CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO AFIM COM USO DO *SOFTWARE GEOGEBRA*

Dionara Freire de Almeida

Lajeado, outubro de 2013.

Dionara Freire de Almeida

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO AFIM COM USO DO *SOFTWARE GEOGEBRA*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação, Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, do Centro Universitário Univates, como parte da exigência para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Drª. Maria Madalena Dullius

Lajeado, outubro de 2013.

Dionara Freire de Almeida

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO AFIM COM USO DO *SOFTWARE GEOGEBRA*

A Banca examinadora abaixo aprova a Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, do Centro Universitário Univates, como parte da exigência para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas na linha de pesquisa de novas tecnologias, recursos e materiais didáticos para o Ensino de Ciências Exatas.

Profª. Drª. Maria Madalena Dullius – orientadora
Centro Universitário Univates.

Profª. Drª. Márcia Jussara Hepp Rehfeldt
Centro Universitário Univates.

Prof. Dr. Dr Rogério Schuck
Centro Universitário Univates.

Profª. Drª. Isabel Cristina Machado de Lara
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

Lajeado, outubro de 2013.

AGRADECIMENTOS

À Deus, razão da minha existência, pela vida, sabedoria e coragem.

Agradeço a todos os que contribuíram para a realização desta dissertação, pois sem suas palavras de incentivo nada seria possível. Com especial carinho,

À minha família, por acreditarem em mim e tornarem minha caminhada mais alegre. Amo vocês do fundo do meu coração.

Á professora orientadora Profª. Drª. Maria Madalena Dullius, pelos momentos de orientação necessários ao desenvolvimento desta dissertação, pela paciência, disponibilidade e, principalmente, pela oportunidade de crescimento intelectual e profissional.

À Banca Examinadora desta dissertação, que contribuíram de forma muito especial e qualitativa para o aprimoramento da mesma.

Aos professores neste Curso de Mestrado, pelos inúmeros conhecimentos, experiências e oportunidades de crescimento intelectual e profissional.

Às amizades estabelecidas neste Curso de Mestrado que foram fundamentais, como apoio pessoal e intelectual.

À professora de sala e a turma da escola onde desenvolvi minha intervenção pedagógica.

RESUMO

Este estudo teve como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que envolveu o estudo da Função Afim e das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica para a aprendizagem dos alunos utilizando o *software GeoGebra*. A pesquisa foi sustentada por teóricos franceses da Didática da Matemática: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2004), e na Engenharia Didática proposta por Artigue (1990), para análise dos registros dos alunos em sala de aula. A intervenção pedagógica ocorreu em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, em uma escola da rede estadual do município de Gaspar- SC, durante as aulas de Matemática, onde foi desenvolvida uma sequência didática composta da análise a *priori* e análise a *posteriori.* Após as análises das atividades da sequência didática com uso do *GeoGebra,* foi possível perceber que os alunos conseguiram reconhecer a Função Afim nos registros de linguagem natural, algébrica, tabular e gráfica: compreender os procedimentos de tratamento nos diferentes registros e realizar o procedimento de conversão entre os diferentes registros. Dessa forma, foi observado a validade das atividades, e que uso do *GeoGebra* contribuiu para o aprendizado do objeto de estudo “ Função Afim”.

Palavra-chave: Registros de representação. *GeoGebra.* Função Afim.

ABSTRACT

The scope of this study has been to develop, implement and analyze a didactic sequence involving the study of Afim Function and its mathematical presentations in a semiotic view, using GeoGebra Software for student learning. The research was supported by French theorists in the Didactics of Mathematics: Duval´s Theory of Semiotics Representation Registers (2004), and Didactic Engineering Curriculum proposed by Artigue (1990) for analysis of the records of students in the classroom. Pedagogical intervention happened in a class of 1st year of High School, at a state school in the city of Gaspar, SC, Brazil, in the course of regular classes in Mathematics, where a didactic sequence consisting of a priori and a posteriori analyses was developed. Analyses of activities allowed the conclusion that development of didactic sequence using GeoGebra was efficient and achieved the original aims: to recognize the Afin Function in natural, algebraic, graphical and tabular languages, to understand treatment procedures in different records and to perform the process of conversion between different records. Thus, the validity of the activities became apparent, and use of GeoGebra contributed to the learning of the object of study "Afin Function".

Keywords: Records of representation. GeoGebra. Afin Function

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMARIO

1 INTRODUÇÃO

Os registros de representação da semiótica exercem um papel importante na aprendizagem da matemática, pois são elementos na compreensão de conceitos, argumentação, e raciocínio na aplicação da matemática. Segundo Duval (2003), a matemática tem várias formas de representação, e é por meio delas que seus objetos são acessados. Isso nos faz refletir sobre a prática pedagógica de professores de matemática para compreender as representações feitas por estudantes, especialmente seus registros.

A motivação para o estudo de Representação Matemática decorreu da experiência como professora de informática e matemática no ensino fundamental e médio. Vale destacar que durante as aulas de matemática foi possível constatar dificuldades enfrentadas pelos alunos na construção e interpretação de conceitos matemáticos, principalmente nas atividades que envolvem gráficos.

Em especial, por motivo da inquietação quanto ao ensino de função e com suas implicações para o processo de aprendizagem, desencadeou-se a escolha do tema Função Afim. A Função Afim é a primeira a ser trabalhada com os alunos, conforme livros didáticos, permitindo observar com mais clareza as dificuldades no ensino e na aprendizagem de funções.

Dessa forma, a Representação Matemática pode esclarecer tanto para professores quanto para alunos, sujeitos da pesquisa, alguns pontos do grande emaranhado de fatos, dúvidas, curiosidades e reflexões sobre as experiências da prática pedagógica no processo de ensino aprendizagem. As reações dos alunos foram observadas durante algumas atividades dos conteúdos programáticos do ensino médio, no decorrer do ano letivo, com uso de *softwares* em ações desenvolvidas no projeto Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) na Universidade Regional de Blumenau (FURB). Foram usadas tecnologias como ferramentas pedagógicas, sendo elas um indicativo para avaliar com maior atenção o uso de *software* no ensino da matemática.

A importância das representações, a partir do uso de interfaces computacionais, pode ser dinâmica e acarretar reflexos nos processos cognitivos, apresentando elementos que permitam compreender melhor as questões relacionadas às Representações Matemáticas nos processos de ensino e aprendizagem de função com uso de *software*.

Desse modo, observando que as tecnologias estão presentes em nosso dia a dia, oferecendo várias representações como a algébrica, gráfica, tabular, simbólica e linguagem natural para uma mesma função, essa pesquisa vem propor uma intervenção com uso do *software GeoGebra*. Como questão de pesquisa propõe**:** **"Quais são as contribuições das Representações Matemáticas em uma perspectiva semiótica[1] para a aprendizagem do conteúdo de funções no Ensino Médio, com utilização do *software GeoGebra*?"**

A presente pesquisa tem como objetivo principal investigar como os estudantes de uma turma do ensino médio utilizam os registros de representação semiótica durante suas atividades, com o uso do *software GeoGebra* no ensino de funções. Os objetivos específicos são:

- Reconhecer a Função Afim nos registros de linguagem natural, algébrica, tabular e gráfica;
- Compreender os procedimentos de tratamento nos diferentes registros;
- Realizar o procedimento de conversão entre os diferentes registros;

- Investigar se os alunos utilizam mais de um registro de representação semiótica, durante a realização da atividade;

- Reconhecer se o uso do *software Geogebra* em determinados registros de representação influi na resolução da atividade.

Os aportes teóricos que fundamentam este trabalho de investigação constituem-se na pesquisa da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003).

Segundo esse autor, na sua hipótese fundamental sobre a aprendizagem, a qual preconiza que, para aprender, um indivíduo precisa transitar entre vários registros de representação dos objetos e coordená-los, sendo que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio de registros de representação, pois esses objetos não são perceptíveis fisicamente.

Para Santaella (2004), o nome semiótica vem da raiz grega *Semeion,* que significa signo. Assim, semiótica é a ciência dos signos - os signos da linguagem ou, em termos mais gerais, a semiótica é a ciência das linguagens.

Nessa perspectiva, com o uso do *software GeoGebra,* foi desenvolvido o estudo que envolve a semiótica, no sentido de "signo que significa algo". Ao apontar que um signo significa algo, Peirce (1839-1914) procura determinar que ele se encontra em relação tal a um objeto que é reconhecido por uma mente como se fosse esse objeto, seja ele real ou não.

Neste sentido, à Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval (2003), que aponta a importância de explorar no ensino os objetos matemáticos por meio de diferentes registros de representação, bem como de realizar diferentes conversões para um mesmo objeto, visando melhor compreender as dificuldades dos alunos com relação a esse tema.

A metodologia adotada foi a abordagem qualitativa com alunos do ensino médio de matemática utilizando o *software GeoGebra* durante as aulas dessa disciplina.

No desenvolvimento da pesquisa foi utilizado como metodologia os princípios da Engenharia Didática de *Artigue,* compreendendo as seguintes fases: análises preliminares; análise a *priori* das situações didáticas; experimentação, análise a *posteriori* e validação.

Segundo Pais (2002), a engenharia didática tem como finalidade analisar as situações didáticas, isto é, investigar as diferentes relações entre professor, alunos e conhecimento, no intuito de desencadear uma série de ações voltadas para o ensino e aprendizagem de um conteúdo específico.

Desse modo, a presente pesquisa justifica-se por investigar as estratégias que os alunos utilizam no processo de resolução de atividades que envolvam Função Afim, com ação e mediação pedagógica do *software GeoGebra* para mostrar produção de significados aos objetos matemáticos.

As avaliações externas (Prova Brasil, Enem), têm mostrado que os alunos apresentam dificuldades de: resolver problemas, interpretação e construção de gráficos, compreender conceitos matemáticos, e também, de fazer uso de sistema de símbolos e regras próprias.

Vale salientar a relevância da pesquisa para área da educação matemática já apresentada em pesquisas acadêmicas a respeito do tema que é considerado importante para ensino: representação matemática com uso de *software*. Estudar Registros de Representação trará elementos que auxiliarão nessa reflexão.

Apresentados os primeiros passos da pesquisa, nos próximos capítulos, seguir a lógica que conduza o leitor a uma compreensão gradual das discussões envolvidas nesta dissertação.

Assim, o segundo capítulo, versa sobre registros de representação semiótica, enfatizando representações matemáticas nos processos de ensino e aprendizagem de Função Afim e uso do *software* no processo semiótico. As principais referências que permeiam esse capítulo são: C. S Peirce(1958) Santaella (2004) e Raymond Duval (2003), entre outros.

O capítulo três apresenta a metodologia utilizada na realização da intervenção baseada na Engenharia Didática proposta por Artigue (1990), como também, às sequências de fases da Engenharia Didática.

O quarto capítulo apresenta a análise preliminar dos dados, ou seja, exposição do diagnóstico de documentos, buscando identificar o material utilizado para desenvolver o conteúdo de Função Afim.

No capítulo cinco apresentaremos as análises a *priori* e a *posteriori* realizadas durante o trabalho com alunos do 1º ano do ensino médio.

Para concluir, serão apresentadas as considerações finais e as referências bibliográficas adotadas no desenvolver do texto.

2 ABORDAGEM TEÓRICA

Esse capítulo apresenta os pressupostos teóricos que direcionaram o desenvolvimento da pesquisa, os quais serão apresentados em quatro seções: Registros de Representação Semiótica; Teoria dos Registros de Representação de Ramond Duval; trabalhos acadêmicos sobre funções afins; a teoria de Raymond Duval e o uso de *Software GeoGebra* no Processo Semiótico.

2.1 Registros de Representação Semiótica

Conforme Santaella (2004), a semiótica é uma reflexão sobre a linguagem verbal que surgiu como ciência no início do século XX, a partir de Charles Sanders Peirce (1839-1914), filósofo e lógico-matemático norte-americano, concebeu a semiótica como um estudo da linguagem enquanto lógica.

A semiose, segundo Peirce (1965), é um processo ininterrupto, que regride infinitamente em direção ao objeto dinâmico. Para Miskulin, Martins e Mantoan (1996), uma abordagem semiótica nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática permite ao educando se ajustar aos saberes com significação própria, e apoiar-se nas linguagens e ambientes mais próprios para representarem as suas elaborações conceituais.

O termo que Duval (2003) utiliza, isto é, o registro de representação semiótica faz referência à semiótica conhecida como ciência de todas as linguagens, verbais e não verbais. Observa-se que os enunciados de um problema, bem como sua resolução, podem conter uma variedade de registros, em linguagem verbal ou não verbal.

A noção de registro aparece em análises de tarefas que os estudantes têm de enfrentar e, segundo Poblete, Guzmãn e Méndez (1996) surge de uma perspectiva semiótica: um registro é constituído por signos, traços, símbolos, ícones, e esses signos se associam de maneira interna e externa.

> Os registros são, então, meios de expressão e de representação, sendo caracterizados precisamente pelas possibilidades ligadas a seu sistema semiótico. Um registro tem a possibilidade, graças a seus signos próprios e à maneira segundo a qual eles se organizam, de promover uma representação de um objeto, ideia ou de um conceito não necessariamente matemático (POBLETE; GUZMÃN E MÉNDEZ, 1996, p. 92).

Conforme Duval (2003), não poderá haver compreensão possível sem o recurso das representações semióticas. Então, para entender como funcionam essas representações semióticas como via de acesso ao conhecimento matemático, é preciso compreender os elementos que a constituem: objeto, signo, referência, sentido e significado.

Apresentado por Duval (2003), o exemplo matemático 4 é dividido por 2, ou 1 mais 1; são formas escritas que designam um mesmo número, expressões que fazem referência a um mesmo objeto, e que não possuem a mesma significação uma vez que não são reveladoras do mesmo domínio de descrição, ou do mesmo ponto de vista. A primeira exprime o número em função de propriedades de divisibilidade e razão; a segunda, em função da recorrência à unidade. Assim, simples mudanças na escrita permitem exibir propriedades diferentes do mesmo objeto, mas mantendo a mesma referência.

2.1.1 Objeto

A respeito de objeto, Duval (2003, p. 14) declara que “toda comunicação em matemática se estabelece com base em representações”, e entende que um estudante, para reconhecer um objeto matemático, precisa recorrer a uma representação dele observando as diferentes representações de um mesmo objeto.

Para Peirce (1965), o objeto pode ser uma coisa concreta, material do mundo, da qual é possível se ter um conhecimento perceptível; mas também pode ser algo abstrato, uma entidade puramente mental ou imaginária. Afirma Damm (1999, p. 137) "os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando, para sua apreensão, do uso de uma representação".

Quanto ao objeto matemático, de fato não existe consenso na comunidade de professores de matemática e nem de matemáticos a respeito de sua definição, assim como não é possível trabalhar com objetos ideais. Parece óbvio que não há como prescindir das representações para acessar e apreender o objeto matemático.

