MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS E ALGÉBRICOS A PARTIR DA CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS COM USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Teresinha Aparecida Faccio Padilha

Lajeado, setembro de 2012

Teresinha Aparecida Faccio Padilha

CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS E ALGÉBRICOS A PARTIR DA CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS COM USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário Univates como parte da exigência para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Madalena Dullius
Coorientadora: Profa. Dra. Marli Teresinha Quartieri

Lajeado, setembro de 2012

Teresinha Aparecida Faccio Padilha

CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS E ALGÉBRICOS A PARTIR DA CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS COM USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

A Banca examinadora abaixo aprova a Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário Univates como parte da exigência para a obtenção do Grau em Mestra em Ciências Exatas.

____

Profa. Dra. Nilce Fátima Scheffer

____

Profa. Dra. Mirian Ines Marchi

____

Profa. Dra. Ieda Maria Giongo

____

Coorientadora Profa. Dra. Marli Teresinha Quartieri

____

Orientadora Profa. Dra. Maria Madalena Dullius

Setembro, 2012

DEDICATÓRIA

Em especial, ao meu pai Valdemar Faccio (*in memorian*),

à minha mãe Maria Iracema Faccio e

ao meu marido Leandro Soares Padilha.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que me permitiu trilhar este caminho e me iluminou nos momentos difíceis.

Ao meu marido pelo apoio e incentivo, especialmente, nos momentos em que mais precisei de sua ajuda e compreensão.

À minha dinda e “Fada Madrinha” Irene, que me deu suporte em meus primeiros passos da caminhada, acreditou em mim e me deu subsídios para continuar.

À minha orientadora Profa. Dra. Maria Madalena Dullius e à coorientadora Profa. Dra. Marli Teresinha Quartieri pelos ensinamentos, orientações e compreensão ao longo do trabalho.

Aos professores do Programa, que contribuíram significativamente para minha formação.

Aos professores e equipe diretiva da E.M.E.F Otto Gustavo Daniel Brands, que foram receptivos ao meu trabalho e me apoiaram quando precisei me ausentar em virtude de meus compromissos.

Ao grupo de professores, que, gentilmente, aceitou participar de minha pesquisa.

Enfim, a todos que me apoiaram e acreditaram em mim.

RESUMO

O presente estudo analisa uma proposta de construção de fractais no desenvolvimento de conteúdos matemáticos. Propusemos uma pesquisa qualitativa com o objetivo de investigar como a construção de fractais com o *software* Geogebra poderia suscitar conhecimentos geométricos e algébricos. Desenvolvemos uma intervenção pedagógica com alunos da 7ª série do Ensino Fundamental de uma escola municipal, e o material produzido pelos alunos constituiu-se na principal fonte de coleta de dados. Numa proposta de não unicidade do recurso computacional, também construímos cartões fractais e fractais tridimensionais. Finalmente, aplicamos um questionário onde os alunos fizeram considerações acerca da intervenção pedagógica. De acordo com as análises realizadas e tendo por base as respostas do questionário aplicado, a produção realizada pelos alunos e as observações registradas durante o desenvolvimento da intervenção pedagógica ficou evidenciado que: o trabalho contribuiu na obtenção de uma forma motivadora, interativa e viável da abordagem da Geometria Fractal; o *software* Geogebra foi importante ferramenta de apoio na construção dos fractais; a Geometria Fractal é uma possibilidade interessante de associarmos a geometria e a álgebra numa proposta diferenciada de forma a contemplar as duas áreas de conhecimento.

Palavras chave: Geometria. Álgebra Fractais. Geogebra.

ABSTRACT

This study examines a proposal of the construction of fractals in the development of mathematical contents. It is proposed a qualitative study aiming to investigate how the construction of fractals with the software Geogebra may raise algebraic and geometric knowledge. We developed an educational intervention with pupils from seventh grade of Elementary School of a public school, and the material produced by students constituted the main source of data collection. In a proposed non-uniqueness of the computational resource we also built fractal cards and threedimensional fractals. Finally, we applied a questionnaire where students made remarks about the educational intervention. According to the analyses done and based on the answers of the questionnaire, the production made by pupils and observations recorded during the development of the educational intervention was evident that: the work helped in getting a motivating, interactive and feasible approach of fractal geometry; the software Geogebra was an important support tool in the construction of fractals; the fractal geometry is an interesting possibility of associating the geometry and algebra in a different proposal so to reflect the two areas of knowledge.

Keywords: Geometry. Algebra fractals. Geogebra.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho, vinculado ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário Univates e alicerçado em estudos acerca dos fractais[1] e da importância da inserção de recursos computacionais no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, visa investigar uma abordagem alternativa para o ensino da Geometria Fractal, utilizando o *software* Geogebra como ferramenta de apoio.

A motivação de trabalhar com a geometria surgiu com a percepção do quão ela permeia o mundo em que vivemos. Nela, a arquitetura busca bases para o que é possível ser construído; a pintura e as esculturas seguem seus princípios de proporção e simetria; as escalas musicais e composições a conservam em sua natureza constitutiva. Ela também se faz presente nas dimensões de um campo de futebol, no formato de uma bola, em diagramações, num tripé de sustentação, corte de costura, banco, mesa. Enfim, são inúmeras as situações do cotidiano nas quais podemos observar a aplicabilidade da geometria, além da mesma ser prerrequisito ao exercício de muitas profissões.

O domínio de competências e habilidades relacionadas à geometria é indispensável, visto que elas podem instrumentalizar os discentes para superar desafios que surgem no dia a dia e prepará-los para a atuação em inúmeras áreas no mercado de trabalho. Entendemos por competência a definição dada por Perrenoud apud Antunes (2001, p.18) ”[...]: *competência em educação é a faculdade de mobilizar diversos recursos cognitivos* – inclui saberes, informações, habilidades operatórias e principalmente as inteligências – *para, com eficácia e pertinência, enfrentar e solucionar uma série de situações problemas*”.

1 Para fins de estudo, optamos pela definição dada por Barbosa (2005) que diz que os fractais são entes que constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes, sendo estas semelhantes , caracterizando assim a propriedade da autossimilaridade.

Integrando as explicitações feitas, percebemos, durante as aulas ministradas e em situações vivenciadas pelos alunos, uma imensa dificuldade ao se colocar em prática esse conteúdo. São frequentes os comentários, na sa1a de professores ou em reuniões pedagógicas, sobre o fato de os discentes não conseguirem manusear uma régua ou outro instrumento de medida ao traçarem o desenho de uma quadra de esportes, por exemplo, ou em outras atividades solicitadas que exijam tal habilidade. Assim, mesmo ciente de que o tema em questão já ser muito enfatizado em trabalhos de pesquisa acadêmica e fazer parte da realidade da pesquisadora, a exploração se fez necessária, haja vista a precariedade da aplicação desses conhecimentos.

Com o intuito de propor ações que pudessem contribuir com a superação das lacunas percebidas na aprendizagem dos alunos participantes desta investigação, pensou-se em utilizar um recurso computacional, tendo em vista as grandes transformações tecnológicas que acabam interferindo no meio educacional de forma inevitável.

Os grandes avanços tecnológicos invadem nossas casas através de vários aparelhos eletrônicos, bem como usufruímos de seus benefícios na área médica, farmacêutica, odontológica, entre tantas outras. Neste contexto, o professor não pode ser indiferente ao uso das tecnologias, sendo necessário pensar nas relações entre as evoluções, as competências intelectuais e a relação com o saber que a escola pretende formar (PERRENOUD, 2000).

O bombardeio de informações que chega até nós por diferentes meios a todo instante também é outra modificação pertinente nas relações sociais que se estabelecem atualmente. E, neste contexto, o computador é peça fundamental por nos possibilitar o ingresso a uma imensa quantidade de dados de forma muito rápida. Esse fato faz com que docentes reavaliem a memorização como fim prioritário no processo educativo, dando maior ênfase à capacidade de análise, seleção e produção. A facilidade de acesso a esse recurso tem aumentado consideravelmente e saber utilizá-lo para diferentes fins tem se tornado uma exigência do mercado de trabalho. Portanto, pensamos que usá-lo visando à qualificação do ensino não é somente uma estratégia didática, mas uma necessidade perante as novas exigências do âmbito social. Contudo, é preciso, como afirma Valente (1997), utilizar essa ferramenta de maneira inteligente. Por si só, ela não é garantia de qualidade educacional, mas, ao usufruir de suas potencialidades, poderemos propiciar significativas mudanças na educação.

Também percebemos o despreparo de muitos professores na utilização de diferentes formas de explorar esse recurso de maneira a não apenas informatizar o ensino e/ou substituir o papel pela tela computadorizada na realização das atividades antes desenvolvidas no caderno. Outro aspecto relevante a ser considerado no âmbito da pesquisa é a necessidade de se conseguir estabelecer relações entre os conteúdos trabalhados em sala de aula - nesse caso, a geometria -, suas aplicações e identificações em atividades cotidianas. Neste sentido, encontramos a Geometria Fractal apresentando uma ligação mais estreita com a representação de elementos naturais.

A opção pela abordagem dos fractais no ensino da geometria foi proposta tendo presente a insuficiência da Geometria Euclidiana na contemplação das diferentes formas que encontramos na natureza e sua crescente aplicabilidade nas mais diferentes áreas. Grande parte dos elementos naturais não pode ser representada por figuras costumeiramente estudadas, como retângulos, quadrados, entre outros. Ademais, existe a possibilidade de a construção manual de muitos fractais ser uma atividade trabalhosa, exigindo tempo e precisão de medidas, mas é um processo com condições de ser facilitado com a utilização de um recurso computacional.

Com o objetivo de verificar como a Geometria Fractal é abordada nos livros didáticos, analisamos dezesseis livros do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental das coleções Matemática e Realidade, de Lezzi, Dolce e Machado (2009); Matemática: ideias e desafios, de Mori e Onaga (2006); Matemática: fazendo a diferença, de Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006) e A conquista da Matemática, de Júnior e Castrucci (2009). A escolha ocorreu devido ao conteúdo não ser específico do 8º ano (7ª série) com a qual foi desenvolvida a intervenção pedagógica. Os fractais apresentam uma vasta possibilidade de exploração de conhecimentos nas diferentes etapas de escolaridade. Também foi nosso interesse verificar se existe nos referidos livros alguma sugestão de uso de recurso computacional para o ensino dos conteúdos voltados à geometria e à álgebra.

As dezesseis obras foram escolhidas por fazerem parte do acervo da biblioteca onde foi realizada a intervenção pedagógica, bem como a probabilidade de que também estejam presentes em outras escolas municipais, pois é de práxis o envio de exemplares para que estas escolham o livro didático, permanecendo este nos estabelecimentos de ensino como fonte de pesquisa, independente de ter sido escolhido.

Ao analisarmos as obras acima referidas, constatamos que, em praticamente nenhuma delas, é abordado o tema Geometria Fractal de forma efetiva. Em um dos livros de Mori e Onaga (2006) da 7ª série, é feita uma pequena introdução que nos dá impressão de que o conteúdo será desenvolvido. No entanto, os autores apenas tratam brevemente de padrões repetidos que podem ser encontrados na natureza ou em culturas de diferentes povos, conceito que apresenta relação com a definição de fractais. Porém, em momento algum, é feita alguma referência ao termo ou dada uma sequência com um aprofundamento ao conteúdo.

Outra brevíssima menção ao assunto pode-se encontrar no livro da 8ª série de Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006). Trata-se de uma atividade em um fim de página em que aparece a imagem de um fractal sem mesmo ser apresentado seu nome - Triângulo de Sierpinski- ou o termo fractal. Assim, percebemos que os autores não têm dado desenvolvimento ou sequência ao tema.

Cabe-nos reiterar que não estamos querendo desmerecer a Geometria Euclidiana presente nos materiais analisados, pois as incomensuráveis contribuições que ela trouxe muito colaboraram para com os vários avanços da sociedade. Ao contrário, não é possível pensar no desenvolvimento da Geometria Fractal em detrimento à Euclidiana, mas como um complemento que pode colaborar para preencher as lacunas existentes, como a insuficiência ao representar elementos da natureza e suas respectivas dimensões. Logo, não se trata de excluir nenhuma das duas, pois há espaço suficiente para que ambas sejam trabalhadas, o que possibilitaria uma ampliação de conhecimentos e novas possibilidades aos alunos, o que não acontece nos livros analisados.

A aplicação dos fractais vem crescendo com o advento das inovações tecnológicas que surgem dia a dia e que precisam ganhar espaço no contexto escolar, pois o aluno de hoje é o profissional que estará atuando amanhã, e sua formação é também de responsabilidade da escola e do professor. Nesse sentido, Almeida (2006) afirma:

> O desenvolvimento dos fractais vem ganhando espaço nos estudos e pesquisas; o que a princípio estava limitado a experiências científicas envolvendo cálculos complexos, aos poucos está se transformando em uma linguagem habitualmente utilizada no contexto escolar, como já ocorreu com outros assuntos que a princípio era de domínio dos intelectuais e cientistas e atualmente pode ser tratado no contexto escolar (p 30).

Como colaborador dessa inserção, o livro didático jamais deve ser, e nossa experiência docente nos faz crer que não o é, a única fonte de pesquisa para o professor no planejamento de sua prática educativa. Com isso, não queremos minimizar sua importância, pois ele deve contribuir na abordagem de conteúdos escolares de maneira diversificada. Oliveira (2006) comenta sobre sua influência no ensino de Matemática:

> [...] Considero que o livro didático exerce grande influência no processo de ensino, pois, além de determinar o currículo a ser desenvolvido em sala de aula, constitui-se como importante instrumento pedagógico para o professor, já que lhe sugere conteúdo, metodologia e atividade (p 16).

Quanto ao fato de o livro didático determinar o currículo, pensamos ser uma posição muito enfática do autor, pois o professor tem autonomia para selecionar os conteúdos que quer desenvolver, desde que respeite os parâmetros mínimos exigidos por legislações vigentes. No entanto, não podemos negar a influência que o citado recurso possui nessa tomada de decisão.

Junior e Régnier (2008) também argumentam que o livro didático não é o único recurso em uso pelos professores, mas continua a ser, para a grande maioria, o principal instrumento de trabalho utilizado em sua plenitude como fonte de textos, de ilustrações, de atividades, sendo-o quase que integralmente na sequência original. Segundo os autores, essa fonte de consultas se apresenta como recurso auxiliar para o ensino, convertendo-se em elemento determinante da prática pedagógica. Portanto, um dos motivos pelos quais a Geometria Fractal não faz parte da grade curricular e, consequentemente, das práticas pedagógicas deve-se ao fato de ela não se encontrar em nenhuma das obras que analisamos. Incluir esse conteúdo nas temáticas desenvolvidas nos livros didáticos poderia despertar o interesse de professores na busca de um aprofundamento maior acerca do assunto.

Uma ação realizada em prol da inserção da Geometria Fractal no ensino pode ser observada nas Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008), que já incluiu nos conteúdos estruturantes de geometria as noções de geometrias não-euclidianas, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, fazendo inclusive referência direta aos fractais.

Outro aspecto analisado nos livros didáticos referidos foi o uso da tecnologia informática na abordagem de conteúdos da geometria. Verificamos que, em apenas dois livros da coleção Matemática: ideias e desafios, de Mori e Ogana (2006), mais especificamente nos volumes da 6ª e 7ª séries, houve uma sugestão do uso da calculadora para resolução de cálculos. Mesmo que isso tenha ocorrido dentro de unidades destinadas ao desenvolvimento de conteúdos de geometria, não podemos considerar que a sugestão tenha um fim específico para conteúdos geométricos, que é o foco deste estudo. Entretanto, o fato já é animador no sentido de contemplar a inserção de um recurso tecnológico para o ensino de Matemática.

Em relação a outros recursos computacionais para o ensino da geometria, não encontramos nenhuma sugestão de uso. Estamos vivenciando uma expansão significativa de inovações tecnológicas em nossas vidas e, nesse contexto, encontramos a existência de muitos *softwares* de grande potencial para o ensino da Matemática. Nesse sentido, acreditamos que os livros didáticos poderiam explicitar atividades, envolvendo recursos tecnológicos para desenvolver diferentes conteúdos. Waldomiro (2011) comenta a importância desses recursos no ensino:

> [...] as tecnologias da computação libertam o aluno da carga técnica, que a priori deixa mais tempo para um trabalho mais reflexivo e conceitual e, portanto, são geralmente consideradas como um meio para renovar as práticas de ensino consideradas demasiadamente limitadas e técnicas (p 45).

A autora ainda afirma que uma das maneiras de romper com o obstáculo epistemológico advindo da geometria é, por exemplo, a utilização de recursos computacionais a partir de *software* de Geometria Dinâmica para a visualização de uma construção.

Diante da evidência da pouca abordagem da Geometria Fractal e de poucas sugestões de uso de recurso computacional no ensino de conteúdos de geometria nos livros didáticos analisados, reforçamos a importância de práticas pedagógicas que contemplem as duas temáticas. Este é um dos nossos propósitos com a pesquisa realizada. Além disso, os fatos evidenciados com a análise dessas fontes de consultas também nos instigou a investigar como os professores abordavam o conteúdo Geometria Fractal e como percebem a aprendizagem da geometria de um modo geral no processo de ensino junto a seus alunos. Para isso, elaboramos um questionário para um grupo de docentes, cuja síntese apresentamos, encontrando-se, no Apêndice B, dados um pouco mais detalhados sobre o mesmo.

No Apêndice A, constam as perguntas que compõem o questionário tal como foi entregue aos professores. Quinze deles foram convidados a respondê-lo, todos atuantes na rede municipal de ensino e docentes de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Importante salientar que esse número representa a quase totalidade dos que estão em efetivo exercício nas escolas mantidas pelo município de Venâncio Aires, salvo os que estão licença ou trabalham em setores e não em sala de aula, como, por exemplo, as direções de escolas. As questões foram entregues a todos pessoalmente, com exceção de um que preferiu recebê-las via e-mail. Cabe destacar que, dentre os convidados, um manifestou seu não interesse em participar da pesquisa, sendo sua vontade respeitada; e, de outro, não obtivemos retorno.

Podemos observar que todos os professores possuem graduação em Matemática, sendo que seis possuem pós- graduação em nível de especialização. Somente um possui Mestrado, mas em outra área. Quanto às atividades, verificamos que atuam na disciplina de Matemática no Ensino Fundamental, sendo que apenas um trabalha com Ciências nesse nível de ensino. Quatro lecionam no Ensino Médio e apenas um na disciplina de Física, além da Matemática. É pertinente lembrar que a Geometria Fractal associada à Álgebra, nosso conteúdo em estudo, é possível de ser abordada, com enfoques diferenciados, em quaisquer desses níveis de ensino, embora nossa intervenção pedagógica se desenvolva com uma turma de 7ª série do Ensino Fundamental.

Quando questionados se já tinham ouvido falar em fractais, constatamos que apenas um admitiu desconhecer o assunto. Dois professores não se recordavam nem quando nem por qual meio tiveram acesso a tais informações. Um afirmou ter sido através de uma estagiária numa turma de 8ª série; outro, por intermédio de uma revista. Dois professores declararam que tiveram contato com esse assunto num curso realizado nas dependências do Centro Universitário Univates há algum tempo. As pesquisas na *internet* foram citadas por dois professores como fonte das informações referidas; destes, um mencionou livros do autor Dante na abordagem da sequência de Fibonacci como um fractal. Quatro professores citaram o curso de graduação como meio pelo qual obtiveram conhecimento sobre fractais, cabendo ressaltar que um não demonstrou segurança nessa afirmação. Outro, dentre os quatro, até comentou o encantamento com um livro que leu na graduação, não deixando claro se o assunto era conteúdo integrante de alguma disciplina ou a leitura foi uma busca pessoal.

Observamos que um número muito pequeno de professores teve Geometria Fractal como conteúdo integrante da grade curricular durante a graduação cursada. Tal dado nos fornece indícios de que esse é um tema pouco enfatizado na formação inicial dos professores e reforça a importância de uma reflexão acerca do assunto pelas instituições de ensino responsáveis por essa formação. Santos *et al*. comenta que:

> Um dos grandes desafios para as universidades públicas está na formação de educadores para o nível de educação básica, ou seja, na formação de professores que vão atuar no ensino formal, contribuindo para que os nossos jovens exerçam conscientemente a sua cidadania, no que diz respeito a sua formação técnico-científico-cultural (2006, p 2).

Constatado que o acesso a conhecimentos relacionados à Geometria Fractal por parte dos participantes da pesquisa não aconteceu na universidade, não houve quem citasse cursos de formação continuada que tivessem abordado esse tema durante a vida acadêmica desses profissionais. Esse fato merece uma reflexão, haja vista que as instituições deveriam contemplar a atualização dos professores. No entanto, os dados coletados com a pesquisa nos forneceram indícios de que a temática fractal, sendo atual e necessária, não se encontra entre os assuntos abordados.

A análise das respostas obtidas com a questão 4, referente ao conceito construído ou sugerido por cada professor em relação ao termo fractal, permitiu-nos reuni-la em quatro grupos: sem sugestão de conceito; com termo fractal associado apenas a figuras geométricas; o termo fractal associado a frações e real significado dos fractais. Contudo, ao analisarmos as respostas apresentadas por dois professores, percebemos que definição muito similar se encontrava disponível em *site* da *internet*. Esse fato nos remeteu a dúvidas sobre a apropriação do conceito por parte dos referidos docentes. Teriam eles apenas feito buscas para a escrita de um conceito mais elaborado e não mencionaram seu autor ou desconheciam o assunto?

Assim, reafirmamos a necessidade de maiores estudos acerca do tema, além de maior divulgação, haja vista nele haver uma possibilidade de enriquecimento da aprendizagem de geometria associada à álgebra.

A questão 5 tinha como objetivo saber se o docente trabalhava o conteúdo Geometria Fractal e, em caso afirmativo, como o abordava; se, do contrário, não o fizesse, qual a justificativa. Constatamos que apenas 4 professores desenvolviam o conteúdo Geometria Fractal. Cumpre ressaltar ainda que, dentre estes, havia um que o abordava apenas em nível de curiosidade; outro comentou uma abordagem com o Ensino Médio, não deixando claro se também o fazia com o Fundamental e um terceiro afirmou não aprofundar muito o assunto, não chegando nem a usar a terminologia específica do conteúdo junto aos alunos.

Como justificativas, foram apontadas: o desconhecimento do assunto, o pouco tempo e a não presença nos livros didáticos. Isso nos remete às evidências demonstradas na seção anterior, ou seja, os livros didáticos que superassem as lacunas apresentadas na abordagem do conteúdo poderiam suscitar a curiosidade e a busca, instigando docentes a introduzirem um novo saber científico em sala de aula.

A justificativa para a não abordagem da Geometria Fractal merecedora de reflexão é a questão do tempo. Nessa perspectiva, enfatizamos a utilização do recurso computacional como elemento otimizador do tempo necessário à abordagem não só do conteúdo Geometria

Fractal, como também outros na área da Matemática. Acerca do assunto, Maltempi (2008) posiciona-se:

> Não tenho dúvidas de que as tecnologias ampliam as possibilidades de se ensinar e aprender, oferecendo novas e variadas formas para que esses processos ocorram, de forma que ideias para trabalhos pedagógicos que antes eram inviáveis (por limitações de custo, tempo, recursos físicos, etc.) tornam-se factíveis com o uso de tecnologias. Essa é uma das formas pelas quais as tecnologias desafiam a educação e a desestabilizam, pois oferecem a oportunidade de uma prática que potencialmente pode ser melhor que a praticada considerando a sociedade em que vivemos (p 60).

Quanto aos professores que trabalhavam a Geometria Fractal, ressaltamos que dois deles, demonstrando enfrentar o desafio tecnológico como comenta o autor, afirmaram que o faziam por meio de um *software em que* o Shapari e o Fractim são citados para esse fim. Estes, dentre outros, podem ser considerados apenas uma representatividade da disponibilidade de *softwares* educativos, cabendo aos docentes a instrumentalização para poder utilizá-los de forma a agregá-los na prática pedagógica, pois têm potencial para contribuir com melhorias no processo de aprendizagem.

Em relação à questão 6, que questionava a existência de dificuldades encontradas pelo professor ao trabalhar a geometria com os alunos, foram mencionadas as generalizações e associações necessárias ao desenvolvimento de certos conceitos, a identificação das figuras planas no cálculo de perímetro e área, a contextualização e o pouco tempo perante os muitos conteúdos a serem trabalhados.

Ao analisar as respostas da questão 7 (Você utiliza alguma ferramenta tecnológica no ensino de geometria? Quais? Em caso negativo, justifique o não uso.), percebemos que pouco mais da metade do grupo utilizava alguma ferramenta tecnológica no ensino da geometria. Contudo, foram muito vagos ao explicitarem esse uso, fazendo menções ao laboratório de informática e pesquisas na *internet*. Apenas dois citaram os *softwares*. Quanto aos que não usavam a referida ferramenta, a falta de conhecimento é o principal argumento apresentado. A opção pelo material concreto e a chegada recente do recurso tecnológico também são evidenciados. Na realidade, as tecnologias podem até demorar um pouco mais para estarem disponíveis como recurso para uso pedagógico nas escolas, mas, tardias ou não, elas têm chegado, conforme declaração de um professor. Assim, faz-se necessário que os docentes busquem formas de conhecê-las para poder inserir e aprimorar seu uso no ensino. As diferentes tecnologias disponíveis mudam não só nossa rotina, mas o ritmo de vida, influenciando até mesmo as formas de pensar, aprender, produzir (GRAVINA; BASSO, 2012). Esse contexto faz com que a necessidade de atualização frente aos recursos tecnológicos na educação surja inevitavelmente, conforme expressa um professor ao responder ao questionário.

Contudo, esse discurso que visa mudanças requer busca por caminhos imprevisíveis e incertos, como os trilhados no uso do recurso tecnológico. Alguns professores, mesmo admitindo insatisfação e reconhecendo que a forma como atuam não favorece a aprendizagem dos alunos na prática, não conseguem se movimentar para mudar aquilo que não os agrada (BORBA; PENTEADO, 2003).

A questão 8 tinha por objetivo investigar se os professores percebiam dificuldades, por parte dos alunos, relacionadas à geometria. Oito deles responderam afirmativamente. O uso correto de instrumentos de medidas como a régua, compasso e transferidor foram citados por metade desse grupo como uma dificuldade constatada. O estabelecimento de relações entre as figuras geométricas, a capacidade de fazer generalizações, equacionar e resolver problemas também estiveram entre os itens mencionados, assim como a dificuldade na abordagem de conteúdos como área e perímetro. A falta de base na construção de conceitos básicos que se acumulam ao longo do Ensino Fundamental e que, no final do Ensino Médio, constituem-se requisitos importantes foi evidenciada por um professor.

Um grupo de apenas quatro docentes afirmou não perceber, por parte de seus alunos, dificuldades relacionadas à geometria. Inclusive, um deles nomeou-a facilitadora da aprendizagem de outros conteúdos. Cabe ressaltar que problemas comportamentais e o pouco envolvimento dos estudantes foram apontados por um número significativo de professores como fatores que prejudicam a aprendizagem do conteúdo. Assim, reforçamos a importância de discussões acerca do ensino da geometria. As evidências apontadas nos indicam que se faz necessária uma maior exploração de possibilidades de seu ensino e de sua aprendizagem para que esse processo se efetive junto a alunos e professores.

Tendo presente a descrição realizada, percebemos que ainda havia muitas dificuldades relacionadas ao ensino da geometria, aliada à pouca abordagem da Geometria Fractal. Além disso, merece destaque a precariedade da inserção do recurso computacional no ensino do referido conteúdo. Tendo presente as considerações feitas, foi proposto o desenvolvimento de nossa pesquisa, cuja questão foi:

Como a construção de fractais com o uso do Geogebra pode suscitar a produção de conhecimentos geométricos e algébricos?

Constituiu-se, assim, como objetivo geral desta pesquisa investigar como a construção de fractais com o uso do *software* Geogebra pode suscitar a produção de conhecimentos geométricos e algébricos. Os objetivos específicos da pesquisa foram:

- Identificar possíveis conhecimentos geométricos e algébricos utilizados na construção de fractais com uma turma de 7ª série do Ensino Fundamental.

- Investigar as contribuições do *software* Geogebra na abordagem de conteúdos de geometria.

Os procedimentos adotados na coleta e análise dos dados traduzem uma visão qualitativa de investigação. Javaroni, Santos e Borba (2011) definem a pesquisa qualitativa como uma forma de se fazer pesquisa na qual o foco e o olhar se encontram nas relações que têm significado para o pesquisador. Em harmonia com essa definição, Garnica (2004) caracteriza a pesquisa qualitativa como aquela que reconhece:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re) configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (p 86).

Dessa forma, procuramos escolher os procedimentos que embasasssem nossa pesquisa, embora acreditássemos que as características citadas pelo autor não devam ser vistas como regras irrefutáveis, pois isso nos afastaria dos próprios parâmetros de uma pesquisa qualitativa que pressupõe flexibilidade e movimento.

Por estarmos de acordo com Garnica (2004) quando afirma que a metodologia procura um método julgado eficaz, adequado e consistente com as propostas de investigação, estando a eficácia atrelada aos pressupostos teóricos e vivências do pesquisador, organizamos nossa metodologia. Esta, por sua vez, foi pensada para que atendesse aos objetivos de verificar como o conteúdo Geometria Fractal era abordado por livros didáticos e professores no Ensino Fundamental; de desenvolver uma estratégia diferenciada para a abordagem desse conteúdo com o apoio do *software* Geogebra e detalhar como ocorreram os processos de ensino e de aprendizagem na ótica do professor-pesquisador e dos alunos participantes.

Cabe-nos ressaltar que a interferência inevitável da professora regente da turma com a qual se desenvolveu a proposta pedagógica e também uma das autoras da pesquisa aqui relatada, colocou-a na condição de observadora participante. Desta forma, os dados coletados não ficaram atrelados somente a respostas do questionário que, quando elaborados, podem já estar impregnados de pressuposições do objeto de estudo. Nesse sentido, Moreira e Caleffe afirmam:

> Na observação participante, é muito difícil para as pessoas que estão sendo observadas mentir ou tentar enganar o pesquisador. O pesquisador está no local testemunhando o comportamento real ao invés de confiar apenas nos relatos das pessoas a respeito de suas vidas... A observação participante proporciona estudos mais aprofundados que podem servir a vários propósitos úteis, em particular para gerar novas hipóteses. Da mesma maneira que a entrevista não-estruturada, a observação participante poderá seguir direções inesperadas e, assim proporcionar ao pesquisador novas visões e idéias (2006, p 204.).

