PRODUÇÃO TÉCNICA

TÍTULO

CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS COM USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

AUTORES

Teresinha Aparecida Faccio Padilha

Maria Madalena Dullius

Marli Teresinha Quartieri

CONTEXTUALIZAÇÃO

A motivação de trabalhar com a geometria surge com a percepção do quão ela permeia o mundo em que vivemos. O domínio de competências e habilidades relacionadas a essa área da Matemática é indispensável, visto que elas podem instrumentalizar os discentes para superar desafios que surgem no dia a dia e prepará-los para a atuação em inúmeras áreas no mercado de trabalho.

A abordagem dos fractais no ensino da geometria é proposta tendo presente a insuficiência da geometria euclidiana na contemplação das diferentes formas que encontramos na natureza e sua crescente aplicabilidade nas mais diferentes áreas. Grande parte dos elementos naturais não pode ser representada por figuras costumeiramente estudadas como retângulos, quadrados entre outros. No entanto, a construção manual de muitos fractais pode ser uma atividade trabalhosa, exigindo tempo e precisão de medidas, processo que pode ser facilitado com a utilização de um recurso computacional.

A partir das considerações feitas, propusemos a realização de uma intervenção pedagógica que faz uma abordagem alternativa da construção de fractais com uso de um recurso computacional – *software* Geogebra - explorando conteúdos geométricos e algébricos.

Numa proposta de não unicidade de recursos utilizados também propusemos a construção de cartões fractais e fractais tridimensionais.

A prática pedagógica foi desenvolvida com uma turma de 7ª série do Ensino Fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental Otto Gustavo Daniel Brands, no município de Venâncio Aires. A turma é composta de 20 alunos, sendo 11 meninas e 09 meninos, que frequentam as aulas no turno da manhã. Os estudantes estão na faixa etária de 12 a 16 anos. A opção por esta turma deu-se pelo fato de a autora da pesquisa lecionar e ser a professora titular da disciplina de Matemática na já mencionada instituição de ensino.

OBJETIVO

Propor uma abordagem alternativa da construção de fractais usando como principal ferramenta de apoio o *software* Geogebra de modo a propiciar o desenvolvimento de conteúdos geométricos e algébricos.

DETALHAMENTOS/ETAPAS

A intervenção pedagógica desenvolvida é composta de dez atividades as quais descrevemos na sequência.

Atividade 1: Descoberta da geometria fractal

Esta atividade teve por objetivo despertar nos alunos a percepção da insuficiência da Geometria Euclidiana na representação de elementos da natureza. Começamos com o questionário apresentado, que instigou sobre quais formas geométricas os alunos conheciam. Na sequência, os estudantes foram convidados a observar objetos ou elementos quaisquer da natureza e associá-los às formas geométricas conhecidas. Foi nesse momento que se questionou sobre possíveis dificuldades encontradas na realização da atividade:

1) *Faça o desenho das formas geométricas que você conhece com seu o respectivo nome:*

2) *Agora faça uma lista de dez coisas que você pode observar na natureza e associe com a forma geométrica que mais lhe pareça familiar:*

Quadro 1 – Associação de elementos da natureza a formas geométricas.

Elemento observado	*Forma geométrica a que você o associa*

Fonte: Da autora.

3) *Você teve alguma dificuldade em associar os elementos escolhidos com uma forma geométrica conhecida? Por quê?*

_____

_____

_____

_____

A exploração detalhada das respostas obtidas foi feita em um momento de socialização seguido de um questionamento aos alunos sobre as formas da natureza poderem todas serem associadas ou construídas a partir das figuras geométricas euclidianas. Ampliamos com questionamentos do tipo: Como a natureza sabe construir essas estruturas? Como ela sabe a regra de construção?

Comentamos sobre o surgimento da geometria fractal para sanar a insuficiência da geometria euclidiana percebida pelos alunos na realização da atividade e a apresentamos em forma de *slides* com imagens (ANEXO I), exemplificando, conceituando e mostrando diferentes aplicações.

Atividade 2: Conhecendo o *software* geogebra

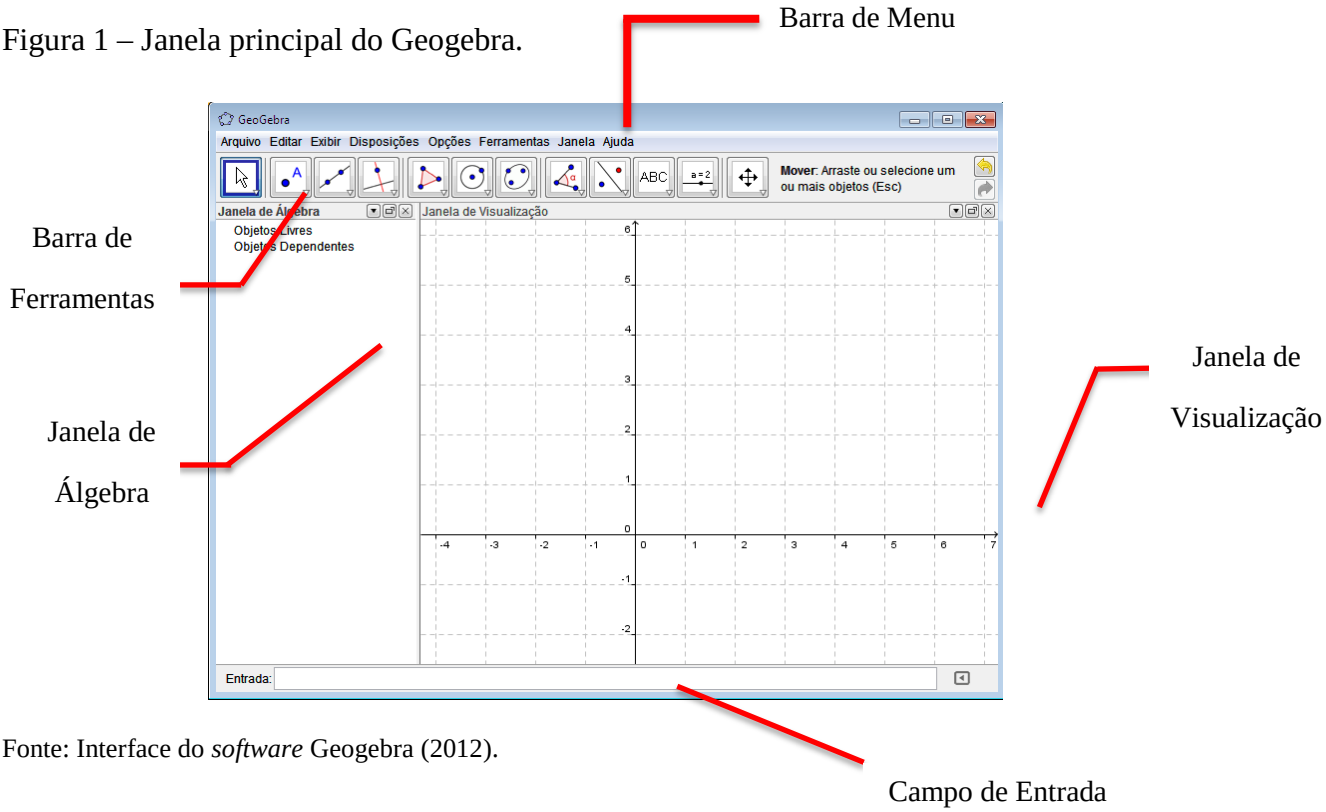
A Atividade 2 foi o primeiro contato dos alunos com o *software* Geogebra para que pudessem conhecê-lo e explorá-lo sem que fossem conduzidos por uma atividade dirigida.

No primeiro momento, apresentamos aos alunos os passos operacionais de acesso ao *software* Geogebra.

- Acessando o Geogebra pela área de trabalho

- Conhecendo o Geogebra

Figura 1 – Janela principal do Geogebra.



Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

Um dos diferenciais deste programa em relação aos outros *softwares* de Geometria Dinâmica é o fato de se poder acessar as funções, tanto via botões na Barra de Ferramentas quanto pelo Campo de Entrada. Além disso, podemos alterar as propriedades dos objetos construídos via Janela da Álgebra e também por meio de algumas ferramentas do Botão Direito do *Mouse*.

A Barra de Ferramentas está dividida em 12 janelas como a que apresentamos na Figura 2.

Figura 2 – Janelas do Geogebra

.Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

Cada janela possui várias ferramentas que podem ser visualizadas com um clique na parte inferior do ícone. Assim, o programa abrirá as opções referentes à janela. Cada ícone tem um desenho e um nome para ajudar a lembrar o que a ferramenta faz.

O Campo de Entrada fica no rodapé da janela do Geogebra. Por meio dele é possível operar o programa usando comandos escritos, que desempenham praticamente as mesmas funções da Barra de Ferramenta. Dependendo do objetivo que se tem, este recurso pode apresentar algumas vantagens como, por exemplo, a precisão de um ponto ao digitarmos suas coordenadas, que com um clique no *mouse* pode não sair no local desejado.

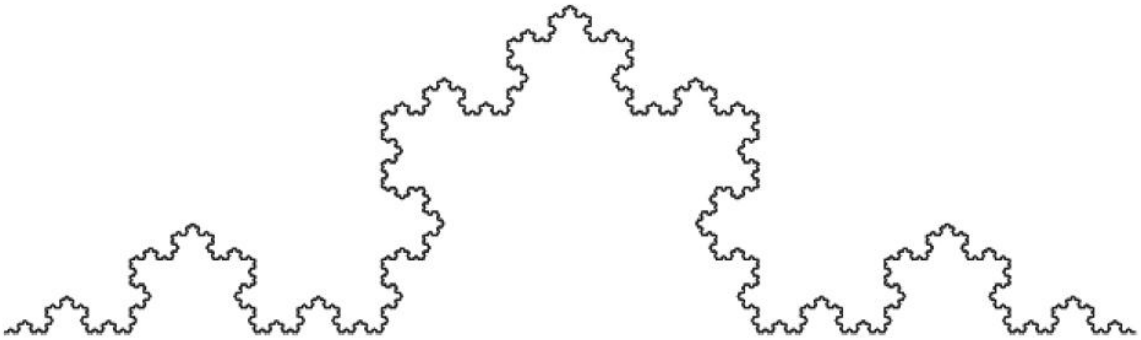
A Janela da Álgebra, que geralmente aparece quando iniciado o Geogebra, pode ser ocultada a partir da Barra de Menu, em EXIBIR e marcando a opção JANELA DE ÁLGEBRA. Uma das funções desta Janela é exibir as informações algébricas dos objetos que estão na Janela de Visualização, sendo possível editar as suas respectivas propriedades. Para tanto, é preciso clicar com o botão direito do *mouse* sobre a informação algébrica do objeto e escolher a opção "PROPRIEDADES", ou então, fazer essa edição com um duplo clique sobre a informação algébrica.

Depois de apresentado o *software* aos alunos, deixou-se um tempo livre para que pudessem se familiarizar com as funções e possibilidades de trabalho com uso o programa. Zuchi (2008) endossa que as potencialidades de um ambiente informatizado estão intimamente ligadas às suas especificidades e que conhecê-las pode ajudar a explorar os recursos da ferramenta de maneira a potencializar determinada atividade.

Atividade 3: Construção da Curva de Koch com o *software* Geogebra

A Curva de Koch, mostrada na Figura 3, foi proposta para ser construída no Geogebra com o objetivo de identificar a regra de construção do referido fractal e em seguida mobilizar conhecimentos acerca da classificação dos triângulos, segmentos de reta, semirretas, paralelismo, raio da circunferência para a sua construção. Também objetivava-se fazer uso da potenciação e dos números racionais para representar os comprimentos dos segmentos em cada iteração.