Conforme Duval (2003), a distinção entre o objeto matemático e sua representação é um fato resolvido para a produção de novos conhecimentos, bem como para a aprendizagem do conhecimento matemático.

Para Duval (2003), o conceito do objeto matemático em estudo "função", ocorre quando se realiza conversões de um registro para outro, observando que diferentes registros (gráficos, tabelas), referem-se ao mesmo objeto matemático (função), e podem se complementar no sentido de que um registro pode expressar qualidades ou propriedades do objeto matemático que não são expressas com clareza em outro registro.

Vale enfatizar que neste estudo o objeto matemático função pode ser representado por registros de representação semióticos: registros de tabelas, fórmulas algébricas, gráficos e simbólicos.

Para Duval (2003) faz-se necessário que o aluno se aproprie das várias formas de representação de um mesmo objeto. Dessa forma, a diversidade de representações semióticas para um mesmo objeto matemático possibilita a transformação dessas representações em outras.

Para Otte (2006), o objeto matemático não se encontra independente de representações de registros de tabelas, das fórmulas algébricas e gráficas. No entanto, não deve ser confundido com nenhuma representação específica, ou seja, a tabela e o gráfico representam o mesmo objeto matemático, no nosso caso de estudo “função”, representado por meio de diferentes registros.

De acordo com Mariani (2006), o fato de um aluno saber resolver uma atividade envolvendo um objeto matemático na sua representação gráfica ou qualquer outra representação, não garante que ele tenha adquirido o conceito desse objeto.

2.1.2 Signo

Segundo estudos realizados por Peirce (1965), um signo ou *representamen* é algo que de algum modo representa alguma coisa para alguém. O signo representa alguma coisa, o seu objeto. Coloca-se no lugar desse objeto não sobre todos os aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que o indivíduo tenha por vezes denominado o fundamento do *representamen.*

Para Peirce (1965), a expressão “ideia” deve ser entendida de forma comum, no sentido corriqueiro em que dizemos que uma pessoa captou a ideia do outro.

Conforme Santaella (2004), signo é uma coisa que representa outra coisa, seu objeto. Se um signo é diverso do seu objeto, deve existir no pensamento ou na expressão uma explicação, um argumento ou um contexto mostrando de que modo - segundo que sistema ou por que razão - o signo representa o objeto ou um conjunto de objetos.

Um signo não é um objeto, ele apenas está no lugar do objeto, fazendo referência ao objeto, de maneira que ele só pode representar esse objeto de certo modo e com certa capacidade. Por exemplo, no contexto matemático, a representação algébrica da função e o esboço gráfico da função são todos os signos do objeto função.

O autor também coloca em síntese que compreender ou interpretar é traduzir um pensamento em outro pensamento num movimento ininterrupto, pois só podemos pensar um pensamento em outro pensamento. Sua ação (do signo) pode ser bilateral: de um lado, representa o que está fora dele, seu objeto, e de outro lado dirige-se para alguém em cuja mente se processará sua remessa para um outro signo ou pensamento, onde seu sentido se traduz. E esse sentido, para ser interpretado, tem de ser traduzido em outro signo, e assim *ad infinitum*.

Para Santaella (2004), o signo só pode representar seu objeto para um intérprete do signo, num processo relacional que se cria na mente do intérprete. A partir da relação de representação que o signo mantém com seu objeto, produz-se na mente interpretadora outro signo que traduz o significado do primeiro (é o interpretante do primeiro); sendo assim o significado de um signo é outro signo.

Para Steinbring (2006), os signos matemáticos são considerados principalmente "instrumentos" que requerem determinados sistemas de sinais ou símbolos a fim de registrar e de codificar o conhecimento matemático.

O autor considera que esse signo desempenha duas funções: a função semiótica, ou seja, o signo matemático como algo que, sobre certos aspectos, significa algo para alguma coisa; e o signo matemático como uma função epistemológica, a qual aborda o signo sob a perspectiva da construção do saber e do pensamento matemático.

Na concepção de Otte (2006), a generalização também possui um papel na determinação do signo, sob a perspectiva da construção do saber e do pensamento matemático, e determina que, no processo de ensino, a epistemologia da matemática implica, principalmente, em variantes e invariantes das suas representações.

Quando Peirce (1965) escreve sobre a classificação dos signos, diz que a cognição e o efeito transformador dos signos sobre o ensino conduzem todos os envolvidos a um processo de pensamento mais generalizado sobre a atividade matemática.

Assim, signo é um veículo de potencialidades para fazer a transição do pensamento numérico para o algébrico, o que permite dar significado à generalização sem ter de recorrer a variáveis e a fórmulas, para se chegar a expressões numéricas que os alunos compreendam e não sejam uma mera manipulação de símbolos sem significado.

2.1.3 Referência e Sentido

Conforme Duval (2003), para compreensão desses conceitos, como foi apresentado, no processo de semiose o signo tem a função de estar no lugar de um objeto para o sujeito que fará a interpretação. Como está no lugar do objeto, o signo não é o objeto, e este nunca está completamente representado naquele, apenas de certo modo.

Sublinhando as palavras de Santaella (2004), aquilo que está representado no signo não corresponde ao todo do objeto, mas apenas a uma parte ou aspecto dele. Sempre sobram outras partes ou aspectos que o signo não pode preencher completamente.

No domínio da matemática também é possível encontrar numerosos exemplos que elucidam essa ideia, signos diferentes evocando aspectos diversos de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, a representação algébrica da função é o signo do objeto matemática função.

Frege (1978) afirma que a referência e o sentido de um sinal devem ser distinguidos da representação associada a este sinal, pois admite que duas ou mais representações distintas possam fazer referência ao mesmo objeto, o que não ocorre com o sentido atribuído a essas representações.

Essa distinção entre sentido e referência de uma representação semiótica, distinção essa que pode fornecer uma forma estreita e necessária para unir os signos aos objetos no processo cognitivo. Notemos que, para Frege(1978), o signo também não pode ser entendido isoladamente, mas sim em estreita relação com sua referência e com o seu sentido.

Assim, as representações podem ter em comum a referência, mas não o sentido. Para Frege (1978), a referência é o “conteúdo” da representação, por exemplo, as representações algébricas ou gráficas fazem referência ao mesmo objeto matemático – função. No exemplo citado sobre a função, entendemos que a referência é relacionada ao objeto - função. De acordo com o autor, a referência assume o próprio objeto como sendo a referência na representação.

No processo da semiose, temos que a referência não pode ser *o* objeto, mas sim uma relação que diz respeito *a* ele, que *o* explica, que *o* conceitua. Então, a ligação entre as representações (signos) e os objetos ocorre por meio da referência. Como apontam Godino, Batanero (2006), o sentido da representação semiótica de um objeto relaciona-se com o conjunto de aspectos revelados pelos signos utilizados, ou ainda, pode ser entendido como um significado parcial dos objetos, ou seja, o sentido de uma representação pode ser considerado como a possibilidade de interpretação produzida e inerente ao uso deste ou daquele signo num determinado contexto.

A preocupação sobre a natureza dos objetos matemáticos e do papel dos signos na representação desses objetos, ou seja, da funcionalidade das representações semióticas no conhecimento matemático, leva diretamente à questão sobre o significado dos objetos.

2.1.4 Significado

O termo “significado” tem tomado diversas facetas na investigação matemática, conforme Fonseca (2000), as principais facetas do significado no trabalho de investigação em Matemática dar a conhecer as potencialidades educativas das atividades de investigação matemática; proporcionar a exploração e discussão de investigações matemáticas; proporcionar a análise e discussão de aulas de investigação matemática entre outras. Para Godino (2003) é toda atuação ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas.

Cada contexto pode ser determinado por representações semióticas ajudando a produzir diferentes sentidos, assim é possível estabelecer a ideia de sentido como significado parcial do objeto matemático.

Por isso, é importante considerar, também, nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, as diferentes representações semióticas dos objetos para evocar os diferentes sentidos com o intuito de possibilitar a realização das práticas diversas necessárias na apreensão dos significados dos objetos.

2.2 Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval

Com referência à representação matemática, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003) tem sido um importante instrumento de pesquisa em relação à aquisição e organização de situações de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos, considerando-se a necessidade de compreensão conceitual.

Para Duval (2003) diferente em outros campos do conhecimento, na matemática os conceitos e conteúdos são abstrações desencadeadas por processos de generalização. Em função da necessidade das representações semióticas, algumas coisas não são observáveis através de objetos concretos, por exemplo, uma função que pode ser representada de diferentes maneiras, como uma expressão algébrica, um gráfico ou tabela.

Segundo Duval (2003), há uma necessidade da existência de muitos registros de representação para o funcionamento do pensamento humano, ligada essencialmente aos custos de tratamento de cada registro e às limitações representativas específicas a cada um. Sublinhando as palavras de Duval (2003, p.18).

> As representações diferentes de um mesmo objeto não têm, evidentemente, o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a consequência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequando ao objeto representado (DUVAL, 2003, p.18).

Ainda nos descreve Duval (2003), que a compreensão matemática implica no trânsito de diversos registros e na coordenação de ao menos dois registros de representação que se referem ao mesmo objeto matemático, manifestada pela rapidez e pela espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.

O autor também salienta que uma ausência de coordenação não vai impedir toda compreensão da matemática. O que ocorre é que a compreensão, limitada ao contexto semiótico de um só registro, não vai favorecer as transferências e aprendizagens subsequentes.

Segundo Duval (2003), a diferença entre os termos "*semiósis*" e "*noésis*", sendo *semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e por *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. Para o autor, não há conceitualização de um objeto matemático sem utilizar, para isso, representações deste objeto, ou seja, não existe *noésis* sem *semiósis*. Para que suceda a aprendizagem de um conceito matemático, a *noésis* (conceitualização do objeto matemático) deve ocorrer por meio de significativas *semiósis* (representações).

2.2.1 Tipos de Registros de Representação Semiótica

Duval (2003) expõe a existência de quatro tipos diferentes de registros de representação semiótica, classificando-os da seguinte forma, conforme mostra o Quadro 1.

Quadro 1- Tipos de registros de representação

	Representação Discursiva	**Representação não discursiva**
Registros multifuncionais ou plurifuncionais (não são algoritmizáveis).	**Língua natural** • Associações verbais (conceituais); • Formas de raciocinar; • Argumentação a partir de observações, de	**Figuras geométricas planas ou em perspectivas** • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.

	crenças; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	
Registros monofuncionais (possuem algoritmos próprios em sua estrutura).	**Sistemas de escritas** • Numéricas; • Algébricas; • Simbólicas.	**Gráficos cartesianos** • Mudanças de sistemas de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003).

Observamos que os registros discursivos usam a linguagem natural e o sistema de escritas, fazendo associações verbais, descrições, cálculos. Já os não discursivos apresentam formas ou configurações de formas (figuras geométricas, gráficos), eles permitem visualizar, por exemplo, construções de pontos no plano cartesiano.

Os registros plurifuncionais ou multifuncionais apresentam-se em todas as áreas do conhecimento, podem ser aprendidos fora da escola, anterior ao aprendizado da matemática ensinada na escola. Enquanto que os monofuncionais são formais, especializados, aprendidos em matemática. Observando que o ensino da matemática privilegia o registro monofuncional, por exemplo, cálculos e gráficos.

Na sequência didática foram focados os registros na forma de linguagem natural, algébrica, gráfica e tabular, visando levar o aluno a reconhecer a Função Afim em cada um dos diferentes registros, e observando as características de cada um.

Vale ressaltar que alguns pontos importantes sobre os tipos de registros de representação já foram mencionados na sessão que trata da Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval, sendo apresentados tipos de registros e formas de tratamento.

Conforme Duval (2003), a linguagem natural é identificada nos registros de representação semiótica como multifuncionais (seu processo interno de transformação não utiliza algoritmo). Isto é evidenciado nas argumentações escritas ou deduções válidas a partir de definições em uma forma de representação discursiva.

O registro de representação da linguagem natural faz uso da forma natural dos homens se comunicarem. Como exemplo pode-se citar a forma escrita de uma situação problema que se comporta como uma função, extraída no livro didático de Iezzi (2010, p. 71), onde o registro de linguagem natural apareceu no enunciado da questão e o aluno precisa ler e interpretar o texto:

> "Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada que fica a 15km de distância. O valor cobrado engloba o preço de parcelas fixas (bandeira) de R$ 4,00 mais R$ 1,60 por quilômetro rodado. Encontrar a fórmula que expressa $p(x)$ em função de x ."

O registro algébrico é a forma para se escrever a lei de formação que associa cada elemento. Utiliza-se de um conjunto de operações entre coeficientes numéricos e variáveis, na maioria das vezes expressas por letras, de tal modo que possa representar a relação entre as variáveis.

No exemplo supramencionado, nota-se que para cada distância x percorrida pelo táxi, há certo preço x para corrida. O valor $p(x)$ variável dependente é uma função de x variável independente. A expressão $p(x) = 1{,}6.x + 4$ é uma função que representa a situação de registro algébrico.

O registro tabular é representado por linhas e colunas que formam uma tabela, como exemplo no Quadro 2, onde pode-se escolher um valor para a variável x e determinado o valor da outra variável $p(x)$. Lembrando que a função não está no desenho da tabela, mas sim na relação estabelecida entre as duas variáveis.

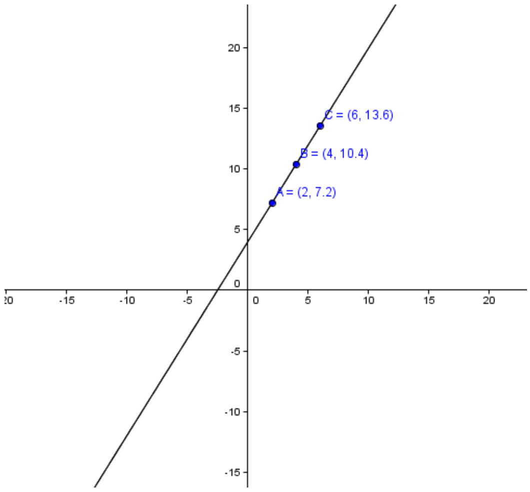
Quadro 2 - Registro tabular: preço x distância.

x	$p(x) = 1{,}6.x + 4$	$P(x)$
2		R$ 7.2
4		R$ 10.4
6		R$ 13.6

Fonte: Adaptado pelo autor com base em Iezzi (2010, p. 71).

O registro gráfico abrange o plano cartesiano, disposto por eixos ortogonais, o $0x$ e o $0y$, que tem a mesma origem, o $(0{,}0)$. Usamos esse plano para realizar construções geométricas, como linhas, curvas, pontos, que representam a função.