A intervenção pedagógica proposta foi desenvolvida com uma turma da 7ª série do Ensino Fundamental na busca por uma abordagem diferenciada da Geometria Fractal com o auxílio do *software* Geogebra. Procuramos encontrar uma forma de aliar a construção de conhecimentos geométricos e algébricos na perspectiva da Geometria Fractal mediada por uma ferramenta que facilitasse o processo. A prática tinha em vista a importância de tais conhecimentos para a vida cotidiana dos discentes, o prosseguimento de seus estudos e um futuro aperfeiçoamento profissional. A avaliação por meio de um questionário aplicado aos alunos no término da intervenção pedagógica visava registrar suas percepções sobre o desenvolvido.

Para a melhor compreensão dos caminhos percorridos na realização deste estudo, dividimos o presente trabalho em cinco capítulos, sendo o primeiro a Introdução que ora se apresenta. Os pressupostos teóricos que nortearam o seu desenvolvimento estão organizados no segundo Capítulo, dividido em três seções: a primeira, na qual apresentamos ideias de autores no que se refere às contribuições do uso das tecnologias de informática no processo de ensino e de aprendizagem; a segunda, que abordou aspectos do ensino da Geometria Fractal e a última, que tratou do *software* Geogebra.

No terceiro Capítulo, apresentamos a Intervenção Pedagógica com uma seção subdividida em dez subseções com as atividades desenvolvidas e suas respectivas análises. A prática pedagógica explorou a Geometria Fractal em ambiente informatizado, utilizando o *software* Geogebra. Participaram da intervenção 20 alunos da 7ª série do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Venâncio Aires. Os discentes construíram fractais com as ferramentas disponíveis na interface do Geogebra e exploraram os conteúdos geométricos e algébricos intrínsecos no processo de construção e na posterior análise das iterações realizadas. Numa proposta de diversificação e não unicidade de metodologia, também foram construídos cartões fractais e fractais tridimensionais.

No quarto Capítulo, encontram-se os resultados de um questionário aplicado aos alunos para que eles pudessem fazer seus comentários acerca do processo de aprendizagem do qual participaram, avaliando aspectos da prática pedagógica, seu próprio desempenho e as possíveis contribuições do recurso computacional para a aprendizagem.

Finalizando, no quinto Capítulo, tecemos as considerações teóricas, apontando conclusões e implicações da prática pedagógica desenvolvida, entrelaçando-as com as questões metodológicas.

2 ABORDAGEM TEÓRICA

Neste capítulo, são nomeados pressupostos que norteiam o desenvolvimento da pesquisa em três seções: a primeira, na qual apresentamos ideias de autores no que se refere às contribuições do uso das tecnologias no processo de ensino e de aprendizagem; a segunda, que abordou aspectos do ensino da Geometria Fractal e a última, que tratou do *software* Geogebra.

2.1 Importância do uso das tecnologias de informática

Não são mais tão recentes as discussões acerca do uso do computador e suas consequências no ensino. Rezende (2002) já afirmava que não se trata mais de nos perguntarmos se devemos ou não introduzir as novas tecnologias da informação e da comunicação no processo educativo, mas sim como utilizá-las. A autora ressalta que a introdução destas no ensino, por si só, não implica necessariamente mudanças de práticas pedagógicas, pois podemos com elas apenas vestir o velho com roupa nova.

Fazer uso de uma tela multicolorida com infinitos recursos áudio - visuais e permanecer realizando uma prática docente que não priorize outras habilidades além da mera repetição e memorização não representa progresso educacional. Nesse sentido, Perrenoud (2000) comenta:

> A verdadeira incógnita é saber se os professores irão apossar-se das tecnologias como um auxílio ao ensino, para dar aulas cada vez mais bem ilustradas por apresentações multimídia, ou para *mudar de paradigma* e concentrar-se na criação, na gestão e na regulação de situações de aprendizagem (p 139).

Assim, torna-se necessário rever nossas concepções de aluno, de professor e de processos de ensino e de aprendizagem frente a essa nova realidade que exige profissionais com um novo perfil. Cabe então questionarmos o papel que temos como educadores na formação de nossos estudantes que, num futuro não muito distante, estarão ingressando num mercado de trabalho competitivo e impetuoso. Este também se constitui em uma das finalidades da Educação Básica assegurada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9394/96 - LDB quando diz:

> A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (BRASIL, art.22, 1996, p 7).

Diversas ações em prol do desenvolvimento e introdução das tecnologias no ensino vêm acontecendo há muito tempo. Já, em 1981, ocorreu no Brasil o I Seminário Nacional de Informática Educativa com participação de educadores de diversos estados brasileiros. Eles se reuniram com o intuito de estimular e promover a implementação do uso de tecnologias, surgindo, a partir daí, projetos como o Educom, Formar e Proninfe.

O Educom (COMputadores na EDUcação) foi lançado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) e pela Secretaria Especial de Informática em 1983. Seu objetivo foi criar centros pilotos em universidades brasileiras para desenvolver pesquisas sobre diversas aplicações do computador na educação.

O projeto Formar foi uma iniciativa do Educom (Formar I -1987, Formar II- 1998) visando à formação de recursos humanos para o trabalho na área de informática educativa. Assim, foram oferecidos cursos de especialização a pessoas oriundas de diferentes estados e que deveriam atuar como multiplicadores em sua região de origem. O Proninfe - Programa Nacional de Informática na Educação- foi lançado pelo MEC e deu continuidade às iniciativas anteriores, contribuindo especialmente para a criação de laboratórios e centros à capacitação de professores. Na sequência, surgiu o Programa Nacional de Informática na Educação - o PROINFO -, lançado em 1997 pela Secretaria de Educação, à Distância (Seed/MEC), com o objetivo de estimular e dar suporte para a introdução de tecnologias informáticas nas escolas do nível Fundamental e Médio de todo o país.

Ações como as acima mencionadas possibilitaram que os computadores estivessem presentes como uma ferramenta educacional disponível em um número significativo de escolas brasileiras. É notório que de forma precária em muitas delas, mas o fato não torna inviáveis as discussões em torno da importância de sua utilização no ensino, tendo em vista as potencialidades de enriquecimento nos processos de ensino e de aprendizagem.

Frente a esse novo contexto social em que estamos inseridos, a utilização do recurso computacional no ensino é de extrema importância, devendo, assim, ater-nos a como fazer o seu uso de forma inteligente.

> A análise dessa questão nos permite entender que o uso inteligente do computador não é um atributo inerente ao mesmo, mas está vinculado à maneira de como nós concebemos a tarefa na qual ele será utilizado. Um sistema educacional mais conservador certamente deseja uma ferramenta que permite a sistematização e o controle de diversas tarefas específicas do processo atual de ensino (VALENTE, 1997, s/p).

É preciso, segundo o autor, que o professor conheça as potencialidades educacionais do computador para poder utilizá-lo de forma a modificar satisfatoriamente sua prática. Se essa ferramenta servir apenas para transmitir informações prontas sem ao menos ter critérios de análise e seleção ou for um identificador de erros cometidos por alunos na realização de tarefas como indicativo de níveis, o docente poderá estar somente informatizando o ensino tradicional.

Valente (1997) afirma que *softwares* existentes no mercado tornam a tarefa do professor passível de substituição, às vezes até com mais eficiência, pois ele armazena uma quantidade enorme de dados e os ministra de forma sistemática, identificando erros cometidos por alunos com facilidade, não sendo também afetado por nenhuma dor de cabeça ou problema familiar. Isso sem mencionar que nenhum giz colorido compete em igualdade com as interfaces, animações e sons dos sistemas educacionais. Contudo, o autor ressalva que tal substituição só poderá se efetivar se concebermos a tarefa do educador como mera transmissão de informações. Do contrário, sabemos que nenhuma máquina consegue formar o profissional exigido pelo mercado de trabalho, ou seja, um indivíduo crítico, criativo, com capacidade de pensar e interagir e aprimorar suas ideias e ações. Portanto, o autor refuta esse processo, pois considera que o papel desempenhado pelo docente é amplo e complexo, executável apenas por um profissional capacitado.

Aproveitar as potencialidades do recurso computacional de modo a melhorar o ensino, aqui com ênfase na Matemática, é um desafio. Para isso, torna-se imprescindível que o professor, conforme afirma Tajra (2008), esteja capacitado e utilize o computador como instrumento pedagógico e, conhecendo os recursos de um *software,* possa fazer as adequações necessárias à sua necessidade educacional. O autor ainda complementa que a utilização do *software* possibilita ao docente ensinar, aprender, simular, estimular a curiosidade ou simplesmente produzir trabalhos com qualidade. Borba (2010) também faz menções às contribuições dos *softwares* no ensino da Matemática, salientando a vantagem que o *feedback,* proporciona ao usuário e realçando também o componente visual como importante aspecto de visualização.

Algumas particularidades do aspecto visual em Educação Matemática proporcionadas pelas tecnologias computacionais são destacadas pelo autor:

> - Visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático.
> - A compreensão de conceitos matemáticos requer representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles.
> - Visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas.
> - Tecnologias com poderosas interfaces visuais estão presentes nas escolas, e a sua utilização para o ensino e aprendizagem da matemática exige a compreensão dos processos visuais.
> - Se o conteúdo de matemática pode mudar devido aos computadores, (...) é claro neste ponto que a matemática nas escolas passarão por pelo menos algum tipo de mudança (...) (BORBA; VILARREAL, p.26 *apud* BORBA, 2010, p 4).

Utilizar o computador como um diferencial no ensino é possibilitar ao aluno a construção de conhecimentos de maneira autônoma, criando condições para que ele levante hipóteses e as teste Acredita-se que com um *software* é possível investigar, inferir propriedades, chegar à generalização e verificar teoremas.

O uso de recursos computacionais no ensino da Matemática também é discutido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998) como uma forma de permitir muitas reflexões sobre o processo ensino-aprendizagem na medida em que:

> - Relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos eles podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
> - evidencia a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos eles podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
> - possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
> - permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes frente ao estudo (BRASIL, p 43-44).

Os PCNs (1998) também citam maneiras de como o computador pode ser usado nas aulas de Matemática:

> - como fonte de informação, sendo um recurso para alimentar o processo ensino-aprendizagem;
> - como auxiliar no processo de construção do conhecimento;
> - como meio para desenvolver autonomia pelo uso de *software* que possibilite pensar, refletir e criar soluções;
> - como ferramenta para realizar determinadas atividades – uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc. (BRASIL, p 44).

Gravina e Santarosa (1999) também citam a existência de programas com características potentes para o ensino da Matemática que possibilitam ao aluno modelar, analisar simulações, fazer experimentos e conjeturar. Tais ambientes, afirmam eles, permitem aos discentes expressar, confrontar e refinar ideias, tornando possível a programação do computador sem que para isso seja necessário o domínio de uma nova sintaxe e morfologia inerentes a uma linguagem de programação. Novamente nos é salientada a necessidade de uma intervenção de qualidade do professor mediador nesse processo como condição às ações mencionadas. Contudo, os autores fazem um alerta quanto aos cuidados que os docentes devem ter ao inserir tecnologias em suas práticas:

> Se almeja-se uma mudança de paradigma na educação, é necessário ser crítico e cuidadoso neste processo de uso da informática. A informática por si só não garante esta mudança, e muitas vezes engana pelo visual atrativo dos recursos tecnológicos que são oferecidos, os quais simplesmente reforçam as mesmas características do modelo de escola que privilegia a transmissão do conhecimento (GRAVINA e SANTAROSA, 1999, p 74).

Parece-nos claro que a inserção das tecnologias por si só não vai resolver os dilemas educacionais existentes. É preciso que esteja vinculada a uma reflexão crítica e se adeque a um projeto político e pedagógico, colocando-se a serviço de seus objetivos e não determiná-los, como afirma Rezende (2002). Para isso, faz-se necessário que professores invistam em aperfeiçoamento e estudo para que possam fazer uso desses recursos de forma segura e coerente com os pressupostos que embasam sua prática. Nesse sentido, a autora afirma:

> Embora seja verdade que a tecnologia educacional não irá resolver os problemas da educação, que são de natureza social, política, ideológica, econômica e cultural, essa constatação não nos pode deixar sem ação frente à introdução das inovações tecnológicas no contexto educacional. Ainda é preciso continuar pesquisando sobre o que as novas tecnologias têm a oferecer à educação, para que tenhamos condições de formar uma visão crítica fundamentada sobre seu uso (REZENDE, 2002, p 1).

Esta foi uma questão que pretendíamos contemplar com a concretização da presente pesquisa, pois nos propusemos a encontrar uma possível utilização, dentre tantas, eficaz do recurso tecnológico no ensino da Matemática, mais especificamente na abordagem com fractais por meio do Geogebra.

Tomar a decisão de incluir recursos tecnológicos à prática docente não é tarefa fácil; é preciso disposição para entrar no que Borba e Penteado (2003) nomeiam de zona de risco. O professor, ao fazer uso desse recurso, frequentemente, deparar-se- á com situações inusitadas e imprevistas no decorrer de suas aulas. Não é nada incomum que um aperto ou combinações de botões feitos por alunos venham a gerar uma situação que necessite de mais tempo de análise do educador. Isso sem mencionarmos a ausência de técnicos nos laboratórios das escolas que poderiam dar suporte aos docentes.

Além disso, é necessária uma constante atualização, pois, a todo instante, surgem novidades ao tratarmos do assunto tecnologia. Abandonar uma situação de conforto onde se tem a nítida impressão de que sabemos a ordem dos acontecimentos decorrentes de uma atividade proposta pode parecer – e realmente é - difícil, pois exige que, como educadores, tenhamos um maior empenho. Contudo, ousar e experimentar novas possibilidades podem ser experiências muito gratificantes no momento em que percebermos o quanto estaremos avançando no desempenho de nossa função e contribuindo com o crescimento intelectual de nossos alunos.

Na próxima seção, ocorrem breves considerações sobre aspectos da Geometria Fractal e comentamos o uso de alguns *softwares* na abordagem de fractais e outros conteúdos da geometria.

2.2 Geometria Fractal

Fazer uso de uma ferramenta computacional que possa fornecer vantagens em relação a outros materiais didáticos em uso nas salas de aula é um desafio a que se propõem muitos educadores e, entre eles, estamos nós por meio deste trabalho. Pensamos que a produção de conhecimentos, tanto geométricos quanto algébricos, através desse recurso pode colaborar no processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos de forma significativa.

A prática docente e o manuseio de materiais didáticos permitem perceber que a abordagem da geometria geralmente é feita de maneira superficial, com definições e desenhos prontos que não fogem de um modelo padronizado, desvinculado da realidade. O fato é ressaltado por Gravina (1996) quando diz:

> Os livros escolares iniciam com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos. Por exemplo, quadrados com lados paralelos às bordas da folha de papel, retângulos sempre com dois lados diferentes, alturas em triângulos sempre acutângulos, etc... Isto leva os alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos quando em outra situação (GRAVINA, 1996, p 2).

Vejan e Franco (s/d), ao apresentarem os resultados de um estudo realizado durante o Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná-PDE 2008/2009, apontam para o negligenciamento das noções de geometrias não-euclidianas nas aulas de Matemática pela maioria dos professores do Ensino Fundamental e do Médio. Não culpam o descaso dos docentes, mas sim a formação obtida por estes que não contempla o conteúdo em suas estruturas curriculares. Essa ausência faz com que, conforme os autores, a geometria euclidiana passe a ser a única possível e presente em nosso mundo.

A Geometria Fractal surge como uma opção para ampliar conhecimentos comumente estudados e que já não são suficientes para representar, entre outros, paisagens naturais. Sabemos que figuras como retângulos, quadrados e círculos, clássicas da geometria euclidiana, mais dificilmente podem ser encontradas em elementos da natureza como vegetais, rochas e rios, o que os fractais, com sua complexidade e beleza, permitem. Não queremos com isso desmerecer a importância do ensino da geometria euclidiana que é de grande aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, mas apenas propor um novo enfoque nessa área.

O termo Geometria Fractal foi denominado por Benoit Mandelbrot por volta da década de cinquenta ao desenvolver estudos sobre ruídos em linhas telefônicas utilizadas em rede entre os computadores. As irregularidades ali detectadas também foram percebidas em diversos fenômenos naturais, como relâmpagos, formato de montanhas, nuvens, na constituição e funcionamento de vários órgãos do corpo humano. Enfim, essa nova ciência possibilitou a descoberta da ordem onde antes apenas era vista a desordem. Sua aplicação é crescente em diferentes áreas, sendo uma das mais promissoras a computação por permitir a representação de formas naturais, paisagens e efeitos especiais de forma mais dinâmica e real, conforme afirma Janos (2008).

No corpo humano, há vários órgãos, como o pulmão e os neurônios que possuem ramificações que se assemelham a uma estrutura fractal e a compreensão de seu desenvolvimento favorece a prevenção de doenças, impedindo a sua evolução, além de auxiliar na descoberta de diagnósticos precoces. Na formação do solo e de estruturas rochosas, é possível perceber formas fractais que, quando definido o padrão ali presente, possibilita a identificação de instabilidades propensas a evitar desmoronamentos em virtude de grandes chuvas. O comportamento dos lucros e prejuízos de uma empresa ou instituição pode, algumas vezes, ser expresso através do conceito de fractal, haja vista as variações semanais, mensais e anuais similares propiciarem estatísticas mais precisas e um melhor planejamento, atendendo aos interesses envolvidos em cada situação. Companhias telefônicas têm utilizado a estrutura fractal na fabricação de antenas, pois o formato diferenciado das tradicionais permite o funcionamento simultâneo em diferentes frequências, demonstrando maior eficiência. Assim, cada vez mais, vemos o conhecimento fractal beneficiando diferentes segmentos.

A definição de fractal é associada ao adjetivo latim *fractus*, cujo verbo *frangere* significa partido, quebrado. Muitas são as definições que encontramos para o termo fractal, contudo, a maioria apresenta lacunas, o que não pode ser considerado um empecilho ao desenvolvimento desse conteúdo em sala de aula. Barbosa (2005), nesse sentido, afirma:

> [...] o conceito de fractal ainda tem muito a desejar, principalmente no caso de se querer um definição formal, que caiba ao ser e só ao ser. Entretanto, essa dificuldade não deve ser obstáculo na Educação, à qual pode simplesmente convir uma conceituação simples e de fácil compreensão e entendimento. Bastará considerarmos a auto similaridade (p 19).

Para fins de nosso estudo, optamos pela definição dada por Barbosa (2005), que se refere aos fractais como entes que constituem uma imagem de si próprios em cada uma de suas partes, sendo estas semelhantes e caracterizando assim a propriedade da autossimilaridade. O mecanismo estrutural que gera o formato do todo é o mesmo de cada uma de suas pequenas partes. Janos (2008) exemplifica essa propriedade na observação de uma foto tirada de uma couve-flor e outra de uma pequena parte do seu corpo, que se não tiver fundo, impossibilita a diferenciação de qual é a couve -flor inteira e qual é seu pedaço.

A autossimilaridade é então o resultado de uma mesma lei de formação repetida várias vezes. Esta mesma característica é denominada por Nunes (2006, p 29) como autossemelhança. Ela diz que: “Uma figura é auto-semelhante se apresenta sempre o mesmo aspecto visual a qualquer escala que seja ampliada ou reduzida, ou seja, se parte de uma figura se assemelha à figura vista como um todo.” A autora considera dois tipos de autossemelhança:a exata e a aproximada (ou estatística).

A autossemelhança exata é encontrada em figuras provenientes de processos matemáticos nas quais o conjunto total é o resultado de várias réplicas perfeitas formadas por processos iterativos. São exemplos desse tipo de autossemelhança a curva de Koch, o Triângulo e o Carpete de Sierpinski. Já, a autossemelhança aproximada (ou estatística) está muito presente em formas da natureza como podemos observar na Figura 1, na qual, as partes, apesar de possuírem a mesma estrutura, não são réplicas exatas entre si e com o todo.

Figura 1 - Exemplo da autossemelhança aproximada em fractais encontrados na natureza.

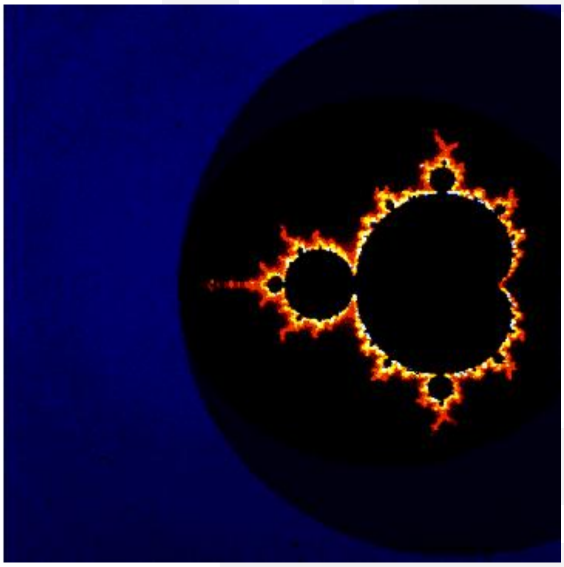
Fonte: CFTC.CII.FC.UL (2012).

Outra característica dos fractais e que nos causa certa estranheza é a sua dimensão fracionária. Estamos acostumados a conviver num espaço até então definido por dimensões inteiras, as mais familiares a nós se limitando a três. Existem as retas e os segmentos de reta com uma dimensão, as figuras de superfície plana, como o quadrado com dimensão 2,e os sólidos, como o cubo com a dimensão 3. Os fractais fogem a essa regra, apresentando dimensões fracionárias. Por exemplo, o Triângulo de Sierpinski com dimensão aproximada de 1,585, portanto, entre os inteiros 1 e 2; a Curva de Koch possui dimensão entre 2 e 3. Não aprofundamos a questão da dimensão fracionária dos fractais neste estudo apesar de sugerirmos sua abordagem para o desenvolvimento do conteúdo de logaritmos no Ensino Médio. Assim, apenas apresentamos a fórmula que define a dimensão de um fractal:

Dimensão: $\frac{\log(\textit{número de peças})}{\log(\textit{fator de aumento})}$ $ou\ D = \frac{\log n}{\log m}$

As características que diferenciam os fractais das figuras euclidianas também concedem a eles imensa beleza, capazes de encantar a quem os aprecia. Dentre outros que se tornaram famosos, podemos citar o Conjunto de Mandelbrot mostrado na Figura 2. O fractal é calculado de maneira iterativa pela fórmula $Zn+1= Zn2+C$, com C fixo após a primeira iteração, representando coordenadas do plano complexo, assim como um número real representa um ponto na reta. O Z começa na origem (0,0), seguindo na próxima iteração com o valor anterior. Como em todos os fractais, as imagens são geradas a partir dos pontos da última iteração. A forma colorida se faz usando um código de cores. A partir de pequenas modificações no algoritmo do Conjunto de Mandelbrot, obtemos outro fractal famoso, o Conjunto de Júlia, cujo nome é uma homenagem ao matemático que o descobriu.

Figura 2 - Conjunto de Mandelbrot.



Fonte: EDUC.FC.UL (2012).

Muitos dos fractais existentes podem ser construídos por alunos, permitindo a exploração de diferentes conhecimentos matemáticos. Acreditamos que, nessa construção, o aluno mobiliza vários conhecimentos acerca da geometria, o que enriquece a atividade e amplia conhecimentos. Nesse sentido, Gravina (1996) afirma que situações mais complexas de aprendizagem exigem o controle de diversas informações no mesmo desenho.

Buscando trazer à tona a temática fractal, Rinaldi e Menezes (2007) analisam três programas educacionais voltados ao ensino da geometria que podem ser utilizados na composição de estruturas fractais. Eles propõem não um ensino dos *softwares*, mas sim um aprendizado e experimentação de ferramentas computacionais que possibilitem a criação de formas fractais, promovendo uma comparação de imagens produzidas. Constituiu objeto de análise os *softwares* Geometricks versão 2.37, de origem francesa; Nfract, desenvolvido no Brasil,e o Cabri-géomètre II, na França. Conforme relato dos autores, o *software Geometricks* apresenta um menu especial de criação de fractais e afirmam ser necessário um conhecimento prévio do assunto devido ao fato do programa definir, em sua forma finalizada, o desenho, não mostrando nível por nível. Querendo visualizar o processo, é preciso fazer iterações separadas. Já, o *software* Nfract, em sua versão inicial, calcula e gera fractais de formas e coloração diferenciadas a partir de uma equação de 7º grau. O Cabri-géomètre II, por sua vez, possui ícones e símbolos de fácil identificação e praticidade ao usuário.

Barbosa (2005) também apresenta a sugestão da utilização de recursos computacionais na construção de fractais que, em dois casos, coincidem com os citados por Rinaldi e Menezes (2007). São por ele mencionados o Nfract, a linguagem de programação LOGO através da versão Microsoft Windows Logo (SLOGOW), o Cabri-géométre II, o Geometricks, a linguagem C, citada como uma versão melhorada da antiga "B" e como uma ferramenta de programação útil a muitos sistemas e a linguagem Java.

Barbosa (2005), ao fazer um detalhamento mais minucioso dos programas sugeridos, refere-se ao Nfract-exe; em Delphi, destaca que o mesmo é, possivelmente, o único *software* nacional no campo. Os coeficientes do polinômio de grau 7 podem ser ajustados para qualquer valor desejado, possibilitando a geração de infinitas imagens como as do tipo Mandelbrot ou Julia. O autor do *software*, Prof. Ms. Perroti, explica seu funcionamento:

> As imagens são calculadas utilizando a técnica de "tempo de fuga". Esta técnica verifica quantas iterações são necessárias para que determinado ponto "escape" de um círculo de raio 2 no plano complexo. A posição do ponto é fornecida como parâmetro para a equação e o resultado realimenta a equação na próxima iteração. O campo *profundidade* do programa indica o número máximo de iterações que o programa calcula para cada ponto da imagem. Quando o ponto escapa do círculo, ou quando o número máximo de iterações é atingido, o valor é usado como índice em um mapa de cores para obter a cor do ponto. O programa fornece uma boa variedade de mapas de cores e ainda permite a criação de novos mapas (2005, p. 105).

Quanto ao Slogow,Barbosa (2005) destaca sua finalidade pedagógica e o indica principalmente às séries e disciplinas do Ensino Fundamental, podendo também ser explorado no Ensino Médio.

Os *softwares* Cabri-Géomètre e Geoplan também são apontados por Gravina (1996) como ferramentas poderosas na superação de obstáculos inerentes ao aprendizado:

> Nesses ambientes conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceitual e figural; a habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração se desenvolve; controle sobre configurações geométricas leva a

> descoberta de propriedades novas e interessantes. Quanto às atitudes dos alunos frente ao processo de aprender: experimentam; criam estratégias; fazem conjetura; argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir de manipulação concreta, "o desenho em movimento", passa para maniplução abstrata atingindo níveis mentais superiores da dedução e rigor, e desta forma entendem a natureza do raciocínio matemático (GRAVINA, 1996, p 13).

Percebemos uma significativa variedade de *softwares* sugeridos para a abordagem da Geometria Fractal, o que reforça que a disponibilidade de recursos computacionais é crescente, bastando aos docentes explorá-los de modo a aproveitar o potencial e as especificidades que cada um apresenta. Quanto ao Geogebra, nosso foco no estudo, acreditamos ser uma riquíssima ferramenta que possui características que permitem uma abordagem dos fractais diferenciada e prazerosa junto aos alunos.

A Matemática é citada por Barbosa (2005) como uma forma de despertar prazeres nos alunos no momento em que estes superam suas dificuldades ou encontram êxito na resolução de problemas. Já, a geometria é mencionada pela possibilidade de despertar uma apreciação ao belo:

> [...] algumas áreas da Matemática, como a Geometria, possibilitam o surgimento de prazer e gozo que merecem ser explorados pelos educadores. Assim são as situações de contemplação de aspectos harmoniosos ou de contrastes na arte, na pintura ou arquitetura, ou na própria natureza. A visualização de simetrias, por exemplo, é um fator poderoso para sentir o belo. A simetria é um conceito muito importante na Filosofia da Arte e na Estética, é um fator determinante de emoções, tanto é que pensadores, talvez exorbitando um pouco, consideram-na a ordem da beleza estável ou o ritmo estático. Ela individualiza um objeto belo e lhe fornece caráter e expressão. Essas emoções produzidas pelos objetos ou situações de beleza coincidem com o estado consciente do sujeito e a representação (BARBOSA, 2005, p 13).

O autor considera que o despertar do senso estético é inerente a poucos ramos da Matemática e que o tema fractais apresenta em si grande potencial para o desenvolvimento dessa habilidade.

Na próxima seção, apresentamos algumas características do *software* Geogebra sem a pretensão de estarmos oferecendo um tutorial do mesmo. Comentamos também alguns trabalhos desenvolvidos com seu auxílio.

2.3 *Software* Geogebra

Tendo presente as considerações acerca da importância do uso do computador no contexto escolar, utilizamos o *software* Geogebra no decorrer do nosso processo investigativo. Trata-se de um *software* matemático gratuito que funciona na plataforma Linux, presente nos laboratórios da maioria das escolas públicas, sendo também compatível com Windows. As ilustrações criadas com o *software* Geogebra podem ser usadas no Word, no Open Office ou no LaTex, o que lhe dá uma vantagem didática. Além disso, possui versão disponível em português, fator este que facilita seu uso junto aos estudantes que não dominam outro idioma.

O *software* Geogebra foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgoem (2001). Desde então, sua popularidade tem crescido consideravelmente, contando com suporte de vários Institutos Geogebra espalhados por diversos países do mundo e vinculados ao Internacional Geogebra Institute – IGI, organização sem fins lucrativos criada devido à ampla divulgação do *software*. Os Institutos procuram:

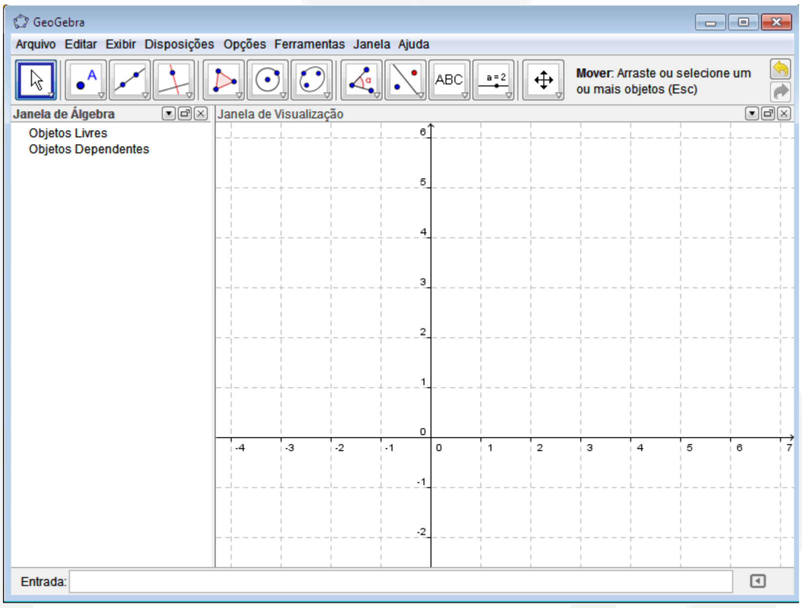
- Desenvolver materiais gratuitos para oficinas de Geogebra;
- Oferecer oficinas para professores e para futuros formadores sobre o Geogebra;
- Desenvolver e implementar novas funcionalidades do *software* Geogebra;
- Desenvolver um sistema de apoio on-line para professores;
- Avaliar e melhorar as atividades de desenvolvimento profissional e materiais;
- Projetar e implementar projetos de pesquisa com o Geogebra e para os IGI;
- Comunicações em conferências nacionais e internacionais (INSTITUTO GEOGEBRA SÃO PAULO, s/d, texto digital).