Figura 3 – Imagem da Curva de Koch.



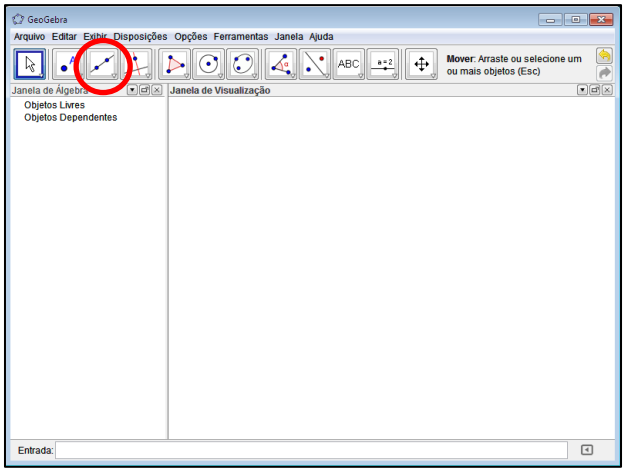
Fonte: CCAPITALIA (2012).

Assim, apresentamos a imagem em *slides* do fractal Curva de Koch com algumas informações históricas sobre ele. Os alunos foram convidados a identificar as características fractais ali presentes, bem como o padrão geométrico utilizado para sua construção.

Os passos para construção do fractal no Geogebra foram discutidos juntamente com os alunos, buscando sempre relacionar cada decisão tomada com o respectivo conteúdo geométrico utilizado. Assim, explicitaremos os passos para a construção com base em trabalho de Macedo e Franco (s/d):

- Abrir uma janela no Geogebra e esconder os eixos e a malha quadriculada caso estejam visíveis clicando em exibir eixos e malha.

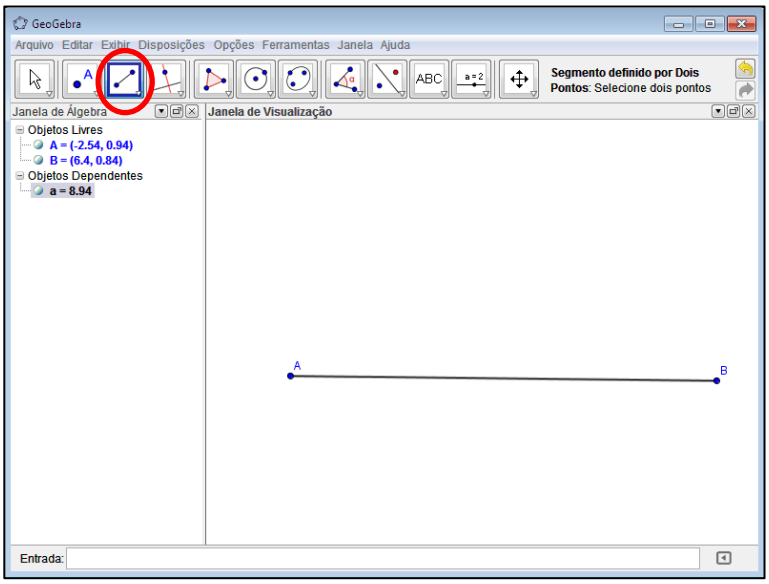
Figura 4 – Interface do Geogebra.



Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

- Questionar os alunos sobre qual deve ser o ponto de partida para a construção o fractal desejado. Partindo das respostas dadas, inicie a construção de um segmento de reta definido por dois pontos utilizando o terceiro ícone:

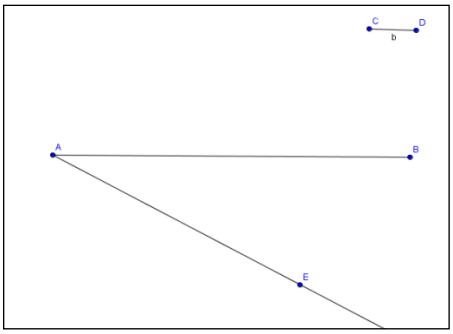
Figura 5 – Ponto de partida para a construção da Curva de Koch.



Fonte: Da autora, baseado em Macedo e Franco (s/d).

- Após decidir qual deve ser o próximo passo, dividir o segmento em três partes iguais. Ouvir as diferentes sugestões para a realização do proposto e sugerir os passos que seguem para que, ao criar a nova ferramenta, ela funcione. Num outro local da tela construir outro segmento de reta para ser nossa unidade de medida. Construir uma semirreta do ponto **A** de um tamanho qualquer.

Figura 6 – Sequência da construção da Curva de Koch.

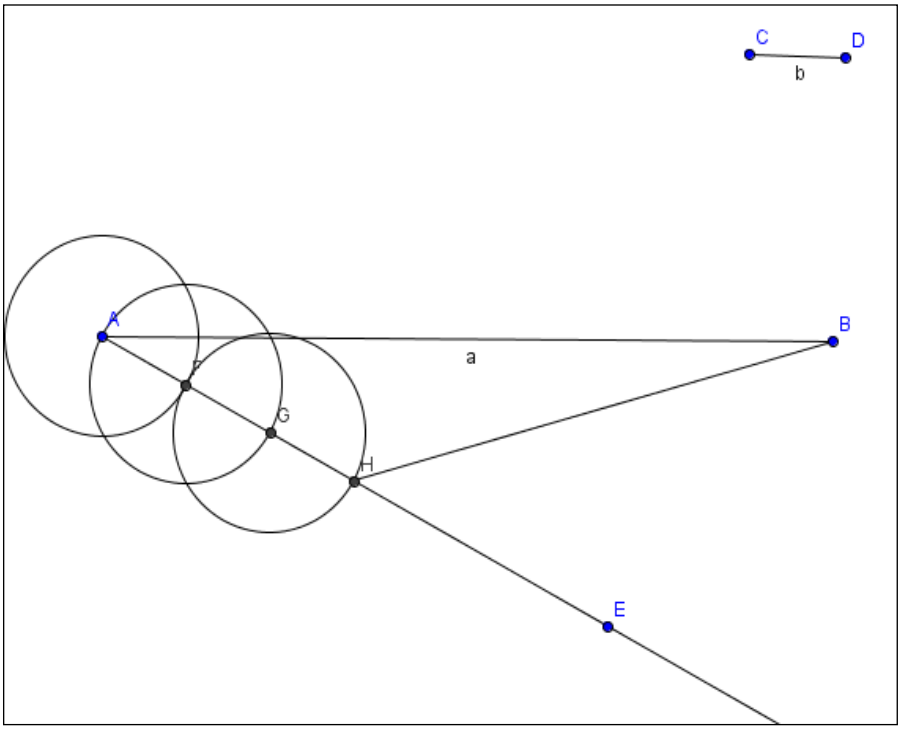


Fonte: Da autora, baseado em Macedo e Franco (s/d).

- Agora, marcar na semirreta três segmentos de mesmo tamanho utilizando a nossa unidade a partir do ponto **A**. Para isso, construir uma circunferência de

centro em **A** e raio b, conforme instruções constantes no 6º ícone – círculo dados centro e raio - e marcar a intersecção de dois objetos (circunferência e semirreta – 2º ícone). Repetir o processo mais duas vezes centrando o círculo na intersecção. Marcar o ponto de intersecção da semirreta auxiliar com a última circunferência construída.

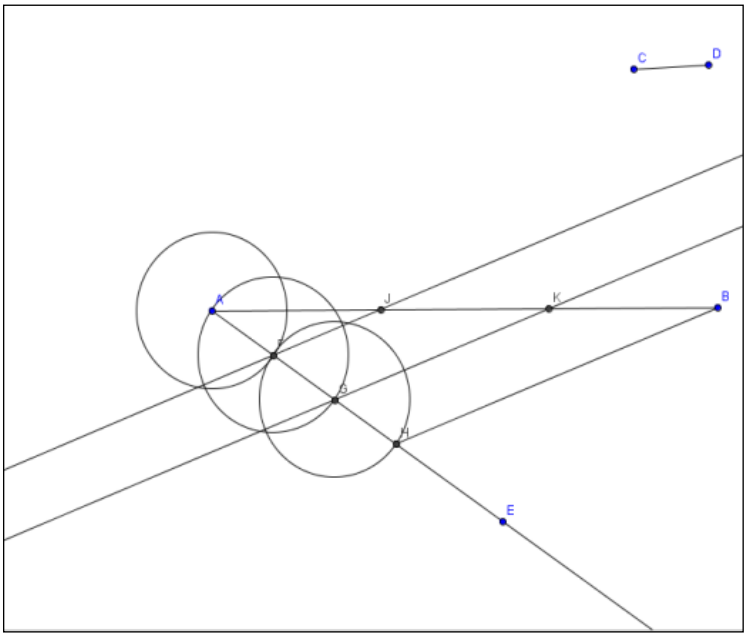
Figura 7 – Continuação da construção da Curva de Koch



.Fonte: Da autora, baseado em Macedo e Franco (s/d).

- Traçar o segmento de reta g (3º ícone), passando pelos pontos **B** e **H** e paralelas a g passando pelos pontos de intersecção F e G de acordo com as instruções do 4º ícone (retas paralelas). Encontrar o ponto de intersecção entre o segmento a e as paralelas que passam por **F** e **G**. Observar a divisão do segmento em três partes congruentes.

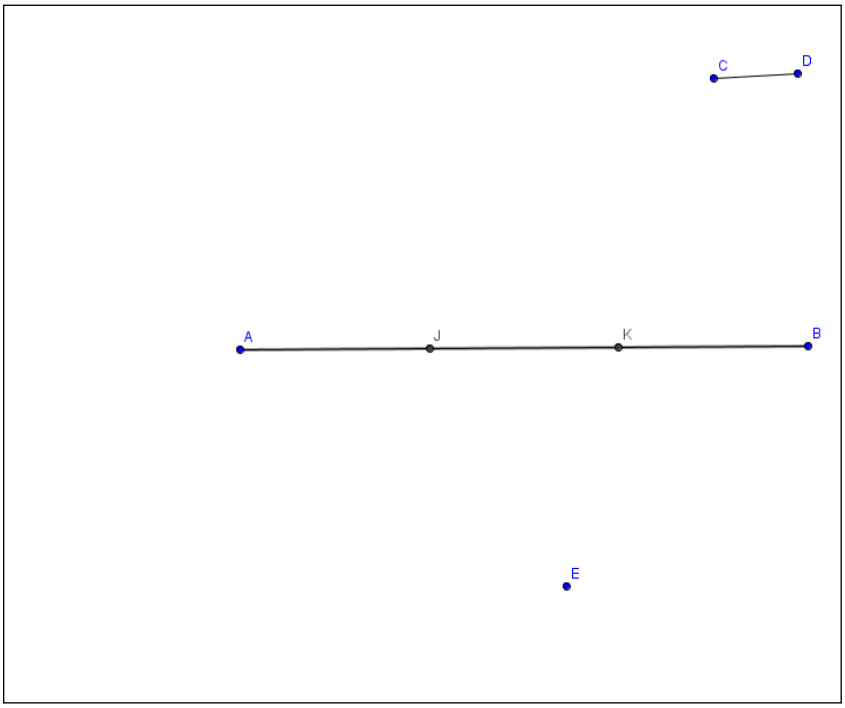
Figura 8 – Processo de construção da Curva de Koch.