Gráfico 1 - Registro gráfico: preço x distância.



Fonte: Adaptado pelo autor com base em Iezzi (2010, p. 71).

2.2.2 Tipos de transformações da representação semiótica

Para Duval (2003), uma transformação é um processo no qual o sujeito acessa um mesmo objeto matemático por meio de diferentes registros de representação semiótica. Há dois tipos de transformação: Tratamento e Conversão.

Segundo Duval (2003), o tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele em que as regras de funcionamento são utilizadas, um tratamento mobiliza apenas um registro de representação.

Assim, o tratamento é uma transformação que permanece no mesmo registro de representação, ou seja, é uma transformação estritamente interna a um registro. Dentro do estudo de funções, são exemplos de tratamento:

Resolução de uma equação, como o exemplo a seguir, apresenta transformações de tratamento, pois se mantém no mesmo sistema de escrita.

$$10x + 5 - 4x = 8$$

$$6x = 3$$

$$x = \frac{3}{6}$$

Simplificando: $x = \frac{1}{2}$

No exemplo acima, o objeto matemático equação foi representado de diferentes formas, mas por meio de tratamento, já que o sistema de representação foi mantido.

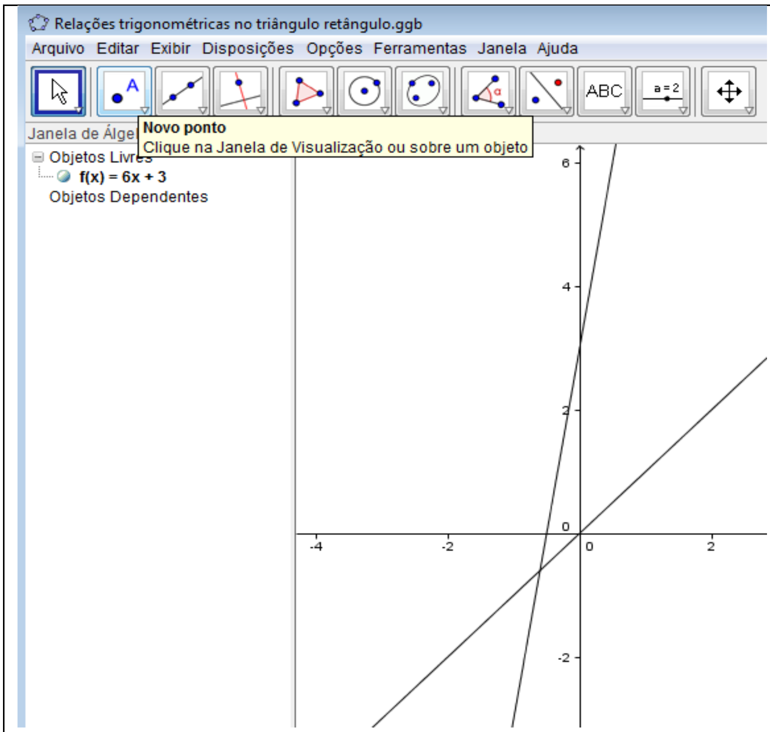
Assim, a transformação de $\frac{3}{6}$ em $\frac{1}{2}$, por exemplo, consiste num tratamento, pois o mesmo objeto foi representado de dois modos diferentes, mas por meio de um número racional expresso na forma fracionária.

Para Duval (2003), a conversão é uma transformação que se efetua ao passar de um registro a outro. Ela requer, então, a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. Ou seja, conversão é uma transformação com mudança de registro de representação, mas conservando a referência aos mesmos objetos.

Vale ressaltar, que uma conversão não conserva a explicação das mesmas propriedades do objeto. Assim, a representação do objeto no registro de chegada, por meio de uma conversão, não terá o mesmo significado que a representação no registro de partida.

No estudo de funções podemos citar como exemplos de conversão: passar da forma algébrica à sua representação gráfica. Conforme exemplo a seguir representado na tela do *GeoGebra:*

Figura 1- Janela algébrica e tabular do GeoGebra



Fonte: Tela do *software Geogebra* (2012)

Duval (2003) aponta que a conversão apresenta duas características que não são apresentadas pelos tratamentos: ela é orientada, ou seja, é preciso definir o registro de partida e o de chegada; e pode ser congruente ou não, dependendo do seu sentido.

O tratamento corresponde a procedimentos de justificação, e a conversão a procedimentos de objetivação, ao desvelar mecanismos subjacentes à compreensão. Passar de um registro a outro implica, sobretudo, na explicitação de propriedades ou de diferentes aspectos do objeto. Por exemplo, o gráfico de uma função nos dá as ideias de crescimento, decrescimento, zeros ou raízes, máximo e mínimo, posição no plano cartesiano etc., enquanto sua expressão analítica nos fornece os coeficientes e as variáveis.

No ensino, de forma geral, não é dada a importância devida às conversões, e os tratamentos são escolhidos como uma forma que se acredita ser mais facilmente compreendida pelos estudantes. As conversões consistem em importantes mudanças de registro de representação para a formação conceitual (aquisição de conceitos), observando que apontam conhecimentos a respeito do objeto.

No caso das transformações de conversão, destaca Duval (2003), a relevância do sentido da transformação considera que a dificuldade não é a mesma nos dois sentidos. Por exemplo, é mais difícil, para um estudante, passar de um gráfico à expressão analítica correspondente do que o contrário. No ensino, geralmente se enfatiza o sentido da transformação como se o outro fosse automaticamente realizado, por decorrência.

Uma conversão é irredutível a um tratamento, quaisquer que sejam os registros envolvidos. Uma conversão exige uma compreensão global e qualitativa, uma articulação entre variáveis cognitivas próprias de cada um dos registros envolvidos. É por meio dessas variáveis que se tem acesso às unidades de significado pertinentes, e que devem ser consideradas em cada um dos dois registros porque passar de um registro a outro significa também se apropriar de aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Alterar a forma de uma representação, para muitos estudantes de diferentes níveis de escolaridade, se torna uma operação difícil. Para Duval (2003), tudo se passa como se a compreensão que a grande maioria dos alunos tem de um conteúdo permanecesse limitada à forma de representação utilizada.

2.3 Trabalhos acadêmicos sobre funções afins e a teoria de Raymond Duval

Olhar para as pesquisas acadêmicas já realizadas sobre esse tema faz refletir sobre as finalidades de buscar mais referências e, nesse caso, alterar o que é possível para criar o diferente para, então, complementar, produzindo o que ainda não foi alcançado.

Nessa etapa, fez-se necessário mapear as pesquisas acadêmicas já realizadas na área que detiveram investigações sobre representações semióticas e que tiveram o tema semelhante ao nosso de investigação do uso de registros de representação matemática de funções. Dessa forma, pode auxiliar para entender o que acontece na sala de aula quando da utilização dessas ideias, tendo em vista fazer uso dos resultados.

Conforme consultas realizadas em *sites* da Capes, Inep, Banco de Teses Edumat, Unicamp, as primeiras pesquisas realizadas no Brasil que utilizam a noção dos registros de representação semiótica como principal referencial teórico começaram a ser publicadas e difundidas na segunda metade da década de 1990.

Um importante fator de motivação para desenvolver esse estudo são os resultados de pesquisas já realizadas em dissertações sobre Registros de Representação Matemática. Grande parte delas são pesquisas de intervenção, em que é aplicado um pré-teste nos estudantes, seguido de um trabalho específico no ensino que enfoca determinado assunto ou conceito, e os registros de representação semiótica.

As conclusões desses trabalhos chamam atenção especial aos diferentes registros de representação semiótica e os efeitos positivos que refletem na aprendizagem da matemática.

O estudo de Scano (2009) investigou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica com o uso de um *software* de geometria dinâmica: o *GeoGebra*. Ele mostrou uma sequência didática que contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de expressar algébrica e graficamente a dependência de duas variáveis de uma Função Afim e reconhecer que seu gráfico é uma reta, relacionando os coeficientes da equação da reta com o gráfico, contribuindo, assim, para o estudo da Função Afim.

Delgado (2010) investigou as várias representações da Função Afim no ensino médio. Fez considerações sobre as dificuldades do ensino de função, principalmente em suas diversas formas de representações, seja no campo algébrico, seja no geométrico. Tratou de um estudo de caso, desenvolvido por meio de atividades de função. Constataram em quais transformações as conversões entre os diferentes registros de representação da Função Afim (língua natural, expressões algébricas, tabelas de valores e forma gráfica) os alunos possuem maiores dificuldades e facilidades.

Na execução do trabalho foi explorada a multiplicidade de representações da Função Afim, ao se fazer com que os alunos realizassem tarefas que exigissem a conversão entre os registros, com a passagem da: a) língua natural para as formas algébrica, tabular e gráfica; b) forma algébrica para a forma tabular e vice-versa; c) forma algébrica para a forma gráfica e vice-versa e, d) forma tabular para a forma gráfica e vice-versa.

A pesquisa de Silva (2005) investigou o conhecimento dos alunos, que já passaram por um curso de Cálculo Diferencial e Integral, quais os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções que esses alunos possuíam, à luz da teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval. Os dados foram obtidos pela aplicação de teste. As análises foram qualitativas e quantitativas, e tiveram como conclusão a constatação das dificuldades dos alunos em reconhecer vários sistemas de registros de representação dos conceitos de Máximos e Mínimos de Funções de uma variável, e também a não habilidade de efetuar conversões entre sistemas de registros, bem como os tratamentos e conversões relacionados a eles.

Oliveira(1997), investigou as concepções de alunos do 1º ano de curso de Engenharia sobre Funções, observou que os estudantes confundem representação algébrica com o objeto função, têm dificuldade na articulação entre os registros de representação semiótica, por exemplo, na conversão entre as representações algébrica e gráfica de uma função. Para fazer essa investigação Oliveira (1997) elaborou um questionário que foi respondido por professores de Matemática, que concluíram que os estudantes apresentam dificuldades nas tarefas que envolvem a passagem da forma algébrica para gráfica.

A partir desses resultados, espera-se que a presente pesquisa venha complementar os estudos já realizados sobre o tema, onde é evidenciado que os alunos podem ser capazes de ativar seu sistema cognitivo para apreensão de objetos matemáticos, sendo necessário envolver os registros de representação semiótica.

Conforme Duval (2003), compreender o uso que os estudantes fazem dessas representações evidencia a reflexão da prática pedagógica de professores de matemática.

2.4 O uso de *Software GeoGebra* no Processo Semiótico

Conforme Grando (2004), a utilização dos *softwares* é importante no contexto das aulas de matemática, pois permite ao aluno fazer conjecturas, simulações, experimentações, antecipações aumentar a criatividade, o senso crítico e as estratégias para a resolução de problemas.

Bortolossi (2012), escreve que o *software GeoGebra* proporciona a articulação entre registros algébricos e gráficos da Função Afim, especialmente permitindo a interação dificilmente realizável através de papel e lápis. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, nos anos de 2001 e 2002, pela Universidade da Salzburg, Áustria. Esse *software* tem inúmeras potencialidades no estabelecimento de conexões entre a geometria e a álgebra, e permite ao utilizador trabalhar com distintas representações das funções, nomeadamente as representações numérica, tabular, algébrica e gráfica.

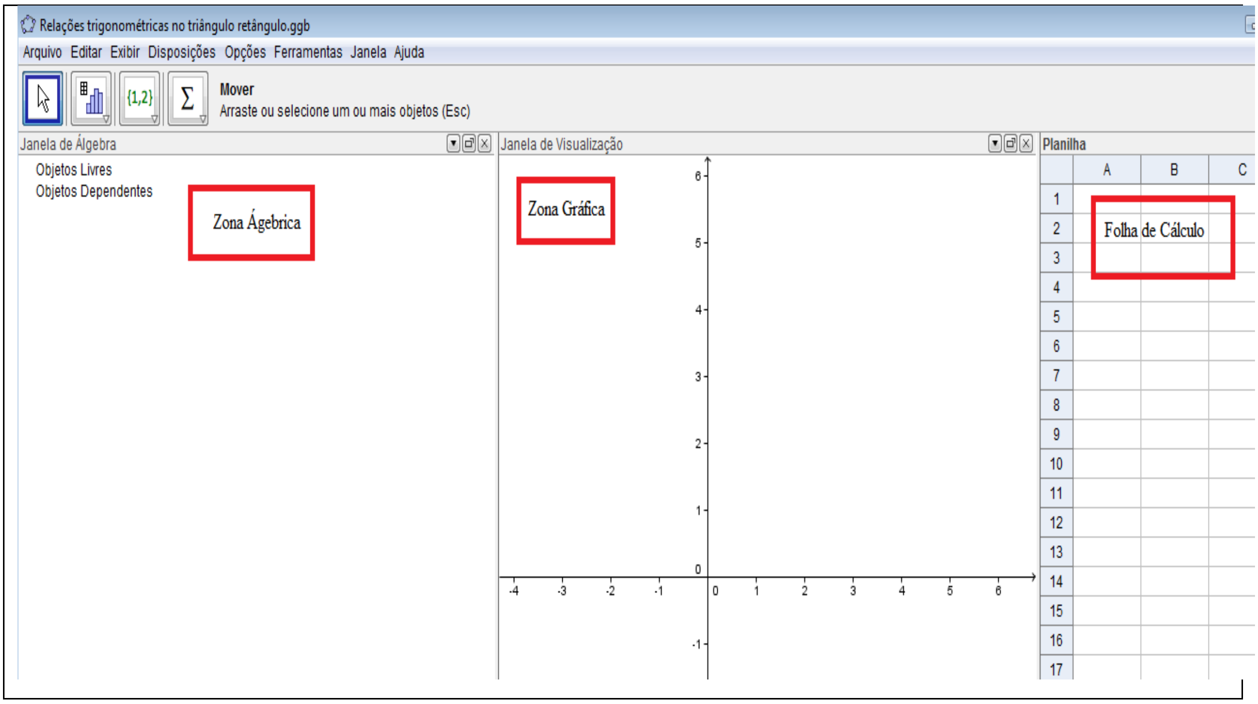
Conforme Grando (2004), o *software* tem despertado atenção de muitos pesquisadores pelo fato de ser gratuito e multiplataforma, utilizado para ensino, tendo recebido vários prêmios na Europa e EUA. Despertou a atenção de muitos professores e pesquisadores que traduziram o *software* para mais de vinte e cinco idiomas, sendo um deles o português.

De acordo com Bortolossi (2012), o *GeoGebra* tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

Santos (2002) utiliza como exemplos as figuras geométricas, onde os *softwares* educacionais permitem aos estudantes de vários países que utilizam o *GeoGebra* criar e manipular facilmente essas figuras geométricas. Vale ressaltar que o *GeoGebra* é um *software* de matemática dinâmica. Desse modo, as interfaces do *GeoGebra* proporcionam manipular o objeto matemático Função de maneira diferente, possibilitando ao aluno agir sobre o objeto matemático num contexto abstrato.