O uso do *software* Geogebra possibilita a exploração de objetos geométricos e algébricos de forma interativa, como o próprio nome sugere GEOmetria+álGEBRA, sendo assim destinado ao ensino de Geometria, Álgebra e Cálculo. Permite a exploração de diferentes conteúdos matemáticos nos diferentes níveis de ensino. Seu endereço eletrônico é www.geogebra.org.

Construções com pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas e também com funções que podem ser alteradas de maneira muito dinâmica são ações permitidas por meio do *software*. Ele também apresenta um campo destinado à inserção de equações e coordenadas. Dessa forma, é possível trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos, além de encontrar derivadas e integrais de funções com comandos próprios da análise matemática (SÁ, 2010).

Sua interface é simples como podemos observar na Figura 3, mostrando-se de fácil entendimento a partir de um menu e uma lista desdobrável de botões que oferecem várias possibilidades de construção. Possui a opção de inserir o plano cartesiano e a malha quadriculada, facilitando relações com abordagens feitas fora de seu ambiente. Um diferencial importante é a opção de se criar uma nova ferramenta que facilita a construção de fractais, evitando o maçante exercício de repetição que o uso do papel e caneta exigiria.

Figura 3 – Janela principal do Geogebra.

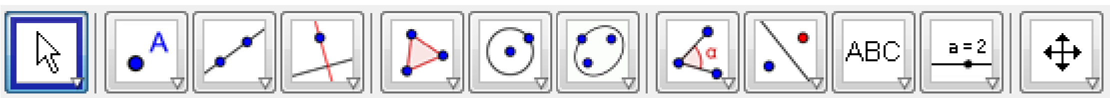


Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

Um dos diferencias desse programa em relação aos outros *softwares* de Geometria Dinâmica é o fato de se poder acessar as funções, tanto via botões na Barra de Ferramentas, quanto pelo Campo de Entrada. Além disso, podemos alterar as propriedades dos objetos construídos via Janela da Álgebra e também através de algumas ferramentas do Botão Direito do *Mouse*.

A Barra de Ferramentas está dividida em janelas como as que apresentamos na Figura 4.

Figura 4 – Janelas do Geogebra



.Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

Cada janela possui várias ferramentas que podem ser visualizadas com um clique na parte inferior do ícone. Assim, o programa abrirá as opções referentes à janela. Cada ícone tem um desenho e um nome para ajudar a lembrar o que a ferramenta faz.

O Campo de Entrada fica no rodapé da janela do Geogebra. Por meio dele, é possível operar com o programa, usando comandos escritos que desempenham praticamente as mesmas funções da Barra de Ferramenta. Dependendo do objetivo que se tem, esse recurso pode apresentar algumas vantagens, como, por exemplo, a precisão de um ponto ao digitarmos suas coordenadas que com um clique no *mouse* pode não sair no local desejado.

A Janela da Álgebra, que geralmente aparece quando iniciado o Geogebra, pode ser ocultada a partir da Barra de Menu, em EXIBIR e marcando a opção JANELA DE ÁLGEBRA. Uma das funções desta Janela é exibir as informações algébricas dos objetos que estão na Janela de Visualização, sendo possível editar as suas respectivas propriedades. Para tanto, é preciso clicar com o botão direito do *mouse* sobre a informação algébrica do objeto e escolher a opção "PROPRIEDADES" ou, então, fazer esta edição com um duplo clique sobre a informação algébrica.

O uso *software* Geogebra, assim como outros tantos existentes, apresenta potencial que, se agregado a novas estratégias de ensino e de aprendizagem, possibilita alunos e professores explorarem, conjecturarem e investigarem diversos conhecimentos matemáticos. Assim, encontramos o *software* Geogebra sendo usado para o desenvolvimento de diferentes temáticas dentro do ensino da Matemática. Macedo e Franco (s/d) propõem com o auxílio do mesmo a construção de fractais famosos, como a Curva de Koch, a ilha de Koch ou Floco de Neve, o Triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski, fornecendo também as respectivas fundamentações teóricas para essas construções. Afirmam, inclusive, que buscam com isso incentivar e aprofundar a pesquisa por parte dos docentes e educandos nas suas diversas aplicações e utilizações. As vantagens do uso do Geogebra nesse processo de construção de fractais são muito mencionadas pelos autores, ressaltando que o mesmo é livre, não sendo necessário custo para sua instalação.

O desenvolvimento de outros conteúdos que não os fractais com uso do *software* pode ser exemplificado no trabalho de pesquisa de Araújo (2010), realizado com estudantes do nono ano do Ensino Fundamental e do segundo ano do Ensino Médio, visando construir conceitos de circunferência e mediatriz sob o ponto de vista de lugares geométricos e com o uso do referido *software*. O estudo partiu de um levantamento dos conhecimentos prévios que os alunos tinham sobre o tema, sendo, em seguida, proposta uma interferência, associando o conteúdo a situações cotidianas e a aplicação do mesmo em aprendizagens de geometria. A mediação do *software* de Geometria Dinâmica nesse processo foi considerada importante na superação dos problemas encontrados.

Borges (2009) relata outra experiência com o uso do Geogebra numa turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da cidade de Francisco Morato em São Paulo. Ele propôs uma sequência de 12 atividades que buscavam compreender as razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico. Foram identificados avanços na aprendizagem dos alunos sob a interferência do *software*, visto que este propiciou maior interesse e concentração por parte dos educandos. Além disso, a movimentação e a visualização (da variação das medidas dos segmentos, dos ângulos, das coordenadas, dos pontos) possibilitadas pelo uso do *software* foram apontadas como um fator que contribuiu na compreensão dos conteúdos abordados.

Valim e Colucci (s/d) sugerem uma abordagem dos fractais para o Ensino Médio e Fundamental de forma a aproveitá-los para desenvolver outros conteúdos da grade curricular, como as sequências e progressões geométricas com a construção do fractal triminó. O triângulo de Sierpinski foi apontado para tratar de conceitos sobre triângulos equiláteros, mediatriz e pontos médios de um segmento. O Geogebra foi mencionado apenas na construção da ilha de Koch como um meio de explorar o uso da régua e do compasso virtual e a área das figuras formadas nas diferentes iterações. Novamente trata-se apenas de propostas de atividades, cujos resultados da aplicação não são mencionados, assim como detalhes do processo de desenvolvimento efetivo com alunos.

Sob a forma de organização de um minicurso, Vier e Oliveira (2010) propõem uma sequência didática a professores do Ensino Fundamental e do Médio que visa possibilitar a compreensão das propriedades dos quadriláteros desenvolvida com o *software* Geogebra. São apontadas vantagens, como o dinamismo presente na movimentação e a construção das figuras, além da rapidez na execução, permitindo ao discente passar pelas etapas de exploração concreta, experimentação e elaboração de conjecturas informais.

Estimulando o aluno a apreciar a Arte por intermédio da Matemática, Rossi e Bisognin (2009) desenvolveram um trabalho com uma turma de 6ª série do Ensino Fundamental em que exploraram os ladrilhos e frisos presentes nas Igrejas Matrizes da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul. As simetrias, translações e rotações presentes nos frisos foram exploradas por meio do *software* Geogebra que, segundo os autores, muito contribuiu com a visualização e investigação das propriedades geométricas, bem como no desenvolvimento da criatividade e raciocínio lógico, despertando o gosto pelo estudo e compreensão dos valores culturais e estéticos importantes na apreciação artística.

Dando ênfase à importância do papel do professor nos processos de ensino e de aprendizagem, Nóbriga e Araújo (2010), ao proporem uma série de atividades que exploram diversos conteúdos dos Ensinos Médio e Fundamental com o uso do *software* Geogebra, afirmam acreditar que o docente não deva ir ao laboratório de informática com seus alunos para ensinar-lhes a usar *software*, mas sim Matemática. Os autores ressaltam que o *software* por si só não ensina sozinho e que para haver aprendizagem é necessário reflexão por parte do educando na execução das atividades. Assim, através da experimentação, os estudantes poderão perceber propriedades, conjecturar e justificar.

Apesar dos trabalhos aqui referenciados, acreditamos que ainda existe muito potencial a ser explorado na abordagem da geometria com utilização do *software* Geogebra. Desenvolver conteúdos geométricos e algébricos através de uma abordagem alternativa dos fractais utilizando como ferramenta de apoio o *software* Geogebra é o grande objetivo deste trabalho. Com esse intuito, elaboramos uma Intervenção Pedagógica desenvolvida com 20 alunos da 7ª série de uma escola municipal de Venâncio Aires, cujo desenvolvimento é apresentado no Capítulo que segue.

3 INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

A intervenção pedagógica foi desenvolvida com uma turma de 7ª série do Ensino Fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental Otto Gustavo Daniel Brands no município de Venâncio Aires. A turma era composta de 20 alunos, sendo 11 meninas e 09 meninos, que frequentavam as aulas no turno da manhã, estando estes na faixa etária de 12 a 16 anos. Três eram repetentes e uma aluna não frequentou nenhuma das aulas presenciais da intervenção pedagógica por estar de atestado médico prolongado devido sua gestação de risco.

Os alunos da referida turma residiam nas proximidades da escola, cabendo a observação que essa região notavelmente vem aumentando o número de moradores, pois as construções de casas novas são visíveis, refletindo no acréscimo do número de alunos do educandário, que, recentemente, foi ampliado. Três novos estudantes acabavam de ingressar na série em questão por passarem a residir perto da escola, sendo, portanto, o primeiro ano que a frequentavam.

A escolha da turma se deu pelo fato de a autora deste trabalho lecionar e ser a professora titular da disciplina de Matemática na já mencionada instituição de ensino. Esse fato permite, pelas experiências pedagógicas já vivenciadas com o grupo, afirmar que muitos deles, apesar de possuírem os conhecimentos básicos na área da Matemática que os levou a serem promovidos para a atual série, apresentavam dificuldades significativas em sua aprendizagem, necessitando sempre de muitos estímulos e incentivos.

Na seção que segue, apresentamos a intervenção pedagógica de forma detalhada, dividindo-a em dez subseções que compreendem cada uma das atividades desenvolvidas juntamente com as análises realizadas.

3.1 Prática pedagógica: desenvolvimento e análise

A prática pedagógica foi desenvolvida dentro da carga horária da disciplina de Matemática. Foram realizados 14 encontros distribuídos dentre 24 horas aulas de 45 minutos cada uma.

Ao descrevermos as atividades realizadas, apresentamos também respostas fornecidas por alguns alunos para exemplificar e reforçar considerações feitas. Para mantermos o anonimato dos discentes, optamos por codificá-los como A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19 e A20. As atividades foram organizadas em dez subseções juntamente com as análises realizadas em cada uma.

3.1.1 Atividade 1: Descobrindo a Geometria Fractal

1) *Faça o desenho das formas geométricas que você conhece com seu o respectivo nome:*

2) *Agora faça uma lista de dez coisas que você pode observar na natureza e associe com a forma geométrica que mais lhe pareça familiar:*

Quadro 1 – Associação de elementos da natureza a formas geométricas.

Elemento observado	*Forma geométrica a que você o associa*

Fonte da autora.

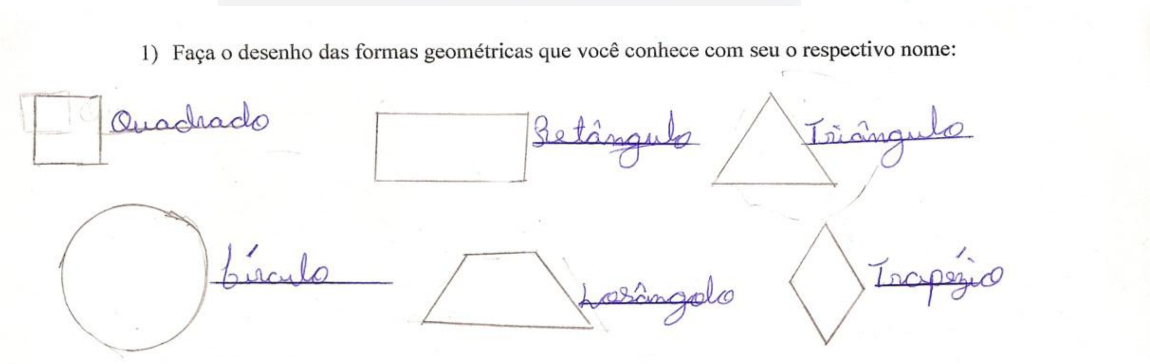
3) Você teve alguma dificuldade em associar os elementos escolhidos com uma forma geométrica conhecida? Por quê?

Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 1

Para dar início à intervenção pedagógica, propomos a Atividade 1 com o objetivo de despertar nos alunos a percepção da insuficiência da Geometria Euclidiana na representação de elementos da natureza.

Começamos com o questionário que instigou os alunos a lembrarem quais formas geométricas conheciam. Um número significativo deles, quase a totalidade, mencionou as figuras do retângulo, triângulo e do quadrado, sendo que apenas um, ao desenhar um retângulo e nomeá-lo, fê-lo incorretamente, confundindo-o com o quadrado. Acreditamos que isso tenha ocorrido pelo fato de serem figuras muito usadas no dia a dia e já estarem sendo trabalhadas desde a pré-escola. Outras figuras, como o losango, círculo, circunferência, paralelogramo e trapézio surgiram. O losango e o trapézio foram trocados por grande parte da turma, que desenhava um e dava o nome do outro, como podemos observar na Figura 5.

Figura 5 – Formas geométricas apresentadas pelo aluno A9.



Fonte: Atividade realizada pelo Aluno A9 (2012).

Dois alunos citaram o hexágono ao desenharem o trapézio retângulo. Apenas um mencionou o termo redondo para se referir ao círculo e desenhou um cilindro e o nomeou de cubo. Estes dados nos permitiram concluir que os alunos apresentavam algum conhecimento das formas da geometria euclidiana já estudadas em série anteriores.

Na sequência, os docentes foram convidados a observar objetos ou elementos quaisquer da natureza e associá-los às formas geométricas conhecidas. Percebemos que eles utilizaram um tempo maior, demonstrando hesitação nas respostas, pois queriam primeiro encontrar algum elemento que soubessem relacionar sem antes fazerem uma listagem para depois realizar a associação. Um aluno, o último a entregar a atividade, não completou a relação de dez elementos pedidos, afirmando não ter conseguido encontrar elementos da natureza que atendessem ao enunciado. Ao analisarmos as respostas, constatamos que apenas três estudantes afirmaram não terem tido dificuldade de estabelecer as relações solicitadas. Os demais justificaram os obstáculos com os argumentos que seguem:

Aluno A5: *Sim, eu tive porque na natureza não tem quase nada parecido com um desenho geométrico, só algumas coisas e por isso é difícil achar desenho geométrico*.

Aluno A4: *Foi muito difícil, porque as coisas não são tão parecidas com uma forma geométrica.*

Aluno A19: *Sim, porque na natureza temos várias coisas e foi um pouco difícil associar aos elementos geométricos*.

Aluno A18: *No final sim, porque as coisas fáceis eu tinha botado no começo. Existem muitas coisas que passam pela cabeça da gente para associar. A natureza tem coisas que são parecidas, não iguais e são difíceis de notar a semelhança.*

A exploração detalhada das respostas obtidas foi feita em um momento de socialização, seguida de um questionamento sobre as formas da natureza poderem todas serem associadas ou construídas a partir das figuras geométricas euclidianas. Acrescentamos questões do tipo: Como a natureza sabe construir essas estruturas? Como ela sabe a regra de construção?

Barbosa enfatiza o que observamos na análise dos dados coletados com os alunos quando diz:

> Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam as irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones

> etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas (BARBOSA, p 10,2005).

Comentamos o surgimento da Geometria Fractal para sanar a insuficiência da geometria euclidiana percebida pelos alunos na realização da atividade anterior. Apresentamos em forma de slides (APÊNDICE E) com imagens, exemplificando, conceituando e mostrando diferentes aplicações.

3.1.2 Atividade 2: Conhecendo o *software* Geogebra

A atividade 2 foi o primeiro contato dos alunos com o *software* Geogebra para que pudessem conhecê-lo e explorá-lo sem estarem sendo conduzidos por uma atividade dirigida.

Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 2

Os alunos foram informados de que construiríamos alguns fractais no laboratório de informática com o auxílio do *software* Geogebra. Propomos o primeiro contato com o *software* com o objetivo de conhecer sua interface e algumas de suas possibilidades. No primeiro momento, apresentamo-lhes os passos operacionais de acesso ao *software* Geogebra.

Após a exposição do *software,* os alunos usufruíram um tempo livre para que pudessem se familiarizar com as funções e possibilidades de trabalho com uso do mesmo. Zuchi (2008) endossa que as potencialidades de um ambiente informatizado estão intimamente ligadas ás especificidades do mesmo e que conhecê-las pode ajudar a explorar os recursos da ferramenta de maneira a potencializar determinada atividade. Assim, contatar e explorar o *software* foi importante para que os docentes melhor desenvolvessem as atividades posteriormente propostas.

Nesse momento, foi possível perceber muitas aprendizagens sendo construídas e consolidadas. Ao abrirem as janelas com os diferentes ícones, todos com desenhos disponíveis para visualização, ouviam-se comentários tais como: "*Qual a diferença entre segmento de reta e reta?*" Ou então: "*Por que quando uso a ferramenta reta ela não termina nas pontas?*" Além das trocas entre os alunos, houve a intervenção da professora com o intuito de utilizar as observações feitas e as experimentações para explorar de forma mais intensa os conteúdos intrínsecos nas falas ocorridas. Rezende (2002) enfatiza que os meios, por si só, não são capazes de trazer contribuições para a área educacional e que eles são ineficientes se usados como ingredientes mais importantes do processo educativo ou sem a reflexão humana. Assim, ressaltamos a importância do professor como mediador do processo e sua competência ao interferir com o propósito de aproveitar as potencialidades no recurso em uso.

3.1.3 Atividade 3: Construção da Curva de Koch com o *software* Geogebra

Após ter construído no Geogebra a curva de Koch, preencha o quadro que segue, que é uma atividade modificada de Gomes (2007), tomando como base o segmento inicial de comprimento c:

Quadro 2 – Atividade sobre a Curva de Koch.

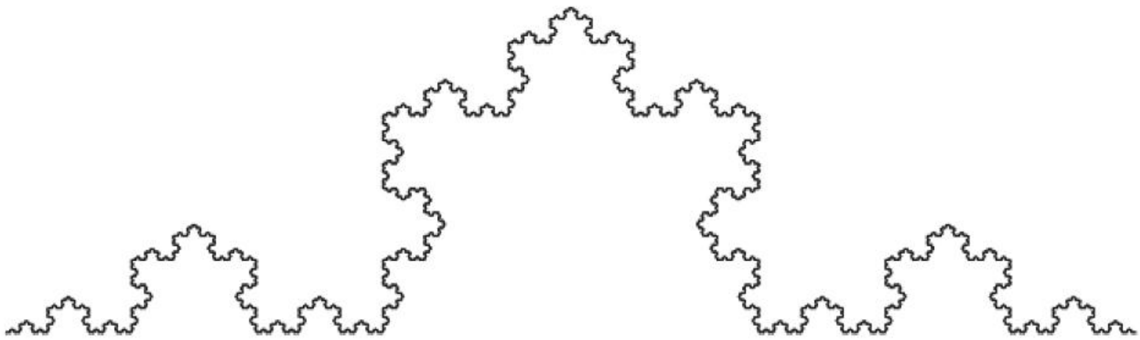
Ilustração	*Nº de iterações realizadas*	*Nº de segmentos*	*Comprimento de cada segmento*	*Comprimento total da curva*
	0			
	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
	...			

Fonte: Produção da autora, adaptado de Gomes (2007).

Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 3

A Curva de Koch mostrada na Figura 6 foi proposta para ser construída no Geogebra com o objetivo de identificar a regra de construção do referido fractal e, em seguida, mobilizar conhecimentos acerca da classificação dos triângulos, segmentos de reta, semirretas, paralelismo, raio da circunferência para a sua construção. Também era objetivo fazer uso da potenciação e dos números racionais para representar os comprimentos dos segmentos em cada iteração.

Figura 6 – Imagem da Curva de Koch.



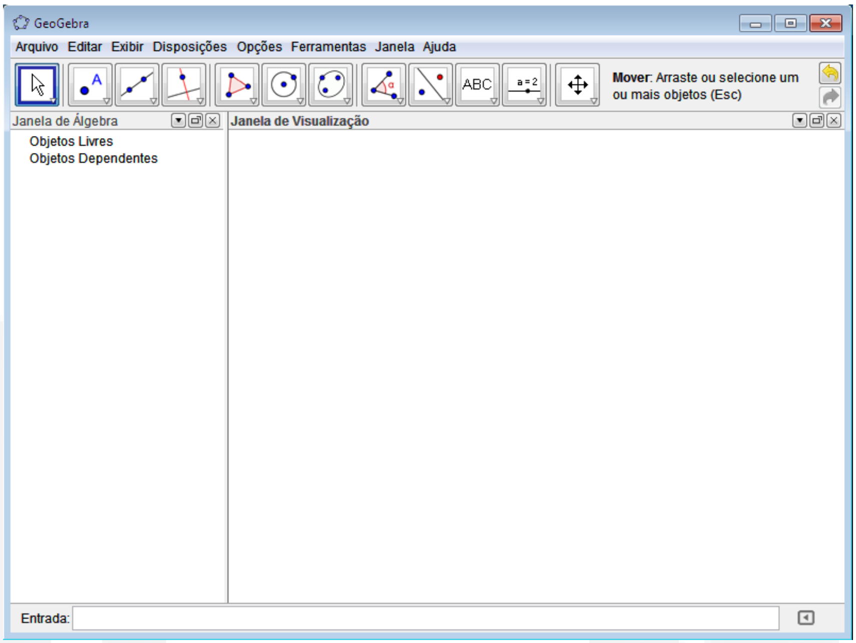
Fonte: CCAPITALIA (2012).

Assim, apresentamos a imagem em slides do fractal Curva de Koch com algumas informações históricas sobre ele. Os alunos foram convidados a identificar as características fractais ali presentes, bem como o padrão geométrico utilizado para sua construção. Inicialmente, percebemos dificuldades na identificação da regra de sua construção, pois, conforme Barbosa (2005), a Geometria Fractal está intimamente ligada à ciência chamada CAOS, que trouxe consigo a possibilidade de ver ordem e padrões onde normalmente só se percebiam o irregular, o aleatório, o imprevisível, ou seja, o caótico. Diminuindo as iterações realizadas na Curva, os educandos foram percebendo o padrão geométrico em uso.

Os passos para a construção do fractal no Geogebra foram discutidos juntamente com os alunos, buscando sempre relacionar cada decisão tomada com o respectivo conteúdo geométrico utilizado. Cabe ressaltar que, nessa etapa, principalmente para a divisão do segmento em três partes iguais, ocorreu um direcionamento mais efetivo por parte da professora, tendo em vista que as sugestões levantadas pela turma eram válidas, mas não úteis à concretização da construção da janela da macro construção que exigia um roteiro mais específico para seu funcionamento posterior. Assim, explicitamos os passos para a construção com base no trabalho de Macedo e Franco (s/d):

- Abrir uma janela no Geogebra e esconder os eixos e a malha quadriculada caso estejam visíveis, clicar em exibir eixos e malha para facilitar a visualização da construção.

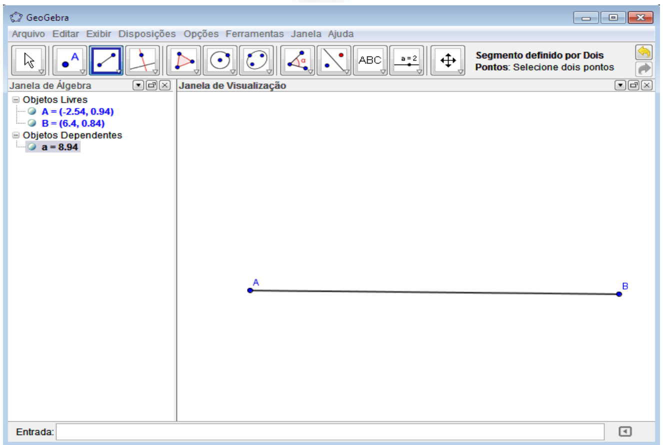
Figura 7 – Interface do Geogebra.



Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

- Questionar os alunos sobre qual deve ser o ponto de partida para a construção do fractal desejado. Partindo das respostas dadas, inicie a construção de um segmento de reta definido por dois pontos, utilizando o terceiro ícone:

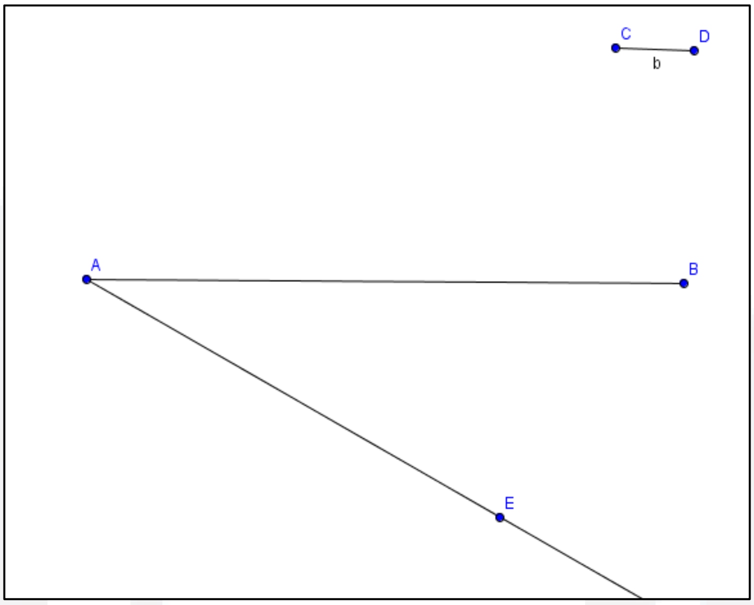
Figura 8 – Ponto de partida para a construção da Curva de Koch.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade da autora, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Após decidir qual deve ser o próximo passo, dividir o segmento em três partes iguais. Ouvir as diferentes sugestões para a realização do proposto e sugerir os passos que seguem para que, ao criar a nova ferramenta, ela funcione. Num outro local da tela, construir outro segmento de reta para ser nossa unidade de medida. Construir uma semirreta do ponto **A** de um tamanho qualquer.

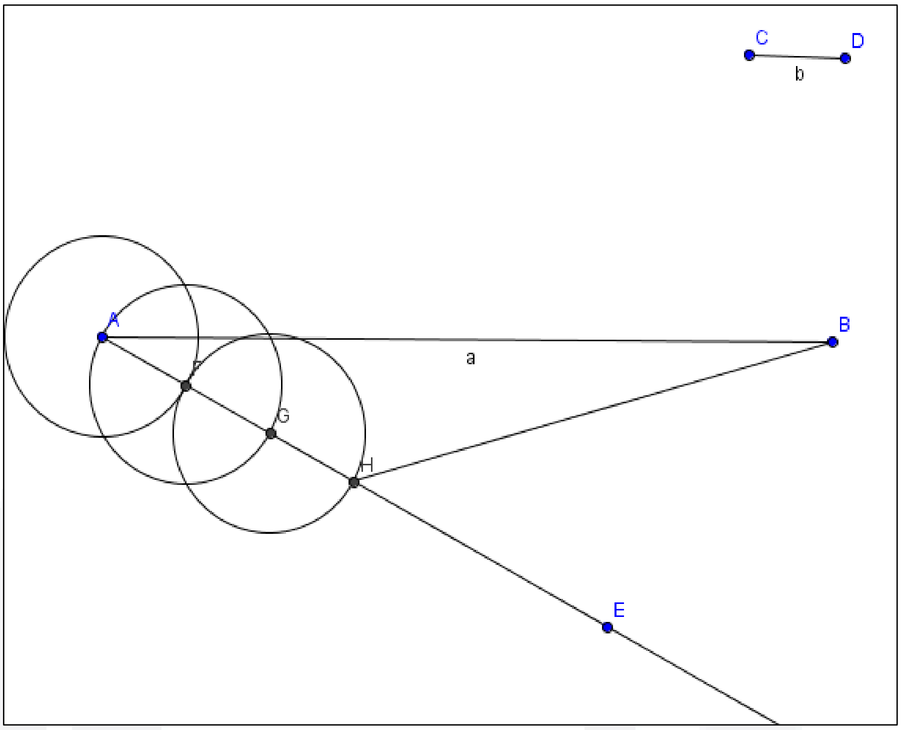
Figura 9 – Sequência da construção da curva de Koch.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Agora, marcar na semirreta três segmentos do mesmo tamanho, utilizando a nossa unidade a partir do ponto **A**. Para isso, construir uma circunferência de centro em **A** e raio b, conforme instruções constantes no 6º ícone – círculo dados o centro e o raio - e marcar a intersecção de dois objetos (circunferência e semirreta – 2º ícone). Repetir o processo mais duas vezes, centrando o círculo na intersecção. Marcar o ponto de intersecção da semirreta, auxiliar com a última circunferência construída.

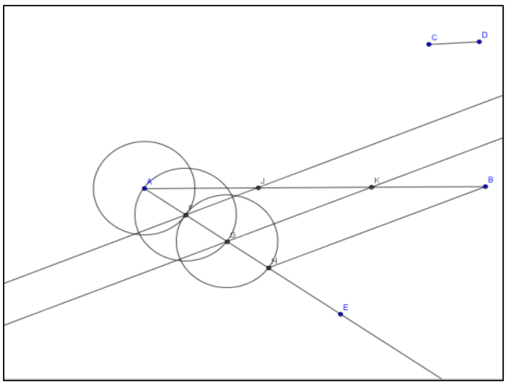
Figura 10 – Continuação da construção da curva de Koch



.Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Traçar o segmento de reta g (3º ícone), passando pelos pontos **B** e **H** e paralelas a g, passando pelos pontos de intersecção F e G de acordo com as instruções do 4º ícone (retas paralelas). Encontrar o ponto de intersecção entre o segmento a e as paralelas que passam por **F** e **G**. Observar a divisão do segmento em três partes congruentes.