Fonte: Da autora, baseado em Macedo e Franco (s/d).

- Para esconder os objetos que aparecem durante a construção, basta clicar com o botão direito do *mouse* sobre o objeto e em exibir objeto. Se quiser esconder os nomes dos objetos, clicar em exibir rótulo.

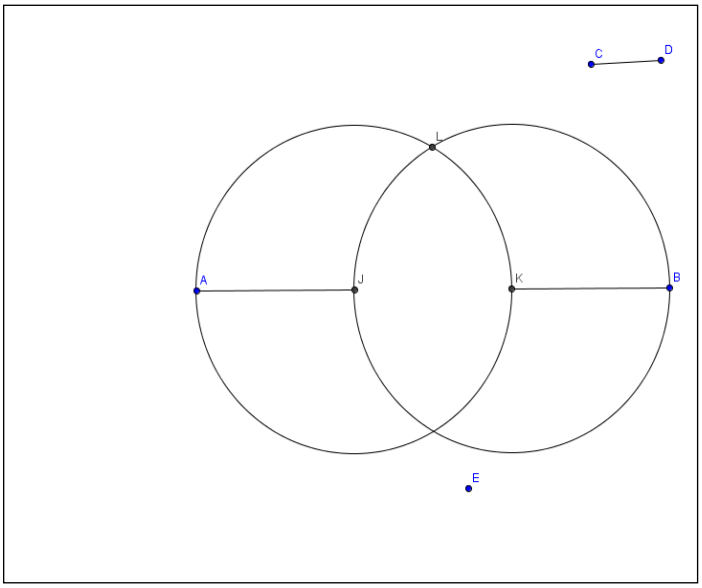
Figura 9 – Imagem com as construções de apoio escondidos.



Fonte: Da autora, baseado em Macedo e Franco (s/d).

- Para apagar a parte central teremos que esconder o segmento de reta a e construir dois segmentos de reta: **AJ** e **KB.** Vamos agora substituir a parte central por um triângulo equilátero sem um lado e, para isso, desenharemos um círculo de centro em **J** e outro de centro em **K** e raio j ou k. Marcar o ponto de intersecção dessas duas circunferências.

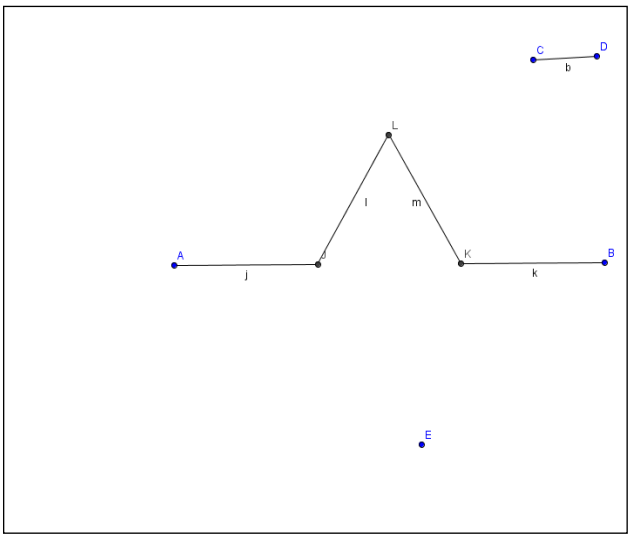
Figura 10 – Intersecção das duas circunferências.



Fonte: Da autora, baseado em Macedo e Franco (s/d).

- Desenhar o segmento de reta **JL** e **LK** e esconder as circunferências.

Figura 11 – Circunferências ocultas



Fonte: Da autora, baseado em Macedo e Franco.

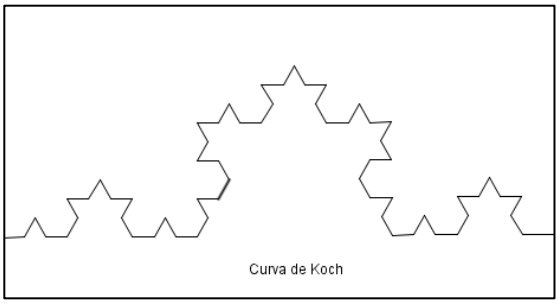
- Agora precisamos repetir para cada segmento o mesmo processo realizado no segmento inicial. Esse processo é chamado iteração e, através dele, obteremos a Curva de Koch. Mas esta repetição seria muito trabalhosa. É aqui que temos uma grande vantagem de uso do *software* Geogebra, que permite criar uma ferramenta que reproduz a construção. Para isso, ative a opção **ferramentas – criar nova ferramenta**, abrindo uma janela com abas que contêm as seguintes informações:

  Objetos finais: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros. No nosso caso são os pontos **J**, **L**, **K**, segmento j, segmento l, segmento m, segmento k. Para inseri-los na construção, basta clicar sobre esses objetos com o botão esquerdo do *mouse*.

  Objetos iniciais: são objetos que foram informados inicialmente dos quais dependem toda a construção. No nosso exemplo, correspondem aos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, e **E**. Esses objetos automaticamente aparecem em objetos iniciais.

  Nome e ícone: é o nome dado ao novo ícone conforme desejado. Após a nomeação dessa ferramenta, clicar em concluído. Irá aparecer um novo ícone com a ferramenta construída. Para utilizá-la é preciso clicar no ícone com o nome dado e nos pontos **A**, **J**, **C**, **D**, **E.** Ao construir essa nova parte da Curva, teremos que esconder o segmento j para eliminar o segmento central. Vamos repetir esse processo novamente, mas agora com os segmentos **J**, **L**, **C**, **D**, **E**; **L**, **K**, **C**, **D**, **E** e **K**, **B**, **C**, **D**, **E**. Poderemos fazer quantas iterações desejarmos. A Figura 18, que segue, mostra três iterações.

Figura 12 – Curva de Koch concluída.



Fonte: Da autora, baseado em Macedo e Franco.

A partir da construção do fractal Curva de Koch foi proposta a seguinte atividade de exploração do fractal:

Após ter construído no Geogebra a Curva de Koch, preencha o quadro que segue, que é uma atividade modificada de Gomes (2007), tomando como base o segmento inicial de comprimento c:

Quadro 2 – Atividade sobre a Curva de Koch.

Ilustração	*Número de iterações realizadas*	*Número de segmentos*	*Comprimento de cada segmento*	*Comprimento total da Curva*
	0			
	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
	...			

Fonte: Da autora, adaptado de Gomes (2007).

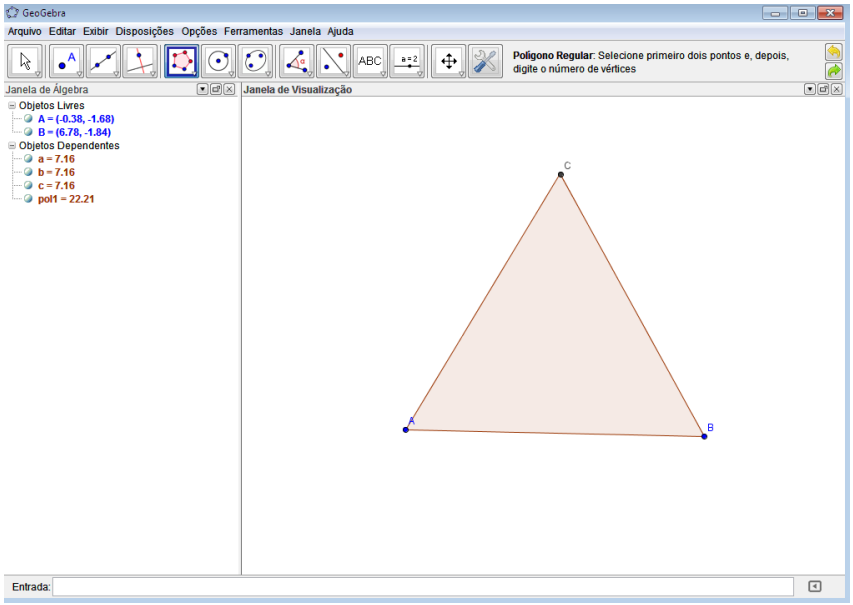
Atividade 4: Construção da Ilha de Koch ou Floco de Neve com o *software* Geogebra

A Atividade 4 foi proposta com o objetivo identificar a regra utilizada na construção do fractal de modo a estabelecer relações com o Floco de Neve construído anteriormente. Além deste, constituíam objetivos retomar os conceitos similares ao da Atividade 3 agora aplicados em contexto diferenciado, bem como usar a álgebra nas generalizações exigidas.

Apresentamos assim, a imagem projetada do fractal Floco de Neve e os alunos imediatamente foram encontrando semelhanças com o fractal anteriormente trabalhado. Discussões surgiram acerca dos passos necessários para a construção. Mostraremos os passos adotados por grande parte dos alunos.

- Construa um triângulo equilátero usando a ferramenta polígono regular:

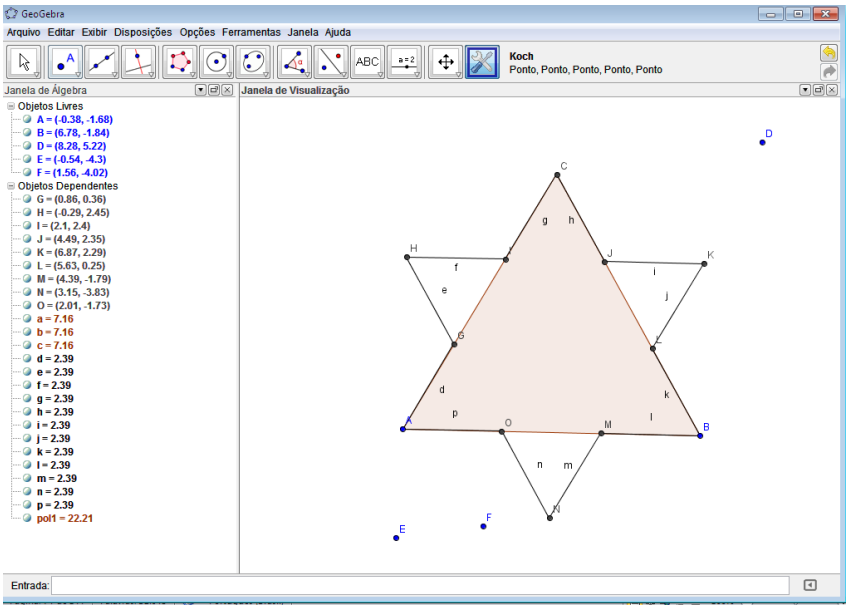
Figura13 - Ponto de partida para a construção da Ilha de Koch.



Fonte: Interface do *software* Geobebra.