O *GeoGebra* se apresenta na tela do computador em três faces diferenciadas dos objetos matemáticos, que são: a Zona Gráfica, tendo como exemplos a construção de pontos, gráficos e figuras geométricas; a Zona Algébrica, nas coordenadas de pontos e equações; e ainda, nas Folhas de Cálculo, apresentando coordenadas e efetivação de cálculos, quando comparadas aos métodos da sala de aula, quase sempre estáticos.

Figura 2- Janela Zona Gráfica, Zona Algébrica e Folha Cálculo.



Fonte: Fonte: Tela do *software Geogebra* (2012)

Para Duval (2003), a grande vantagem do *GeoGebra* é a possibilidade de ligação entre a geometria e a álgebra, e a representação semiótica interligando as construções com o seu significado algébrico. As duas janelas possibilitam a exploração de conceitos matemáticos em duas vertentes, descompartimentando a matemática curricular, o que permite uma visão globalizante.

Vale ressaltar que os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2006) no ensino médio, as ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, apontam como capacidades e aptidões a serem desenvolvidas em matemática: ler, interpretar e utilizar representações matemáticas, por exemplo, tabelas, gráficos e expressões; transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica, por exemplo, equações, gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas. Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como ferramenta para desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações do dia a dia.

Conforme Guzman (1998), uma função não é uma tabela de valores, uma representação gráfica, uma série de teclas de uma calculadora, ou uma fórmula, é o conjunto dessas representações ao mesmo tempo. O conceito de função reflete em uma multiplicidade de registros, relacionados todos entre si por meio da linguagem.

De acordo com Santos (2005), no caso específico do conteúdo “Funções”, destaca-se que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) oportunizam um ambiente mais dinâmico, onde os alunos podem manipular gráficos representados na tela do computador ou da calculadora, propiciando uma aprendizagem.

O mesmo autor escreve que as novas tecnologias oferecem possibilidades para que a representação passe a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito às concretizações mentais. Tal dinamismo é obtido através de manipulação direta sobre as representações que se apresentam na tela do computador. Podemos observar que no estudo de Funções são os objetos manipuláveis que descrevem a relação de crescimento e decrescimento entre as variáveis.

Para Borba e Penteado (2007), o ensino tradicional de Funções enfatiza, sobremaneira, a dimensão algébrica, com destaque para a expressão analítica de uma função, sem quase fazer referência à sua dimensão tabular (numérica) e gráfica (geométrica). Os autores assinalam que frequentemente se destaca para o ensino de funções a forma algébrica, sendo que muitas vezes está ligada à própria mídia utilizada (lápis e papel).

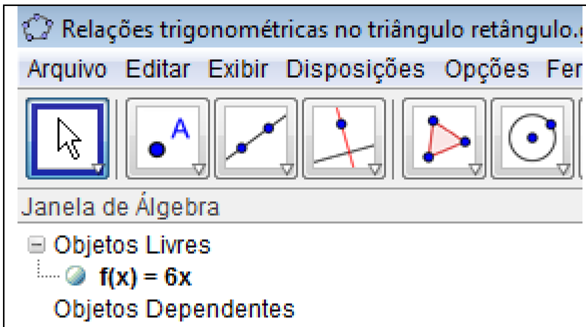
Conforme Borba e Penteado (2007, p.30): “Conhecer sobre funções passa a significar saber coordenar representações. Essa nova abordagem só ganha força com ambientes computacionais que geram gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas.”

O objeto matemático Função Afim pode ser representado de diversas maneiras durante a manipulação do *GeoGebra* na resolução de atividades:

a) Expressões algébricas são as formas de escrevermos a lei de formação que associa cada elemento.

A lei $f(x) = 6x$ é uma função que representa a linguagem algébrica. Assim “x” é a variável independente e $f(x)$ =a variável dependente. Conforme esta representação no *GeoGebra*.(FIGURA 3).

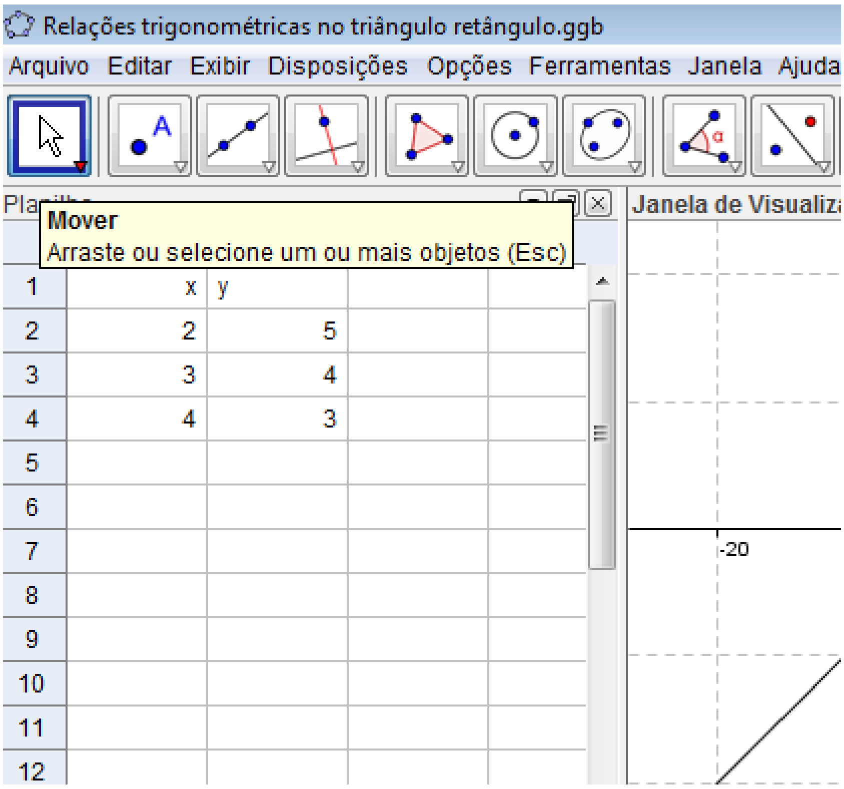
Figura 3- Janela Algébrica



Fonte: Tela do *software Geogebra* (2012)

b) Tabelas de valores são também uma forma de apresentarmos uma informação. Escolhemos um valor para a variável (x) e determinamos o valor de (y) através da lei de formação. Conforme esta representação no *GeoGebra*.(FIGURA 4).

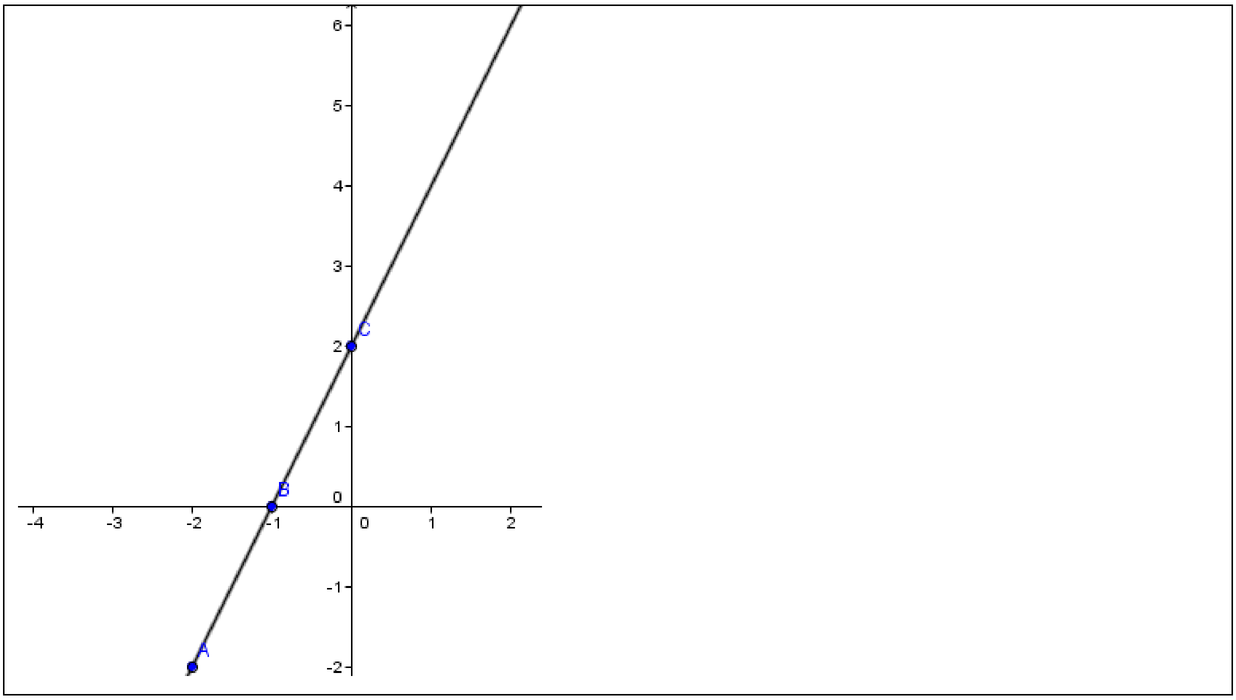
Figura 4 - Janela folha Cálculo



Fonte: Tela do *software Geogebra* (2012)

c) Representação gráfica é mais uma forma de apresentarmos uma informação. Diariamente observamos, em jornais e revistas, gráficos a partir dos quais podemos descobrir algumas propriedades das funções que eles representam, por exemplo, um gráfico construído no *GeoGebra*.

Gráfico 2 - Janela gráfica



Fonte: Tela do *software Geogebra* (2012)

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia da pesquisa é caracterizada por uma abordagem qualitativa. Minayo(1993), escreve que ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, valores, crenças, atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

> A investigação qualitativa substitui a resposta pela construção, a verificação pela elaboração, e a neutralidade pela participação. O investigador entra no campo com o que lhe interessa investigar, no qual não supõe o encerramento no desenho metodológico de somente aquelas informações diretamente relacionadas com o problema explícito a *priori* no projeto, pois a investigação implica na emergência do novo nas ideias do investigador, processo em que o marco teórico e a realidade se integram e se contradizem de formas diversas no curso da produção teórica (GONZÁLEZ, 1998, p. 42).

A pesquisa apresenta um estudo exploratório, para Gil (2007), este tipo de pesquisa tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torna-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Dessa forma, os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, como também, as sequências de fases elaboradas com as análises a *priori* e a *posteriori* realizadas durante o trabalho com alunos do 1º ano do ensino médio, se caracterizam por ser exploratório qualitativo.

Como metodologia de pesquisa será considerada alguns pressupostos da Engenharia Didática de *Michéle Artigue.* Um dos pontos a ser destacado é que a Engenharia Didática se caracteriza como um experimento empírico fundamentado nas realizações didáticas em sala de aula, e envolve o processo de decidir sobre os resultados por meio das observações e análise das sequências de ensino.

Uma característica importante da Engenharia Didática, em comparação com outras metodologias de pesquisa, é que a validação é feita internamente por meio de registros dos estudos de caso baseados nas confrontações entre as análises a *priori* e *posteriori.*

3.1 Fases da Engenharia Didática

Na sequência são explanados os procedimentos realizados nas quatro fases da Engenharia Didática: a análise preliminar, concepção e análise a *priori*, experimentação, análise a *posteriori* e validação.

3.1.1 Análise prévia

A primeira etapa foi composta por uma análise prévia acerca dos conceitos matemáticos adquiridos no campo de estudo de funções. Em especial, uma sondagem das dificuldades de aprendizado de Função: cálculo, gráficos, tabelas. Observaram-se elementos pertinentes ao conteúdo de funções presente no livro didático adotado na escola, tais como representações usadas e conceitos matemáticos, análise do ensino da Função Afim oferecida aos alunos pesquisados, a partir dos cadernos do professor e do aluno, entre outros documentos que se fizeram necessários.

Expostas as comprovações na etapa de análises prévias, foi possível prosseguir para a segunda fase da Engenharia Didática: a análise a *priori das situações propostas.*

3.1.2 Análise a priori

Para Machado (2002), esta fase é constituída de uma parte descritiva e outra de previsão. Nela é possível descrever as escolhas efetuadas dos elementos que comporão a fase de experimentação, definindo as variáveis de comando e descrevendo cada atividade proposta.

Segundo Pais (2002, p.102):

> Sobre o conjunto dessas variáveis que se inicia a análise a *priori*, cujo objetivo é determinar quais são as variáveis escolhidas, sobre as quais se torna possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão de conceitos em questão (PAIS, 2002, p. 102).

A análise a *priori* é o controle da seleção das expectativas e comportamento dos estudantes baseados em hipóteses no que se refere ao conhecimento prévio dos estudantes em relação ao objeto de estudo, suas dificuldades, escolhas e estratégias de resolução que poderão ser apresentados no decorrer da sequência de ensino de acordo com o referencial teórico escolhido.

As variáveis de comando, segundo Artigue (1990), estão divididas em global quando se trata da organização geral da engenharia, e local quando se tratarem do planejamento específico de uma sessão da sequência didática. Segundo Pais (2002), abrange sequências de aulas planejadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática.

Iniciou-se com uma descrição dos sujeitos e do ambiente: quem é, qual a trajetória, e o entorno social. Em seguida, elaboramos uma sequência de atividades explorando o conceito da Função Afim, cuja finalidade foi mobilizar os conhecimentos para possibilitar a obtenção de quais categorias de erros os alunos cometeram.

3.1.3 Experimentação

É a fase da realização da engenharia com os sujeitos escolhidos pelo pesquisador. A experimentação, segundo Machado (2002) supõe:

- ✓ Estabelecer os objetos e as condições de realização da pesquisa aos sujeitos;
- ✓ O estabelecimento do contrato didático;
- ✓ A aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- ✓ Durante a aplicação devem-se respeitar as escolhas e deliberações feitas nas análises a *priori* a fim de evitar o insucesso da engenharia.

Essa etapa da engenharia traz a aplicação da sequência didática com alunos do 1º ano do ensino médio pelo professor e o pesquisador em uma escola pública da cidade de Gaspar, SC. Para coleta e registros dos dados foi utilizado, além das observações do pesquisador, anotações, áudio dos alunos, fotos.

3.1.4 Análise a posteriori e validação

Consiste no conjunto de dados coletados ao longo da experimentação, as observações realizadas durante a aplicação, as produções dos alunos. Esses dados se completam com outros coletados na abordagem de metodologias externas como questionários, entrevistas individuais no momento da experimentação ou fora dela.

Para Almouloud (2007), o momento da confrontação das análises a *priori* e a *posteriori*, se fundamenta na essência da validação das hipóteses formuladas na investigação.