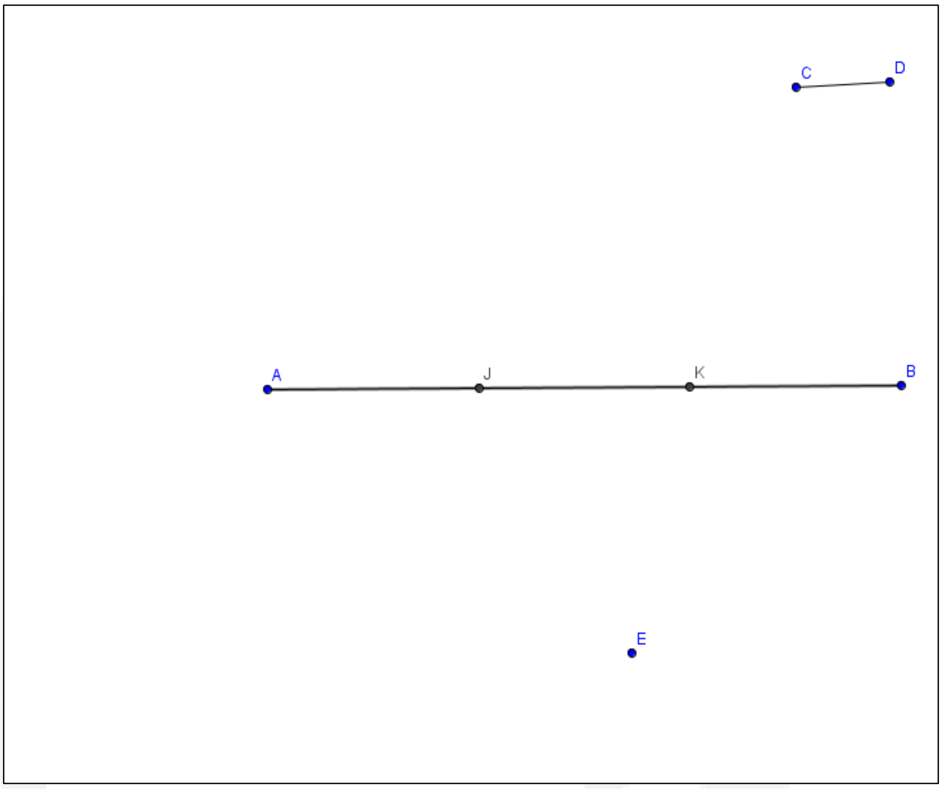
Figura 11 – Processo de construção da curva de Koch.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Para esconder os objetos que aparecem durante a construção, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto e em exibir objeto. Se quiser esconder os nomes dos objetos, clicar em exibir rótulo.

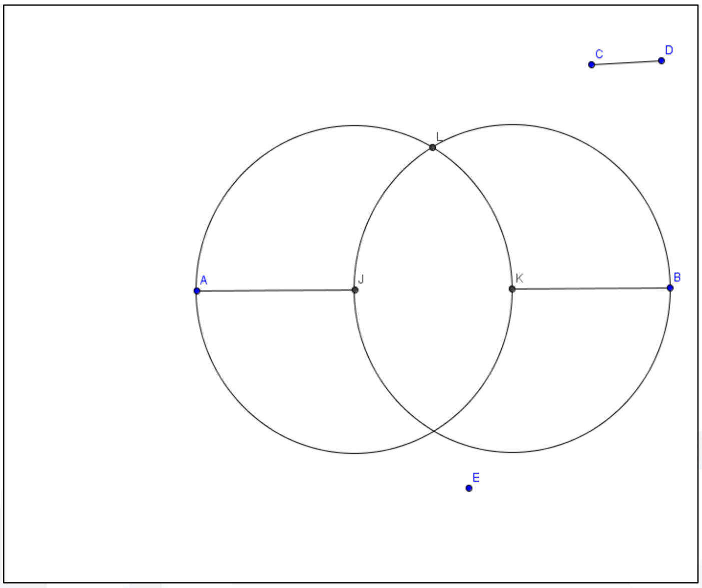
Figura 12 – Imagem com as construções de apoio escondidos.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Para apagar a parte central, teremos que esconder o segmento de reta a e construir dois segmentos de reta: **AJ** e **KB.** Vamos, agora, substituir a parte central por um triângulo equilátero sem um lado e, para isso, desenharemos um círculo de centro em **J** e outro de centro em **K** e raio j ou k. Marcar o ponto de intersecção dessas duas circunferências.

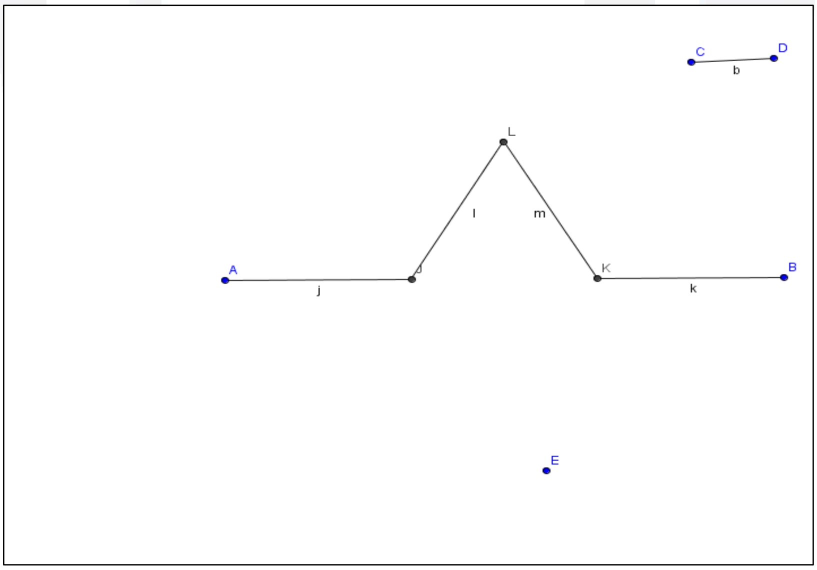
Figura 13 – Intersecção das duas circunferências.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Desenhar o segmento de reta **JL** e **LK** e esconder as circunferências.

Figura 14 – Circunferências ocultas



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora, baseada em Macedo e Franco (s/d).

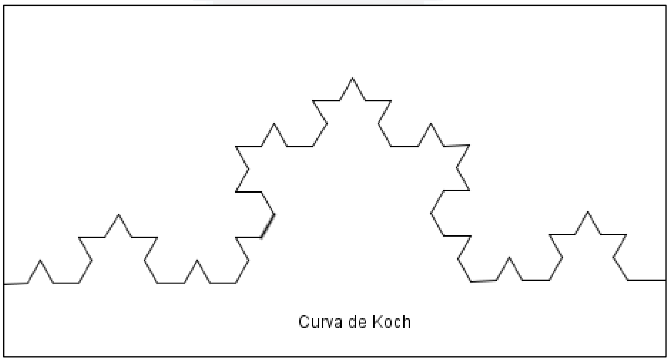
- Agora, precisamos repetir para cada segmento o mesmo processo realizado no segmento inicial. Esse processo é chamado iteração e assim obteremos a curva Koch. Mas esta repetição seria muito trabalhosa. É aqui que temos uma grande vantagem do uso do *software* Geogebra que permite criar uma ferramenta que reproduz a construção. Para isso, ative a opção **ferramentas** – **criar nova ferramenta**, abrindo uma janela com abas que contêm as seguintes informações:

Objetos finais: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros. No nosso caso, são os pontos **J**, **L**, **K**, segmento j, segmento l, segmento m, segmento k. Para inseri-los na construção, basta clicar sobre esses objetos com o botão esquerdo do mouse.

Objetos iniciais: são objetos que foram informados inicialmente e dos quais dependem toda a construção. No nosso exemplo, correspondem aos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, e **E**. Esses objetos, automaticamente, aparecem em objetos iniciais.

Nome e ícone: é o nome dado ao novo ícone conforme o desejado. Após a nomeação dessa ferramenta, clicar em concluído. Aparecerá um novo ícone com a ferramenta construída. Para utilizá-la, é preciso clicar no ícone com o nome dado e nos pontos **A**, **J**, **C**, **D**, **E.** Ao construir essa nova parte da curva, teremos que esconder o segmento j para eliminar o central. Vamos repetir esse processo, mas agora com os segmentos **J**, **L**, **C**, **D**, **E**; **L**, **K**, **C**, **D**, **E** e **K**, **B**, **C**, **D**, **E**. Podemos fazer quantas iterações desejarmos. A Figura 15 que segue mostra três iterações.

Figura 15 – Curva de Koch concluída.

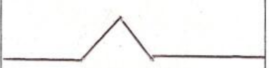


Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora, baseada em Macedo e Franco (s/d).

A partir da construção do fractal Curva de Koch, foi proposta a atividade de exploração do fractal já mencionada. Assim, todo o processo permitiu retomar para alguns alunos, e até introduzir para outros, conceitos sobre classificação de triângulos, elementos de uma circunferência, diferenciando medidas de raio e diâmetro, retas, semirretas, segmentos de reta, paralelismo. A potenciação e os números fracionários foram também muito enfatizados.

Outro aspecto a ser ressaltado na análise dos resultados obtidos, conforme mostra a Figura 16, é quanto ao campo destinado à ilustração. A maioria dos alunos não completou esse espaço até o fim, pois, na medida em que aumentava o número de iterações, eles manifestavam oralmente a dificuldade em representar o desenho e desistiam de concluí-lo. Tal fato não aconteceu quando o mesmo foi feito com o auxílio do *software* Geogebra, podendo assim ser evidenciada a importância desse recurso para a realização das atividades propostas. O uso da ferramenta computacional fez com que o trabalho maçante da repetição do padrão geométrico em questão não ocorresse, cedendo o tempo para o desenvolvimento de outras habilidades, hoje mais importantes na educação e na sociedade.

Figura 16 – Atividade 3 apresentada pelo aluno A2.

Ilustração	Nº de iterações realizadas	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da curva
	0	$=1$	C	C
	1	4	$\frac{1}{3}C$	$4 \cdot \frac{1}{3}C$
	2	4^2	$\frac{1}{3^2}C$	$4^2 \cdot \frac{1}{3^2}C$
	3	4^3	$\frac{1}{3^3}C$	$4^3 \cdot \frac{1}{3^3}C$
	4	4^4	$\frac{1}{3^4}C$	$4^4 \cdot \frac{1}{3^4}C$
	5	4^5	$\frac{1}{3^5}C$	$4^5 \cdot \frac{1}{3^5}C$
	...	4^m	$\frac{1}{3^m}C$	$4^m \cdot \frac{1}{3^m}C$

Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A2.

A observação da atividade exemplificada pela Figura 16 também nos permitiu constatar que os alunos fizeram uso da potenciação para representar o número de segmentos e o respectivo comprimento, evidenciando que se apropriaram do referido conhecimento na representação da situação apresentada. Também cabe destacar o uso do número fracionário na representação do comprimento de cada segmento como importante aprendizagem efetivada, pois, em experiências anteriores, os educandos demonstravam dificuldades relacionadas ao domínio do conteúdo. Assim, atingimos o objetivo proposto pela atividade.

Ademais, podemos destacar o fato de que foram os alunos que forneceram informações e comandos para que o *software* realizasse o que desejavam e era conveniente para a ocasião numa espécie de programação. Não foi uma simples combinação de teclas ou ícones para que tudo estivesse pronto. Foi perceptível a mobilização de conceitos e estratégias já presentes na bagagem cultural de cada um, bem como a busca por outros que a atividade exigia. Nesse sentido, Valente (1997) afirma:

> Primeiro, a iteração com o computador através da programação requer a **descrição** de uma idéia em termos de uma linguagem formal e precisa. Segundo, o computador **executa** fielmente a descrição fornecida e o resultado obtido é fruto somente do que foi solicitado à máquina. Terceiro, o resultado obtido permite ao aluno **refletir** sobre o que foi solicitado ao computador. Finalmente, se o resultado não corresponde ao que era esperado, o aluno tem que **depurar** a idéia original através da aquisição de conteúdos ou de estratégias. A construção do conhecimento acontece pelo fato de o aluno ter que buscar novas informações para completar ou alterar o que ele já possui. Além disso, o aluno está criando suas próprias soluções, está pensando e aprendendo sobre como buscar e usar novas informações (aprendendo a aprender) (VALENTE, 1997, p 3, grifo do autor).

O autor prossegue afirmando que o ciclo descrever-executar-refletir-depurar não ocorre simplesmente com a colocação do aluno em frente ao computador, mas destaca a mediação do profissional que saiba o significado do processo ensino aprendizagem através da construção do conhecimento. Além disso, o domínio do conteúdo que está sendo abordado e a compreensão dos potenciais do computador são aspectos ressaltados como importantes para que o professor possa interpretar as ideias dos discentes e intervir apropriadamente de modo a contribuir com o processo de construção do conhecimento por parte do educando. O ciclo citado pelo autor pôde ser claramente observado durante a realização das atividades propostas, visto que os estudantes forneciam ordens de comando para o computador e, ao se depararem com o resultado que nem sempre era o esperado, precisavam refletir e tomar novas decisões.

3.1.4 Atividade 4: Construção da Ilha de Koch ou Floco de Neve com o *software* Geogebra

Explorando o fractal Floco de Neve com atividades baseadas em Barbosa (2005):

1) Contagem dos segmentos:

a) Quantos lados tem a figura inicial do fractal? Suas medidas são iguais? Por quê?

____

____

____

____

b) Após realizada a primeira iteração, quantos segmentos passou a ter cada um dos seus lados?

____

____

c) E a figura toda passou a ter quantos segmentos?

____

____

d) Após a segunda iteração, cada um dos segmentos passou a ser substituído por quantos? Ficando agora a figura com que total de segmentos?

____

____

____

e) Seguindo este mesmo raciocínio, como poderíamos representar o total de segmentos após três iterações? Quatro? Cinco? E após as iterações?

____

____

____

____

2) Perímetro: considerando o comprimento do lado do triângulo inicial como c, responda:

a) Qual o perímetro do triângulo inicial?

____

____

b) Após a primeira iteração, cada segmento resultante passou a medir que parte do segmento inicial c?

____

____

c) Então, como podemos expressar o perímetro neste nível?

____

____

d) De quanto foi este aumento em relação ao nível anterior?

____

____

e) Se continuarmos a realizar as iterações, o que acontecerá com o valor do perímetro do Floco de Neve?

____

____

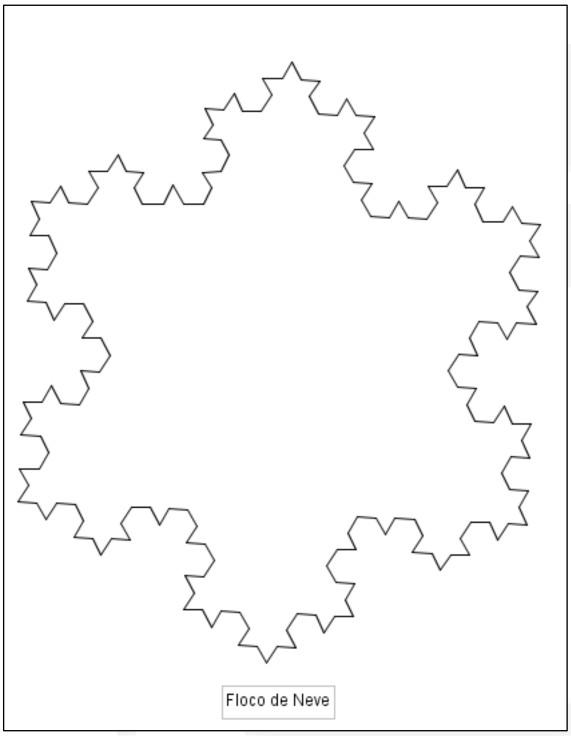
Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 4

A Atividade 4 foi proposta com o objetivo de identificar a regra utilizada na construção do fractal de modo a estabelecer relações com o Floco de Neve construído anteriormente. Além desse, constituíram objetivos retomar os conceitos similares ao da Atividade 3, agora aplicados em contexto diferenciado, bem como usar a álgebra nas generalizações exigidas.

Mostramos, assim, a imagem projetada do fractal Floco de Neve e os alunos imediatamente foram encontrando semelhanças com o fractal anteriormente trabalhado. Chegaram a sugerir que o ponto de partida pudesse ser um segmento de reta como o que ocorreu na Curva de Koch, mas refutaram a ideia e chegaram ao polígono regular, mais especificamente ao triângulo equilátero como figura inicial.

Após a troca de várias ideias, alguém perguntou se não poderíamos usar a mesma ferramenta que haviam construído para a Curva de Koch, pois acharam trabalhoso o processo adotado para a divisão do segmento em três partes iguais. Assim, fazendo uso da macro ferramenta por eles feita e já disponível entre as janelas na Barra de Ferramentas, construíram sobre cada um dos lados do triângulo a curva de Koch, que aparenta, após cada iteração, um Floco de Neve, conforme a imagem da Figura 17 produzida por um aluno após a terceira iteração.

Figura 17 – Fractal Floco de Neve construído pelo aluno A3 após três iterações.

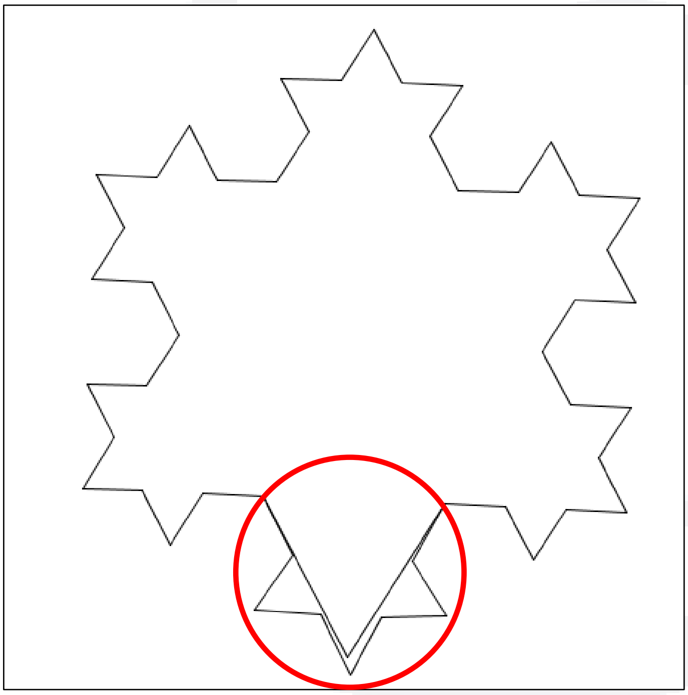


Fonte: Interface do Geogebra com atividade construída pelo Aluno A3.

Um fato que merece destaque foi o desenvolvimento dessa atividade por um aluno que apresentava um histórico de muita inquietude em aula, distraindo-se sempre com muita facilidade com qualquer acontecimento ao seu redor. Essa atividade, para ele, foi especialmente desafiadora à sua concentração, assim como também deve ter sido para os demais, talvez não com a mesma intensidade, pois, ao fazer uso da macro ferramenta, é necessário que se clique nos cinco pontos de referência em uma ordem única. Como o educando em questão seguidamente se distraía, clicava em um mesmo ponto duas vezes ou não respeitava a ordem. Quando solicitava ajuda e lhe era sugerido refazer a trajetória, sendo acompanhado para que se desse conta que a falta de concentração o prejudicava, reclamava muito. Entretanto, ao repetir várias vezes a mesma cena, melhorou sua postura frente ao desenvolvimento da atividade.

A troca e a ajuda mútua entre os colegas foi outro aspecto positivo e percebido quando um deles, que apresentava um domínio maior do recurso computacional, auxiliava os demais sem que fosse solicitado. Além disso, ao lidarmos com tecnologias, seguidamente acontecem fatos inusitados. Relembrando as afirmações de Borba e Penteado (2003), estamos em uma zona de risco. Um exemplo disso aconteceu quando, no trabalho de alguns colegas, ao fazerem uso da macro ferramenta criada, a iteração não saia como deveria. Mas, isso não acontecia em todos os segmentos, apenas em alguns, como mostra a Figura 18, e ninguém conseguia descobrir o porquê, nem a professora.

Figura 18 – Floco de Neve na segunda iteração mostrando um erro que estava acontecendo no trabalho de alguns alunos.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade construída pelo Aluno A7 (2012).

Um colega compartilhou que, ao apagar um ponto e refazê-lo, dava certo, porém, em seguida, o problema persistia. Nesse momento, outro descobriu que isso ocorria porque não estavam selecionando apenas um ponto, mas um segmento junto, provocando o erro. Esse foi um dos acontecimentos, dentre tantos, que costumam envolver o uso do computador e, segundo os autores acima citados, um dos motivos para seu não uso por parte de alguns professores que se sentem inseguros frente a situações como essa e preferem ficar em uma zona de conforto onde conseguem prever até mesmo os erros cometidos pelos alunos. Erros estes passíveis de reflexão, uma vez que podem ser propulsores de novos conhecimentos.

Situações como a mencionada também permitem que se repense o papel do docente nos dias atuais, que não é mais um detentor do conhecimento a ser repassado, mas um mediador de situações de aprendizagens.

Giraffa (2010) afirma que o paradigma mudou e o professor troca de papel: ele deixa de ser o fornecedor de informação para ser o organizador do processo de aprendizagem. É o guia, o orientador e o facilitador. Entretanto, isso não significa que o educador possa prescindir do conhecimento; ao contrário, precisa ampliar ainda mais seu campo cognitivo e atualizar-se constantemente para melhor preparar seus alunos.

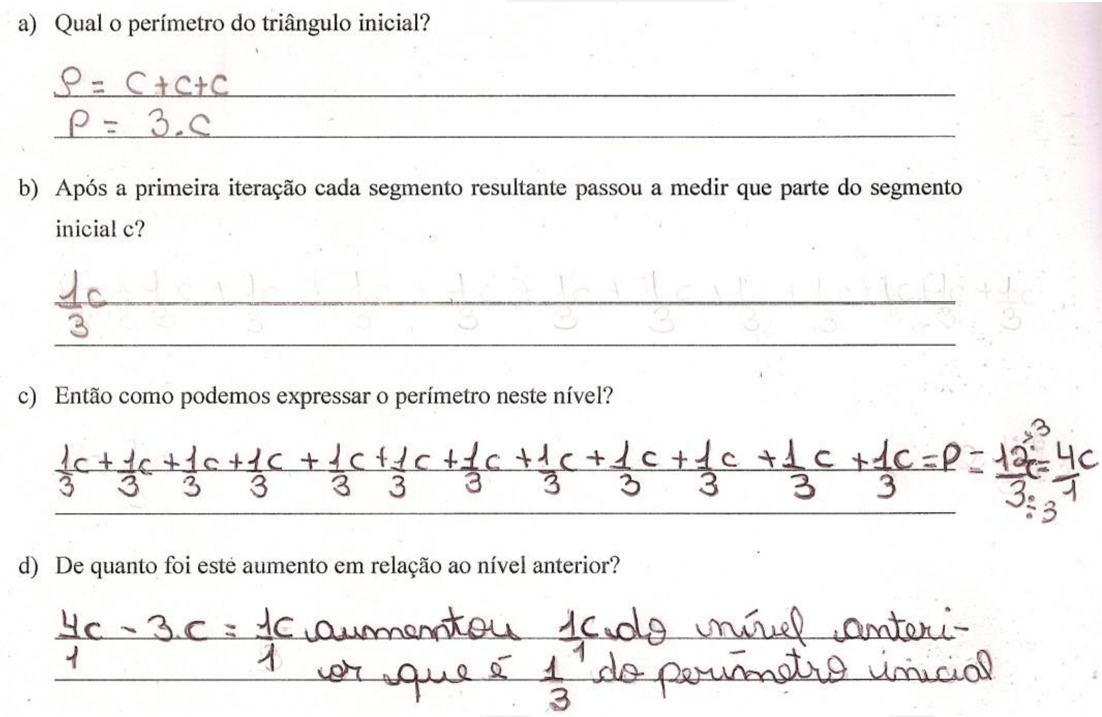
Concluída a construção da Ilha de Koch no Geogebra, foram distribuídas aos alunos as questões já descritas. Grande parte demonstrou muita dificuldade ao responder algumas delas, principalmente quando a exigência eram generalizações ou cálculos que retomavam conceitos, como operações com frações. Constatação esta baseada nos muitos questionamentos feitos durante a realização das atividades por parte dos educandos. Foi necessário instigá-los a pensar as diferentes formas de representar o pensamento matemático que expressavam oralmente, pois os obstáculos se faziam presentes quando usavam a linguagem matemática. O relato dessa situação poderia nos levar à suposição de que houve certa desvalia da atividade proposta; no entanto, nós a vimos como um ganho no processo de aprendizagem, pois os discentes foram encorajados e desafiados a crescerem e avançarem em seus conhecimentos.

Conseguir mobilizar o que já se sabe acerca de um conteúdo a fim de resolver diferentes situações que se apresentam é uma habilidade necessária não só no ambiente escolar, mas na sociedade de um modo geral. Gravina e Contiero (2011) ressaltam a importância da prontidão intelectual na sociedade da informação em que estamos inseridos. Os autores entendem por esse termo a capacidade de aprender rapidamente um novo assunto, utilizando-o na resolução de problemas que se apresentam. Eles ainda dizem que:

> Uma educação matemática que pretenda preparar os indivíduos para bem viverem nesta complexa sociedade deveria levar em consideração, de forma especial, o desenvolvimento de habilidades e atitudes que concorrem para tal prontidão intelectual. Quanto às habilidades, destacamos algumas delas: a habilidade para lidar com situações complexas, que exijam múltiplas estratégias de resolução; **o saber expressar uma situação em linguagem matemática**; e sobretudo, a aptidão para resolver problemas novos e não rotineiros, que dependem de raciocínios e conhecimentos matemáticos. E quanto às atitudes, algumas delas seriam: a valorização da matemática como ferramenta para resolução de problemas; **a confiança em dispor de tal conhecimento quando necessário**; as práticas cooperativas de enriquecimento intelectual advindo da confrontação de diferentes ideias e perspectivas (GRAVINA; CONTIERO, p 1-2, 2011. Grifo nosso).

Durante a realização da atividade proposta, houve alunos que não se recordavam de conteúdos, como perímetros e somas de frações, e solicitavam ajuda sem se darem conta de que dispunham, à sua frente, uma fonte de pesquisa imensa que é a internet. Fez-se necessário sugerir-lhes que a utilizassem na busca de informações que pudessem auxiliá-los a sanarem suas dúvidas e darem sequência à atividade, conforme o exemplificado nas respostas de um aluno na Figura 19.

Figura 19 – Atividade 4 apresentada pelo aluno A4


a) Qual o perímetro do triângulo inicial?

$P = C+C+C$

$P = 3.C$

b) Após a primeira iteração cada segmento resultante passou a medir que parte do segmento inicial c?

$\frac{1}{3}c$

c) Então como podemos expressar o perímetro neste nível?

$\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c=P=\frac{12c \div 3}{3 \div 3}=\frac{4c}{1}$

d) De quanto foi este aumento em relação ao nível anterior?

$\frac{4c}{1} - 3.c = \frac{1c}{1}$ aumentou $\frac{1c}{1}$ do nível anterior que é $\frac{1}{3}$ do perímetro inicial

Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A4 (2012).

O fato de os alunos não procurarem na internet causou certa curiosidade, visto que são frutos de uma geração digital e que costumeiramente usam esse recurso para diferentes finalidades. Uma hipótese para o ocorrido seria que eles precisam desenvolver a habilidade de aprender a aprender e não esperar que tudo lhes seja dado pronto. O professor exerce papel fundamental nessa tarefa, pois, conforme Giraffa (2010), colocar materiais, links, arquivos em pdf, vídeos e áudios sem a devida contextualização não faz sentido e nem vai funcionar bem. A monitoração e mediação do docente devem propiciar condições para que o educando possa estabelecer relações entre o que ele encontra na internet e a situação que tem diante de si para resolver. Assim, critérios de busca e seleção são indispensáveis.

Outro elemento a ser ressaltado foi a possibilidade de se rever cada uma das iterações realizadas no fractal construído sem ser necessário refazer manualmente cada etapa, o que seria muito trabalhoso. Esse recurso foi usado de forma unânime por toda a turma em praticamente todas as atividades. O uso da ferramenta computacional recebe os méritos deste retrospecto que muito colaborou para o êxito na resolução das atividades propostas.

3.1.5 Atividade 5: Construção do Triângulo de Sierpinski com o *software* Geogebra

1) Responda:

a) Qual foi a figura que você teve como ponto de partida para a construção do Triângulo de Sierpinski? Quais são suas caraterísticas?

____

____

____

b) Como podemos generalizar a medida do comprimento do lado da figura inicial?

____

____

c) Como expressar então seu perímetro?

____

____

d) Quantos triângulos você ignorou em cada etapa?

____

____

e) Existe alguma regra ou fórmula para expressar o total de triângulos ignorados? Qual?

____

____

f) Quantos triângulos restam em cada iteração? O que eles representam?

____

____

____

g) Existe uma regra ou fórmula para expressar quantos triângulos são considerados em cada iteração? Qual?

____

____

Agora preencha os dados no quadro modificado de Gomes (2007):

Quadro 3 – Atividade que explora o Triângulo de Sierpinski.

Iteração	***Número de triângulos***	***Comprimento do lado***	***Perímetro de cada triângulo***	***Perímetro total***
0				
1				
2				
3				
...				
N				

Fonte: Produção da autora, adaptada de Gomes (2007).

2) O que você observa que acontece com perímetro total à medida que aumentam as iterações? Esse valor tende a quê?

____

____

____

3) *Se considerarmos que o triângulo inicial possui área x., cada novo triângulo gerado na primeira iteração terá que área?*

____

____

4) E, após a segunda iteração, cada novo triângulo terá qual área?

____

____

5) Na sequência, após a terceira iteração, cada novo triângulo terá área igual a

____

6) Agora organizaremos esses dados num quadro modificado de Gomes (2007):

Quadro 4 – Continuação da exploração do Triângulo de Sierpinski.

Iteração	***Número de triângulos***	***Área de cada triângulo***	***Área total***
0			
1			
2			
3			
...			
N			

Fonte: Quadro da autora, adaptado de Gomes (2007).

7) O que você observa que acontece com a área total à medida que aumentam as iterações? Esse valor tende a quê?

____

____

8) Considerando a área do triângulo inicial como referência, responda:

a) Qual a porcentagem que a área do triângulo inicial representa?

____

____

b) Que porcentagem representa cada triângulo resultante da primeira iteração?