- Realizar a primeira iteração com a mesma ferramenta construída anteriormente para a Curva de Koch:

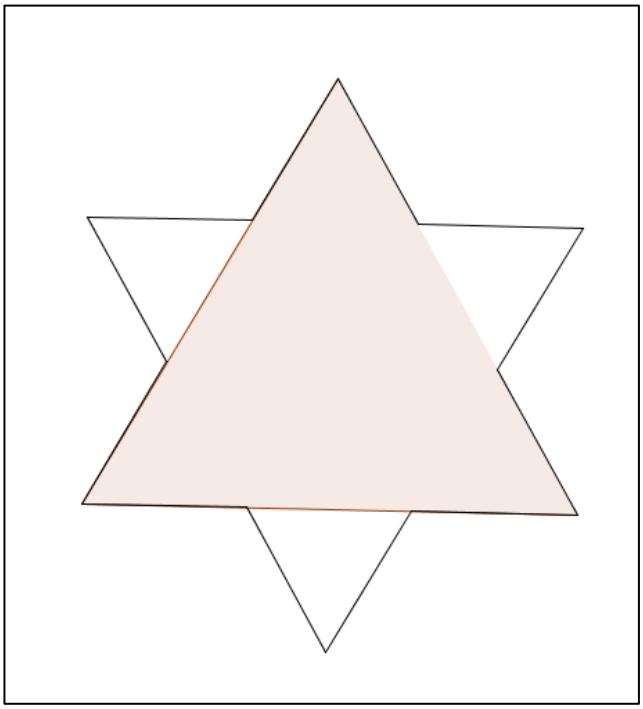
Figura 14 - Primeira iteração da Ilha de Koch.



Fonte: Interface do *software* Geogebra.

- Para ocultar os pontos e nomes dos segmentos basta clicar com o botão do direito do *mouse* e escolher a opção EXIBIR RÓTULO.

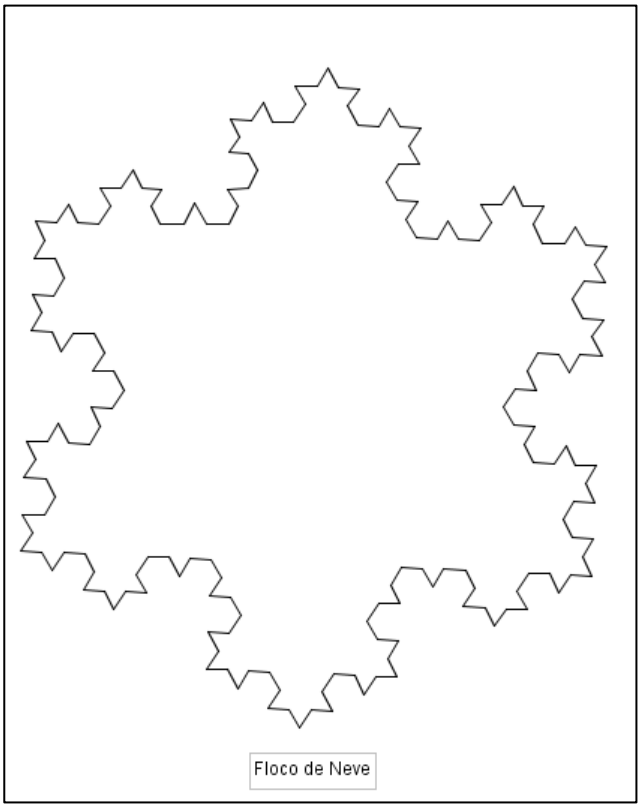
Figura 15 – Ilha de Koch com objetos ocultos.



Fonte: Interface do *software* Geogebra.

Desse modo, segue-se realizando quantas iterações desejar.

Figura 16 – Fractal Floco de Neve construído após três iterações.



Fonte: Interface do Geogebra

Concluída a construção da Ilha de Koch no Geogebra, foram distribuídas aos alunos as seguintes questões:

Explorando o fractal Floco de Neve com atividades baseadas em Barbosa (2005):

1) Contagem dos segmentos:

a) *Quantos lados tem a figura inicial do fractal? Suas medidas são iguais? Por quê?*

_____

_____

_____

_____

b) *Após realizada a primeira iteração, quantos segmentos passou a ter cada um dos seus lados?*

_____

_____

c) *E a figura toda passou a ter quantos segmentos?*

_____

_____

d) *Após a segunda iteração, cada um dos segmentos passou a ser substituído por quantos? Ficando agora a figura com que total de segmentos?*

_____

_____

_____

e) *Seguindo este mesmo raciocínio, como poderíamos representar o total de segmentos após três iterações? Quatro? Cinco? E após n iterações?*

_____

_____

_____

_____

2) Perímetro: considerando o comprimento do lado do triângulo inicial como c responda:

a) *Qual o perímetro do triângulo inicial?*

_____

_____

b) *Após a primeira iteração, cada segmento resultante passou a medir que parte do segmento inicial c?*

_____

_____

c) *Então como podemos expressar o perímetro neste nível?*

_____

_____

d) *De quanto foi este aumento em relação ao nível anterior?*

_____

_____

e) Se continuarmos a realizar as iterações o que acontecerá com o valor do perímetro do Floco de Neve?

_____

_____

Atividade 5: Construção do Triângulo de Sierpinski com o *software* Geogebra

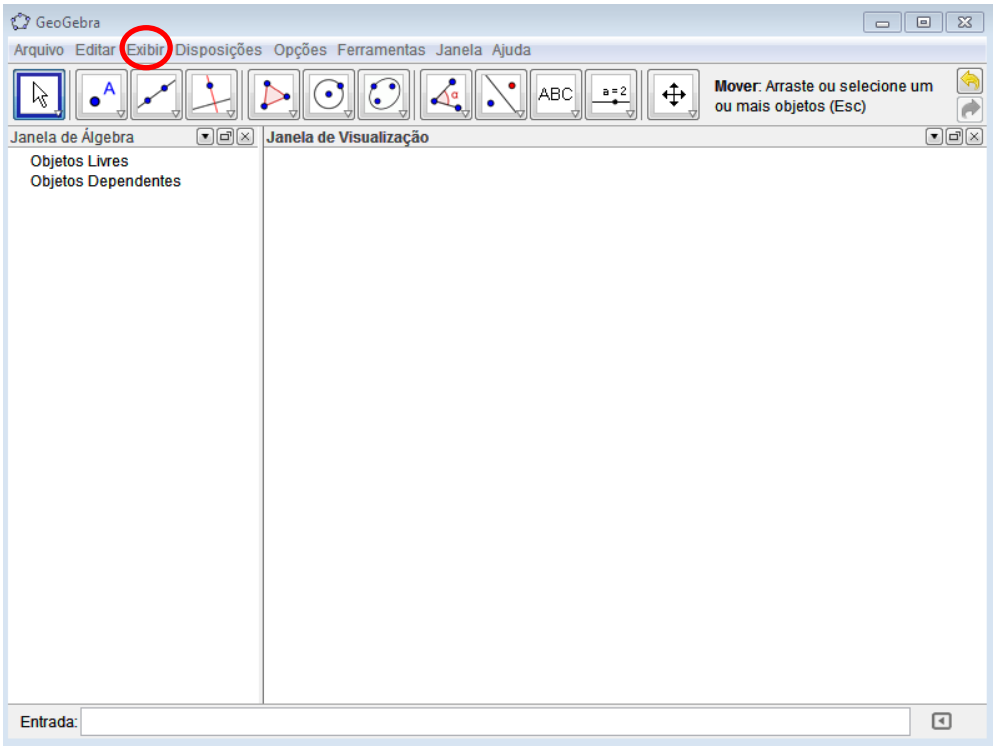
Esta atividade foi elaborada com a intenção de que os alunos identificassem a regra utilizada na construção do fractal e o construíssem. Também pretendia-se que eles consolidassem conceitos de perímetro, área, classificação de triângulos, porcentagem e fizessem uso da álgebra nas generalizações.

Assim, apresentamos a imagem projetada do Triângulo de Sierpinski para os alunos em *slides* e os questionamos sobre qual foi o ponto de partida para sua construção, bem como sobre quais procedimentos foram utilizados para sua construção.

Disponibilizamos um tempo para que os alunos investigassem procedimentos para a construção do fractal em questão tendo disponíveis as ferramentas do *software* em uso. Explicitaremos um roteiro semelhante ao adotado por muitos alunos após várias tentativas.

- Abrir uma janela no Geogebra e esconder os eixos e a malha quadriculada, caso estejam visíveis, clicando em exibir eixos e malha.

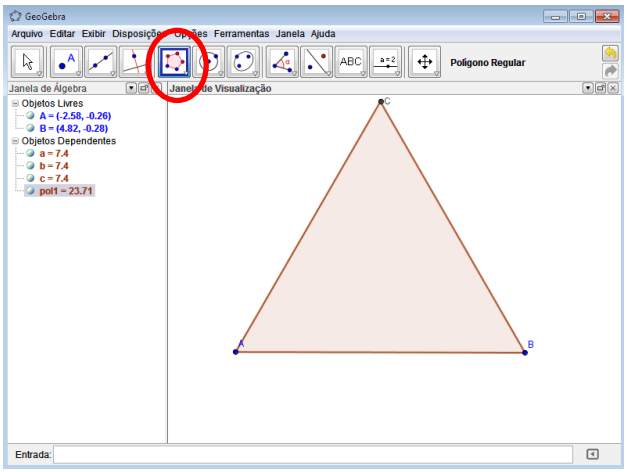
Figura 17 – Interface do Geogebra com eixos e malha ocultos.



Fonte: Interface do *software* Geogebra.

- Construir um triângulo equilátero utilizando o quinto ícone.

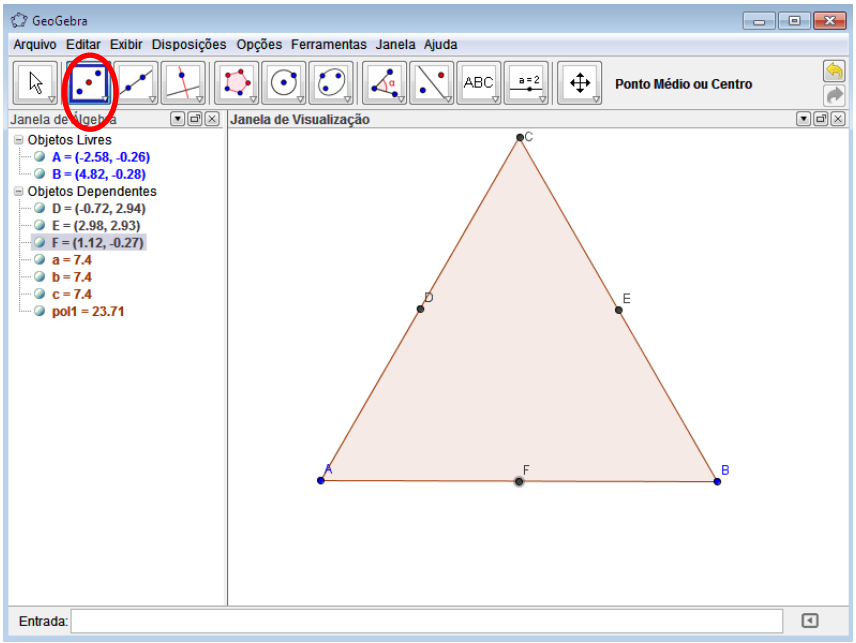
Figura 18 – Triângulo equilátero construído no Geogebra.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Em seguida marcar os pontos médios utilizando o 2º ícone.