Segundo Machado (2002), na confrontação das análises a *priori* e a *posteriori* podem aparecer distorções, mas a validação não é realizada nestas distorções, mas sim nas hipóteses levantadas anteriormente. Com frequência, pesquisadores propõem mudanças na engenharia com objetivo de reduzir essas distorções, sem comprometer-se na realidade com o processo de validação.

Assim, envolvendo o conteúdo de Funções foi elaborada uma sequência didática estruturada, que enfatize o uso de diversos registros de representação como: gráficos, símbolo, tabela, entre outros, realizada com os estudantes dessa pesquisa.

Após a descrição de cada experiência feita com os alunos, foi realizada a análise a *posteriori* local, confrontando com a análise a *priori* feita.

3.2 Sujeitos da Pesquisa

Para escolha da amostra a mestranda conversou com a direção da escola e com a professora do Pibid sobre a intenção de utilizar uma turma como sujeita da pesquisa. Esse estudo envolveu sujeitos que teoricamente seriam capazes de realizar o processo de conversão entre diferentes sistemas de representação durante o desenvolvimento das atividades.

Assim amostra da pesquisa foi composta por uma turma de 35 adolescentes do 1º ano do ensino médio com idades entre 15 e 18 anos. Pode-se caracterizar esta turma como heterogênea, com alunos oriundos de diferentes cidades(Blumenau, Brusque, Indaial, etc), porém, a maioria cursou o ensino fundamental nessa escola. Destacam-se como critérios para a seleção da turma que a maioria dos alunos que a constituem tem facilidade ao lidar com conceitos matemáticos e familiaridade com *softwares* educativos, constado durante as intervenções pedagógicas do Pibid - Programa de Iniciativa à Docência e segundo relato constatado pela professora de turma. Dessa forma, o estudo envolveu sujeitos que teoricamente são capazes de realizar o processo de conversão entre diferentes registros de representação utilizando com ferramenta o *software GeoGebra.*

As atividades propostas envolvendo o estudo de Função Afim aos alunos foram realizadas e inseridas no contexto da aula de matemática e dentro dos conteúdos que compõem o currículo durante o ano letivo de 2013, apresentados na sequência didática. A análise será baseada em atividades exploratórias, além das observações a serem realizadas na classe da turma de matemática.

4 ANÁLISE PRELIMINAR DE DADOS

A análise preliminar é fundamentada em uma análise documental de caráter qualitativo. Conforme Almouloud (2007), a análise documental é uma técnica de abordagem de dados qualitativos, realizada a partir de documento, não fraudado e suscetível de ser utilizado para consulta, estudo ou prova.

Com o intuito de nortear a análise preliminar, foi descrito um diagnóstico do livro adotado pela professora da turma do 1º ano do ensino médio, documentos de planejamento da professora e caderno do aluno, buscando identificar o material utilizado pela professora para desenvolver o conteúdo de Função Afim.

4.1 Análise documental: livros didáticos de Matemática do ensino médio

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2006), as ações metodológicas dos professores são baseadas principalmente nos livros didáticos. Nas pesquisas realizadas por Silva (2005), os livros didáticos são utilizados pela maior parte dos professores como roteiro principal na organização e condução de suas aulas. Nesse sentido, analisando os mesmos é possível ter uma percepção de como é explorado o conteúdo de funções.

Na análise do livro didático foi possível observar os seguintes fatores: como são propostas as atividades referentes ao conceito de Função Afim via registros de representação, tratamentos e conversões explorados e enfatizados, tipos de registros abordados, que são o foco da presente pesquisa.

O livro adotado pela escola “Matemática-ciência e aplicação” de Iezzi(2010), nomeado Livro 1, foi apresentado pela professora de matemática da turma pesquisada. Ela explicou que o livro didático foi escolhido no segundo semestre de 2012 pelos professores de Matemática, e no semestre seguinte foram distribuídos exemplares para os alunos. Dessa forma, os livros são emprestados para os alunos durante o ano letivo, e no final do ano são recolhidos e emprestados no ano seguinte a novas turmas. A professora de matemática também mencionou que muitas vezes utilizou, para complementar os exercícios, esclarecer dúvidas, como roteiro na organização e condução das suas aulas, o livro Matemática: Contexto & Aplicações de Dante, nomeado Livro 2.

Apresentaremos algumas atividades como resultadas da análise desses livros utilizados pela professora em sala de aula. As Figuras 5 e 6 extraídas dos livros 1 e 2 mostram atividades das aplicações da Função Afim de forma contextualizada, sendo empregadas as conversões do registro da língua natural para o registro algébrico e gráfico de uma situação-problema.

Figura 5 – Atividade-situação-problema-livro 02.

30. Na lei $y = a + 2{,}5x$, em que a é uma constante, está relacionado o valor total (y), em reais, pago por um usuário que acessou a internet por x horas, em um cibercafé. Sabendo que uma pessoa que usou a rede por 2 horas pagou R$ 8,00:

a) determine o valor de a;

b) encontre o valor pago por um usuário que acessou a rede por 5 horas;

c) faça o gráfico de *y* em função de *x* (são permitidos fracionamentos de hora).

Fonte: Dante(1999, p 81).

Figura 6 – Atividade-situação-problema-livro 01.

8. Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Sendo **x** o número de unidades produzidas:

a) escreva a lei da função que fornece o custo total de **x** peças;

b) calcule o custo de 100 peças;

c) escreva a taxa de crescimento da função.

Fonte: Iezzi (2010 p 100).

Percebeu-se que as atividades propostas nas Figuras 5 e 6 representam um número expressivo de exercícios que envolvem conversões do registro algébrico para gráfico e registro da linguagem natural para registro algébrico da Função Afim quando comparado com o número de tratamentos.

Vale lembrar, segundo Duval (2003, p.16), que as conversões são “transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos: por exemplo, passagem do registro algébrico à sua representação gráfica” e tratamento consiste nas transformações de representações dentro de um mesmo sistema de registros.

Nas Figuras 7 e 8 apresenta as atividades extraídas dos livros que ilustram um modelo de resolução que exige a conversão de registro algébrico para registro gráfico.

Figura 7 - Atividade gráfica da função-livro 01

12. Faça o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$

b) $f(x) = -4x$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = x - 3$

e) $f(x) = -x$

f) $f(x) = -3$

Fonte: Iezzi (2010 p 83).

Figura 8 - Atividade gráfica da função-livro 02.

11. Construa, num sistema cartesiano ortogonal, o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = x + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$

d) $f(x) = -2x + 5$

e) $f(x) = -2 - 2x$

f) $f(x) = 3 + 3x$

Fonte: Dante(1999, p 102).

A atividade da Figura 8 envolve várias conversões, do registro algébrico para gráfico, natural para algébrico, para chegar à resolução da raiz da função, crescimento e decrescimento.

Na Figura 9 extraída do livro 01, é exibida uma atividade que exige do aluno a conversão da linguagem natural para algébrica, tabular e gráfica, envolvendo estudo de crescimento e decrescimento de função.

Figura 9- Atividade de estudo de crescimento de decrescimento da função-livro 02.

Consideremos a função f definida por $y = -2x + 3$. Vamos atribuir valores cada vez maiores a x e observar o que ocorre com y:

Fonte: Iezzi (2010, p. 81).

Na análise dos livros foi observado que foram mobilizados vários registros de representação na apresentação Função Afim, tanto na forma de tratamento como conversão. Porém, pôde-se constatar que, quanto aos tratamentos os dois livros privilegiam os realizados nos registros numéricos. No que se refere às conversões, priorizam a conversão entre dois registros.

4.2 Análise do caderno da professora

Nesta seção, apresentaremos a análise das relações estabelecidas no conteúdo do caderno da professora de turma com registros de representação da Função Afim.

O sumário do planejamento anual de Matemática conforme Figura 10, documento da escola que foi elaborado pelas professoras de Matemática, apresenta como primeiro item Função Afim com alguns subitens.

Figura 10- Planejamento Anual de Matemática Escola Estadual Arnoldo Agenor Zimmermann.

Conceito	**Conteúdos Factuais**
Álgebra	**1** – Função polinomial do 1º grau; - Características importantes da função do 1º grau; - Gráfico de uma função do 1º grau; - Estudo dos sinais da função do 1º grau; - Inequações; **2** – Função polinomial do 2º grau;

Fonte: Escola (2012)

É perceptível que os exercícios utilizados pela professora foram baseados no livro de Matemática. O conteúdo apresenta principalmente atividades que envolvem as mudanças de registros de representação: linguagem natural, tabular, e gráfica.

A Figura 11 expõe uma atividade que utiliza registros de representação extraídos do caderno da professora, onde solicita que o aluno faça a conversão da linguagem algébrica para gráfica, incentivando a análise de duas funções.

Figura 11 – Atividade: construções de gráficos, caderno da professora.

Identifique como seria a posição entre os gráficos das funções se variarmos o valor de a:

a) f(x) = x + a

g(x) = x + 2

b) f(x) = 5x + a

g(x) = ax – 1

c) f(x) = 10x + a

g(x) = 20x + a

d) f(x) = ax – 1

g(x) = 3x + 2

Fonte: Caderno da professora (2012)

O aluno deveria realizar essa atividade analisando a variação dos coeficientes por meio de uma Função Afim, de formato $f(x) = ax + b$, por meio da articulação dos registros gráfico e algébrico.

A Figura 12 apresenta uma atividade que utiliza o registro de representação extraído do caderno da professora, que solicita que o aluno faça a conversão do registro de linguagem natural para os registros algébrico, gráfico, tabular e tratamento algébrico.

Figura 12- Atividade: área de um retângulo.

3) Desenhar o gráfico e escrever a equação que exprime a área de um retângulo em função da medida de base y e altura é 4 cm.

Fonte: Caderno da professora (2012).

Desse modo, a atividade da Figura 12 envolve três tipos de registros: registro algébrico, gráfico e de linguagem natural, através da linguagem natural, como pode ser observado no enunciado, solicita que o aluno estabeleça a expressão algébrica e o registro gráfico correspondente.

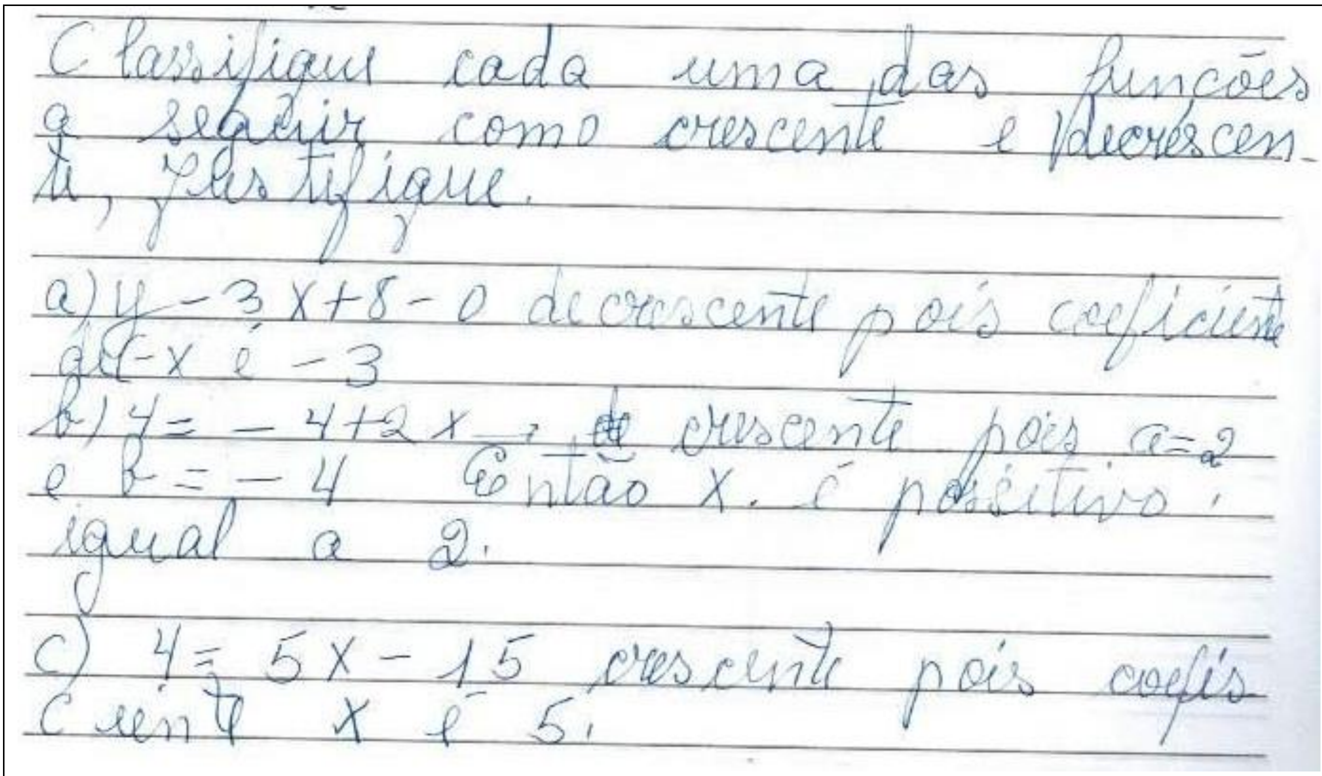
4.3 Análise do caderno de Matemática do aluno

O caderno do aluno é um documento com várias atividades, com espaços para cálculos e registros seguindo orientações do professor. As atividades de Função Afim estavam dispostas conforme estrutura do caderno do professor.

Nesta seção, apresentaremos resultados obtidos a partir da análise das atividades do caderno do aluno onde se percebeu que ele, em alguns momentos, utilizou registros de representação e transformação, ou seja, foi capaz de passar de um registro de representação para outro e, ainda, coordenar vários registros para a resolução das atividades.

A Figura 13 é relativa a uma atividade do caderno do aluno onde ele classifica uma função crescente e decrescente pelo sinal do coeficiente angular.

Figura 13 – Atividade: funções crescente e decrescente.