____

____

Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 5

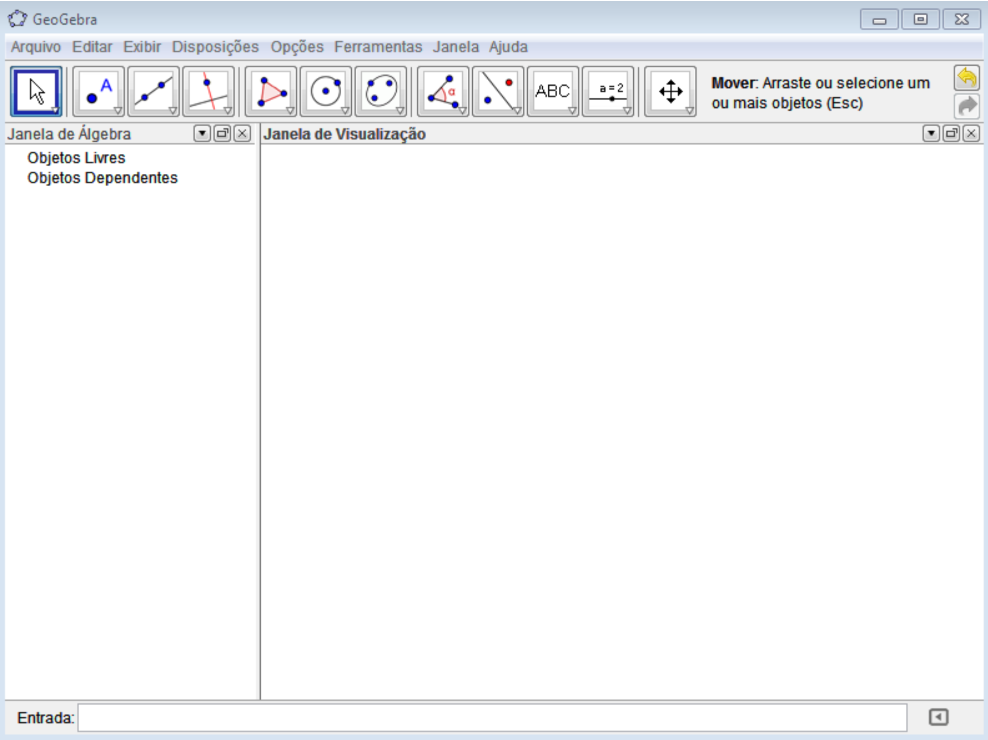
A referida atividade foi elaborada com a intenção de que os alunos identificassem a regra utilizada na construção do fractal e o construíssem. Pretendia-se também que eles consolidassem conceitos de perímetro, área, classificação de triângulos, porcentagem e fizessem uso da álgebra nas generalizações.

Assim, apresentamos a imagem projetada do Triângulo de Sierpinski para os alunos em slides e os questionamos sobre qual foi o ponto de partida para sua construção, bem como os procedimentos que foram utilizados.

Disponibilizamos um tempo para que os alunos investigassem procedimentos para a construção do fractal em questão, tendo disponíveis as ferramentas do *software* em uso. Explicitamos um roteiro semelhante ao adotado por muitos discentes após várias tentativas.

- Abrir uma janela no Geogebra e esconder os eixos e a malha quadriculada; caso estejam visíveis, clicar em exibir eixos e malha para facilitar a visualização da construção.

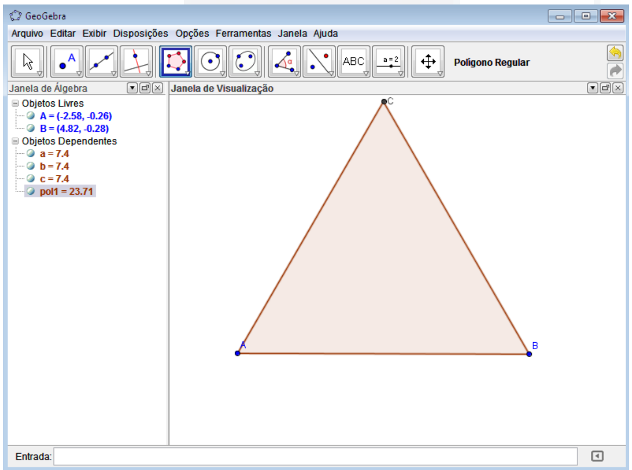
Figura 20 – Interface do Geogebra com eixos e malha ocultos.



Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

- Construir um triângulo equilátero utilizando o quinto ícone.

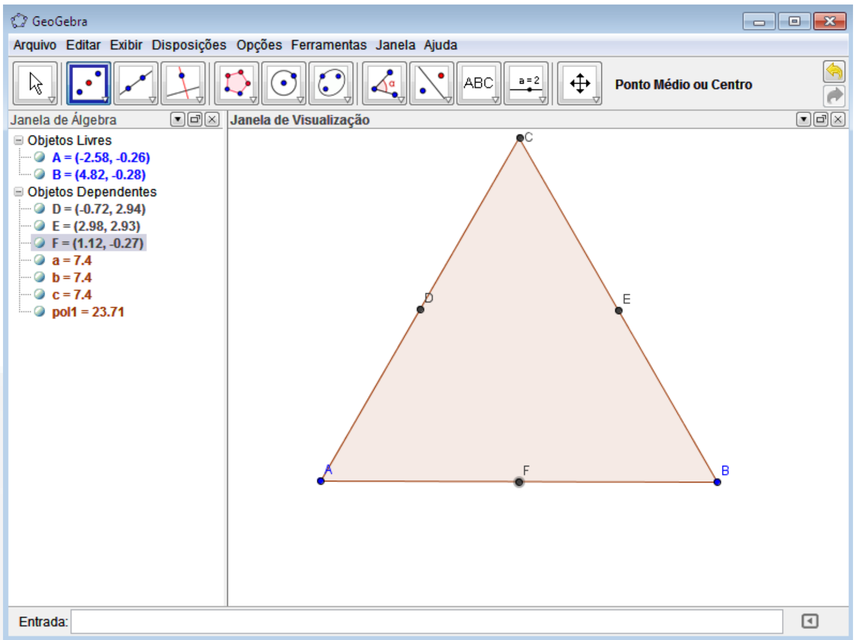
Figura 21 – Triângulo equilátero construído no Geogebra.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora (2012).

- Em seguida, marcar os pontos médios utilizando o 2º ícone.

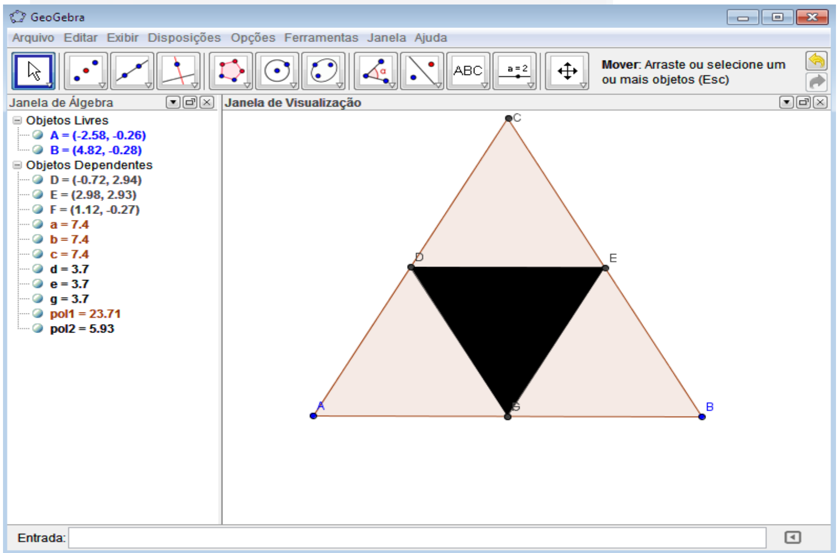
Figura 22 – Identificação dos pontos médios dos lados do triângulo.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora (2012).

- Agora, construir um novo triângulo equilátero que tenha como base os pontos médios do triângulo feito no princípio.

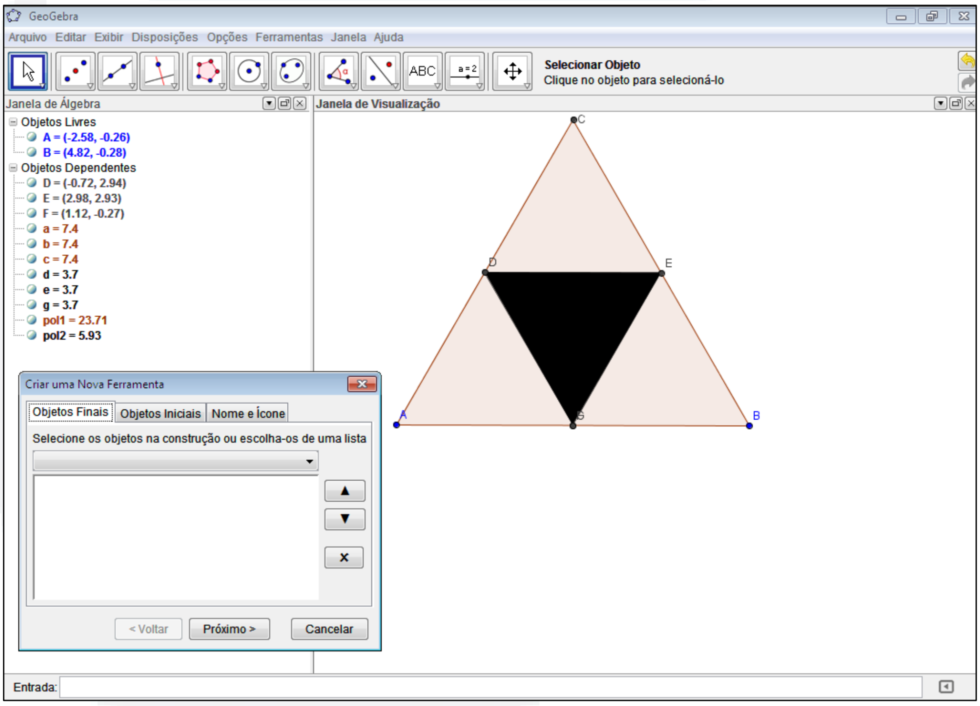
Figura 23 – Triângulo construído tendo como base os pontos médios.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora (2012).

- Desconsiderar o triângulo central que será pintado de uma cor diferenciada a fim de termos nossa primeira iteração. Esse processo deve ser repetido marcando-se o ponto médio de cada um dos lados dos demais triângulos. Em seguida, unir os segmentos e desconsiderar o triângulo do meio e assim sucessivamente. Para isso, utilizaremos a criação de uma nova ferramenta na interface do Geogebra que nos facilitará a repetição. Ela se encontra no ícone **Ferramentas- criar nova ferramenta e,** sendo utilizada, abrirá uma nova aba na tela, conforme figura.

Figura 24– Visualização da janela "Ferramenta" aberta.



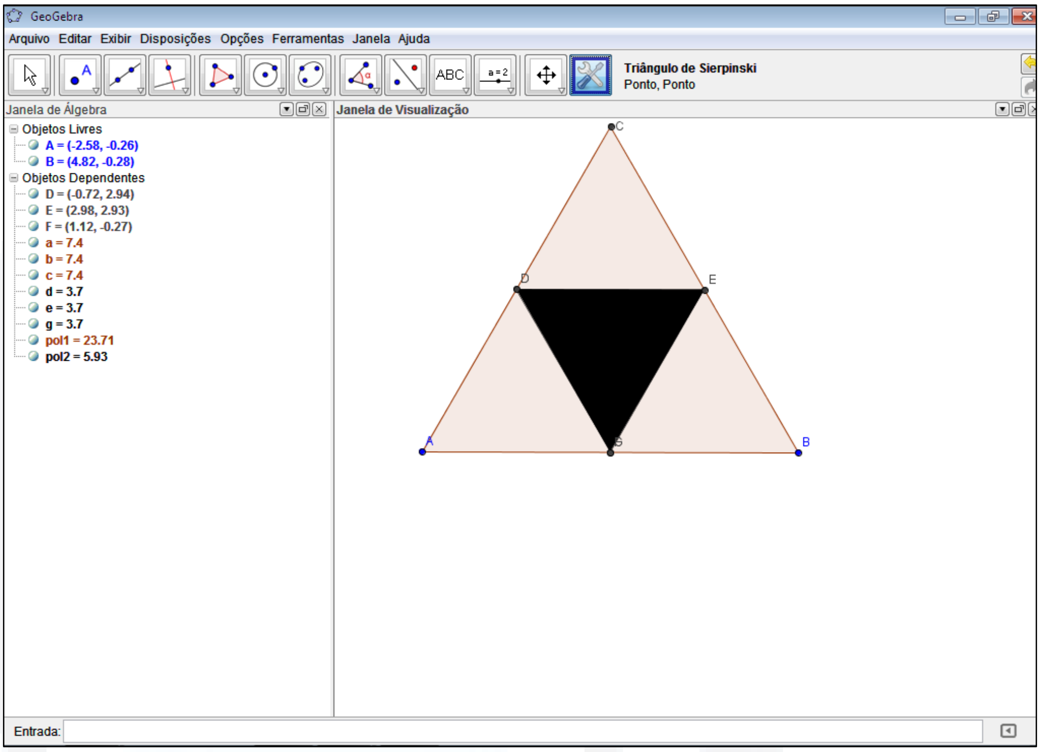
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora (2012).

<u>Objetos finais</u>: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros. No nosso caso, são os segmentos d, e, e f. Para inseri-los na construção, basta clicar sobre esses objetos com o botão esquerdo do mouse.

<u>Objetos iniciais</u>: são objetos que foram informados inicialmente dos quais dependem toda a construção. No nosso exemplo, correspondem aos pontos **A** e **B**. Esses objetos automaticamente aparecem em objetos iniciais.

<u>Nome e ícone</u>: nome dado, conforme desejado, ao novo ícone para a ferramenta. Após clicar em concluído, aparecerá um novo ícone com a ferramenta construída. Para utilizá-la, clicaremos no ícone com o nome dado e nos pontos desejados.

Figura 25 – Ferramenta construída com êxito.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora (2012).

Depois de criada a macro ferramenta, fica muito fácil fazer quantas iterações desejarmos. Interessante destacar que, ao desenharem o triângulo central que deveria ser retirado, os alunos, primeiramente, fizeram uso da ferramenta “segmento definido por dois pontos”, disponível no terceiro ícone da Barra de Ferramentas. Ao pintarem com cor diferente a fim de representar sua retirada, não obtiveram sucesso. Assim, encontraram uma limitação do *software* que apenas permite, na versão usada, colorir uma área construída com a ferramenta de polígonos e não uma região delimitada por união de segmentos.

Nessa atividade, também foi perceptível o interesse dos alunos pelo jogo de cores permitido ao pintarem o triângulo central representando sua retirada. O uso do recurso computacional possibilitou que diferentes combinações fossem testadas com muita facilidade, despertando a criatividade e o senso estético de cada um. A visualização os motivou a investigar os conhecimentos algébricos e geométricos.

Durante o desenvolvimento das questões, os alunos demonstraram progresso quanto ao uso da álgebra para representar situações apresentadas de forma genérica. Percebemos esse fato porque houve um grupo que conseguiu completar dados, como os mostrados na Figura 26, de maneira mais independente do que no início das atividades.

Figura 26 – Atividade 5 apresentada por um aluno A16.

Iteração	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total
0	1	x	x
1	3^1	$\frac{x}{4^1}$	$3 . \frac{x}{4^1}$
2	3^2	$\frac{x}{4^2}$	$3^2 . \frac{x}{4^2}$
3	3^3	$\frac{x}{4^3}$	$3^3 . \frac{x}{4^3}$
...			
N	3^n	$\frac{x}{4^n}$	$3^n . \frac{x}{4^n}$

Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A16.

Assim, o desenvolvimento das atividades propostas contempla um dos objetivos do ensino da Matemática mencionado nos PNCs (1998):

> ...o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problemas e favorecer as possíveis soluções (BRASIL, p 64).

Observar as construções fractais realizadas e nelas conseguir identificar padrões geométricos e aritméticos presentes e, ainda mais, fazer uso de letras como forma de representar suas generalizações muito contribuiu para que o uso da álgebra não se desse de forma “mecanizada”. Experiências pedagógicas anteriores nos permitem afirmar que são comuns questionamentos feitos por alunos quanto à finalidade da álgebra em seus currículos, pois veem seus conceitos e aplicações de forma bastante limitada. Porém, tal fato não foi observado no decorrer das atividades desenvolvidas.

Contudo, uma abordagem diferenciada da álgebra de forma a proporcionar o sucesso de sua aprendizagem é uma dificuldade enfrentada por muitas escolas, conforme dados dos PCNS:

> Nos resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país. Isso faz com que os professores procurem aumentar ainda mais o tempo dedicado a este assunto, propondo em suas salas, na maioria das vezes, apenas a repetição mecânica de mais exercícios. Essa solução, além de ser ineficiente, provoca grave prejuízo no trabalho com outros temas da Matemática, também fundamentais, como os conteúdos referentes à Geometria (BRASIL, 1998, p 116).

Utilizar o pensamento algébrico nas mais diferentes situações que se apresentam, abstraindo conceitos até então só trabalhados aritmeticamente, é um desafio a estudantes dessa faixa etária. Também o é aos professores que precisam propor uma prática diferenciada para que obtenham êxito.

3.1.6 Atividade 6: Relação entre o Triângulo de Sierpinski e o de Pascal no Geogebra: (Baseada em Barbosa, 2005)

Pesquisar sobre o Triângulo de Pascal e sua relação com o Triângulo de Sierpinski. Identificar possíveis estruturas fractais após ter pintado diferentes múltiplos no triângulo de Pascal.

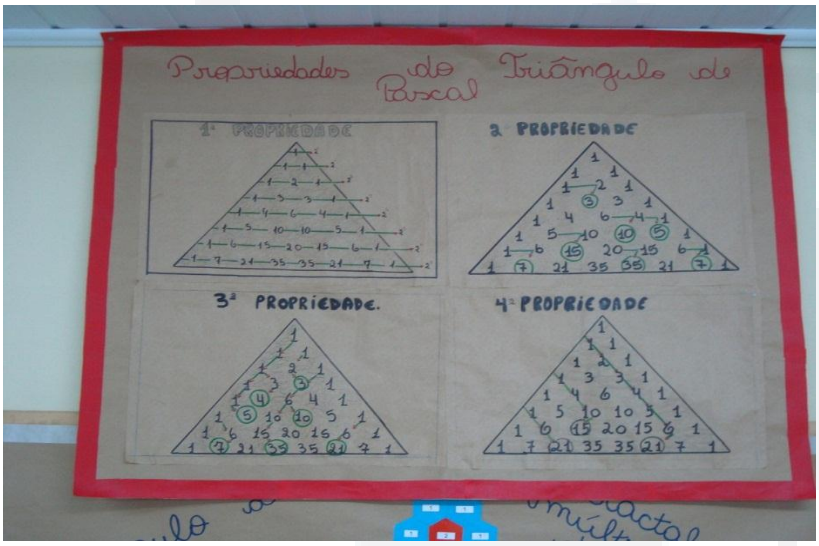
Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 6

A Atividade 6 foi proposta com o intuito de que os alunos, por meio de pesquisa, pudessem descobrir as possíveis relações entre o Triângulo de Pascal e o de Sierpinski e o construíssem identificando os múltiplos de dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez, classificando cada um em fractal ou não. Além de realizarem a pesquisa sobre o Triângulo de Pascal e apresentá-lo à turma, os alunos foram solicitados a também explicitarem sua lei de formação. .

Durante a realização da pesquisa, que teve como fonte a *internet,* percebeu-se grande dificuldade dos alunos em estabelecerem critérios de análise e seleção dos dados que encontravam. Além disso, precisavam sintetizar o que liam e reelaborar conceitos de forma própria, estabelecendo relações entre o que já sabiam e o que lhes era novo. Bonete (2006) afirma que a pesquisa requer não apenas o ineditismo, mas a procura de uma nova roupagem aos conhecimentos existentes, sendo necessária não somente a busca do novo conhecimento, mas do renovado. Quanto à exigência estabelecida pela autora, verificou-se que há muito a avançar; contudo, a persistência em propor diferenciadas formas de pesquisa, contribui para que isso aconteça.

Durante a socialização da pesquisa pela turma, fez-se necessária, por parte dos alunos, a organização do conhecimento adquirido, verbalizando-o de forma simples, visando ao melhor entendimento dos colegas. No momento em que eles conseguiram identificar, por exemplo, a aplicação das diferentes propriedades do Triângulo de Pascal não apenas nos locais demarcados na fonte de pesquisa demonstraram compreensão dos dados coletados que foram registrados por eles através de cartazes, como mostrado na Figura 27.

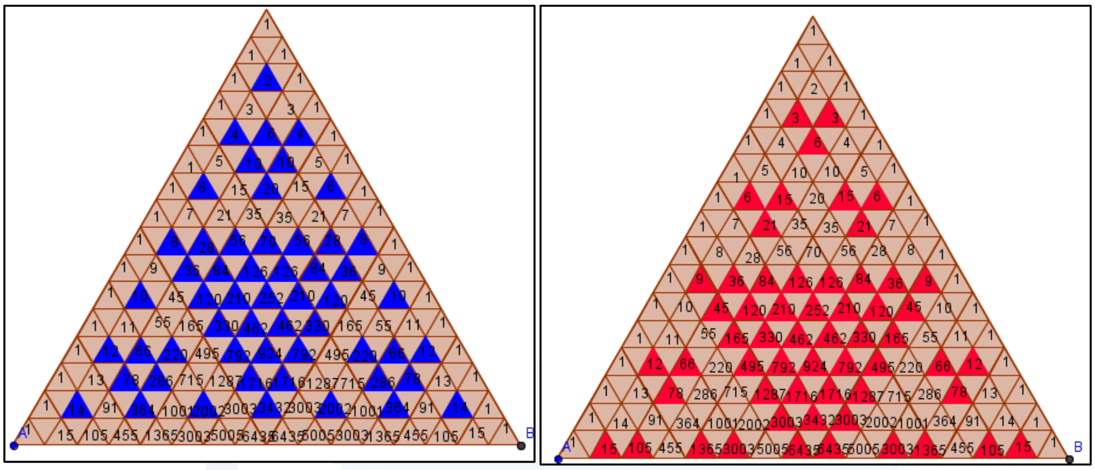
Figura 27– Cartaz apresentado pelo grupo de alunos A10, A17, A4 e A1.



Fonte: Cartaz confeccionado pelos Alunos A10, A17, A4 e A1 (2012).

Na continuidade das atividades, a turma construiu o Triângulo de Pascal partindo do Triângulo de Sierpinski com o uso do *software* Geogebra. Algumas adaptações foram necessárias na macro ferramenta já criada para que pudessem, posteriormente, pintar com uma cor diferenciada os múltiplos de dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez. Então, por meio da observação, deveriam descobrir se a configuração de cada múltiplo formava ou não uma estrutura fractal. Vejamos na Figura 28 como ficaram as construções feitas pelos alunos:

Figura 28 – Fractais Múltiplos de Dois e de Três construídos pelos alunos A2, A3, A8 e A12.



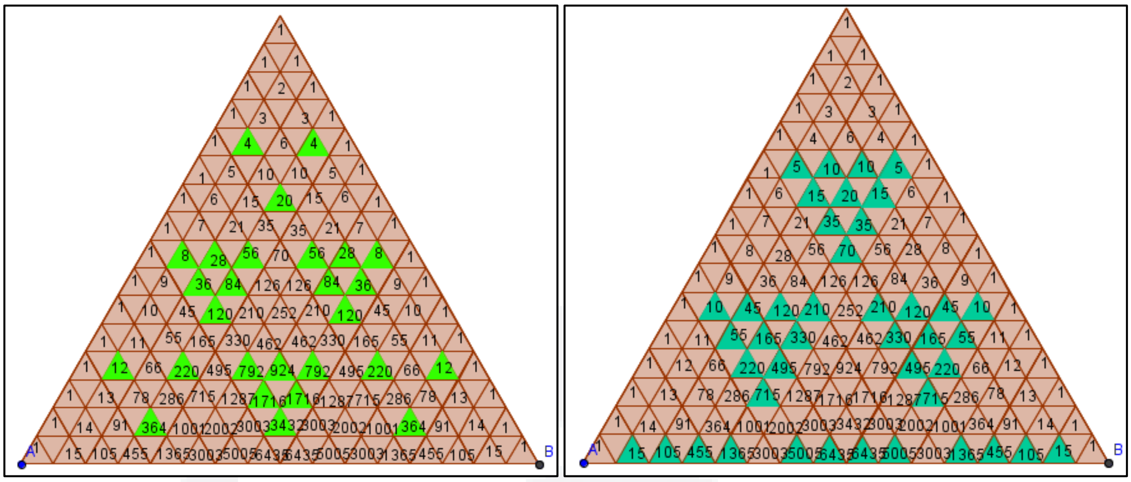
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pelos Alunos A2, A3, A8 e A12 (2012).

Ao identificarem os múltiplos de dois com cor diferenciada conforme mostrado na Figura 28, os alunos entenderam que, ao somarem dois números ímpares, obtinham um número par e, ao somarem dois pares, o resultado era também par. Na sequência, perceberam que a imagem acabava criando triângulos equiláteros autossimilares, caracterizando assim o fractal. Até a linha quatro, compreendemos a iteração 1; até a oito, a iteração 2 e até a dezesseis, a iteração 3. Os alunos, por iniciativa própria, demonstrando envolvimento e entusiasmo com a atividade, foram imaginando como seria a imagem da próxima iteração sem mesmo a terem feito, apenas partindo do princípio iterativo de um fractal.

Ao colorirem os múltiplos de três no Triângulo de Pascal, novamente foi identificada a presença de triângulos equiláteros, embora com padrões diferenciados do fractal dos múltiplos de dois. A iteração 1 pode ser percebida até a linha nove e a dois não foi concluída, pois precisariam ter ido até a dezoito para visualizá-la por inteiro, mas, como já haviam compreendido o processo iterativo, não tiveram dificuldade de imaginá-la.

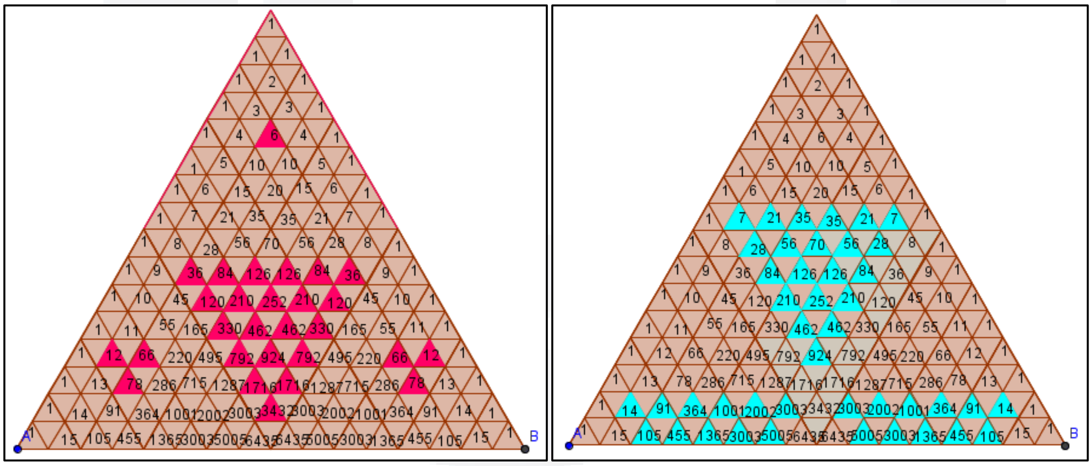
Em processo de construção similar, seguem os outros Triângulos de Pascal com os múltiplos pintados de cores diferenciadas:

Figura 29 – Fractais Múltiplos de Quatro e de Cinco construídos pelos alunos A5, A6, A7 e A10 no Geogebra



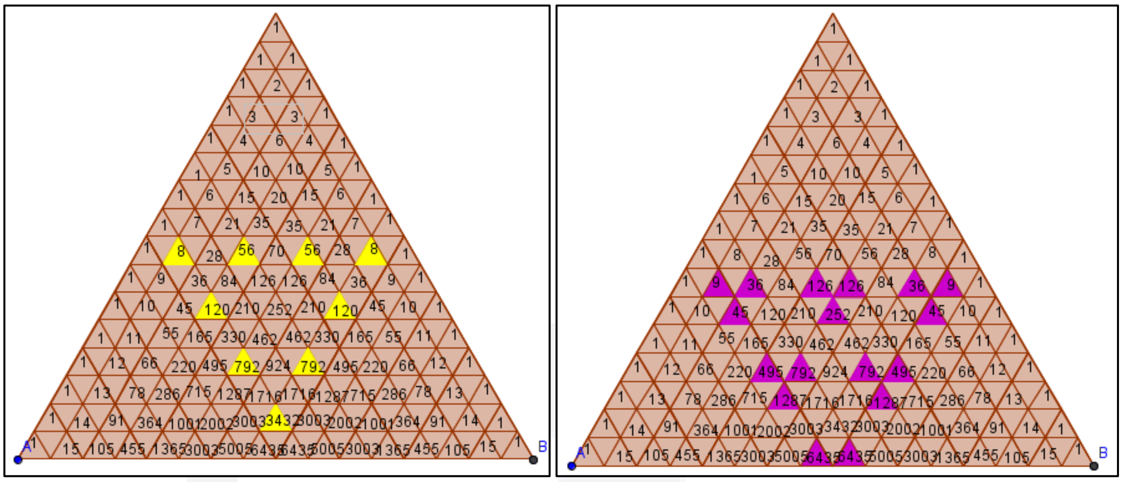
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pelos Alunos A5, A6, A7 e A10 (2012).

Figura 30 – Fractais Múltiplos de Seis e de Sete construídos pelos alunos A9, A17, A7 e A13 no Geogebra.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pelos Alunos A5, A6, A7 e A12 (2012).

Figura 31 – Fractais Múltiplos de Oito de Nove construídos pelos alunos A4, A1, A11 e A19 no Geogebra.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pelos Alunos A4, A1, A11 e A19 (2012).

Ao observarem a configuração dos múltiplos de seis e dez, os alunos não identificaram um padrão repetido que pudesse caracterizar o fractal. A realização dessa atividade proporcionou uma retomada dos critérios de divisibilidade nem sempre recordada por todos. Contudo, não utilizaram os critérios de identificação de todos os múltiplos, pois alguns julgaram ser mais rápido realizar o cálculo ao invés de aplicar o critério.

3.1.7 Atividade7: Carpete de Sierpinski no Geogebra

Atividade posterior à construção do Carpete de Sierpinski:

1) Qual figura foi o ponto de partida para construção do fractal?