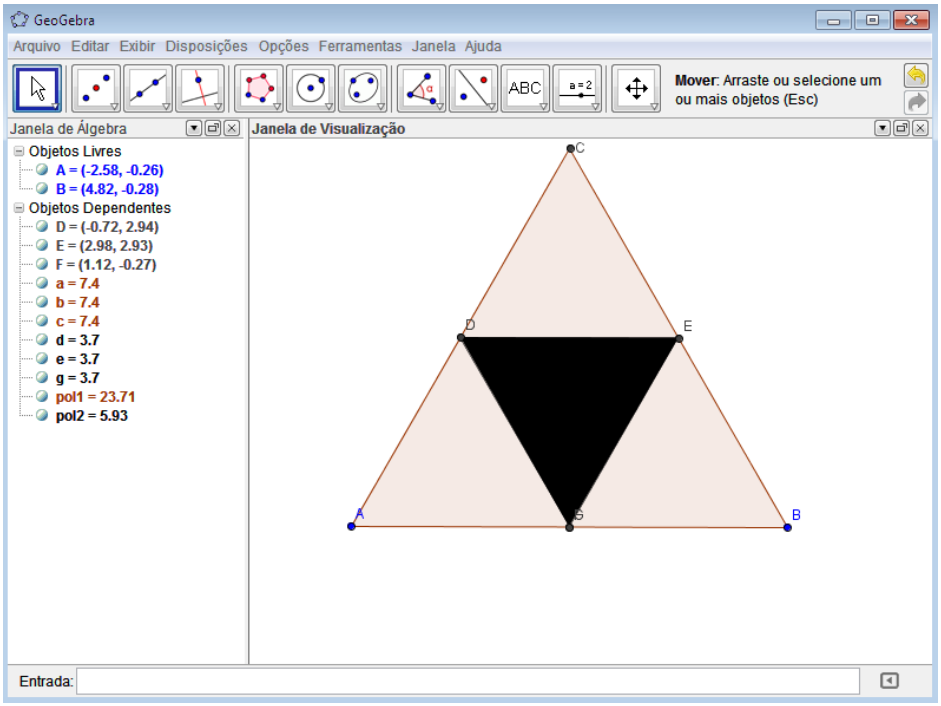
Figura 19 – Identificação dos pontos médios dos lados do triângulo.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Agora construir um novo triângulo equilátero que tenha como base os pontos médios do triângulo feito no princípio.

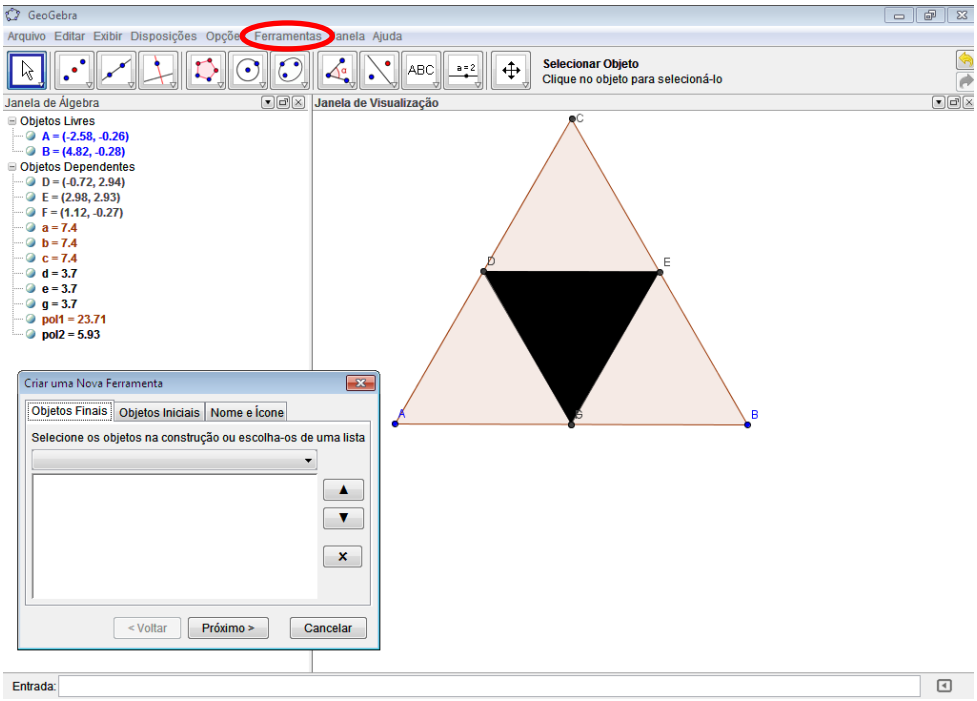
Figura 20 – Triângulo construído tendo como base os pontos médios.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Desconsiderar o triângulo central que será pintado de uma cor diferenciada a fim de termos nossa primeira iteração. Esse processo deve ser repetido marcando-se o ponto médio de cada um dos lados dos demais triângulos. Em seguida, unir os segmentos e desconsiderar o triângulo do meio e assim, sucessivamente. Para isso, utilizaremos a criação de uma nova ferramenta na interface do Geogebra que nos facilitará essa repetição. Ela se encontra no ícone **Ferramentas- criar nova ferramenta** e, sendo utilizada, abrirá uma nova aba na tela, conforme Figura 21.

Figura 21– Visualização da janela "Ferramenta" aberta.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

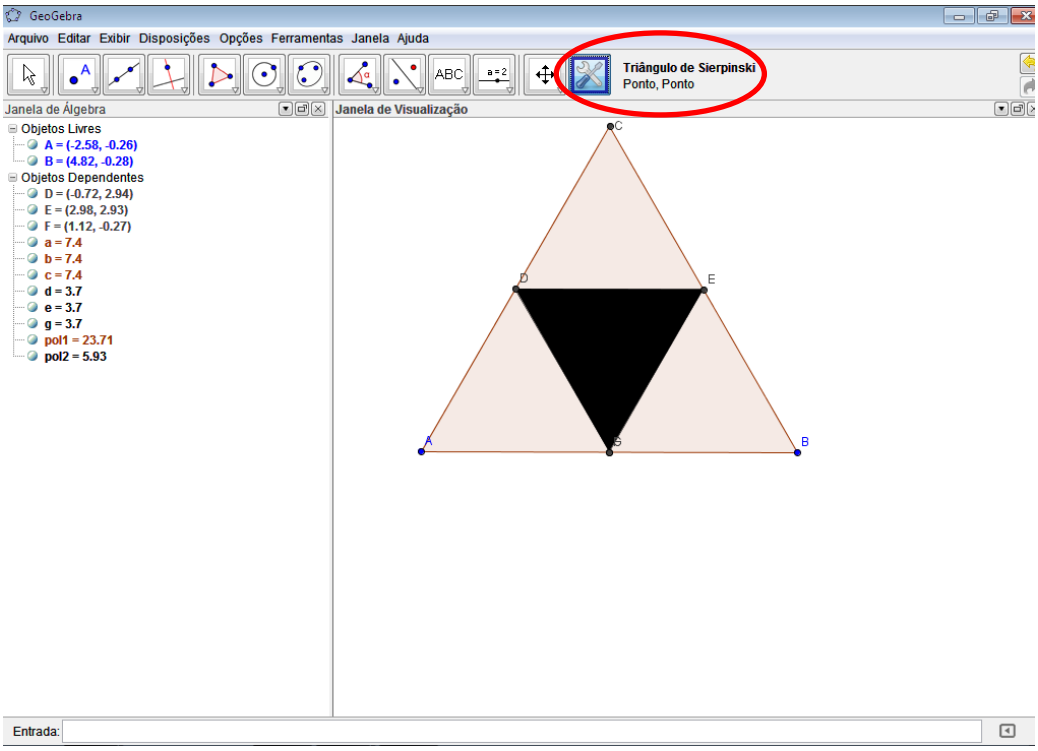
<u>Objetos finais</u>: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros. No nosso caso são os segmentos d, e, e f. Para inseri-los na construção, basta clicar sobre esses objetos com o botão esquerdo do *mouse*.

<u>Objetos iniciais</u>: são objetos que foram informados inicialmente dos quais depende toda a construção. No nosso exemplo, correspondem aos pontos **A** e **B**. Esses objetos automaticamente aparecem em objetos iniciais.

<u>Nome e ícone</u>: nome dado, conforme desejado, ao novo ícone para a ferramenta. Após clicar em concluído irá aparecer um novo ícone com a

ferramenta construída. Para utilizá-la, iremos clicar no ícone com o nome dado e nos pontos desejados.

Figura 22 – Ferramenta construída com êxito.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

Depois de criada a macroferramenta, fica muito fácil fazer quantas iterações desejarmos. Após propor a realização da seguinte atividade:

1) *Responda:*

a) *Qual foi a figura que você teve como ponto de partida para a construção do Triângulo de Sierpinski? Quais são suas caraterísticas?*

_____

_____

_____

b) *Como podemos generalizar a medida do comprimento do lado da figura inicial?*

_____

_____

c) *Como expressar seu perímetro?*

_____

_____

d) *Quantos triângulos você ignorou em cada etapa?*

_____

_____

e) *Existe alguma regra ou fórmula para expressar o total de triângulos ignorados? Qual?*

_____

_____

f) *Quantos triângulos restam em cada iteração? O que eles representam?*

_____

_____

_____

g) *Existe uma regra ou fórmula para expressar quantos triângulos são considerados em cada iteração? Qual?*

_____

_____

Agora preencha os dados no quadro modificado de Gomes (2007):

Quadro 3 – Atividade que explora o Triângulo de Sierpinski.

Iteração	***Número de triângulos***	***Comprimento do lado***	***Perímetro de cada triângulo***	***Perímetro total***
0				
1				
2				
3				
...				
N				

Fonte: Produção da autora, adaptada de Gomes (2007).

2) *O que você observa que acontece com perímetro total à medida que aumentam as iterações? Esse valor tende a quê?*

_____

_____

_____

3) *Se considerarmos que o triângulo inicial possui área* x*, cada novo triângulo gerado na primeira iteração terá que área?*

_____

_____

4) *E após a segunda iteração cada novo triângulo terá qual área?*

_____

_____

5) *Na sequência, após a terceira iteração, cada novo triângulo terá área igual a*

_____

6) *Agora organizaremos esses dados num quadro modificado de Gomes (2007):*

Quadro 4 – Continuação da exploração do Triângulo de Sierpinski.

Iteração	***Número de triângulos***	***Área de cada triângulo***	***Área total***
0			
1			
2			
3			
...			
N			

Fonte: Quadro da autora, adaptado de Gomes (2007).

7) *O que você observa que acontece com a área total à medida que aumentam as iterações? Esse valor tende a quê?*

_____

_____

8) *Considerando a área do triângulo inicial como referência responda:*

a) *Qual a porcentagem que a área do triângulo inicial representa?*

_____

_____

b) *Que porcentagem representa cada triângulo resultante da primeira iteração?*

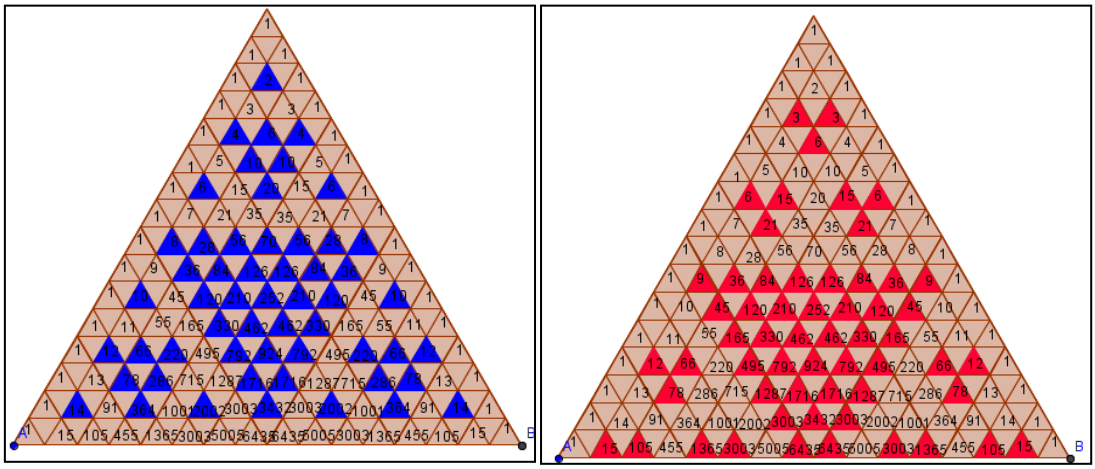
_____

_____

Atividade 6: Relação entre o Triângulo de Sierpinski e o de Pascal no Geogebra (Baseada em Barbosa, 2005)

Pesquisar sobre o Triângulo de Pascal e sua relação com o Triângulo de Sierpinski e apresentar o que foi encontrado para os demais colegas da turma. Construir o Triângulo de Pascal sobre o de Sierpinski no Geogebra com procedimentos semelhantes aos já descritos anteriormente. A única adequação necessária deve ser feita na macroferramenta criada de forma que ela não pinte a parte que, no Triângulo de Sierpinski retirávamos, e apenas divida em novos triângulos com base no ponto médio dos lados. Divididos em grupos, cada um é responsável por pintar de cor diferenciada os múltiplos de dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez. A partir da observação descobrir se a configuração de cada múltiplo forma ou não uma estrutura fractal. Vejamos na Figura 23 como ficaram os múltiplos de dois e três.