Classifique cada uma das funções a seguir como crescente e decrescente, justifique.

a) y - 3x+8 - o decrescente pois coeficiente de -x é -3

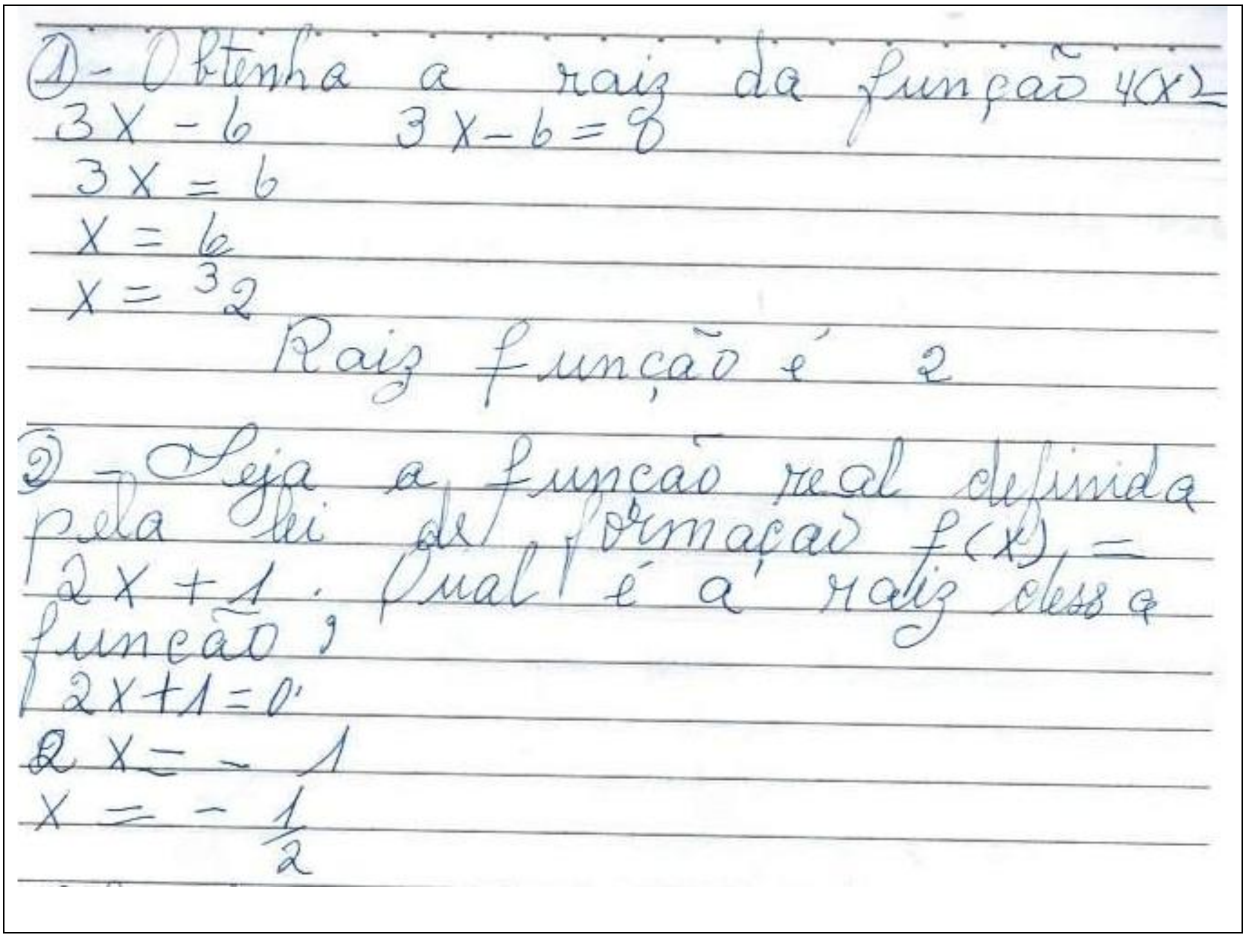
b) y = -4+2x → é crescente pois a=2 e b = -4 Então x é positivo igual a 2.

c) y = 5x - 15 crescente pois coeficiente x é 5.

Fonte: Caderno do aluno (2012).

Na Figura 14, percebe-se que o aluno preferiu responder utilizando somente o tratamento algébrico, sem conversão tabular e gráfica para analisar a resposta.

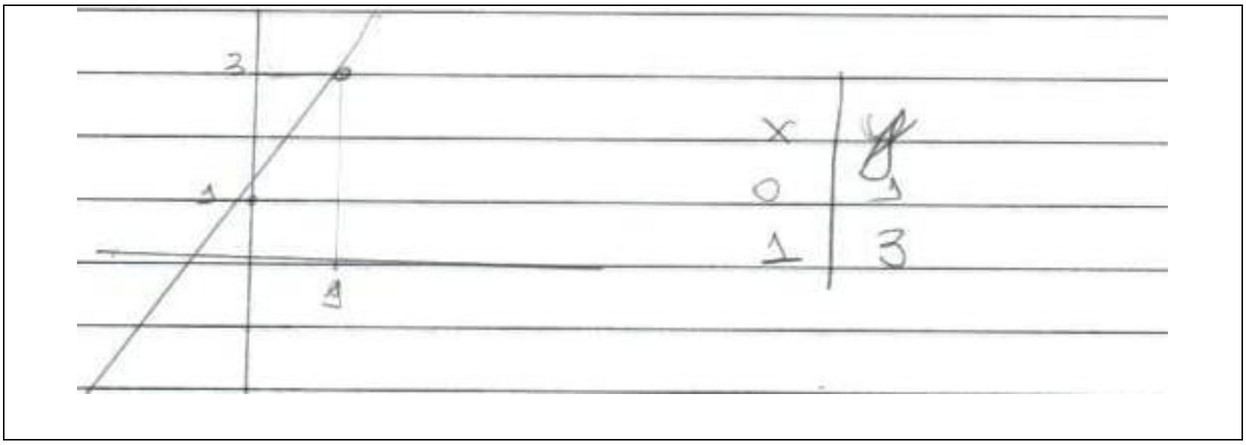
Figura 14 – Atividade: raiz da função.


1- Obtenha a raiz da função y(x) =
3x - 6   3x - 6 = 0
3x = 6
x = 6
x = 3 2
Raiz função é 2
2 - Seja a função real definida
pela lei de formação f(x) =
2x + 1. Qual é a raiz dessa
função?
2x+1=0
2x = - 1
x = - 1/2

Fonte: Caderno do aluno (2012).

A Figura 15 apresenta o resultado de uma atividade que envolvia construção de gráficos, onde o aluno utilizou 2 pontos e não demonstrou a forma algébrica no caderno.

Figura 15 – Atividade: gráfico da função.

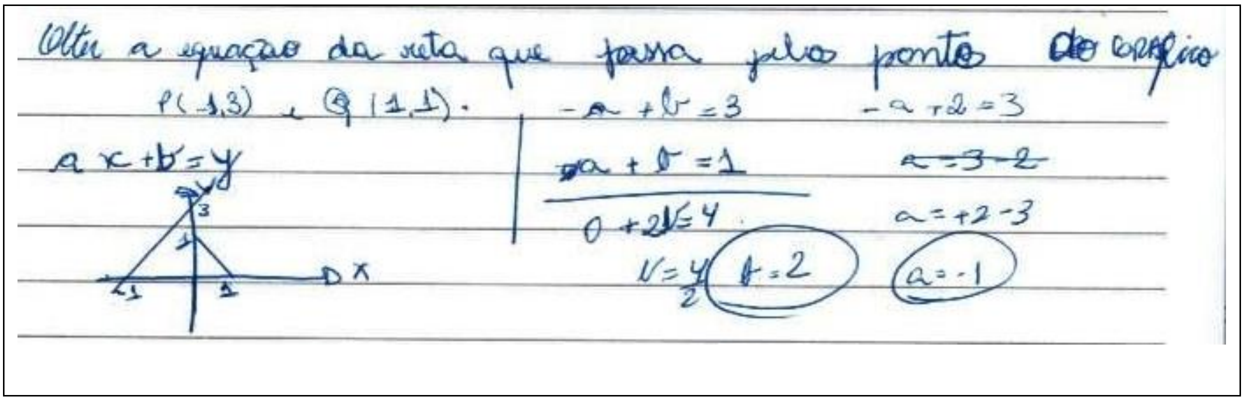


Fonte: Caderno do aluno (2012).

A Figura 16 exibe uma atividade com tratamento de registro algébrico, depois fazendo conversão para registro gráfico. Observa-se que o aluno também utilizou o registro tabular para resolução da atividade.

Porém, ao analisarmos o gráfico construído pelo aluno, percebemos que ele não utilizou corretamente a escala dos eixos do sistema ortogonal.

Figura 16 – Atividade: gráfico da equação da reta.



Fonte: Caderno do aluno (2012).

Observou-se que os alunos participantes da atividade enfatizaram, na maioria das vezes, apenas o tratamento para responder as atividades propostas, a memorização de regras e utilização de algoritmos.

Nessa ótica, Duval (2003) propõe que quanto maior for a mobilidade com registros diferentes do mesmo objeto, maior será a possibilidade de apreensão do objeto Matemático, e também no ato da conversão da representação de um objeto, de um registro para outro, que o aluno pode ser avaliado quanto ao seu efetivo entendimento matemático do objeto.

Com base na análise dos registros dos alunos foi possível verificar que foram poucas as conversões realizadas. Observamos que o aluno, no registro do caderno optou por realizar tratamento algébrico conforme figuras exibidas, e apresentar os gráficos, mas não retiraram as fórmulas deles. Quando o exercício requeria um registro específico, ouve poucas variações de caminhos percorridos no que diz respeito às conversões de registros realizados. Para Duval (2003) o sujeito que reconhece um objeto por meio de uma única representação confunde o objeto com sua representação.

Pelos resultados da análise preliminar dos dados é possível perceber que em alguns momentos é explorada a questão de diferentes representações no processo de ensino da Função Afim, mas em nenhum momento é utilizado algum aplicativo computacional como ferramenta de apoio a este processo. Portanto, no trabalho desenvolvido, buscou-se incluir essa ferramenta e analisar as contribuições do seu uso nesse contexto.

É importante que o aluno compreenda de fato as diferentes formas de representação de um objeto matemático, bem como as possibilidades de conversão entre esses registros, para que tenha uma aprendizagem significativa em relação ao ensino de Função Afim.

Observa-se que quando o aluno realiza atividades com uma metodologia sem o auxílio de um *software* no estudo de funções, de forma que os conhecimentos sejam ensinados pelo professor e receptados pelos alunos, a estes nem sempre são dadas oportunidades de chegarem às suas deduções. Dessa forma, pode não ser favorável à aprendizagem significativa do aluno.

O *GeoGebra* como ferramenta auxilia a prática pedagógica para estudo e aprendizagem de Função Afim, pois conforme fundamentação teórica foi possível verificar na concepção dos autores que a tecnologia melhora o aprendizado, dinamiza o processo de aprendizagem, pois trazem nova dinâmica à sala de aula, os alunos interagem com o *software* e chegam a conclusões próprias.

De forma que, ao passarem informações para o *software*, recebem instantaneamente as respostas que correlacionam às representações algébricas, gráficas, tabular. Assim as interações entre o *software Geogebra* e educandos, permite a autonomia para realização de resoluções das atividades manipulando vários tipos de representações de Função Afim.

5 INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA E ANÁLISE

A atividade foi realizada em uma turma do 1º ano do ensino médio, no Colégio Estadual Arnoldo Agenor Zimmermann na cidade de Gaspar SC. Essa escola em que foi realizada a intervenção pedagógica faz parte do PIBID na Universidade Regional de Blumenau (FURB), do qual a mestranda participa como bolsista.

Um dos objetivos é a iniciação à docência dos licenciandos, dando a oportunidade de vivenciar experiências em sala de aula, para futuramente desempenhar o magistério. Desse modo, por intermédio das ações desenvolvidas pelo subprojeto do PIBID/ Matemática na escola, na condição de acadêmica de Licenciatura da Furb, foi possível realizar a intervenção pedagógica.

O desenvolvimento das atividades contou com registros escritos e fotográficos, com duração do período do mês de maio e junho de 2013. A turma do 1º ano do Ensino Médio se dividiu em duplas para desenvolver a atividade. Em seguida os alunos receberam as atividades impressas, sendo que partes das respostas foram anotadas nas folhas-respostas. Os gráficos e tabelas construídos no aplicativo *GeoGebra*, logo em seguida salvos nos computadores do laboratório.

A professora utilizou o recurso tecnológico de forma expositiva (data *show*), e durante a sequência didática cada dupla usou um computador com o *software GeoGebra*, previamente instalado. As atividades foram divididas por conteúdo e abordadas em 20 encontros, como mostra o Quadro 03.

Quadro 03 – Conteúdo das atividades da sequência didática.

Conteúdo	**Período**
Propriedade característica equação de 1º grau	4 aulas de 45 min
Os coeficientes angulares	2 aulas de 45 min
Os coeficientes lineares	2 aulas de 45 min
Crescimento e decrescimento	4 aulas de 45 min
Os coeficientes angulares e lineares	1 aula de 45 min
Raiz ou Zero da Função do 1º grau	3 aulas de 45 min
Função linear e função constante.	2 aulas de 45 min
Revisão	2 aulas de 45 min

Fonte: Autora (2013).

Na intervenção pedagógica, o mesmo conteúdo de Função Afim já apresentado na análise preliminar foi abordado. Porém, devemos observar que foi adaptado para que os alunos se reunissem para realizar as atividades com auxílio do *software GeoGebra,* com objetivo de investigar se houve ou não a aprendizagem quando da utilização do *software*. Vale ressaltar que estas atividades devem permitir aos alunos, segundo Candeias (2010), explorar situações, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, argumentar e comunicar oralmente e por escrito as suas conclusões.

As atividades tiveram objetivo geral de explorar quatro formas de representação: a língua natural, algébrica, tabular e gráfica, e realizar dois tipos de transformação de representação semiótica: tratamento e conversão.

Foi realizada uma análise a *priori e a posteriori* das atividades, seguindo os pressupostos da Engenharia Didática. A seguir, são descritos os principais aspectos das questões que compõem as atividades da sequência didática para uso do *GeoGebra.*

5.1 Atividade: propriedades e características da Função Afim

Apresentamos no Quadro 04 as atividades desenvolvidas com os alunos com o objetivo de introduzir a noção de Função Afim, exibindo as propriedades e características da mesma.

Quadro 04 - Aula nº 1: propriedades características da Função Afim.

a) Preencher as tabelas na qual apareçam os valores de x e os valores do correspondente y. Logo após, representar cada par ordenado (a, b)da tabela por um ponto do plano cartesiano. Com os pares obtidos construir o gráfico:

I.

$y = 2x$	
x	y

II.

$y = x + 2$	
x	y

III.

$y = \frac{x}{2}$	
x	y

IV.

$y = x^2$	
x	y

V.

$y = \frac{2}{x}$	
x	y

VI-

$y = 5x^2$	
x	y

Quais dos gráficos representam função afim?

____

____

Quais características observam-se no gráfico de função afim?

____

____

Quais características observam-se na tabela da função, a qual no gráfico é uma reta?