____

____

2) Quantas peças quadradas surgem:

- *Na iteração zero:*____
- *Na primeira iteração:*____
- *Na segunda iteração:*____
- *Na terceira iteração:*____

- *Na enésima iteração:____*

3) Como sabermos quantas peças quadradas surgirão após a quinta iteração?

____

____

4) Complete o quadro modificado de Gomes (2007), considerando como medida do lado do quadrado inicial c:

Quadro 5 – Atividade sobre Fractal Carpete de Sierpinski.

Iteração	*Número de quadrados*	*Comprimento do lado de cada quadrado*	*Área de cada quadrado*	*Área total*
0				
1				
2				
3				
N				

Fonte: Quadro produzido pela autora, sendo modificado de Gomes (2007).

Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 7

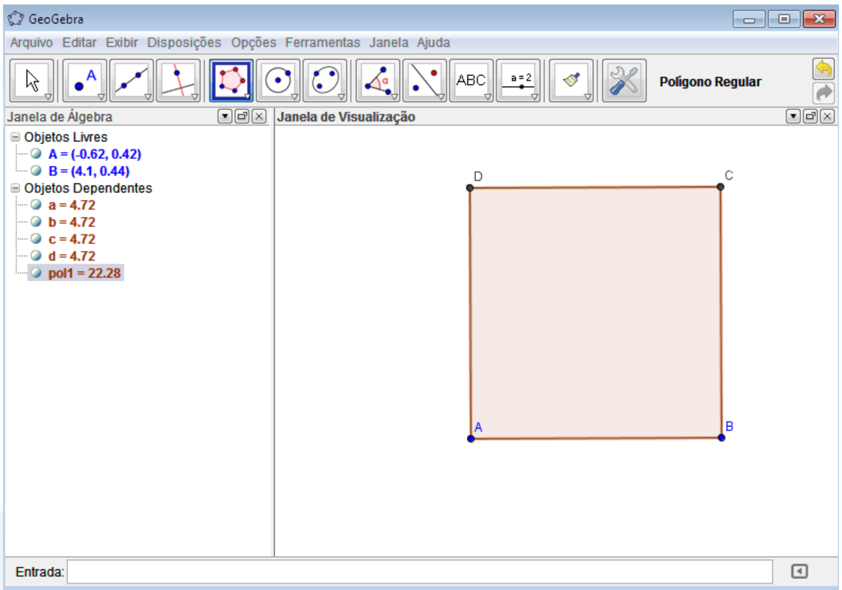
A realização da Atividade 7 tinha como propósito identificar a regra de construção do fractal e construí-lo fazendo uso dos conhecimentos geométricos intrínsecos no processo, como a divisão do segmentos em três partes iguais, o ponto de partida com o quadrado e sua área após cada iteração. Novamente, o uso da álgebra, da potenciação e dos números racionais nas generalizações era um propósito.

A imagem do Carpete de Sierpinski foi projetada para os alunos e eles foram questionados sobre qual foi o ponto de partida para sua construção e quais procedimentos foram utilizados para ele se apresentar dessa forma.

Descrevemos um roteiro adotado por um número significativo de alunos:

- Construir um quadrado utilizando o quinto ícone.

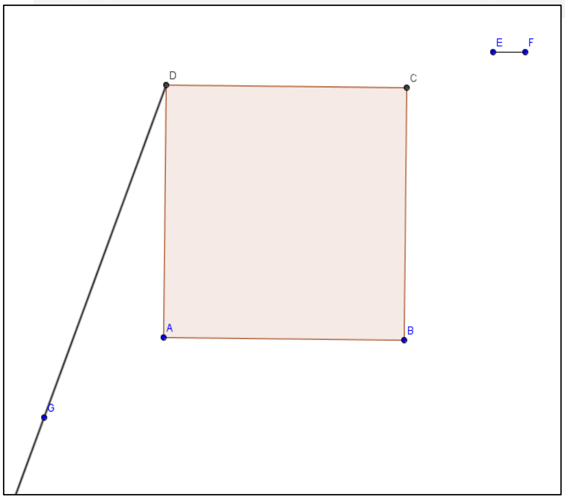
Figura 32 – Quadrado construído no Geogebra.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora (2012).

- Dividir um dos lados do quadrado em três partes iguais. Para isso, adotaremos os mesmos procedimentos feitos quando dividimos o segmento na Curva de Koch. Num outro local da tela, construir outro segmento de reta para ser nossa unidade de medida. Construir uma semirreta do ponto **D**, de um tamanho qualquer.

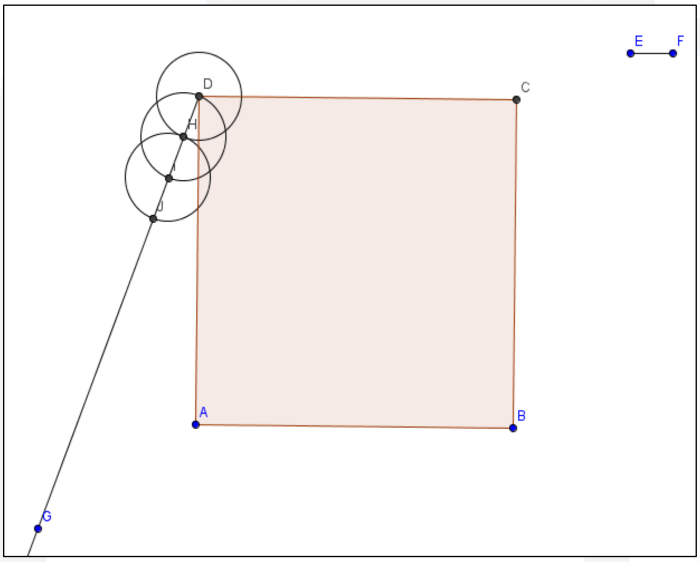
Figura 33 – Sequência da construção do Carpete de Sierpinski.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora (2012).

- Agora marcar na semirreta três segmentos do mesmo tamanho, utilizando a nossa unidade a partir do ponto **D**. Para isso, construir uma circunferência de centro em **D** e raio e, conforme instruções constantes no 6º ícone – círculo dados centro e raio-, marcar a intersecção de dois objetos (circunferência e semirreta – 2º ícone). Repetir o processo mais duas vezes, centrando o círculo na intersecção. Marcar o ponto de interseção da semirreta, auxiliar com a última circunferência construída.

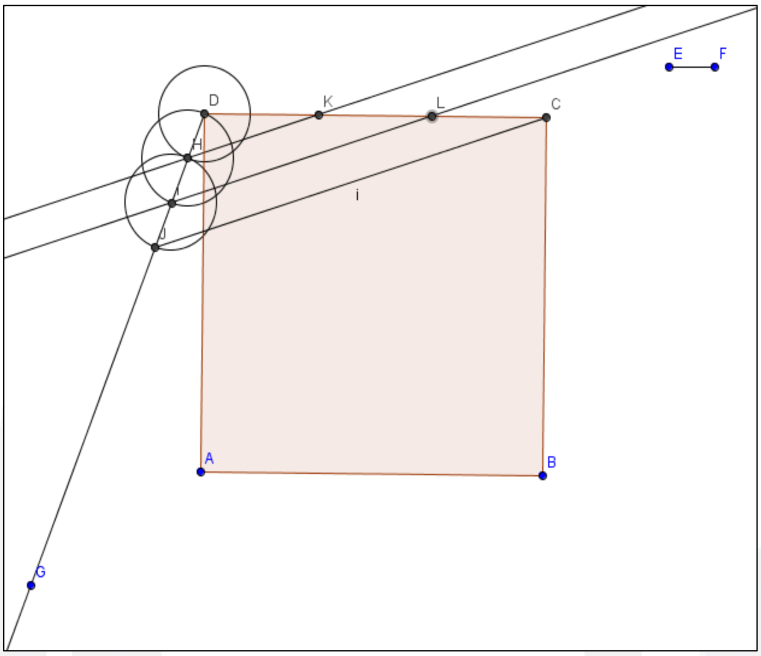
Figura 34 – Circunferências sobre a semirreta.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora (2012).

- Traçar o segmento de reta g (3º ícone), passando pelos pontos **J** e **C** e paralelas e pelos pontos de intersecção **I** e **H** de acordo com as instruções do 4º ícone (retas paralelas). Encontrar o ponto de intersecção entre o segmento c – lado do polígono - e as paralelas que passam por **I** e **H**. Observar a divisão do segmento em três partes congruentes.

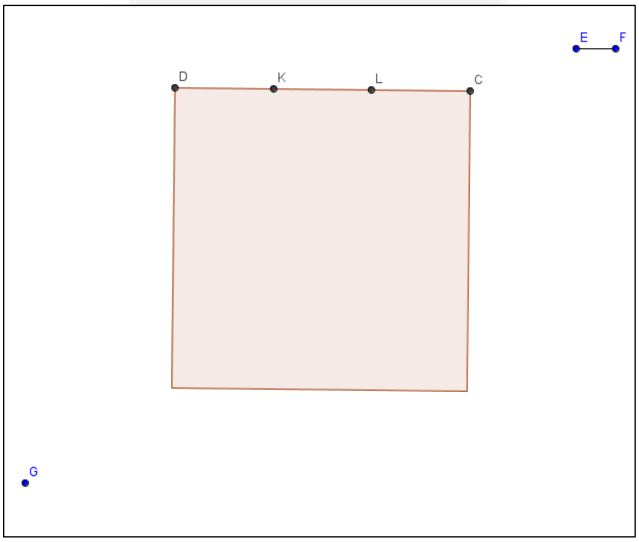
Figura 35 – Retas paralelas na construção.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora (2012).

- Para esconder os objetos que aparecem durante a construção, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto e em exibir objeto. Se quiser esconder os nomes dos objetos, clicar em exibir rótulo.

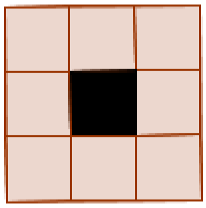
Figura 36 – Construções auxiliares ocultas.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora (2012).

- Construir um polígono regular de quatro lados – quadrado - com o uso do quinto ícone dados os pontos **K** e **D;** na sequência, outro com os pontos **C** e **L**. Continuar construindo quadrados até preencher todo o espaço interno do quadrado inicial. Para representar a remoção do quadrado central, pintar com uma cor diferente.

Figura 37 – Carpete de Sierpinski,1ª Iteração construído pelo aluno A5 no Geogebra.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pelo Aluno A5 (2012).

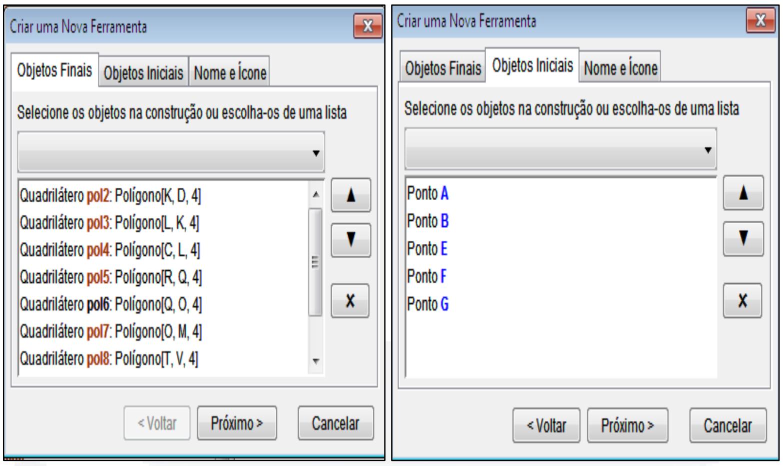
- Temos assim concluída a primeira iteração. Para realizar as demais, criaremos uma ferramenta para evitar muitas repetições de procedimentos longos. Para isso, iremos em **ferramenta – criar nova ferramenta -,**abrindo com isso uma nova aba na tela conforme figura.

<u>Objetos finais</u>: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros. No nosso caso, são os polígonos 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9 e 10. Para inseri-los na construção, basta clicar numa flecha dentro da aba aberta e selecioná-los.

<u>Objetos iniciais</u>: são objetos que foram informados inicialmente dos quais depende toda a construção. No nosso exemplo, correspondem aos pontos **A** e **B**. Esses objetos automaticamente aparecem em objetos iniciais.

<u>Nome e ícone</u>: nome dado ao novo ícone com a ferramenta conforme desejado. Após a nomeação, clicar em concluído. Aparecerá um novo ícone com a ferramenta construída. Para utilizá-la, clicar no ícone com o nome dado e nos pontos desejados.

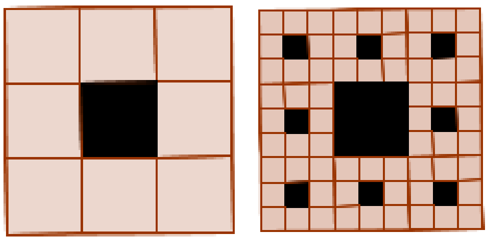
Figura 38– Janela “Ferramenta” aberta.



Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

- Podemos realizar quantas iterações desejarmos.

Figura 39 – Iteração 1 e 2 do Fractal Carpete de Sierpinski construído pelo aluno A5.



Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pelo Aluno A5 (2012).

O procedimento adotado para dividir o lado do quadrado em três partes iguais foi o mesmo que os alunos utilizaram na construção do fractal Curva de Koch. A maioria lembrou, mas houve os que, nesta etapa, necessitaram de ajuda. Ao construírem a macro ferramenta mencionada no roteiro descrito, alguns conseguiram que ela já realizasse a iteração seguinte com a representação em forma de pintura da parte retirada; outros, ao concluí-la e utilizá-la, percebiam que ela não pintava a parte central conforme o desejado. Nesse momento, então, solicitaram o auxílio da professora e dos colegas, pois tinham dificuldade em identificar o erro cometido na construção da ferramenta que fez com que esta não agisse eficazmente. Mesmo perante os obstáculos, os discentes não desistiram da realização da atividade, demonstrando-se empenhados em desenvolvê-la com sucesso. Esse fato fez com que o término da referida atividade demorasse mais tempo que o previsto. Cabe destacar que as trocas, os diálogos, as tentativas, acertos e erros também possibilitaram aprendizagens não previstas anteriormente.

A reflexão sobre a situação ocorrida durante o desenvolvimento da atividade relatada, poderia significar, para muitos docentes, uma dificuldade que justificasse uma opção pelo não uso do recurso computacional nas aulas, como comumente se ouve alguns declararem. No entanto, foi um momento que fortaleceu uma postura de investigação frente a circunstâncias que se apresentavam como empecilhos para o êxito da atividade. É em momentos como esse que o professor contribui para a desmistificação de seu status de detentor do saber, pois os alunos, conforme Girafa (2010), já não esperam que lhes seja ensinado como usar as tecnologias, mas aprender conteúdos importantes para suas vidas e que sejam os educadores a orientá-los. Assim, considera-se fundamental à vida, entre outros, o incentivo pela busca e o despertar do espirito investigativo no uso do recurso computacional.

Após concluída a construção do Carpete de Sierpinski no Geogebra, foram propostas as atividades já descritas. Como podemos observar de acordo com o exemplificado na Figura 40, os alunos conseguiram atingir os objetivos propostos.

Figura 40 – Atividade 7 apresentada pelo aluno.A10.

Iteração	Número de quadrados	Comprimento do lado de cada quadrado	Área de cada quadrado	Área total
0	$1=8^0$	C	A	$1A$
1	8^1	$\frac{1}{3}C$	$\frac{1}{9}A$	$8.\frac{1}{9}A$
2	8^2	$\frac{1}{3^2}C$	$\frac{1}{9^2}A$	$8^2.\frac{1}{9^2}A$
3	8^3	$\frac{1}{3^3}C$	$\frac{1}{9^3}A$	$8^3.\frac{1}{9^3}A$
N	8^n	$\frac{1}{3^n}C$	$\frac{1}{9^n}A$	$8^n.\frac{1}{9^n}A$

Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno 10 (2012).

Novamente a observação da atividade apresentada na Figura 40 evidencia aprendizagens de conteúdos, como a potenciação e os números fracionários na representação do número de quadrados e o comprimento de cada um. As medidas de superfície foram retomadas no cálculo da área de cada quadrado e o uso da álgebra para a generalização de cada situação foi consequência natural, visto que os alunos compreenderam sua função e seu significado, atingindo assim o nosso propósito inicial.

3.1.8 Atividade 8: Criação de fractais com uso do *software* Geogebra

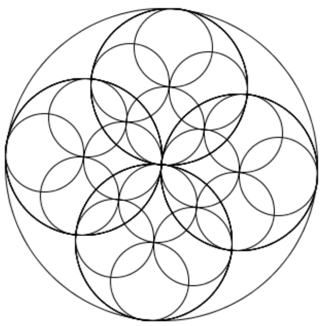
Criar um fractal com os recursos disponíveis pelo software Geogebra.

Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 8

A Atividade foi proposta a fim de desafiar os alunos a criarem um fractal, utilizando os recursos disponíveis pelo *software* Geogebra e apresentá-lo à turma, explicando as características que o definem como fractal.

Podemos constatar no desenvolvimento da atividade que os alunos apresentaram dificuldades para inovar as construções dos fractais. Muitos utilizaram a lei de formação muito próxima das já trabalhadas. Contudo, alguns conseguiram distanciar-se dos modelos já vistos, como podemos observar na Figura 41.

Figura 41 – Fractal criado pelo aluno A8 no Geogebra.



Fonte: Interface do Geogebra com fractal construído pelo Aluno A8 (2012).

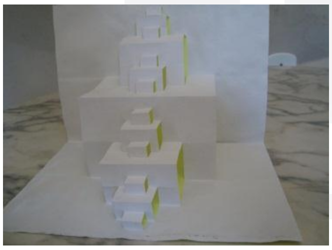
Quanto à explanação das características que identificavam cada fractal, não houve dificuldades, o que deixa claro que os alunos compreenderam a definição, atendendo ao que lhes foi proposto em toda a sequência de atividades até aqui relatadas.

3.1.9 Atividade 9: Construção de cartões fractais (Atividades que tiveram como base o trabalho apresentado por Almeida *et al*., s/d)

Conforme argumentamos sobre o uso exclusivo do lápis e o papel serem insuficientes no fazer pedagógico do professor, também o computador não deve ser ferramenta única, apesar de extremamente importante. Dessa forma, propomos a construção de fractais também com materiais diferenciados, mas sempre fazendo a vinculação com os conteúdos algébricos.

A) Cartão Degraus Centrais

Figura 42 – Cartão Degraus Centrais construído pelo aluno A2.



Fonte: Produção do Aluno A2 (2012).

Passos para a construção do cartão:

- *Pegue uma folha de tamanho A4.*
- *Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura.*
- *Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos a uma distância x das extremidades da folha, de altura a2. Observe que:* $2\,X \;\; x\,4 \;\; X \;\; x\,2$
- *Dobre o retângulo formado para cima, fazendo um vinco na dobra.*
- *Volte ao retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro da figura em relevo. Pode-se dizer que esta é a primeira iteração do cartão fractal.*

- *Dobre novamente, pois as iterações serão obtidas seguindo os mesmos passos de 3 a 5, porém em uma escala menor, apenas na região dobrada.*

- *Dobre o retângulo para cima, fazendo um vinco na dobra.*

- *Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a figura em relevo. Neste momento, temos a primeira e a segunda iteração do cartão fractal.*

- *Para obter mais iterações, repita esse processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel, sempre usando a regra de corte estabelecida no passo 3. Por fim, desdobre os recortes e puxe as figuras em relevo.*

Atividade posterior à construção do Cartão Fractal Degraus Centrais:

1) Que propriedades dos fractais podemos visualizar no cartão fractal construído?

____

____

2) Que formas geométricas resultaram dos cortes e dobraduras?

____

____

3) O que acontece após cada iteração realizada?

____

____

4) Qual o volume do paralelepípedo da primeira iteração?

____

5) Complete o quadro:

Quadro 6 – Atividade sobre cartão Fractal Degraus Centrais.

Iteração	*Número de paralelepípedos novos*
0	
1	
2	
3	

4	
...	...
N	

Fonte: Da autora, baseado em Almeida et al. (s/d).

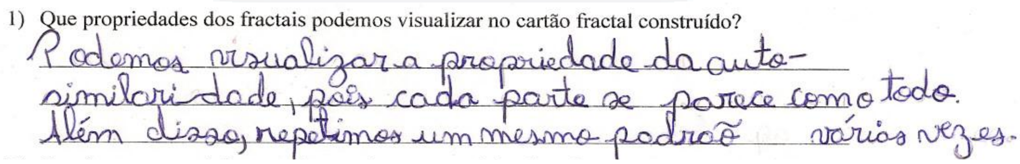
Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 9A

A construção do cartão Degraus Centrais foi proposta a fim de diversificar os recursos em uso na abordagem do conteúdo que vem sendo desenvolvido. Assim, espera-se que os alunos consigam identificar o padrão fractal no cartão, as figuras geométricas que surgem em cada iteração com as respectivas quantidades.

Alguns alunos demonstraram dificuldades no final da construção à medida que as dobras e recortes iam diminuindo gradativamente. Nesse momento, os colegas que tinham maior facilidade auxiliavam os demais junto com a professora num clima de cooperação.

No momento do término do cartão, quando os alunos visualizaram o efeito estético oriundo das dobras e cortes, percebemos um entusiasmo coletivo, pois todos aplaudiram o resultado do trabalho de forma espontânea. A aprendizagem se tornou divertida e os conceitos que pretendíamos explorar foram por todos compreendidos, como podemos observar na resposta apresentada por um aluno na Figura 43.

Figura 43 – Atividade 9A apresentada pelo aluno A3.


1) Que propriedades dos fractais podemos visualizar no cartão fractal construído?

Podemos visualizar a propriedade da auto-similaridade, pois cada parte se parece como todo. Além disso, repetimos um mesmo padroã vários vezes.

Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A3 (2012).

B) Cartão Triângulo de Sierpinski

- *Pegue uma folha de tamanho A4.*
- *Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura.*

- *Com a folha dobrada ao meio, marque o ponto médio na parte dobrada de largura* x *e faça um corte vertical de altura* y *qualquer.*

- *Dobre um dos retângulos formado para cima, fazendo um vinco na dobra.*

- *As gerações seguintes serão obtidas nos dois retângulos formados no cartão, aplicando a mesma regra do passo 3. Note que os retângulos possuem* $x2$ *de base, logo, os cortes verticais em seus pontos médios devem ter altura a* $\frac{y}{2}$.

Atividade posterior à construção do cartão Triângulo de Sierpinski:

1) *Que formas geométricas resultaram dos cortes e dobraduras?*

2) *O que acontece após cada iteração realizada?*

3) *Complete o quadro:*

Quadro 7 – Atividade sobre Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.

Iteração	*Número de paralelepípedos novos*
0	
1	
2	
3	
4	
...	...
N	

Fonte: Da autora, baseado em Almeida et al. (s/d).

Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 9B

Elaborada no mesmo modelo da atividade anterior, a atividade 9 B tinha o propósito de levar os alunos a identificarem as formas geométricas resultantes dos cortes e dobraduras e que conseguissem fazer uso da potenciação para expressar a quantidade de novos paralelepípedos a cada iteração, fazendo, em seguida, a respectiva generalização.

A análise do desenvolvimento dessa atividade permitiu constatar que os alunos ainda confundiam as figuras planas com os sólidos geométricos, pois, ao nomear as formas resultantes das dobras e cortes, vários deles, em primeira instância, mencionaram o termo retângulo para se referir ao paralelepípedo. Após serem questionados sobre a diferenciação entre os conceitos, perceberam o engano.

Novamente a empolgação foi notável ao concluírem o cartão e observarem o efeito estético resultante. Embora a permanência de obstáculos nas etapas finais, vários alunos trouxeram, no dia seguinte, outro cartão confeccionado em casa com mais iterações que as realizadas em aula, mostrando entusiasmo e superação da dificuldade com as dobras e recortes menores, pois não tiveram quem os auxiliasse.

Quanto ao uso da potenciação para representar a quantidade de novos paralelepípedos e a respectiva generalização, foi possível observar nos registros dos alunos que eles conseguiram atingir as metas propostas. A Figura 44 é comprova tal afirmação.

Figura 44 – Atividade 9B apresentada pelo aluno A5.

Iteração	Número de paralelepípedos novos
0	$1 = 3^0$
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
3	$27 = 3^3$
4	$81 = 3^4$
...	...
N	3^n

Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A5.

3.1.10 Atividade 10: Construção de fractais com sólidos geométricos baseados em Souza (2010)

A) Tetraedro de Sierpinski

Em grupos, propor que os alunos imaginem como seria construir no espaço o Triângulo de Sierpinski.

Obtido a partir de um tetraedro, esse fractal é uma variação do Triângulo de Sierpinski no espaço.

Passos para a construção coletiva:

- *Construir um tetraedro;*
- *A partir dos pontos médios de cada aresta, obter cinco novos tetraedros semelhantes ao tetraedro original;*
- *Retirar o tetraedro central;*
- *Repetir os passos anteriores para os tetraedros anteriores e assim sucessivamente.*

Atividade posterior à construção do Tetraedro de Sierpinski:

1) *Qual é a área do tetraedro inicial?*

____

____

2) *Quantos tetraedros foram gerados a partir da primeira iteração? Qual é a área de cada um deles?*

____

____

3) *Como poderíamos escrever este valor genericamente?*

____

____

4) *E a área total após a primeira iteração? Compare este valor com a área inicial e justifique o porquê disso acontecer.*

____

____

____

5) *Quantos tetraedros foram gerados a partir da segunda iteração? Qual a área de cada um deles?*

____

____

____

6) *E a área total após a segunda iteração? Compare este valor com a área inicial e explique por que isso acontece.*

____

____

____

Objetivo, detalhamento e análise da Atividade 10 A

A Atividade 10 A foi planejada com o intuito de os alunos estabelecerem relações entre a figura plana e o sólido tridimensional. A exigência era que encontrassem um valor para a área de cada fractal no final de diferentes iterações e comparassem os resultados encontrados de modo a elaborarem suas conclusões sobre o que acontece com tais valores.

Um aspecto a destacar no desenvolvimento da atividade foi o trabalho de equipe, necessário e importante para que o produto final agradasse a todos, visto que o fractal foi construído em grupo para agilizar o seu término e evitar que a tarefa se tornasse maçante e cansativa. Dessa forma, os colegas exigiam o empenho dos demais, fato possível de ser comprovado na Figura 45.

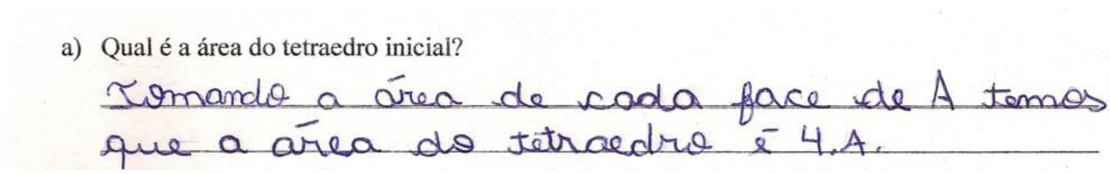
Figura 45- Imagem de fractais construídos pelos alunos A6, A7, A14, A8, A9, A18, A11 e A13

Iteração 1 Iteração 0 Iteração 2

Fonte: Produção dos Alunos A6, A7, A14, A8, A9, A18, A11 e A13 (2012).

Em relação aos objetivos da atividade, os registros feitos pelos alunos, como observado na Figura 46, demonstram que os mesmos foram alcançados.

Figura 46 – Atividade 10A ,apresentada pelo aluno A19.



a) Qual é a área do tetraedro inicial?

Tomando a área de cada face de A temos que a área do tetraedro é 4.A.

Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A19 (2012).

Figura 47- Continuação da Atividade 10A, apresentada pelo aluno A15.

d) E a área total após a primeira iteração? Compare este valor com a área inicial e justifique o porquê isso acontece?

A área após a 1ª iteração é $4.A = 4A$, como pedemos observar a área total é igual a inicial, isso acontece porque a perda de área é compensada pelo acréscimo surgido.

Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A15 (2012).

A) Esponja de Menger

Inicialmente, trouxemos um grande cubo e pedimos que os alunos sugerissem como poderíamos construir um fractal no espaço, de modo que cada face do cubo se parecesse com um Carpete de Sierpinski, que é então denominado Esponja de Menger e foi criado por Karl Menger (1902-1985).

Questionamos os educandos sobre quantos cubos e de que medida deveria ser a aresta que precisávamos para obter a primeira iteração. Cada aluno então construiu um cubo de razão 13, totalizando 27 cubos. Em seguida, retiraram-se os cubos centrais de cada uma das faces e o cubo central. Para repetir esses passos nos cubos restantes, cada discente fez uma parte.

Atividade posterior à construção da Esponja de Menger:

1) Complete o quadro:

Quadro 8 – Atividade sobre Fractal Esponja de Menger.

Iteração	*Aresta de cada cubo*
0	
1	
2	
3	
...	...
n	

Fonte: Da autora, baseado em Souza (2010).

2) Preencha o quadro:

Quadro 9 – Continuação da Atividade sobre o Fractal Esponja de Menger.

Iteração	*Número de cubos retirados*	*Número de cubos restantes*	*Aresta de cada cubo*	*Volume total do fractal*
0				
1				
2				
3				

Fonte: Quadro produzido pela autora, baseado em Souza (2010).

3) O que você observa que está acontecendo com o volume do fractal à medida que aumentam as iterações?

____

____

Objetivo, detalhamentos e análise da Atividade 10 B

De maneira similar à anterior, esta atividade foi proposta com o intuito de os alunos estabelecerem relações entre a figura plana, referindo-se ao Carpete de Sierpinski e ao sólido tridimensional confeccionado. Outro objetivo foi levar os educandos a usarem a potenciação, os números racionais e a álgebra nas generalizações exigidas e em contexto diferenciado dos anteriores. Aliada a isso, a retomada do conceito de volume era a intenção da referida atividade.

O trabalho coletivo – fundamental para o êxito da atividade mencionada - é sempre um desafio, haja vista que cada componente do grande grupo precisava dar sua parcela de contribuição. Houve reclamações por parte de alguns em relação ao fraco comprometimento de colegas com a estética do trabalho, o que comprometia a aparência final deste.

Quanto ao preenchimento da tabela mostrada na Figura 48, percebemos dificuldades por parte dos alunos, sendo necessário um questionamento coletivo. Contudo, alguns continuaram demonstrando dúvidas. O estabelecimento de muitas relações e sintetizações, associado ao registro de forma adequada, foi a barreira encontrada por alguns. Então, como o objetivo da atividade não era avaliar o produto final, mas o processo de crescimento e aprendizagem, optamos por realizar o seu preenchimento de forma coletiva. Tal decisão não significou pouco esforço ou espera por uma resposta pronta dos educandos, mas todos se envolveram e participaram, contribuindo positivamente.

