA (UNIR).

### **MARIA MADALENA DULLIUS**

LICENCIADA EM MATEMÁTICA, PELA UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI (UNIVATES), MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA PELA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL (UFRGS) E DOUTORA EM ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS PELA UNIVERSIDAD DE BURGOS (UBU). ATUALMENTE É PROFESSORA TITULAR DA UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI (UNIVATES), ATUANDO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS (PPGECE) E NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO (PPGENSINO).