____

____

b) Complete a tabela abaixo com os valores que estão faltando e encontre a função afim correspondente:

x	y	(x, y)	
– 2	– 9	(– 2, – 9)	
– 1	– 4	(– 1, – 4)	
0	1	(0,1)	
2	11		
3	16		
4	21		
5	26		

x	y	(x, y)
-2	-2	(-2,-2)
-1	0	(-1,0)
0	2	(0,2)
2		
3		
4		
5		

x	y	(x,y)
– 2	-3	(-2,-3)
	-2	
0	-1	(0,-1)
2		
	2	
	3	
5	4	(5,4)

Fonte:Autora(2013)

5.1.1 Análise a *priori*

Essa atividade foi elaborada com a pretensão de que os alunos observassem as características do gráfico de uma Função Afim, e percebessem que a mesma é uma reta, com intuito que comparassem com outros tipos de funções.

A primeira questão apresenta também alguns gráficos de funções representadas por parábolas para que os alunos pudessem fazer comparativos com as funções que representam retas. Na segunda questão, o objetivo propõe que os alunos concluíssem a relação existente entre os valores de x e de y e a expressão algébrica que relaciona esses valores, fazendo a conversão de registro numérico para algébrico e por fim gráfico.

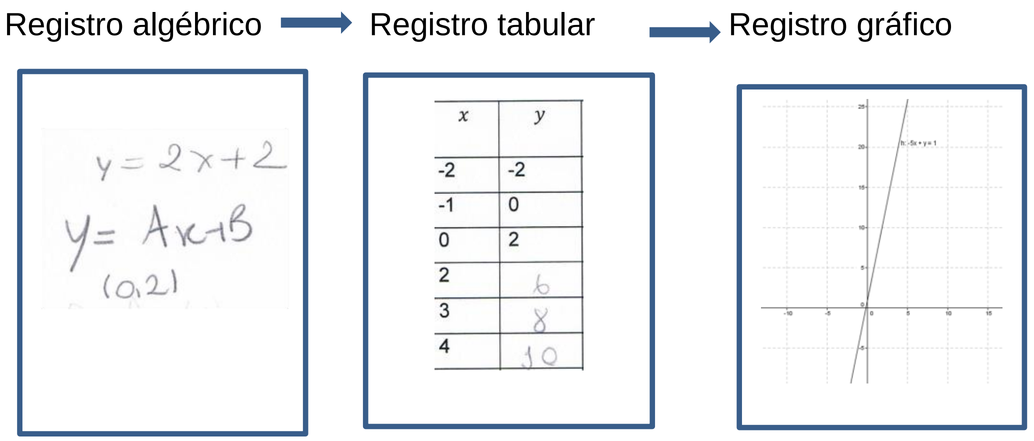
5.1.2 Análise a *posteriori*

Para identificar os gráficos da Função Afim e suas características, percebeu que os grupos inicialmente calcularam o valor de y a partir de valores de x

predeterminados (registros algébricos), construíram as tabelas (registros tabular), e, por fim, construíram o gráfico (registro gráfico).

Conforme Duval (2004) a utilização de diferentes registros de representações matemáticos contribui para organização do pensamento do aluno e influencia a atividade cognitiva, essas representações são essenciais para a compreensão dos conceitos matemáticos. Vejamos, na Figura 17, um exemplo de atividade desenvolvida pelos alunos.

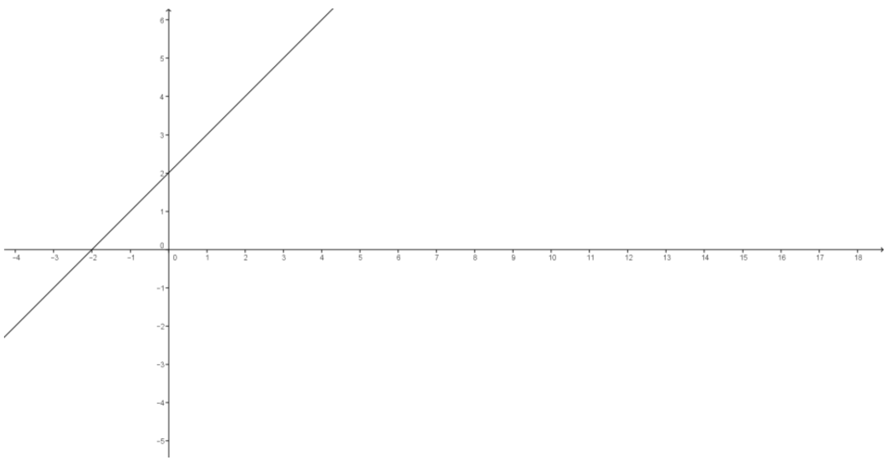
Figura 17 - Atividade realizada pela dupla B com ajuda do *GeoGebra*



x	y
-2	-2
-1	0
0	2
2	6
3	8
4	10

Fonte: Atividade dupla B (2013)

Figura 18 - Atividade realizada pela dupla E com ajuda do *GeoGebra*



Fonte: Atividade dupla E (2013)

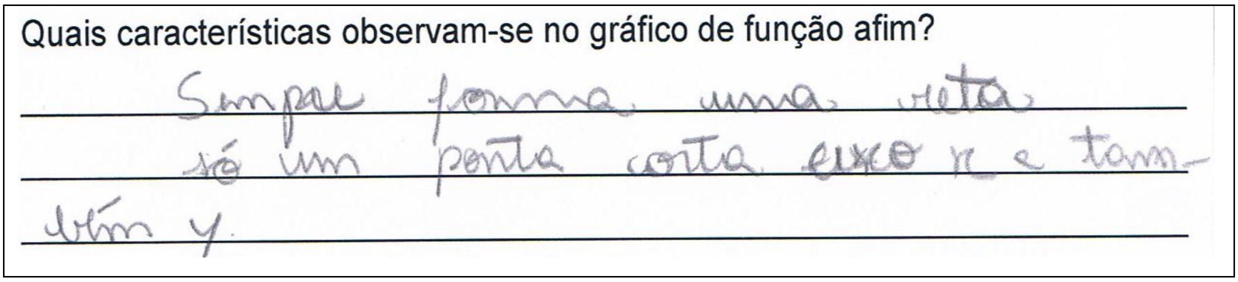
Durante a realização dessa atividade, para chegar ao registro gráfico, algumas duplas iniciaram a construção da reta digitando vários pontos que foram extraídos da tabela que constavam na folha de atividade e, em seguida, utilizaram a opção inserir a reta definida pelos pontos, disponível no *GeoGebra*. Porém, na terceira ou quarta construção dos gráficos, perceberam que dois pontos já eram o suficiente, então abortaram a ideia de inserir mais de dois pontos para cada gráfico. Esta dedução nos permite aferir que os alunos estavam construindo um importante conhecimento, seja ele, para construir uma reta bastam dois pontos.

Os alunos também observaram que ao digitar funções como $y = 2x, y = x + 2, y = 1 + \frac{x}{2}$, obtinham a visualização da reta da equação na janela gráfica, então passaram a digitar as funções e verificar se os pontos pertenciam a essa reta.

Também se constatou que ao concluírem a construção das tabelas ainda não conseguiam identificar quais eram as Funções Afins, sendo ainda necessário visualizar os gráficos.

Por fim, observando os gráficos e as tabelas, foi possível perceber que os alunos estavam conseguindo diferenciar características da Função Afim de outras funções, como pode ser percebido na Figura 19, numa resposta apresentada pelos alunos.

Figura 19 – Resposta da atividade 1 apresentada pela dupla C.


Quais características observam-se no gráfico de função afim?

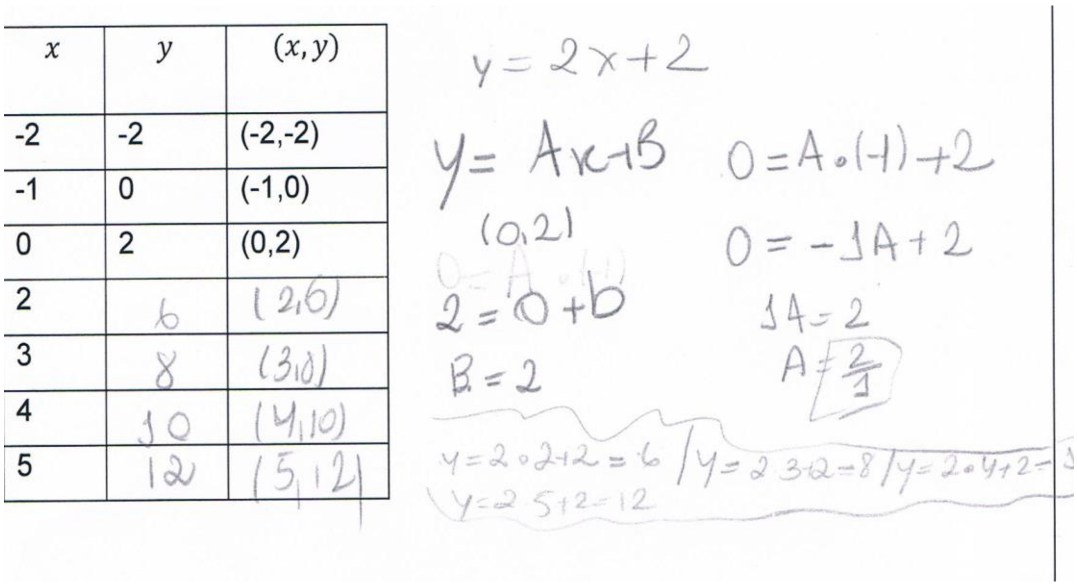
Simpre fomma uma reta
só um ponta corta eixo x e tam-
bém y.

Fonte: Atividade dupla C (2013)

Importante salientar que os alunos, ao utilizarem o *software GeoGebra,* no início da questão criaram um arquivo para cada gráfico inserido no plano cartesiano, mas logo perceberam a parte dinâmica do *software GeoGebra*, e começaram a manipular a visualização dos gráficos e pontos num único plano cartesiano.

Importante registrar que, ao completar a tabela de valores e encontrar a Função Afim correspondente, algumas duplas utilizaram a resolução algébrica, tendo como ponto de partida os valores da tabela e a equação $y = ax + b$, encontrando os valores de a e b. Como exemplo, vejamos a resolução da atividade pelos alunos, conforme Figura 20.

Figura 20 – Resposta da atividade 1 apresentada pela dupla B.



x	y	(x, y)
-2	-2	(-2,-2)
-1	0	(-1,0)
0	2	(0,2)
2	6	(2,6)
3	8	(3,8)
4	10	(4,10)
5	12	(5,12)

$y = 2x + 2$

$y = Ax + B$

$(0,2)$

$2 = 0 + b$

$B = 2$

$0 = A \cdot (-1) + 2$

$0 = -1A + 2$

$1A = 2$

$A = \boxed{\frac{2}{1}}$

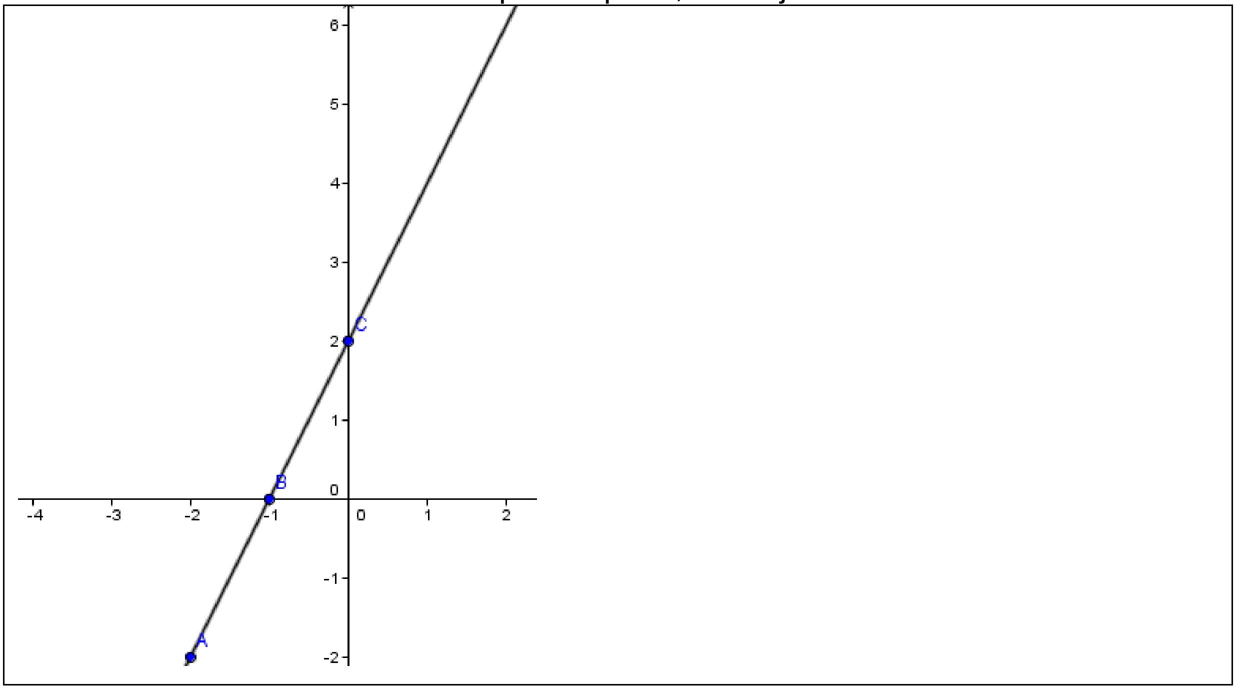
$y = 2 \cdot 2 + 2 = 6$ / $y = 2 \cdot 3 + 2 = 8$ / $y = 2 \cdot 4 + 2 =$ [illegible]

$y = 2 \cdot 5 + 2 = 12$

Fonte: Atividade dupla B (2013).

Por fim, utilizaram o *GeoGebra* para confirmar se a resposta formava uma reta.

Gráfico 3 – Atividade1 realizada pela dupla F, com ajuda do *GeoGebra.*

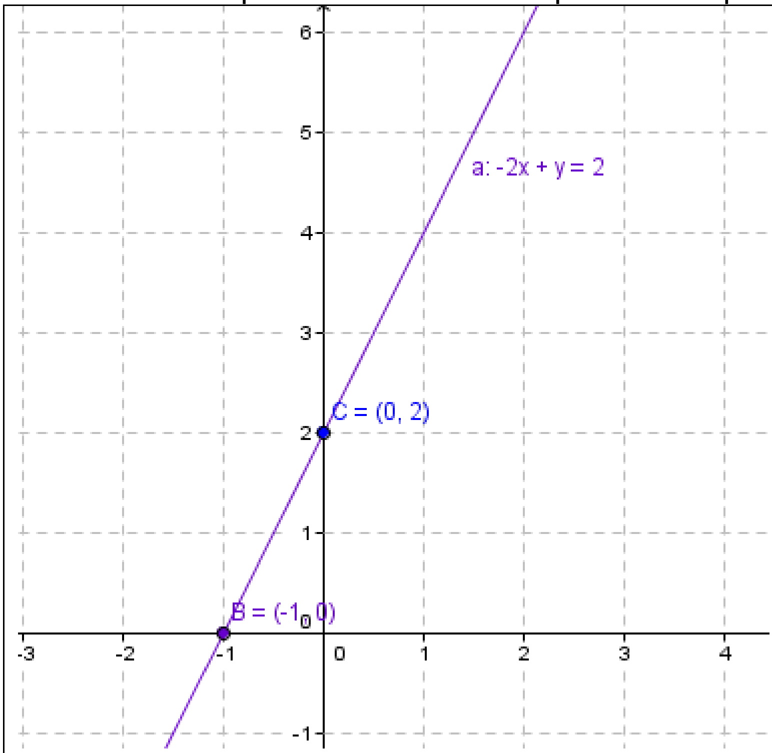


Fonte: Atividade dupla F (2013).