Figura 48 – Atividade 10 B apresentada pelo aluno A8.

Iteração	Número de cubos retirados	Número de cubos restantes	Aresta de cada cubo	Volume total do fractal
0	0	1	A	V
1	7	20	$\frac{1}{3} \cdot A$	$\frac{20}{27} \cdot V$
2	$7 \cdot 20$	20^2	$\frac{1}{3^2} \cdot A$	$\left(\frac{20}{27}\right)^2 \cdot V$
3	$7 \cdot 20^2$	20^3	$\frac{1}{3^3} \cdot A$	$\left(\frac{20}{27}\right)^3 \cdot V$

Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A8 (2012).

O desenvolvimento desta atividade proporcionou superação e crescimento dos alunos, que se sentiram desafiados. Ponte (2005) ressalta a importância do estabelecimento de relações para o desenvolvimento do pensamento algébrico e pontua o estudo de padrões e regularidades como uma via privilegiada para promover o raciocínio, o que a atividade referida contemplou.

Quanto à conclusão do que acontecia com o volume da Esponja de Menger, à medida que as iterações aumentavam, as dificuldades eram superadas. Todos as realizaram sem ajuda, como observamos na Figura 49.

Figura 49 – Continuação da Atividade 10 B apresentada pelo aluno A17

3) O que você observa que está acontecendo com o volume do fractal à medida que aumentam as iterações?

Que a cada nova iteração diminui

Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno17 (2012).

.

A realização das atividades propostas ampliou a visão de geometria que os alunos tinham, despertando-lhes a visualização e apreciação de belas formas geométricas por meio da

Geometria Fractal. O desenvolvimento do raciocínio algébrico associado ao geométrico possibilitou a consolidação e construção de aprendizagens significativas.

A empolgação e motivação da turma foram percebidas durante o desenvolvimento de todas as atividades, pois, mesmo diante dos obstáculos, não desistiam e se empenhavam a fim de manipular, analisar os padrões presentes nos fractais e em aprender a construí-los.

A utilização do *software* Geogebra favoreceu a aprendizagem dos alunos, visto que possibilitou a criação de fractais que, manualmente - uso da régua, transferidor e compasso -, seriam mais trabalhosos e complicados. As experimentações, simulações e testes realizados durante o processo de construção fractal e a generalização dos diferentes conteúdos matemáticos foram intensamente explorados, instigando-os a pensarem nas iterações posteriores mesmo sem as terem feito. A análise dos diferentes níveis de cada fractal em uma única construção foi uma vantagem proporcionada pelo uso do *software*, permitindo também que os discentes validassem as conjecturas feitas e desenvolvessem o raciocínio e os conteúdos matemáticos intrínsecos em cada construção. A mobilização de conhecimentos e estratégias, desde a escolha da ferramenta disponível pelo *software* que melhor se adequasse ao objetivo almejado até a fase de conclusão e a posterior análise, constituiu um processo rico à formação de conceitos matemáticos.

As afirmações de Gravina e Basso (2012) vão ao encontro das observações feitas durante a prática pedagógica quando inferem que as mídias digitais se tornam realmente interessantes quando elas ajudam a mudar a dinâmica da sala de aula na direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas com a concomitante aprendizagem da Matemática. Contudo, Girafa (2010) coloca que ainda permanece o desafio aos docentes de organizar os processos de forma que os alunos adquiram competências necessárias para viver e trabalhar na sociedade da aprendizagem. A autora prossegue suas reflexões ainda neste contexto:

> E, não se trata apenas de motivação para uso de tecnologias e sim de atuar a partir de um conjunto de crenças adquiridas acerca do potencial destas tecnologias como elemento de diferenciação ou qualificação da sua prática docente e, da certeza que poderá utilizar os recursos de forma customizada às suas necessidades e planejamento (GIRAFA, 2010, p 101).

Cientes das considerações feitas, do papel do professor como mediador, da importância do planejamento e apoiados pelo *software* Geogebra é que elaboramos a prática pedagógica ora apresentada. Acreditamos que o *software* Geogebra proporcionou um dinamismo à nossa proposta pedagógica.

No próximo Capítulo, descrevemos o questionário respondido pelos alunos com os quais foi desenvolvida a intervenção pedagógica com o objetivo de avaliar as atividades propostas.

4 AVALIAÇÃO DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NA VISÃO DOS ALUNOS

Neste Capítulo, apresentamos os resultados obtidos por meio de um questionário que aplicamos no último encontro aos 19 alunos participantes da prática pedagógica, sendo que a 20ª aluna da turma, como já mencionado anteriormente, não frequentou nenhuma das aulas por motivo de atestado médico apresentado em virtude de sua gravidez, fato que a levou a não respondê-lo.

Ao propormos a aplicação do questionário, realizamos a leitura das questões (APÊNDICE D) para esclarecer algum termo dos enunciados que pudesse gerar dúvida aos alunos no momento do preenchimento. Tomamos o cuidado para que não fosse feito nenhum comentário que pudesse, de alguma maneira, influenciar as respostas posteriores.

Na continuidade, apresentamos os resultados que obtivemos com a aplicação do questionário e também transcrevemos algumas respostas dos alunos a fim de exemplificar ou reforçar alguns aspectos considerados relevantes para este estudo.

Na questão 1, que perguntava se os alunos já possuíam algum conhecimento anterior sobre fractais, todos afirmaram nunca ter visto nada sobre o assunto em momento algum que antecedesse ao da realização da intervenção pedagógica realizada.

Ao serem questionados, através da questão 2, sobre o empenho apresentado na realização das atividades, quinze alunos afirmaram tê-lo demonstrado mesmo nos momentos em que encontravam dificuldades. O interesse que a temática despertou na turma foi apontado como fator propulsor do esforço para que todos concluíssem as atividades com êxito, como podemos observar na colocação feita pelo aluno A2: *"Eu acho que o meu empenho foi bom, porque achei interessante o tema de fractais."*. Três discentes afirmaram que poderiam ter se esforçado mais e apenas um admitiu que não houve empenho de sua parte. Esses posicionamentos vêm ao encontro das colocações feitas sobre o dinamismo proporcionado pelo uso do recurso computacional como um componente motivador aliado ao encantamento visual das formas fractais.

A questão 3 indagava sobre a possibilidade de os alunos terem realizado atividades importantes no decorrer da prática, deixando espaço para os mesmos tecerem comentários acerca do exposto. Todos reconheceram ter construído aprendizagens importantes, destacando a questão da novidade, para eles, da existência dos fractais. Fazer uso de medições com certa exatidão foi outro aspecto ressaltado por muitos como podemos perceber nas transcrições que seguem:

Sim, aprendi muito como medir certinho, aprendi como construir um fractal. (A3)

Sim, sabendo lidar com medidas exatas, fazer tudo com atenção. (A7)

Sim foi muito importante porque trabalhamos como medir e a concentração também foi muito usada, e eu acredito que esse trabalho trouxe algo importante. (A9)

Eu acho que eu consegui montar no computador alguns fractais e aprendi muita coisa que eu nem fazia ideia que existia. (A1)

Tais colocações nos remetem à dificuldade de realizar medições percebidas nesse mesmo grupo que se constituiu num dos fatores motivadores ao desenvolvimento da intervenção pedagógica. Dessa forma, temos indícios de que colaboramos na contemplação dessa defasagem na aprendizagem dos participantes da pesquisa. A necessidade de atenção e concentração para desenvolver o proposto também foi sentida por eles, sendo merecedora de destaque, visto que é algo bastante almejado por docentes no ambiente da sala de aula.

Em relação à questão 4, que solicitava que os alunos relatassem as dificuldades encontradas no que se refere ao uso do *software* Geogebra, a principal citada por eles foi a pouca precisão que tinham quando desejavam marcar um ponto em determinado lugar na tela. Dois alunos apontaram como empecilho o pouco discernimento tido no momento da escolha da ferramenta adequada para atender ao que desejavam. Este, portanto, é um aspecto que consideramos positivo, pois estabelecer critérios de escolha durante as construções era um objetivo que almejávamos, visto que a dificuldade não consistia no pouco esclarecimento da função desempenhada por cada ícone, mas no planejamento e execução das etapas da construção do fractal. Ademais, a turma, de um modo geral, considerou não ter encontrado maiores obstáculos, ressaltando as explicações fornecidas pelo programa para a execução das ferramentas como elemento facilitador. Podemos observar a afirmação feita no registro do aluno A13: *" Nenhuma por que o programa era simples e explicava para que servia cada ferramenta e ainda nos possibilitava criar outras ferramentas para facilitar o nosso trabalho em cima dos fractais".*

Em sentido similar, Gravina *et. al* (2012) ressalta a linguagem natural da geometria disponível no menu do Geogebra – ponto, reta passando por dois pontos, retas paralelas, retas perpendiculares, círculos, transformações geométricas, por exemplo.

A questão 5 apresentava um caráter mais objetivo onde o aluno deveria assinalar as opções: sim , não e em parte, dependendo do valor, para ele, do *software* Geogebra no processo de aprendizagem do conteúdo. Apenas um assinalou a opção em parte, enquanto os demais ficaram com a primeira alternativa, atribuindo, assim, significativa importância ao *software* em uso.

No que se refere à descrição das contribuições do *software* Geogebra no processo de aprendizagem presentes na questão 6, transcrevemos as respostas dadas pelos alunos na íntegra, visando uma maior fidelidade e veracidade das informações.

Foi muito importante porque se não houvesse o software Geogebra o trabalho iria se tornar mais difícil, porque iríamos ter que medir tudo e dividir as peças cada vez mais pequenas. Mas o computador adiantou tudo para nós. (A1)

Sim, importante, pois ele contribuiu muito, facilitou nas construções dos fractais. (A2)

Foi muito importante para mim que aprendi novos jeitos de trabalhar, novos trabalhos geométricos, e também foi bem legal, nós trabalhamos todos em grupo. Foi importante também que ao desenvolver esse trabalho nós tivemos a visita de uma pessoa muito especial a professora da professora Teresinha. (A3)

Aprendi a usar o software Geogebra, também tive o conhecimento de como montar um fractal. Aprendi a fazer ferramenta. (A4)

Que é fácil, mais divertido, no computador se você fizesse certo dava exato os fractais, etc.. (A5)

Na hora de fazer um fractal o software foi uma ajuda e tanto, pois se não tivéssemos ele, teríamos que usar régua e fazer os fractais com medição perfeita. (A6)

Aprendi a fazer fractais, aprendi que fractais tem infinitas iterações, que pode-se fazer fractais de figuras geométricas e de algumas partes do corpo. (A7)

Foi importante porque deu para fazer criar ferramenta e não precisou medir, foi muito mais prático. (A8)

O software Geogebra ajudou muito no processo de aprendizagem sobre os fractais, fiz trabalhos bonitos que eu não imaginava que poderia fazer. (A9)

Eu consegui saber a importância que a matemática tem em nossas vidas, conheci mais sobre as formas geométricas e como podemos nos divertir com os fractais. (A10)

Porque se a gente não tivesse feito no software Geogebra a gente perderia muito tempo desenhando, medindo e fazendo outras coisas, assim já é mais rápido. (A11)

Foi muito importante, pois sem ele teríamos que fazer a mão e seria mais difícil para fazer as medidas corretamente. (A12)

Foi mais fácil e sem o software ia ser impossível desenhar um fractal porque ia ser muito complicado e fractal tem que ser medida certa. (A13)

Sim. Eu aprendi novas coisas, que se um objeto for repetido várias milhares de vezes forma um fractal. (A14)

Se não existisse o software Geogebra ia ser muito difícil realizar as atividades, pois íamos ter muito trabalho e ia ser muito demorado para fazer todos os processos pedidos. (A15)

Foi importante porque quando nós recebíamos a folha para preencher nas tabelas era ali que eu encontrava minhas dificuldades, mas foi importante para nossa capacidade de aprender criar um fractal. (A16)

Ele ensinou como fazer iterações com ferramentas adequadas, para que quando nós construíssemos desse certo. (A17)

Contribuiu na criatividade, fez com a gente aprendesse a usar o software Geogebra, fez com que a gente aprendesse a ajudar os colegas com o que eles não conseguiam fazer e fez com que a gente pensasse e racionasse mais. (A18)

Foi bom porque eu não conhecia o software Geogebra e ele nos poupou muito trabalho manual, todos nós iríamos demorar muitas horas até dividir todas aquelas iterações etc.. (A19)

Novamente salientamos a precisão das medidas nas manifestações dos alunos como uma das contribuições do uso do *software* no desenvolvimento das atividades propostas. Outro aspecto muito presente nas colocações foi a rapidez proporcionada pelo uso do *software* na realização das iterações fractais A possibilidade de realização de atividades que, por meio de outros recursos costumeiramente usados seriam mais complicadas, pareceu-nos ser uma das grandes vantagens do computador como ferramenta no ensino. Waldomiro (2011) infere que é preciso compreender que as tecnologias da computação interferem na interação dialética entre o conceito fundamental e a faceta técnica da atividade matemática, modificando sutilmente essa relação e economizando o trabalho matemático.

A questão 7 solicitava que os alunos opinassem sobre a metodologia utilizada para trabalhar o tema. Ao analisarmos as respostas fornecidas, obtivemos apenas posicionamentos positivos. A interação entre os colegas nos momentos de trocas e ajuda aos que apresentavam dificuldades foi um aspecto mencionado. Cruz (2004) atribui a interatividade entre os envolvidos no processo do uso do computador no ensino uma de suas principais potencialidades, favorecendo a construção da matemática dada por indução e generalização. A utilização do *software* Geogebra foi reiterada pela maioria da turma como um facilitador nas construções fractais. A diversificação da metodologia por meio das construções dos sólidos e dos cartões foi outro ponto destacado por muitos discentes, além dos relevantes comentários de apreciação a beleza dos fractais construídos.

A análise das respostas obtidas por intermédio do questionário aplicado nos permite concluir que a prática pedagógica desenvolvida propiciou envolvimento positivo dos alunos que se empenharam para realizar as atividades propostas. A temática fractal e o uso do recurso computacional foram aspectos importantes destacados por significativo número de educandos.

Na continuidade, apresentamos as Considerações Finais, as quais constituem o último Capítulo desta pesquisa. Nele, registramos, prioritariamente, nossas percepções sobre a abordagem do conteúdo Geometria Fractal com auxílio do *software* Geogebra.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa propôs uma intervenção pedagógica voltada à exploração de conteúdos geométricos e algébricos a partir da construção de fractais com alunos da 7ª série do Ensino Fundamental. Para tanto, elaboramos e desenvolvemos uma prática de ensino, em ambiente informatizado, tendo como suporte o *software* Geogebra.

Conforme apresentado na Introdução, a motivação do presente trabalho foi, por um lado, o fato de julgarmos a geometria importante na formação do corpo discente. Por outro, o enfoque aos fractais foi uma opção por percebermos a insuficiência da Geometria Euclidiana na contemplação de elementos da natureza, sua aplicabilidade em diversas áreas, a não constatação desse conteúdo em livros didáticos e o pouco conhecimento de professores sobre o tema.

Na análise de livros didáticos do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental, observamos que a abordagem sobre a Geometria Fractal e o incentivo ao uso de um recurso computacional no ensino da geometria, de um modo geral, deixam muito a desejar. O enfoque dado ao assunto é pouco; em alguns casos, nenhum.

Quanto aos professores, constatamos, por meio do questionário, que a Geometria Fractal é pouco abordada junto aos alunos no contexto da Matemática. A inserção de recursos computacionais no ensino da geometria, de acordo com os relatos, é feita de forma bastante precária, constatando-se, no âmbito investigado, que, embora os avanços nessa área sejam grandes, ainda são pequenas e poucas as ações para torná-los ferramenta comum de apoio ao fazer pedagógico do professor em comparação às demais.

A justificativa do pouco conhecimento para a não abordagem da Geometria Fractal apresentada pelos professores nos remete à importância da atualização contínua dos profissionais da área como uma das condições para o desencadeamento de mudanças no ensino. Conquanto, o não conhecimento aliado à falta de suporte encontrado nos livros didáticos são fatores que contribuem para que docentes acabem por não trabalhar a Geometria Fractal em sala de aula. Dessa forma, podem estar privando os alunos de conhecerem uma área da matemática fascinante e envolvente não só pelo aspecto visual atraente, mas pelo potencial propulsor de vários conhecimentos matemáticos.

Nesse contexto, elaboramos uma intervenção pedagógica com uma abordagem diferenciada da Geometria Fractal com o auxílio de um recurso computacional. Procuramos, então, fundamentar-nos em pesquisas bibliográficas sobre os focos de nosso estudo. Constituímos, assim, o Capítulo 2, no qual registramos os estudos teóricos sobre o uso das tecnologias de informática no processo de ensino e de aprendizagem, bem como a Geometria Fractal e o *software* Geogebra. Foram diversos os referenciais teóricos que embasaram e contribuíram visando à elaboração e realização da prática desenvolvida.

A intervenção pedagógica, descrita no Capítulo 3, buscou a construção de conceitos algébricos e geométricos na exploração da Geometria Fractal. Por fim, no Capítulo 4, apresentamos os resultados de um questionário aplicado aos alunos para que eles pudessem fazer suas considerações acerca da prática da qual participaram.

Diante de tantas transformações pelas quais a sociedade tem passado é, no mínimo, sugestivo, que a escola repense questões; dentre outras, a revisão de conteúdos nas grades curriculares. Neste paradigma, a inserção da Geometria Fractal seria um complemento enriquecedor, haja vista sua ligação com as representações da natureza e sua crescente aplicabilidade em várias áreas.

Fazer uso do computador como uma ferramenta mediadora da aprendizagem era um dos nossos propósitos, embora estivéssemos cientes de que esse recurso, por si só, não nos garantiria êxito. Dullius *et al* (2011) comentam que pesquisas indicam o uso do computador como um aliado ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes, viabilizando a realização de novas atividades e de novas formas de pensar e agir. Com esse intuito, optamos pelo uso do *software* Geogebra que permite, entre outras coisas, explorar a construção de fractais num processo dinâmico onde coloca o aluno como programador do processo sem lhe exigir o domínio de uma linguagem técnica.

O uso dessa tecnologia trouxe significativas contribuições ao desenvolvimento de nossa proposta. Com uma interface de fácil entendimento, o *software* Geogebra ofereceu condições para que os alunos manipulassem os diferentes componentes das figuras construídas, permitindo a exploração e a realização de conjecturas de forma a embasar a construção de conceitos geométricos e algébricos. A possibilidade de visualizar os diferentes níveis de cada fractal, mesmo após terem concluído a construção, proporcionando uma espécie de *feedback,* foi outra vantagem da utilização desse recurso. Assim, o *software* possibilitou a investigação e oportunizou aos alunos chegarem a generalizações às quais foram instigados a observarem. Gravina e Contiero (2011) comentam explorações feitas com uso do Geogebra:

> É com este olhar de "geômetra" que vemos os alunos transformando objetos comuns em dinâmicos objetos geométricos com a ajuda do Geogebra. Esta transformação dos objetos requer uma sutileza de olhar, requer o domínio de procedimentos geométricos e analíticos para identificar relações entre variáveis, e desta forma os alunos estão desenvolvendo habilidades e atitudes que são características do pensamento matemático – observar, conjeturar, relacionar, refinar suposições, desdobrar um problema em pequenos problemas (p 9).

Contudo, a inserção do recurso computacional no ensino da matemática só implicará qualificação dos processos de ensino e de aprendizagem se vier acompanhada de mudanças de paradigmas. O uso dessa ferramenta pressupõe professores bem preparados, com discernimento crítico para escolher o *software* que melhor se adeque ao objetivo que se almeja, ao conteúdo que se quer desenvolver e à metodologia adotada. Nesse sentido, Valente comenta:

> Um software só pode ser tido como bom ou ruim dependendo do contexto e do modo como ele será utilizado. Portanto, para ser capaz de qualificar um software é necessário ter muito clara a abordagem educacional a partir da qual ele será utilizado e qual o papel do computador nesse contexto. E isso implica ser capaz de refletir sobre a aprendizagem a partir de dois polos: a promoção do ensino ou a construção do conhecimento do aluno (1997, p 19).

A precisão das medidas, ao passo que as iterações fractais iam aumentando, foi uma das contribuições obtidas com o *software* Geogebra. O uso de recursos convencionais, como régua e compasso, fazer medições em intervalos de espaço muito pequenos, é uma tarefa que requer muita habilidade. Assim, o ambiente computacional proporcionou exatidão aos traçados e otimizou o tempo gasto que despenderíamos com o fazer manual dos fractais.

A exploração da Geometria Fractal encantou e desafiou os alunos, possibilitando-lhes estabelecer relações entre o referido conteúdo e os elementos da natureza que os rodeavam. A apreciação à beleza presente nas figuras fractais despertou interesse e os motivou a se empenharem na realização das atividades propostas, sem que isso significasse algum descaso aos conhecimentos matemáticos envolvidos no processo.

Contemplar os aspectos harmoniosos e observar as regularidades nas próprias irregularidades de cada fragmento fractal permitiu que os alunos percebessem o condicionamento destes aos aspectos algébricos e geométricos, favorecendo a exploração de tais conhecimentos. Desse modo, a generalização das regularidades observadas em cada fractal contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos discentes. Percebemos uma evolução da turma na apropriação da simbologia algébrica nos registros e verbalizações realizadas. A abordagem à Geometria Fractal, nesse caso, foi um aspecto que facilitou o progresso observado, visto que tornou a aprendizagem prazerosa e significativa, vinculando a álgebra a questões reais e não a meros exercícios mecânicos.

A prática desenvolvida confirmou o que pensávamos anteriormente, ou seja, acrescentar a Geometria Fractal ao currículo escolar não deve ser associada à exclusão da Geometria euclidiana, mas complementá-la. Estender a abordagem àquela, além de ter proporcionado descobertas fascinantes e ampliado o campo de visão geométrica, favoreceu o desenvolvimento de conteúdos típicos desta, como a construção e classificação de triângulos e ângulos, quadriláteros, retas, semirretas, ponto, paralelismo, simetria, semelhanças e diferenças, entre outros, reforçando assim essa fusão.

As construções fractais também possibilitaram o desenvolvimento intenso de conteúdos, como área, volume, perímetro, potenciação e frações. Vinculada a estes, tivemos sempre presente a álgebra como forma de representarmos as diferentes generalizações. Apropriar-se de conhecimentos algébricos, nesse caso, facilitou o aprendizado, visto que não foram exercícios mecânicos; era perceptível como os alunos faziam uso da mesma de maneira natural, já que compreendiam seu significado.

Dessa forma, esperamos ter contribuído no sentido de propormos e divulgarmos uma alternativa de abordagem, contemplando aspectos relevantes ao ensino da matemática e despertando o interesse de professores para a inserção do tema em suas aulas. Contudo, sabemos que esta é apenas uma dentre tantas alternativas possíveis de encaminhamento e reflexões a respeito do assunto.

A Geometria Fractal é um tema de grande potencial que muito ainda precisa ser explorada, objetivando uma abordagem nos diferentes níveis da Educação Básica. Com enfoques diferenciados e coerentes com o nível em que se encontram os estudantes, ela pode contribuir para ampliar o significado dos conteúdos construídos e ser desencadeadora de muitos outros conceitos matemáticos.

Não apenas a crescente evolução tecnológica e seus reflexos nos modos de vida, mas a facilidade de acesso coloca a escola na condição irrefutável de fazer uso desses recursos para aprimorar o ensino. Nesse sentido, concordamos com Dullius *et al* (2011) quando afirmam que não há mais como negar que o recurso computacional é uma poderosa ferramenta para romper o formalismo e transformar o ato de “ensinar” numa inter-relação produtiva e revolucionária, por meio da qual a prática educativa contribui para a melhoria da qualidade de vida da sociedade e da educação. Nessa perspectiva, acreditamos que ainda há muitas outras formas de explorar, não apenas o *software* Geogebra que apresentamos neste estudo, mas outras disponíveis e de livre acesso que podem ser utilizadas para promover a aprendizagem de forma diferenciada.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. A. de O. **Os fractais na formação docente e sua prática na sala de aula.** Dissertação de Mestrado. PUC- SP, 2006.

ALMEIDA, T. B.; MARTINELLI, R. O. M.; RODRIGUES, V. M.; SILVA, A. M. M. **Fractais no Ensino Fundamental: explorando essa nova geometria**. s/d. Disponível em: <http://www.leoakio.com/cariboost_files/fractais_20no_20ensino_20fundamental.pdf>. Acesso em: 15 de fev. 2012.

ANTUNES, C. **Como desenvolver as competências em sala de aula**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2001.

ARAÚJO, P. B. **Situações de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP. 2010.

BARBOSA. R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal - para a sala de aula**. 2ª ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BONETE, L. M. C. A formação do aluno-pesquisador no Ensino Médio: o papel do professor frente ao uso da internet nas pesquisas. Dissertação de Mestrado. PUC- PR, 2006.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A.. Matemática: fazendo a diferença – 5ª. a 8ª. séries, 1ªed. São Paulo: FTD, 2006.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BORBA, M. C. Software e internet na sala de aula de Matemática In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Palestra. Salvador - BA, 7 a 9 de julho de 2010.

BORGES. C. F. **Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma seqüência para o ensino**. 2009. Dissertação (Mestrado

Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP. 2009.

BRASIL. Lei nº 9394/96. Estabelece as diretrizes e bases da educação Nacional. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 14 set. 2011.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, SEF, 1998.

CCAPITALIA. Disponível em: <http://www.ccapitalia.net/?cat=146>. Acesso em 14/02/2012.

CFTC.CII.FC.UL. Disponível em: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>. Acessado em: jul. 2012.

CRUZ, D. G. A utilização do ambiente dinâmico numa perspectiva construtivista para abordagem nos conteúdos de geometria analítica no Ensino Médio. In: anais do VII **Encontro Nacional de Educação Matemática** - ENEM. Comunicação Científica GT 06.Recife, 15 a 18 de julho de 2004.

DULLIUS; M. M.; QUARTIERI, M. T.; BERGMANN, A. B.; PADILHA, T. A. F. Formação de professores: elaboração e análise de atividades para explorar trigonometria usando software. Tecné, Episteme y Didaxis: Revista de la Facultad de Ciencias y Tecnologia – Universidad Pedagógica Nacional. Bogatá – Colombia. 2011.

DULLIUS; M. M.; QUARTIERI, M. T.; BERGMANN, A. B.; PADILHA, T. A. F.; SCHMITT, F. E.; ALTHAUSS, N. Material para Professores de Matemática: trigonometria da Primeira Volta Utilizando o Software Sintesoft Trigonometria 2.0. IN: XII Evento Internacional Matecompu 2011. III Evento Internacional Alammi 2011. UCP “Juan Marinello” Matanzas. Cuba. 2011.

EDUC. FC. UL. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/fractais.htm>. Acessado em: jul. 2012.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GIRAFFA, Lucia Maria Martins *Vamos bloggar professor? Possibilidades, Desafios e Requisitos para Ensinar Matemática no século XXI*. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 1, nº 2, p 97-110 Rio Grande do Sul, 2010.

GOMES, A. S. **Motivação do estudo de áreas e perímetros de figuras geométricas através de fractais**. Monografia. Universidade Federal do Paraná. PR.2007.

GRANDO, R.C.; NACARATO, A. M.; GONÇALVES L. M. G. **Compartilhando saberes em geometria: Investigando e aprendendo com nossos alunos.** Cad. Cedes, Campinas, vol.28, n.74, p39-56, jan./abr.2008.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. A. Mídias digitais na Educação Matemática In: GRAVINA, M.A...[*et al*.] (Org.). **Matemática, mídias e didática: tripé para formação de professores de matemática**. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GRAVINA, M. A.; BARRETO, M. M.; DIAS, M. T.; MEIER, M. Geometria Dinâmica na escola. In: GRAVINA, M.A...[*et al*.] (Org.). **Matemática, mídias e didática: tripé para formação de professores de matemática**. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GRAVINA, M. A.; CONTIERO, L. O. Modelagem com o Geogebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? **CINTED_UFRGS**. V.9, Nº 1, julho, 2011.

GRAVINA, M. A. **Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria**. In: Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, nov. 1996.

GRAVINA. A. M., SANTAROSA L.M.C. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. PGIE-UFRGS. **Informática na Educação: teoria& prática.** V. 2 Nº1, maio, 1999.

INSTITUTO Geogebra São Paulo. Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. PUC-SP. S/d. Disponível em: <http://www.pucsp.br/geogebrasp/>. Acesso em: 08 ago. 2012.

JANOS, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda., 2008.

JAVARONI, S. L.; SANTOS, S. C.; BORBA, M. C. Tecnologias digitais na produção e análise de dados qualitativos. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v. 13, n.1, pp. 197-218,2011.

JUNIOR, C. G. da S.; RÉGNIER, J. Livros didáticos e suas funções para o professor de Matemática no Brasil e na França. In: **2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT**. Brasil, Recife, Pernambuco, UFRPE, 2008.

JUNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B.A conquista da Matemática – 6º ao 9º ano, 1ª ed. São Paulo: FTD, 2009.

LAMONATO, M. Investigando geometria: aprendizagens de professoras da Educação São Carlos. SP.2007.

LEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A.. Matemática e Realidade – 6º ao 9º ano, 6ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

MACEDO, J. S. K.; FRANCO, V. S. Fractais – uma abordagem em sala de aula com o auxílio de softwares geométricos. s/d. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2204-6.pdf. Acesso em 20/04/2011>. Acesso em: 14 jul. 2011.

MALTEMPI, M. V. Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. In: **Acta Scientiae**. Canoas, v. 10, n.1, p 59-67, jan./jun.2008.

MOREIRA H.; CALEFFE L.G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. Rio de Janeiro: DP&A, 2006.

MORI, I; ONAGA, D . Matemática: idéias e desafios – 5ª a 8ª. Séries, 14ª ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

NÓBRIGA J. C. C.. ; ARAÚJO L. C. L. **Aprendendo Matemática com o Geogebra**. São Paulo. Editora Exato. 2010.

NUNES, R. S. R.. **Geometria Fractal e Aplicações**. Dissertação de Mestrado Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto. Portugal. Jan. 2006.

OLIVEIRA, S. B. **As equações Diofantinas Lineares e o Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2006.

PAQUES, O. T. W.; SOARES, M. Z. M. C.;SANTINHO M. S. In**. BIENAL DA SBM –BH**-Realizada de 14 a 18 de outubro de 2002. Laboratório de Ensino de Matemática – LEM/IMECC/UNICAMP. Campinas, SP.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/out_2009/matematica.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2012.

PENTEADO, M. G. Possibilidades para a formação de professores de Matemática. In: GRACIAS, T. S....[et al.]; PENTEADO, M. G.;BORBA, M. C. (Orgs.). **A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão**. São Paulo: Olho d’Água, 2000.