Figura 23 – Fractais Múltiplos de Dois e de Três.



Fonte: Interface do Geogebra.

Explorar com os alunos os padrões existentes em cada múltiplo, os critérios de divisibilidade adotados ou não em cada grupo questionando quando eles são úteis facilitando o processo e quando não auxiliam sendo mais rápido realizar o cálculo.

Atividade 7: Carpete de Sierpinski no Geogebra

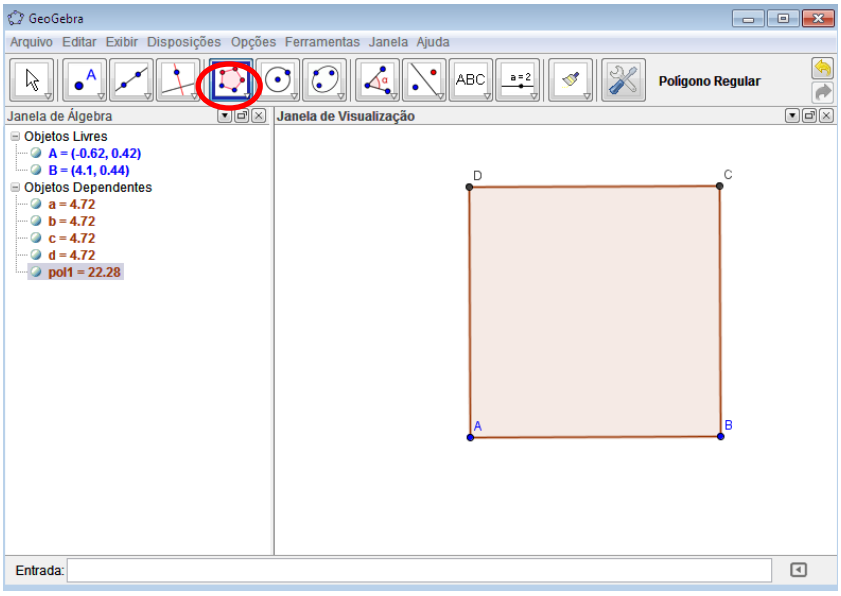
A realização da Atividade 7 tinha como objetivo identificar a regra de construção do fractal e construí-lo fazendo uso dos conhecimentos geométricos intrínsecos no processo, como a divisão do segmento em três partes iguais, o ponto de partida com o quadrado e sua área após cada iteração. Novamente o uso da álgebra, da potenciação e dos números racionais nas generalizações era um propósito.

A imagem do Carpete de Sierpinski foi projetada para os alunos e eles foram questionados sobre qual foi o ponto de partida para sua construção e quais procedimentos foram utilizados para ele se apresentar dessa forma.

Descreveremos um roteiro adotado por um número significativo de alunos:

- Construir um quadrado utilizando o quinto ícone.

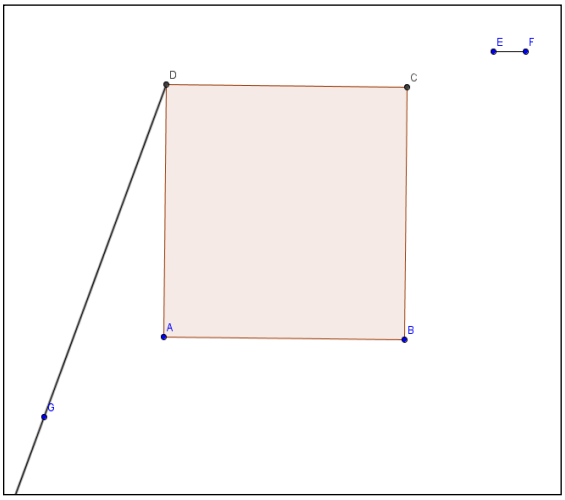
Figura 24 – Quadrado construído no Geogebra.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Dividir um dos lados do quadrado em três partes iguais. Para isso adotaremos os mesmos procedimentos feitos quando dividimos o segmento na Curva de Koch. Num outro local da tela, construir outro segmento de reta para ser nossa unidade de medida. Construir uma semirreta do ponto **D**, de qualquer tamanho.

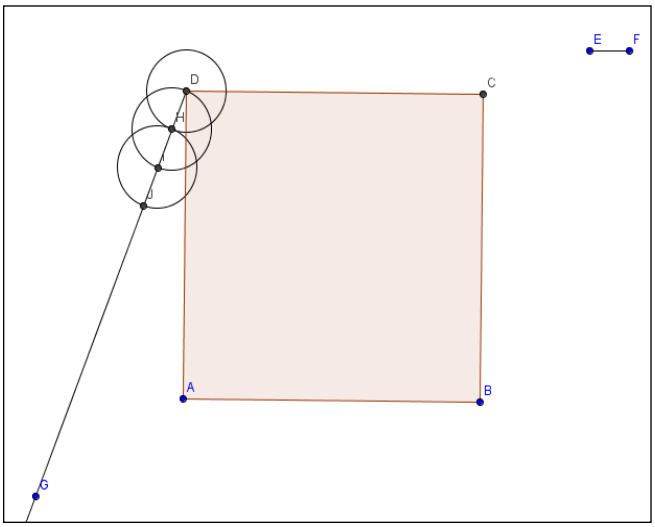
Figura 25 – Sequência da construção do Carpete de Sierpinski.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Agora marcar na semirreta três segmentos de mesmo tamanho utilizando a nossa unidade, a partir do ponto **D**. Para isso, construir uma circunferência de centro em **D** e raio e, conforme instruções constantes no 6º ícone – círculo, dados, centro e raio - e marcar a intersecção de dois objetos (circunferência e semirreta – 2º ícone). Repetir o processo mais duas vezes, centrando o círculo na intersecção. Marcar o ponto de interseção da semirreta auxiliar com a última circunferência construída.

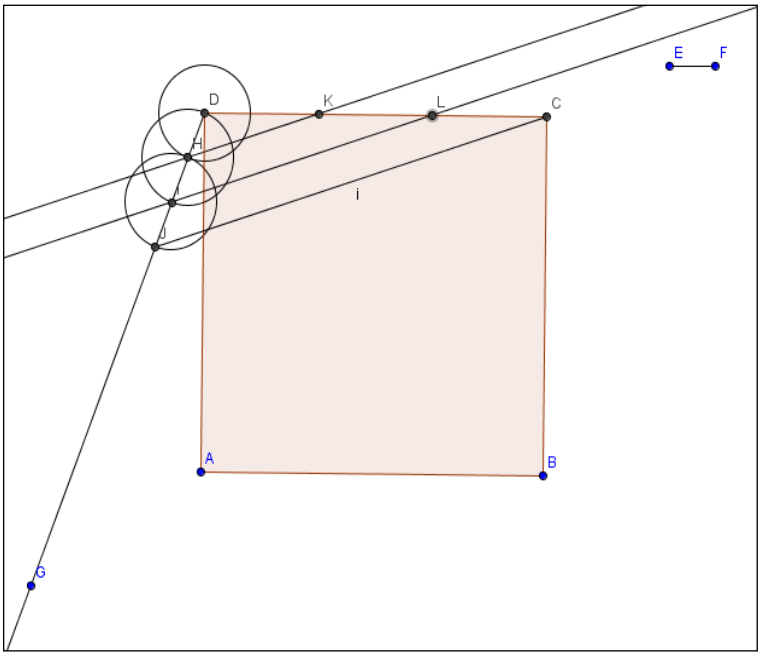
Figura 26 – Circunferências sobre a semirreta.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Traçar o segmento de reta g (3º ícone), passando pelos pontos **J** e **C** e paralelas a i passando pelos pontos de intersecção **I** e **H** de acordo com as instruções do 4º ícone (retas paralelas). Encontrar o ponto de intersecção entre o segmento c – lado do polígono - e as paralelas que passam por **I** e **H**. Observar a divisão do segmento em três partes congruentes.

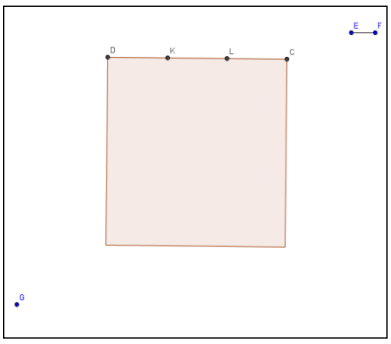
Figura 27 – Retas paralelas na construção.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Para esconder os objetos que aparecem durante a construção, basta clicar com o botão direito do *mouse* sobre o objeto e em exibir objeto. Se quiser esconder os nomes dos objetos, clicar em exibir rótulo.

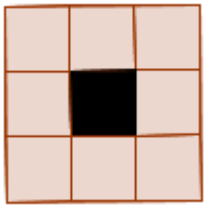
Figura 28 – Construções auxiliares ocultas.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Construir um polígono regular de quatro lados - quadrado - com o uso do quinto ícone dados os pontos **K** e **D,** na sequência outro com os pontos **C** e **L**. Continuar construindo quadrados até preencher todo o espaço interno do quadrado inicial. Para representar a remoção do quadrado central, pintar de uma cor diferente.

  Figura 29 – Carpete de Sierpinski,1ª Iteração

  Fonte: Interface do Geogebra.

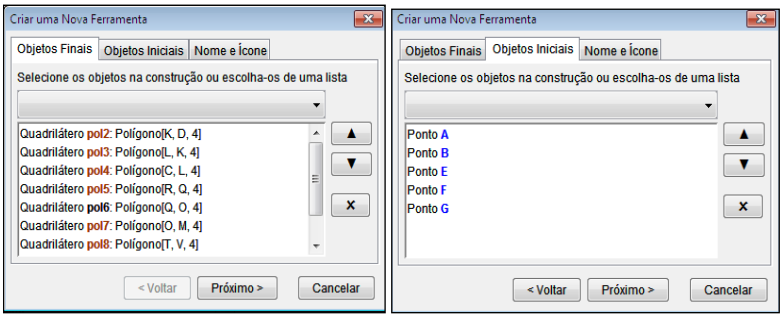
- Temos assim concluída a primeira iteração. Para realizar as demais, criaremos uma ferramenta para evitar muitas repetições de procedimentos longos. Para isso iremos em **ferramenta - criar nova ferramenta -** abrindo com isso uma nova aba na tela, conforme Figura 29.