PERRENOUD, PHILIPPE. 10 Novas competências para ensinar. Tradução: Patrícia Chitttoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

PERROTTI, F. A. Usando Nfract. In: BARBOSA, R. M. Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PONTE, J. P. (2005). Números e álgebra no currículo escolar. In: Conferência planária no Encontro de Investigação em Educação Matemática, 17 – 19 de abril, Caminha.

REZENDE, F. As novas tecnologias na prática pedagógicas sob a perspectiva construtivista. Ensaio-**Pesquisa em Educação em Ciências**-V.02. nº.01. Mar. 2002.

RINALDI, R. M.; MENEZES, M. S. A Geometria Fractal: análise de softwares gráficos educacionais. **Graphica**, Curitiba, Paraná, 2007.

ROSSI. G. R. e BISOGNIN E. Explorando a geometria dos pisos por meio do *software* Geogebra. 2009. CINTED-UFRGS. **Novas Tecnologias na Educação**. V. 7 Nº 3, dezembro 2009.

SÁ, I. P. Primeiros Passos Com o *Software* Livre – Geogebra (2010). Disponível em: <http://www.magiadamatematica.com/diversos/apostilas/GEOGEBRA.pdf>. Acesso em: 03 mar. 2012

SANTOS, W. L. P.; GAUCHE, R.; MÓL, G. S.; SILVA, R. R.; BAPTISTA, J. A. Formação de professores: uma proposta de pesquisa a partir da reflexão sobre a prática docente. **Revista Ensaio – Pesquisa em Educação em Ciências**. Belo Horizonte, v.8/nº1, julho de 2006.

SILVA, B. C. Identificando sinalizações referentes às expectativas de aprendizagem SOBRE Geometria, ao término da Educação Básica. Dissertação de Mestrado. PUC/SP. 2004.

SOUZA, R. S. **Fractais geométricos**. Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de Alfenas. Alfenas. MG. 2010.

TAJRA, S. F**. Informática na Educação**. São Paulo: Érica, 2008.

VALENTE, J. A. O uso inteligente do computador na educação. **Revista Pátio**, Editora Artes Médicas Sul. Ano I, nº.1, mai/jul.- 1997.

VALIM, J. C. M. COLUCCI, V. Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio. s/d. Disponível em:

<http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf>. Acesso em: 16 de fev. 2012.

VEJAN M. P.; FRANCO. S. V. **Geometria Não-Euclidiana/Geometria dos Fractais**. Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná. Departamento da Universidade Estadual do Maringá. (s/d).

VIER, M. R.; OLIVEIRA, M. N. A. **A geometria plana e o software Geogebra: as possibilidades de elaboração dos conceitos relacionados aos quadriláteros**. In: VI Encontro Paraibano de Educação Matemática – EPBEM. Monteiro, PB, 09, 10 e 11 de novembro de 2010.

WALDOMIRO, T. de C. **Abordagem Histórico – Epistemológica do Ensino da Geometria fazendo uso da Geometria Dinâmica**. Dissertação de Mestrado. FE/USP. São Paulo, 2011.

ZUCHI, I. A integração dos ambientes tecnológicos em sala: novas potencialidades e novas formas de trabalho. In: **2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática-2ºSIPEMAT**. De 28 de julho a 1 de agosto de 2008. Brasil, Recife, Pernambuco. Universidade Federal Rural de Pernambuco.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário aos professores

Centro Universitário UNIVATES

Pró-reitoria de Pesquisa, Extensão e Pós-Graduação

Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas

Mestranda: Teresinha Aparecida Faccio Padilha

Questionário aos Professores

1) Qual é a sua formação?____

2) Em que série/ano você atua?_____________________________________

3) Você já ouviu falar em fractais? Em caso positivo, quando e através de qual meio?

____

____

4) O que você entende por fractais ou que conceito o nome lhe sugere?

____

____

5) Você trabalha com os fractais com seus alunos?__________________________

5.1 Em caso afirmativo, como os aborda?______________________________

____

5.2 Em caso negativo, que justificativa tem para não trabalhá-los?____

____

6) Você encontra dificuldades ao trabalhar o conteúdo de geometria com seu alunos? Em caso afirmativo, descreva quais.____

____

____

7) Você utiliza alguma ferramenta tecnológica no ensino da geometria? Quais? Em caso negativo, justifique o não uso.

____

____

8) Você acha que os alunos possuem dificuldades relacionadas à geometria? Cite-as.

____

____

APÊNDICE B – Transcrição de trechos do questionário aplicado aos professores.

No que se refere à Questão 1 (formação do professor) e Questão 2 (série ou ano em que atua), apresentamos uma síntese relativa a cada professor pesquisado, organizada no Quadro 1:

Quadro 1 – Relação de professores, formação e ano/série de atuação.

Professor	**Formação**	**Série ou ano que atua**
P1	Licenciatura em Matemática	6º e 7º anos, 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.
P2	Licenciatura em Matemática	7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.
P3	Magistério, Licenciatura Plena em Matemática, Especialização em Educação Matemática.	6º ano e 8ª série do Ensino Fundamental lecionando a disciplina de Ciências. 7ª e 8ª séries, também do Ensino Fundamental, lecionando Matemática.
P4	Licenciatura em Matemática, Especialização no Ensino de Matemática.	6º e 7º anos do Ensino Fundamental.
P5	Licenciatura Plena em Matemática.	6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.
P6	Magistério, Licenciatura em Matemática, Especialização em Supervisão Escolar.	6º ano e 7ª série do Ensino Fundamental.
P7	Licenciatura em Matemática. Mestrado em Processos Industriais.	7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, 1º e 2º anos do Ensino Médio.
P8	Licenciatura Curta em Matemática.	6º e 7º anos do Ensino Fundamental.

	Especialização em Gestão.	
P9	Licenciatura Plena em Matemática.	5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental.
P10	Licenciatura em Matemática, Especialização (não tendo mencionado a especificidade da mesma).	6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.
P11	Licenciatura Plena em Matemática. Especialização em Gestão Pública, supervisão e orientação. Especialização em Mídias Digitais.	Do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.
P12	Licenciatura em Matemática. Especialização em Educação Matemática.	8ª série do Ensino Fundamental e Ensino Médio.
P13	Licenciatura Plena em Matemática.	Educação de Jovens e Adultos (EJA), no Ensino Fundamental, 1º ano do Ensino Médio nas disciplinas de Matemática e Física.

A análise das respostas obtidas com a Questão 4 referente ao conceito construído ou sugerido por cada professor em relação ao termo fractal, permitiu-nos que as reuníssemos em quatro grupos. Um composto apenas pelo P5, que preferiu não sugerir nenhum conceito, já que, na questão anterior, afirmou nunca ter ouvido falar sobre o assunto. Em outro grupo, podemos reunir P1, P2, P4, P6, P13 e P10 que, pelas informações contidas em sua resposta, pertencia a dois grupos. Estes enunciaram o conceito do termo fractal, associando-o apenas a figuras geométricas, como podemos exemplificar:

P2: *"Penso que são figuras geométricas."*

P6: "*Utilização de formas geométricas por meio de dobraduras mais elaboradas."*

P13: *"Formas, dividindo em partes menores.*"

P10: “*Não entendo e não sei explicar, mas o nome fractais acredito que deve envolver frações e geometria, já que citas a geometria nas questões 6,7,e 8.”*

Os docentes P8, P5 e P10 associaram o termo fractal a frações, como mostramos:

P8: “*Frações, fragmentos, pedaços*”

P9: “*Uma figura inteira formada por várias partes...*”

O quarto grupo, formado por P3, P7, P11 e P12, apresentou conceitos próximos, ou até mesmo iguais do real significado dos fractais, como apresentamos:

P3: *“Fractais são formas geométricas, ou melhor, se apresentam em formas geométricas, onde uma parte da figura é semelhante ao todo.”*

P7: *“São desenhos, de certa forma infinita, que podemos aproximar em ponto, da figura e no micro encontramos a forma original (macro).”*

P11: *“Fractal é a sequência de imagens definidas por uma regra, ou seja, é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente auto similares. “Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo”.”*

P12: “*São figuras de geometria que podem ser divididas em partes da original, com detalhes.”*

Na Questão 5,que tinha como objetivo saber se o docente trabalhava o conteúdo Geometria Fractal; em caso positivo, como o abordava e, se o contrário, qual a justificativa para não fazê-lo, optamos por apresentar os resultados, conforme o Quadro 2.

Quadro 2 – Respostas dos professores à Questão 5.

Professor informante	**Trabalha? Fractais?**	**Como os aborda?**	**Justificativa para não trabalhar:**
P1	Não	———	Não trabalho porque não tenho base para tanto. O que vi de fractais até hoje foi muito pouco e superficial demais.

P2	Se são figuras sim.	Normal como qualquer outro conteúdo, e no concreto. Traçados com uso de réguas, compasso, transferidos e volumes trazidos pelos alunos e professora.	—
P3	Não	—	Não sei, talvez por que nunca acrescentamos no Plano e acaba-se por passar e não trabalhar devido ao tempo e tantos outros conteúdos.
P4	Não	—	Não consta na lista de conteúdos.
P5	Não	—	Não tivemos a formação a respeito no Ensino Superior.
P6	Não	—	Por não ter o conhecimento e material necessário.
P7	Sim	Nos conceitos de progressões no Ensino Médio, com o *software* Fractim e com pesquisa sobre fractais na natureza.	—
P8	Não	—	No momento estava fora de aula e agora retornando terei que aprender para depois usá-la.
P9	Não	—	Porque na escola trabalho em cima da geometria euclidiana.
P10	Não	—	Desconheço o assunto, não tem nos livros didáticos que utilizamos.
P11	Sim	Trabalho fractais com o *software* Shapari e através dele trabalho matrizes.	—
P12	Pouco	Mais por curiosidade, imagens ligadas bonitas ligadas à natureza.	—
P13	Sim, em parte.	Mas não uso este nome específico. Abordo a sequência de Fibonacci. Coloco que tudo existe a geometria e eles pesquisam.	—

No que se refere à Questão 7 (Você utiliza alguma ferramenta tecnológica no ensino de geometria? Quais? Em caso negativo, justifique o não uso.), transcrevemos as respostas dadas pelos professores na íntegra para maior fidelidade e veracidade das informações.

P1:"*Não. Até pouco tempo a escola não dispunha de recursos desse tipo*."

P2: "*Não uso informática e sim trabalhos manuais, no prático, fazendo concretamente*."

P3: " *Pouco conhecimento e às vezes o laboratório de informática está sem o monitor, por isso acho difícil*."

P4:"*Sim, Cabri (Demo), Poly, Régua e Compasso*."

P5: "*Sim. Realizo trabalho de pesquisa na internet*."

P6: "*Não. Falta conhecimento*."

P7: "*Sim, Fractim e Geogebra que são softwares livres e que são possíveis demonstrações dos cálculos realizados em aula, através das formas transpostas ao software (fecham os valores*)."

P8: Não respondeu à questão.

P9: " *Sim, o computador*."

P10: *"Não, pois não domino muito bem e não me sinto segura e preparada para utilizar... mas é uma questão de tempo, sinto que é uma necessidade*."

P11: *"Sim, uso softwares para trabalhar geometria e outros conteúdos. Uso Geometry, Poly, etc*."

P12: "*Pesquisa, jogos, quebra-cabeça*."

P13: "*Laboratório de informática quando há disponibilidade (ainda é* precário)."

A Questão 8 tinha por objetivo investigar se os professores percebiam dificuldades, por parte dos alunos, relacionadas à geometria. Se constatado que sim, solicitava-se que fossem registradas. Assim os professores se manifestaram:

P1: *"Sim, desde dificuldades de uso de régua e compasso e outros materiais de compreensão de conceitos básicos."*

P2: *“ Dificuldades de usar o compasso e transferidor.”*

P3: *“ Alguns. Os ângulos, o uso de réguas, traçado de retas, cálculos relacionados à áreas e perímetros."*

P4: “*Não, a geometria facilita o aprendizado de qualquer conteúdo.”*

P5: *“ As principais dificuldades são em relacionar uma figura com a outra, por exemplo, 2 triângulos que formam um retângulo, daí o porquê de ao calcular a área de um triângulo dividirmos por dois.”*

P6: *“Não. Acho que há insegurança dos professores em relação ao conteúdo.”*

P7: *“Acho que o problema da educação está mais concentrado à área comportamental. Vamos à informática e a dificuldade é de se concentrar na atividade (querem acessar redes sociais, sem realizar a atividade) e não querem socializar uns com os outros que sabem (ajudar os colegas com maiores dificuldades em informática).”*

P8: Não respondeu à pergunta.

P9*:”Desde a dificuldade com uso da régua até a diferenciação e montagem de figuras geométricas.”*

P10: *“Não, qualquer assunto bem explorado os alunos vão bem, mesmo sendo através do livro didático, material dourado, desenhos no chão, medições, dobraduras, vídeos,...”*

P11: *“Acredito que tenha quando chegam ao 3º ano e os conteúdos trabalhados anteriormente não foram bem definidos.”*

P12: *“Sim, a maioria dos alunos tem dificuldade em estabelecer relações, em fazer generalizações, equacionar e resolver problemas que envolvem as mais variadas etapas da aprendizagem (geometria espacial e analítica).”*

P13*: “Acho que alguns alunos possuem dificuldades por não prestarem atenção e não realizarem as atividades em sala de aula, mas os que se envolvem na construção da mesma encontram dificuldades, pois hoje além da informática, quando disponível, podemos utilizar material concreto para definição dos conceitos e cálculos.”*

APÊNDICE C – Proposta pedagógica para abordagem de fractais

Atividade 1

1) Faça o desenho das formas geométricas que você conhece com seu o respectivo nome:

2) Agora, faça uma lista de dez coisas que você pode observar na natureza e associe com a forma geométrica que mais lhe pareça familiar:

Elemento observado	Forma geométrica a que você o associa

3) Você teve alguma dificuldade em associar os elementos escolhidos com uma forma geométrica conhecida? Por quê?

____

____

____

____

Atividade 2

Conhecendo o *software* Geogebra: a atividade 2 foi um primeiro contato dos alunos com o *software* Geogebra para que pudessem conhecê-lo e explorá-lo sem estarem sendo conduzidos por uma atividade dirigida.

Atividade 3

Após ter construído no Geogebra a curva de Koch, preencha o quadro que segue, que é uma atividade modificada de Gomes (2007), tomando como base o segmento inicial de comprimento c:

Ilustração	Nº de iterações realizadas	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da curva
	0			
	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
	...			

Atividade 4

Explorando o fractal Floco de Neve com atividades baseadas em Barbosa (2005):

1) Contagem dos segmentos:

a) Quantos lados tem a figura inicial do fractal? Suas medidas são iguais? Por quê?

____

____

____

____

b) Após realizada a primeira iteração, quantos segmentos passou a ter cada um dos seus lados?

____

____

c) E a figura toda passou a ter quantos segmentos?

____

____

d) Após a segunda iteração, cada um dos segmentos passou a ser substituído por quantos? Ficando agora a figura com que total de segmentos?

____

____

____

e) Seguindo este mesmo raciocínio, como poderíamos representar o total de segmentos após três iterações? Quatro? Cinco? E após as iterações?

____

____

____

2) Perímetro: considerando o comprimento do lado do triângulo inicial como c, responda:

a) Qual o perímetro do triângulo inicial?

____

____

b) Após a primeira iteração, cada segmento resultante passou a medir que parte do segmento inicial c?

____

____

c) Então, como podemos expressar o perímetro neste nível?

____

____

d) De quanto foi este aumento em relação ao nível anterior?

____

____

e) Se continuarmos a realizar as iterações, o que acontecerá com o valor do perímetro do Floco de Neve?

____

____

Atividade 5

1) Responda:

a) Qual foi a figura que você teve como ponto de partida para a construção do Triângulo de Sierpinski? Quais são suas caraterísticas?

____

____

b) Como podemos generalizar a medida do comprimento do lado da figura inicial?

____

____

c) Como expressar então seu perímetro?

____

____

____

d) Quantos triângulos você ignorou em cada etapa?

e) Existe alguma regra ou fórmula para expressar o total de triângulos ignorados? Qual?

f) Quantos triângulos restam em cada iteração? O que eles representam?

g) Existe uma regra ou fórmula para expressar quantos triângulos são considerados em cada iteração? Qual?

Agora preencha os dados no quadro modificado de Gomes (2007):

Iteração	**Número de triângulos**	**Comprimento do lado**	**Perímetro de cada triângulo**	**Perímetro total**
0				
1				
2				
3				
...				
N				

2) O que você observa que acontece com perímetro total à medida que aumentam as iterações? Esse valor tende a quê?

3) Se considerarmos que o triângulo inicial possui área x, cada novo triângulo gerado na primeira iteração terá que área?

4) E, após a segunda iteração, cada novo triângulo terá qual área?

____

____

____

5) Na sequência, após a terceira iteração, cada novo triângulo terá área igual a ____

6) Agora, organizaremos esses dados no quadro modificado de Gomes (2007):

Iteração	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total
0			
1			
2			
3			
...			
N			

7) O que você observa que acontece com a área total à medida que aumentam as iterações? Esse valor tende a quê?

____

____

8) Considerando a área do triângulo inicial como referência, responda:

a) Qual a porcentagem que a área do triângulo inicial representa?

____

____

b) Que porcentagem representa cada triângulo resultante da primeira iteração?

____

____

Atividade 6

Pesquisar sobre o Triângulo de Pascal e sua relação com o Triângulo de Sierpinski. Identificar possíveis estruturas fractais após ter pintado diferentes múltiplos no Triângulo de Pascal.

Atividade 7

Atividade posterior à construção do Carpete de Sierpinski:

1) Qual figura foi o ponto de partida para construção do fractal?

____

____

2) Quantas peças quadradas surgem:

- Na iteração zero:____
- Na primeira iteração:____
- Na segunda iteração:____
- Na terceira iteração:____
- Na enésima iteração:____

3) Como sabermos quantas peças quadradas surgirão após a quinta iteração?

____

____

____

4) Complete o quadro, modificado de Gomes (2007), considerando como medida do lado do quadrado inicial c:

Iteração	Número de quadrados	Comprimento do lado de cada quadrado	Área de cada quadrado	Área total
0				
1				
2				

3				
N				

Atividade 8

Criar um fractal com os recursos disponíveis pelo *software* Geogebra.

Atividade 9A

Atividade posterior à construção do cartão Triângulo de Sierpinski:

1) Que formas geométricas resultaram dos cortes e dobraduras?

2) O que acontece após cada iteração realizada?

3) Complete o quadro:

Iteração	Número de paralelepípedos novos
0	
1	
2	
3	
4	
...	...
N	

Atividade 9B

Atividade posterior à construção do Cartão Fractal Degraus Centrais:

1) Que propriedades dos fractais podemos visualizar no cartão fractal construído?

2) Que formas geométricas resultaram dos cortes e dobraduras?

3) O que acontece após cada iteração realizada?

___

___

4) Qual o volume do paralelepípedo da primeira iteração?

___

___

___

5) Complete o quadro:

Iteração	Número de paralelepípedos novos
0	
1	
2	
3	
4	
...	...
N	

Atividade 10A

Atividade posterior à construção do Tetraedro de Sierpinski:

1) Qual é a área do tetraedro inicial?

___

___

2) Quantos tetraedros foram gerados a partir da primeira iteração? Qual é a área de cada um deles?

___

___

___

3) Como poderíamos escrever esse valor genericamente?

4) E a área total após a primeira iteração? Compare este valor com a área inicial e justifique o porquê disso acontecer.

5) Quantos tetraedros foram gerados a partir da segunda iteração? Qual a área de cada um deles?

6) E a área total após a segunda iteração? Compare esse valor com a área inicial e explique por que isso acontece.

Atividade 10B

Atividade posterior à construção da Esponja de Menger:

1) Complete o quadro:

Iteração	Aresta de cada cubo
0	
1	
2	
3	
...	...
n	

2) Preencha o quadro:

Iteração	Número de cubos retirados	Número de cubos restantes	Aresta de cada cubo	Volume total do fractal
0				
1				
2				
3				

3) O que você observa que está acontecendo com o volume do fractal à medida que aumentam as iterações?

____

____

APÊNDICE D – Questionário aos alunos

QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS

O foco deste questionário é a aprendizagem de conhecimentos geométricos e algébricos a partir da construção de fractais com o uso do *software* Geogebra.

1) Você já possuía algum conhecimento anterior sobre fractais?

( )SIM ( )NÂO

2) Como você considera que foi seu empenho na realização das atividades propostas acerca do tema?

____

3) Você acredita que conseguiu construir aprendizagens importantes no decorrer das atividades? Comente.

4) Quais foram as dificuldades encontradas no que se refere ao uso do *software* Geogebra?

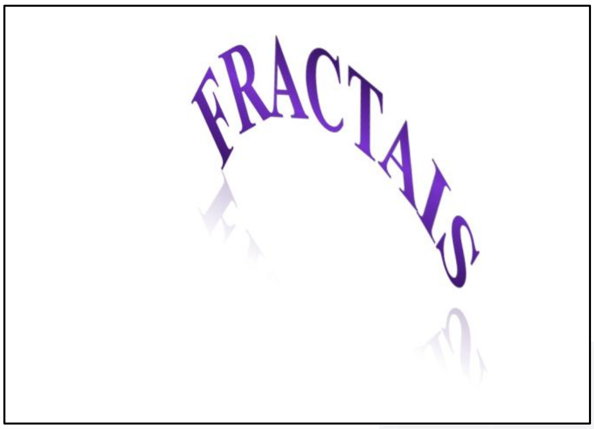
5) O *software* Geogebra foi importante no processo de aprendizagem do conteúdo abordado?

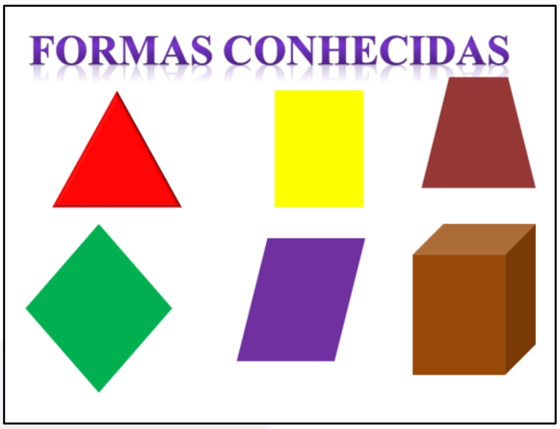
( ) SIM ( )NÂO ( ) EM PARTE

6) Se sua resposta anterior foi sim ou em parte, descreva quais foram as contribuições do *software* Geogebra no seu processo de aprendizagem.

7) Qual sua opinião sobre a metodologia que foi utilizada para trabalhar o tema em questão?

APÊNDICE E – Slides apresentados aos alunos para iniciar os fractais.





DEFINIÇÃO DE FRACTAL

J. Feder (apud, Barbosa 2005):

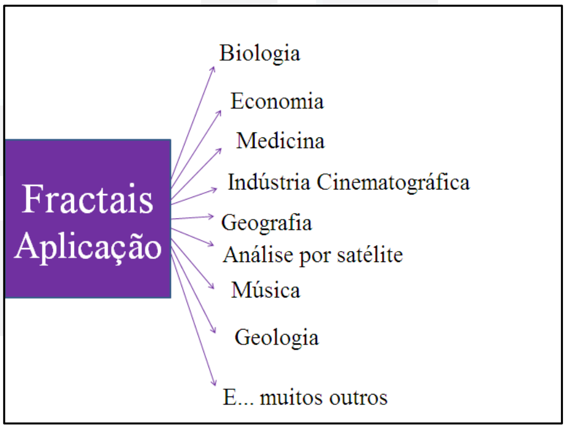
"Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos."

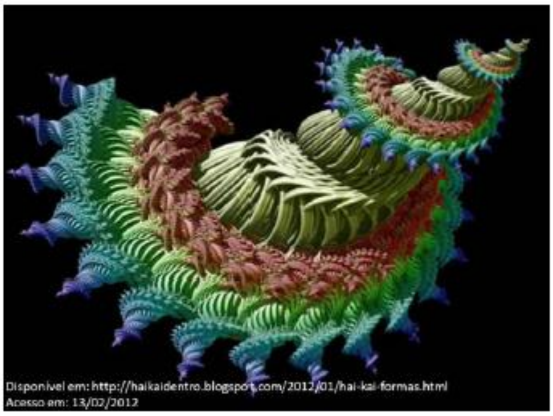
Dupond (apud, Borssoy, 2005)

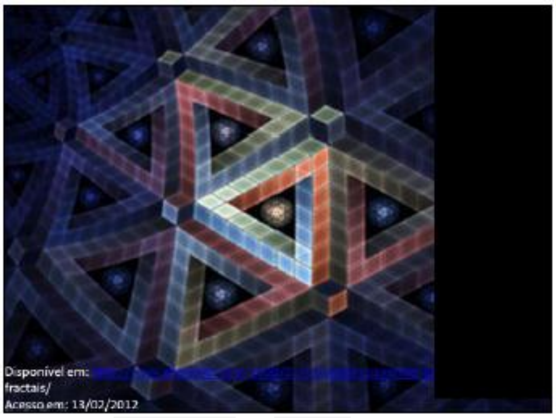
Fractais são objetos que apresentam auto-semelhança e complexidade infinita, ou seja, sempre contém cópias aproximadas ou não, de si mesmos e são gerados pela iteração de processos simples.

Benoit Mandelbrot, iniciador dos estudos sobre fractais afirma:

- "nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvores não são suaves nem o raio se propaga em linha reta."



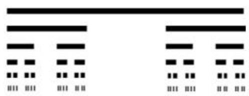




Imagens do slide anterior disponíveis em:

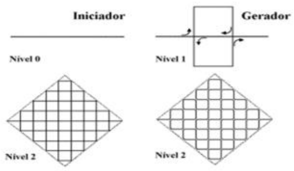
- 1) http://forum.antinovaordemmundial.com/Topico-universo-fractal-somos-fractais-assim-como-macro-%C3%A9-o-micro-matem%C3%A1tica-x-filosofia
- 2) http://triunphus.blogspot.com/2011/01/beleza-dos-fractais.html
- 3) http://meridianosparalelos.blogspot.com/2008/10/fractais.html
- 4) http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria.htm
- 5) http://eu-calipto.blogs.sapo.pt/13690.html
- 6) http://www.vidadeclaraluz.com.br/fofo_curio/foto_curio.asp
- Acesso em: 13/02/2012

ALGUNS FRACTAIS IMPORTANTES
CONJUNTO DE CANTOR



- Criado pelo matemático Georg Cantor (1845-1918) em 1883.
- É o conjunto de pontos (números) que permanecem após infinitas fases. (Barbosa, 2005)

CURVA DE PEANO

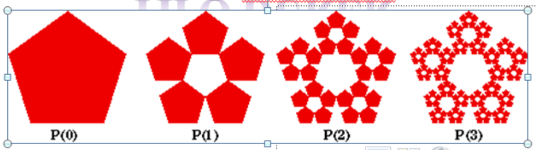


- Criada por Giusepe Peano (1858-1932) em 1890.
- Curva proposta como cobrindo totalmente uma superfície plana quadrangular.

CONJUNTO DE JULIA

- Criado pelos matemáticos franceses Pierre Fatou (1878-1929) e Gastou Julia (1893-1978).
- Julia desenvolveu sua pesquisa em um hospital após ter sido gravemente ferido como soldado perdendo seu nariz.

FRACTAL PENGONAL TIPO DÜRER

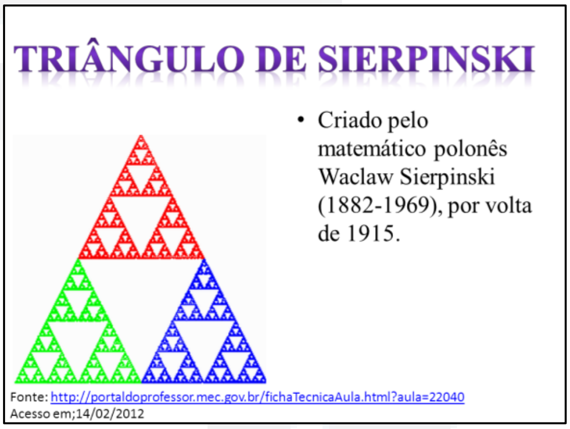


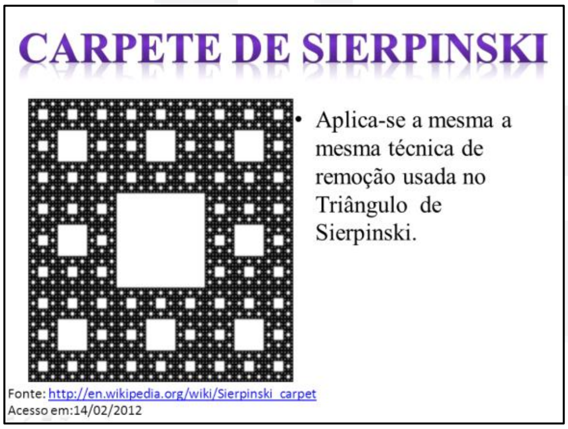
- Um dos primeiros artistas que criou objetos fractais em pentágonos regulares foi Albrecht Dürer (1471-1528).
- De forma semelhante temos o fractal hexagonal tipo Dürer.

REFERÊNCIAS

- **BARBOSA,** Ruy Madsen. Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula. Editora Autêntica. Belo Horizonte,2005.
- **BORSSOY**, J. A. Geometria fractal: alguns conceitos e aplicações. Universidade Estadual do Oeste do paraná. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática), 2005, 39p.

APÊNDICE F – Slides apresentados antes das construções dos fractais no Geogebra





ANEXO

ANEXO A – Autorização da Instituição de Ensino

ESCOLA MUNICIPAL DE ENSINO FUNDAMENTAL
OTTO GUSTAVO DANIEL BRANDS
BAIRRO BRANDS
VENÂNCIO AIRES
e-mail: escolaottobrands@hotmail.

Escola Municipal de Ens. Fund.
OTTO GUSTAVO DANIEL BRANDS
Lei 2693 - 12/04/2000
Art.49 Lei Municipal nº 2664
Rua Wilibaldo Stertz, 2366
Bairro Brands - V. Aires - RS

AUTORIZAÇÃO

Autorizamos a aplicação do projeto de Pesquisa *Produção de conhecimentos geométricos e algébricos a partir da construção de fractais com o uso do software \Geogebra* pela acadêmica mestranda TERESINHA APARECIDA FACCIO PADILHA nessa instituição de ensino, bem como a publicação do nome Escola Municipal de Ensino Fundamental Otto Gustavo Daniel Brands em sua dissertação de mestrado.

Venâncio Aires, 24 de fevereiro de 2012.

Luciane de Jesus Ferreira
Diretora
Matrícula 4855/0