  Objetos finais: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros. No nosso caso, são os polígonos 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9 e 10. Para inseri-los na construção, basta clicar numa flecha dentro da aba aberta e selecioná-los.

  Objetos iniciais: são objetos que foram informados inicialmente dos quais depende toda a construção. No nosso exemplo correspondem aos pontos **A** e **B**. Esses objetos automaticamente aparecem em objetos iniciais.

  Nome e ícone: nome dado o novo ícone com a ferramenta conforme desejado. Após a nomeação, clicar em concluído. Irá aparecer um novo ícone com a ferramenta construída. Para utilizá-la, clicar no ícone com o nome dado e nos pontos desejados.

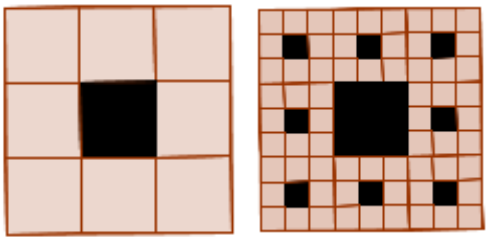
Figura 30– Janela “Ferramenta” aberta.



Fonte: Interface do *software* Geogebra.

- Podemos realizar quantas iterações desejarmos.

Figura 31 – Iteração 1 e 2 do Fractal Carpete de Sierpinski.



Fonte: Interface do Geogebra.

Atividade proposta para explorar conhecimentos relativos à construção do fractal carpete de Sierpinski:

Atividade posterior à construção do Carpete de Sierpinski:

1) *Qual figura foi o ponto de partida para construção do fractal?*

_____

_____

2) *Quantas peças quadradas surgem:*

- *Na iteração zero:*_____
- *Na primeira iteração:*_____
- *Na segunda iteração:*_____
- *Na terceira iteração:*_____
- *Na enésima iteração:*_____

3) *Como sabermos quantas peças quadradas surgirão após a quinta iteração?*

_____

_____

4) *Complete o quadro, modificado de Gomes (2007), considerando como medida do lado do quadrado inicial c:*

Quadro 5 – Atividade sobre Fractal Carpete de Sierpinski.

Iteração	*Número de quadrados*	*Comprimento do lado de cada quadrado*	*Área de cada quadrado*	*Área total*
0				
1				
2				
3				
N				

Fonte: Quadro produzido pela autora, sendo modificado de Gomes (2007).

Atividade 8: Criação de fractais com uso do *software* Geogebra

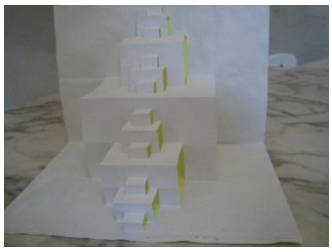
A Atividade foi proposta a fim de desafiar os alunos a criar um fractal utilizando os recursos disponíveis pelo *software* Geogebra e apresentá-lo para a turma explicando as características que o definem como fractal.

Atividade 9: Construção de cartões fractais (Atividades que tiveram como base trabalho apresentado por Almeida *et al* (s/d).

A construção do cartão Degraus Centrais foi proposta a fim de diversificar os recursos em uso na abordagem do conteúdo que vem sendo desenvolvido. Assim, espera-se que os alunos consigam identificar o padrão fractal no cartão, as figuras geométricas que surgem em cada iteração com as respectivas quantidades.

A) Cartão Degraus Centrais

Figura 32 – Cartão Degraus Centrais construído pelo aluno A2.



Fonte: Aluno A2.

Passos para construção do cartão:

- Pegue uma folha de tamanho A4.
- Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura.
- Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos a uma distância x das extremidades da folha, de altura $\frac{a}{2}$. Observe que: $2\ X\ \frac{x}{4}\ X\ \frac{x}{2}$
- Dobre o retângulo formado para cima, fazendo um vinco na dobra.
- Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro da figura em relevo. Pode-se dizer que esta é a primeira iteração do cartão fractal.
- Dobre novamente, pois as iterações serão obtidas seguindo os mesmos passos de 3 a 5, porém em uma escala menor, apenas na região dobrada.
- Dobre o retângulo para cima, fazendo um vinco na dobra.
- Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a figura em relevo. Neste momento, temos a primeira e a segunda iteração do cartão fractal.
- Para obter mais iterações, repita esse processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel, sempre usando a regra de corte estabelecida no passo 3. Por fim, desdobre os recortes e puxe as figuras em relevo.

Concluída a construção do cartão fractal propor a realização da seguinte atividade:

Atividade posterior à construção do Cartão Fractal Degraus Centrais:

1) *Que propriedades dos fractais podemos visualizar no cartão fractal construído?*

_____

_____

2) *Que formas geométricas resultaram dos cortes e dobraduras?*

_____

_____

3) *O que acontece após cada iteração realizada?*

_____

_____

4) *Qual o volume do paralelepípedo da primeira iteração?*

_____

5) *Complete o quadro:*

Quadro 6 – Atividade sobre cartão Fractal Degraus Centrais.

Iteração	*Número de paralelepípedos novos*
0	
1	
2	
3	
4	
...	...
N	

Fonte: Da autora, baseado em Almeida et al. (s/d).

B) Cartão Triângulo de Sierpinski

Elaborada no mesmo modelo da atividade anterior, a Atividade 9 B tinha como intenção que os alunos identificassem as formas geométricas resultantes dos cortes e dobraduras e que conseguissem fazer uso da potenciação para expressar a quantidade de novos paralelepípedos a cada iteração, fazendo, em seguida, a respectiva generalização.

Passos para a construção do Cartão Triângulo de Sierpinski:

- Pegue uma folha de tamanho A4.

- Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura.
- Com a folha dobrada ao meio, marque o ponto médio na parte dobrada de largura x e faça um corte vertical de altura y qualquer.
- Dobre um dos retângulos formado para cima, fazendo um vinco na dobra.
- As gerações seguintes serão obtidas nos dois retângulos formados no cartão, aplicando a mesma regra do passo 3. Note que os retângulos possuem $\frac{x}{2}$ de base, logo os cortes verticais em seus pontos médios devem ter altura a $\frac{y}{2}$.

De forma a explorar o fractal construído, propor a realização da seguinte atividade:

Atividade posterior à construção do cartão Triângulo de Sierpinski:

1) *Que formas geométricas resultaram dos cortes e dobraduras?*

_____

_____

2) *O que acontece após cada iteração realizada?*

_____

_____

3) *Complete o quadro:*

Quadro 7 – Atividade sobre Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

Iteração	*Número de paralelepípedos novos*
0	
1	
2	
3	
4	
...	...
N	

Fonte: Da autora, baseado em Almeida et al. (s/d).

Atividade 10: Construção de fractais com sólidos geométricos baseados em Souza (2010)

A Atividade 10 A foi planejada com o intuito de os alunos estabelecerem relações entre a figura plana e o sólido tridimensional. Era exigência que encontrassem um valor para a

área de cada fractal no final de diferentes iterações e comparassem os resultados encontrados de modo a elaborarem suas conclusões sobre o que acontece com tais valores.

Propor a realização da construção do Fractal em grupos, pois individualmente ela torna-se muito trabalhosa:

A) Tetraedro de Sierpinski

Figura 33- Imagem de fractais construídos pelos alunos A6, A7, A14, A8, A9, A18, A11 e A13

Iteração 1 Iteração 0 Iteração 2

Em grupos, propor que os alunos imaginem como seria construir no espaço o Triângulo de Sierpinski.

Obtido a partir de um tetraedro, este fractal é uma variação do Triângulo de Sierpinski no espaço.

- Construir um tetraedro;
- A partir dos pontos médios de cada aresta obter cinco novos tetraedros semelhantes ao tetraedro original;
- Retirar o tetraedro central;
- Repetir os passos anteriores para os tetraedros anteriores e assim sucessivamente.

Concluída a construção, propor a realização da seguinte atividade:

Atividade posterior à construção do Tetraedro de Sierpinski:

1) *Qual é a área do tetraedro inicial?*

_____

_____

2) *Quantos tetraedros foram gerados a partir da primeira iteração? Qual é a área de cada um deles?*

_____

_____

3) *Como poderíamos escrever esse valor genericamente?*

_____

_____

4) *E a área total após a primeira iteração? Compare esse valor com a área inicial e justifique porque isso acontece.*

_____

_____

_____

5) *Quantos tetraedros foram gerados a partir da segunda iteração? Qual á área de cada um deles?*

_____

_____

_____

6) *E a área total após a segunda iteração? Compare esse valor com a área inicial e explique por que isso acontece.*

_____

_____

_____

B) Esponja de Menger

De maneira similar à anterior, esta atividade foi proposta com o intuito de que os alunos estabelecessem relações entre a figura plana, referindo-se ao Carpete de Sierpinski, e o sólido tridimensional confeccionado. Também foi objetivo da atividade proposta que os alunos fizessem uso da potenciação, dos números racionais e da álgebra nas generalizações exigidas e em contexto diferenciado dos anteriores. Aliado a isso, a retomada do conceito de volume era um propósito da atividade.

Inicialmente levamos para a escola um grande cubo e pedimos que os alunos sugerissem como poderíamos construir um fractal no espaço, de modo que cada face do cubo

se parecesse com um Carpete de Sierpinski, que é então denominado Esponja de Menger e foi criado por Karl Menger (1902-1985)

Questionamos os alunos sobre quantos cubos e de que medida deve ser a aresta que precisamos para obtermos a primeira iteração. Cada aluno construiu um cubo de razão $\frac{1}{3}$, totalizando 27 cubos. Em seguida, retirou-se os cubos centrais de cada uma das faces e o cubo central. Para repetir esses passos em cada um dos cubos restantes cada aluno fez uma parte.

Após o término da construção do fractal, foi proposta a seguinte atividade:

Atividade posterior à construção da Esponja de Menger:

1) *Complete o quadro:*

Quadro 8 – Atividade sobre Fractal Esponja de Menger.

Iteração	*Aresta de cada cubo*
0	
1	
2	
3	
...	...
n	

Fonte: Da autora, baseado em Souza (2010).

2) *Preencha o quadro:*

Quadro 9 – Continuação da Atividade sobre o Fractal Esponja de Menger.

Iteração	*Número de cubos retirados*	*Número de cubos restantes*	*Aresta de cada cubo*	*Volume total do fractal*
0				
1				

2				
3				

Fonte: Quadro produzido pela autora, baseado em Souza (2010).

3) *O que você observa que está acontecendo com o volume do fractal à medida que aumentam as iterações?*

RESULTADOS OBTIDOS:

O uso do recurso computacional trouxe significativas contribuições ao desenvolvimento de nossa proposta. Com uma interface de fácil entendimento, o *software* Geogebra ofereceu condições para que os alunos manipulassem os diferentes componentes das figuras construídas permitindo a exploração e realização de conjecturas de forma a embasar a construção de conceitos geométricos e algébricos. A possibilidade de visualizar os diferentes níveis de cada fractal, mesmo após terem concluído a construção proporcionando uma espécie de *feedback*, foi outra vantagem da utilização desse recurso.

A precisão das medidas ao passo que as iterações fractais iam aumentando foi outra das contribuições obtidas com o *software* Geogebra. Manualmente, com uso de recursos convencionais como régua e compasso, fazer medições em intervalos de espaço muito pequenos é uma tarefa que requer muita habilidade. Assim, o ambiente computacional proporcionou exatidão aos traçados e otimizou o tempo gasto que desprenderíamos com o fazer manual dos fractais.

A exploração da geometria fractal encantou e desafiou os alunos possibilitando estabelecer relações entre o referido conteúdo e os elementos da natureza que os rodeiam. A apreciação à beleza presente nas figuras fractais despertou interesse e os motivou a empenharem-se na realização das atividades propostas, sem que isso significasse algum descaso aos conhecimentos matemáticos envolvidos no processo.

Contemplar os aspectos harmoniosos e observar as regularidades nas próprias irregularidades de cada fragmento fractal permitiu que os alunos percebessem o condicionamento desses aos aspectos algébricos e geométricos favorecendo a exploração de tais conhecimentos. Desse modo, a generalização das regularidades observadas em cada

fractal contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos discentes. Percebemos uma evolução nos alunos na apropriação da simbologia algébrica nos registros e verbalizações realizadas. A abordagem à geometria fractal nesse caso foi um aspecto que facilitou o progresso observado, visto que tornou a aprendizagem prazerosa e significativa, vinculando a álgebra a questões reais e não a meros exercícios mecânicos.

A prática desenvolvida confirmou o que pensávamos anteriormente, ou seja, acrescentar a geometria fractal ao currículo escolar não deve ser associada à exclusão da geometria euclidiana, mas um complemento a ela. Estender a abordagem à geometria fractal além de ter proporcionado descobertas fascinantes e ampliado o campo de visão geométrico favoreceu o desenvolvimento de conteúdos típicos da geometria euclidiana como classificação de triângulos, quadriláteros, retas, semirretas, ponto, paralelismo, simetria, entre outros, reforçando assim essa fusão.

As construções fractais também possibilitaram o desenvolvimento intenso de conteúdos como área, volume, perímetro, potenciação e frações. Vinculados a estes, tivemos sempre presente a álgebra como forma de representarmos as diferentes generalizações. Apropriar-se de conhecimentos algébricos, nesse caso, facilitou o aprendizado, visto que não foram exercícios mecânicos. Era perceptível como os alunos faziam uso da álgebra de maneira natural, visto que compreendiam seu significado.

Dessa forma, esperamos que tenhamos contribuído no sentido de propormos e divulgarmos uma alternativa de abordagem da Geometria Fractal contemplando aspectos relevantes para o ensino da matemática e despertando o interesse de professores para a inserção do tema em suas aulas. Contudo, sabemos que esta é apenas uma, dentre tantas, alternativas possíveis de encaminhamento e reflexões a respeito do assunto.

REFERÊNCIAS/LEITURAS SUGERIDAS:

ALMEIDA, T. B.; MARTINELLI, R. O. M.; RODRIGUES, V. M.; SILVA, A. M. M. **Fractais no Ensino Fundamental: explorando essa nova geometria**. s/d. Disponível em: <http://www.leoakio.com/cariboost_files/fractais_20no_20ensino_20fundamental.pdf>. Acesso em: 15 de fev. 2012.

BARBOSA. R. M. **Descobrindo a geometria fractal - para a sala de aula**. 2ª ed. – Belo Horizonte: Autêntica. 2005.

CCAPITALIA. Disponível em: <http://www.ccapitalia.net/?cat=146>. Acesso em 14/02/2012.

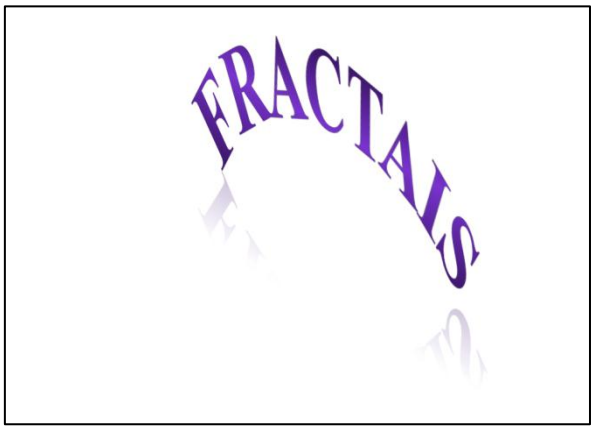
GOMES, A. S. **Motivação do estudo de áreas e perímetros de figuras geométricas através de fractais**. Monografia. Universidade Federal do Paraná. PR. 2007.

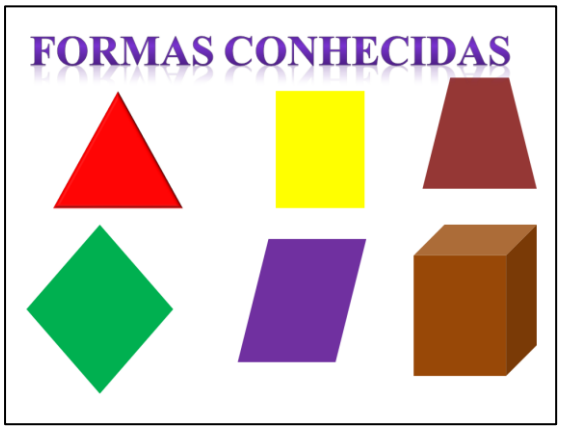
MACEDO, J. S. K.; FRANCO, V. S. Fractais – uma abordagem em sala de aula com o auxílio de softwares geométricos. s/d. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2204-6.pdf. Acesso em 20/04/2011>. Acesso em: 14 jul. 2011.

SOUZA, R. S. **Fractais geométricos**. Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de Alfenas. Alfenas. MG. 2010.

ZUCHI, I. A integração dos ambientes tecnológicos em sala: novas potencialidades e novas formas de trabalho. In: **2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática-2ºSIPEMAT**. De 28 de julho a 1 de agosto de 2008. Brasil, Recife, Pernambuco. Universidade Federal Rural de Pernambuco.

ANEXO I – *Slides* apresentados aos alunos para iniciar os fractais.





DEFINIÇÃO DE FRACTAL

J. Feder (apud, Barbosa 2005):

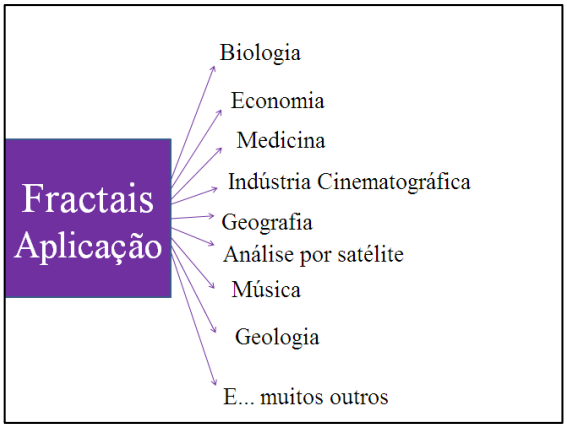
"Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos."

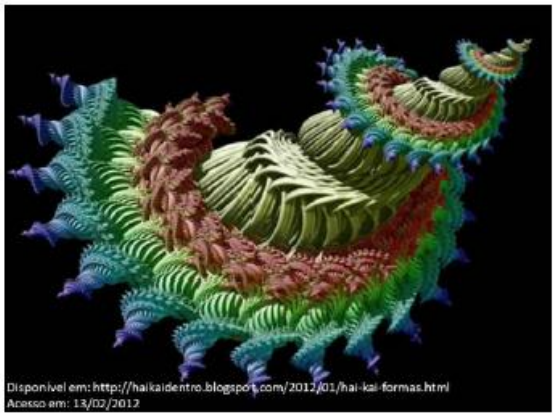
Dupond (apud, Borssoy, 2005)

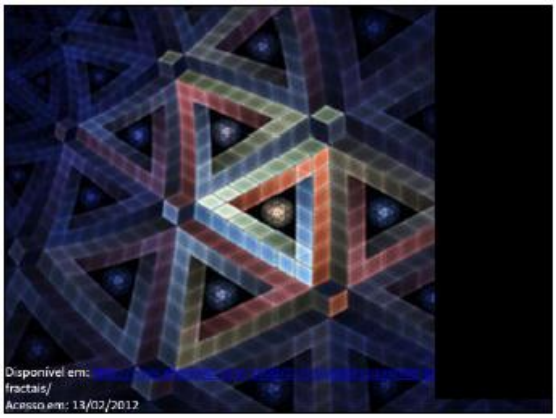
Fractais são objetos que apresentam auto-semelhança e complexidade infinita, ou seja, sempre contém cópias aproximadas ou não, de si mesmos e são gerados pela iteração de processos simples.

Benoit Mandelbrot, iniciador dos estudos sobre fractais afirma:

- "nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvores não são suaves nem o raio se propaga em linha reta."







FRACTAIS NA NATUREZA

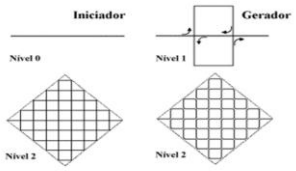
Imagens do slide anterior disponíveis em:

- 1) http://forum.antinovaordemmundial.com/Topico-universo-fractal-somos-fractais-assim-como-macro-%C3%A9-o-micro-matem%C3%A1tica-x-filosofia
- 2) http://triunphus.blogspot.com/2011/01/beleza-dos-fractais.html
- 3) http://meridianosparalelos.blogspot.com/2008/10/fractais.html
- 4) http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria.htm
- 5) http://eu-calipto.blogs.sapo.pt/13690.html
- 6) http://www.vidadeclaraluz.com.br/fofo_curio/foto_curio.asp
- Acesso em: 13/02/2012

ALGUNS FRACTAIS IMPORTANTES CONJUNTO DE CANTOR

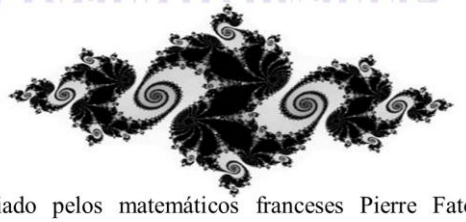
- Criado pelo matemático Georg Cantor (1845-1918) em 1883.
- É o conjunto de pontos (números) que permanecem após infinitas fases. (Barbosa, 2005)

CURVA DE PEANO



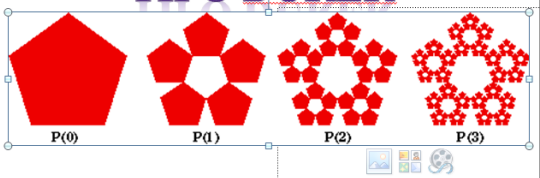
- Criada por Giusepe Peano (1858-1932) em 1890.
- Curva proposta como cobrindo totalmente uma superfície plana quadrangular.

CONJUNTO DE JULIA



- Criado pelos matemáticos franceses Pierre Fatou (1878-1929) e Gastou Julia (1893-1978).
- Julia desenvolveu sua pesquisa em um hospital após ter sido gravemente ferido como soldado perdendo seu nariz.

FRACTAL PENGONAL TIPO DÜRER



- Um dos primeiros artistas que criou objetos fractais em pentágonos regulares foi Albrecht Dürer (1471-1528).
- De forma semelhante temos o fractal hexagonal tipo Dürer.

REFERÊNCIAS

- **BARBOSA,** Ruy Madsen. Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula. Editora Autêntica. Belo Horizonte,2005.
- **BORSSOY**, J. A. Geometria fractal: alguns conceitos e aplicações. Universidade Estadual do Oeste do paraná. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática), 2005, 39p.