Observou que duas duplas de alunos utilizaram o *GeoGebra* inserindo dois pontos que já haviam sido informados na tabela e, assim, obtendo a Função Afim correspondente aos pontos informados (registro tabular).

Nesse sentido, para Duval (2003, p 22), "...passar de um registro de representação à outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto." Dessa forma observa-se quando os alunos realizam conversões, e consequentemente, a coordenação das representações gráfica, tabular, algébrica é por que compreendem e conhecem diferentes aspectos e propriedades do objeto.

Gráfico 4 – Resposta da atividade 1 apresentada pela dupla A.



Fonte: Atividade da dupla F (2013).

5.2 Atividade: estudo do coeficiente angular

Apresentamos no Quadro 5 a atividade que aborda o coeficiente angular de uma função, dando continuidade à atividade anterior.

Quadro 5 - Aula nº 2: Estudo do coeficiente angular

a) Construir o gráfico de cada uma das funções no mesmo plano cartesiano.

I. $f(x) = x$

II. $f(x) = 2x$

III. $f(x) = 6x$

IV. $f(x) = 3x$

V. $f(x) = 4x$

Identifique o coeficiente angular em cada uma das funções:

___

___

Qual o efeito que causa no gráfico ao variarmos o valor do coeficiente angular em relação ao eixo $0x$?

___

___

Construa o gráfico de cada uma das funções no mesmo plano cartesiano.

I. $f(x) = x + 2$

II. $f(x) = 2x + 2$

III. $f(x) = \frac{x}{2} + 2$

IV. $f(x) = 3x + 2$

V. $f(x) = 4x + 2$

Identifique o coeficiente angular em cada uma das funções:

___

___

Qual o efeito que causa no gráfico ao variarmos o valor do coeficiente angular em relação ao eixo $0x$?

___

Construa o gráfico e escreva a lei da função afim a partir dos pontos informados na tabela:

I-

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9

II-

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6

Identifique o coeficiente angular em cada uma das funções:

____

____

Qual o efeito que causa no gráfico ao variarmos o valor do coeficiente angular em relação ao eixo $0x$?

Fonte: Autora (2013).

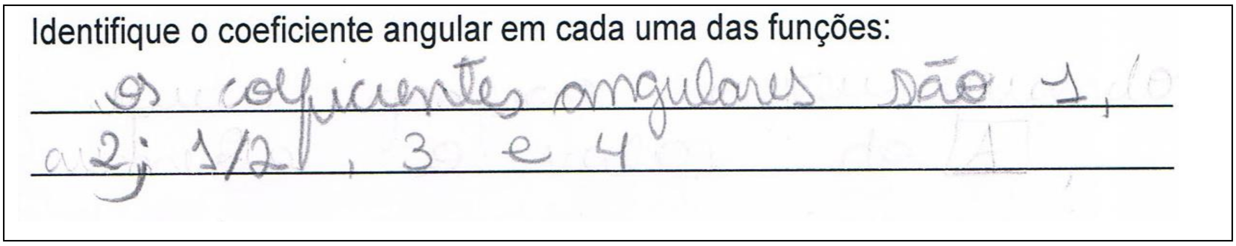
5.2.1 Análise a *priori*

No início da atividade, elaborada objetivando que o aluno interpretasse o registro gráfico, identificando que as representações gráficas e algébricas correspondem ao mesmo tipo de função, sem a necessidade da construção de tabelas (registro tabular). O objetivo era que o aluno observe e associe o coeficiente angular da reta com a sua inclinação, ou seja, quando o gráfico intercepta o eixo das ordenadas de forma crescente. O aluno deverá também observar a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal x.

5.2.2 Análise a *Posteriori*

Pelos escritos dos alunos apresentados na Figura 21, observamos que eles chegaram à conclusão esperada com referência a identificação do coeficiente angular. Com exceção de uma dupla (FIGURA 22) que fez a identificação errada do coeficiente angular da função $f(x) = \frac{x}{2} + 2$, provavelmente pelo fato dessa função envolver números racionais.

Figura 21- Resposta da atividade 2 apresentada pela dupla A.

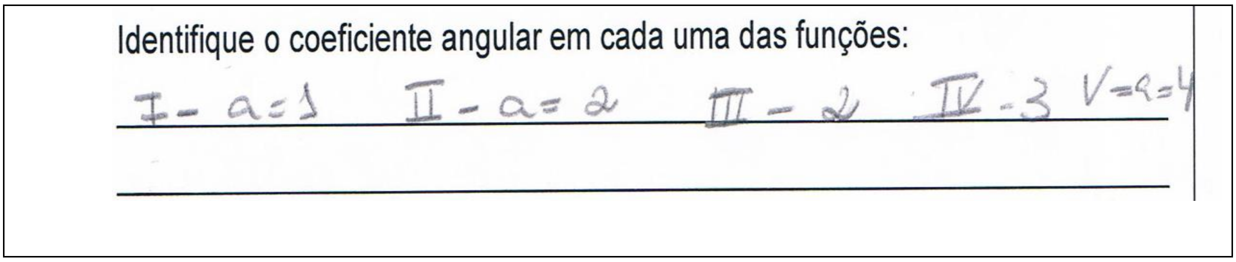


Identifique o coeficiente angular em cada uma das funções:

os coeficientes angulares são 1, 2; 1/2, 3 e 4

Fonte: Atividade da dupla A (2013).

Figura 22- Resposta da atividade 2 apresentada pela dupla B.



Identifique o coeficiente angular em cada uma das funções:

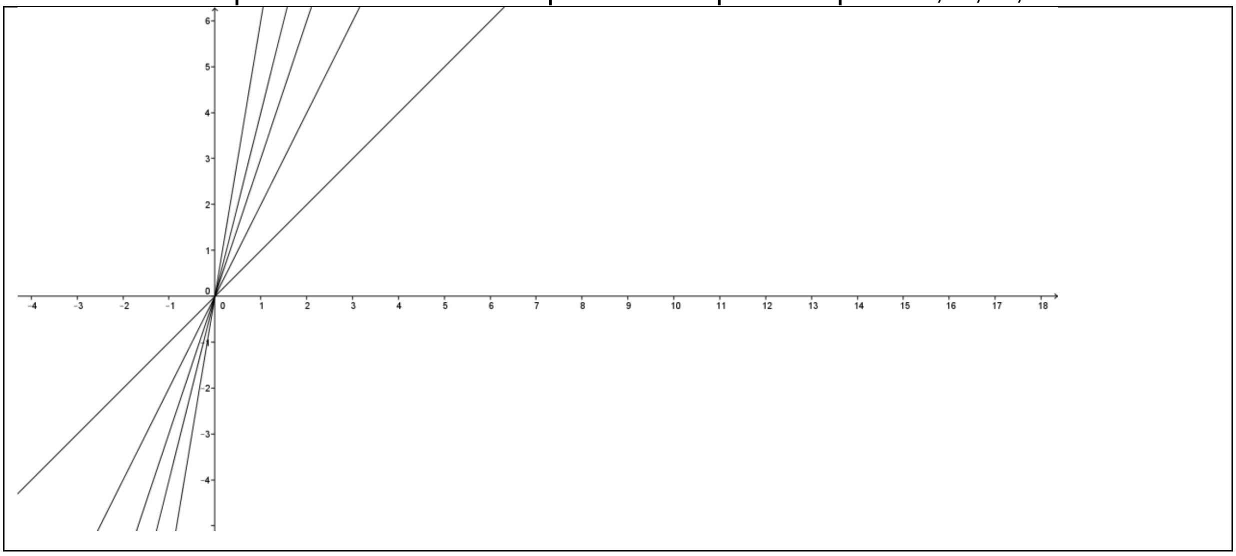
I- a=1 II- a=2 III- 2 IV- 3 V=a=4

Fonte: Atividade da dupla B (2013).

Durante o desenvolvimento das aulas, os alunos fizeram muitas perguntas ao professor envolvendo conhecimentos básicos de matemática, como por exemplo, o coeficiente angular de uma função do tipo $f(x) = ax + b$, quando esta envolvia frações.

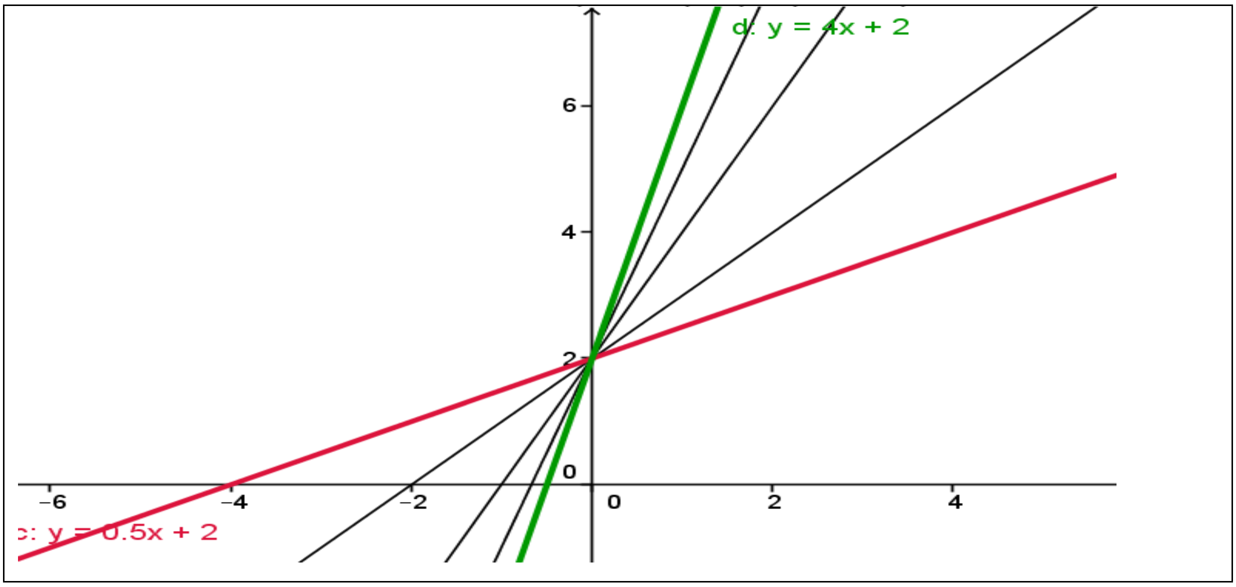
Pelo registro dos alunos apresentados nos Gráficos 4 e 5, percebe-se que eles relacionaram os gráficos às suas respectivas funções (representação algébrica) num mesmo plano cartesiano.

Gráfico 5 - Resposta da atividade 2 apresentada pelas duplas A, B, D,E e F.



Fonte: Atividade das duplas A,B,D,E e F (2013).

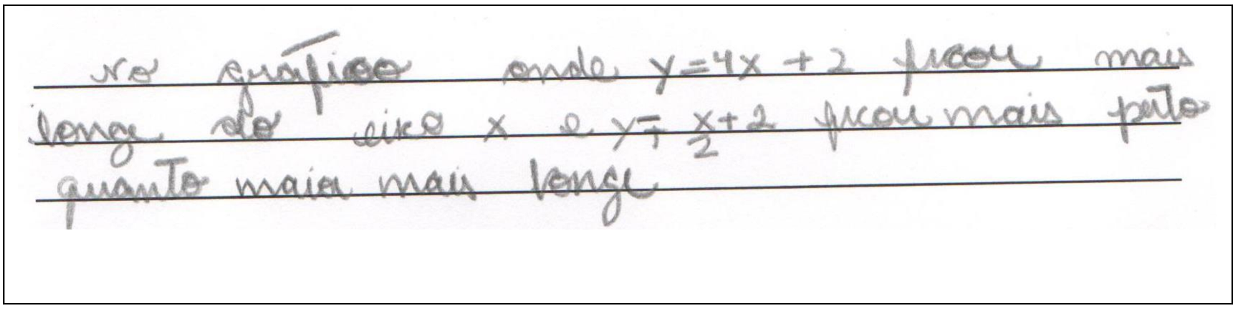
Gráfico 6 - Resposta da atividade 2 apresentada pela dupla C.



Fonte: Atividade da dupla C (2013).

No Gráfico 5 os alunos destacaram as retas $f(x) = \frac{x}{2} + 2\ e\ f(x) = 4x + 2,$ buscando salientar a diferença de inclinação de ambas. Esse fato indica que os alunos compreenderam a relação do coeficiente "a" com a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal (x). A Figura 23 observou-se essa inclinação, conforme a resposta da questão “Qual o efeito que causa no gráfico ao variarmos o valor do coeficiente angular em relação ao eixo $0x$?”

Figura 23 - Resposta da atividade 2 apresentada pela dupla C.



Fonte: Atividade da dupla C (2013).

Os registros em linguagem natural, apresentados nas repostas dos alunos, sugerem que os mesmos sentiam necessidade de utilizar diferentes registros (algébrico, gráfico e escrito). A formalização das ideias mostrou, por meio das respostas apresentadas, que houve a interação da análise da representação gráfica e algébrica com as questões levantadas.

5.3 Atividade: estudo do coeficiente linear

No Quadro 6 a atividade é focada no estudo do coeficiente linear.

Quadro 6 - Aula nº 3: Estudo do coeficiente linear

a) Construa o gráfico e a função afim a partir dos pontos informados na tabela:

I-

x	y
0	1
3	4
4	5
5	6

II-

x	y
0	$\frac{1}{2}$
3	7
4	9
5	11

III-

x	y
0	2
3	5
4	6
5	7

IV-

x	y
0	3
3	6
4	7
5	8

V-

x	y
0	$\frac{1}{4}$

3	13
4	17
5	21

Identifique o coeficiente linear em cada uma das funções:

____

____

Qual o efeito que causa no gráfico ao variarmos o valor do coeficiente linear em relação ao eixo y?

____

____

Fonte: Autora (2012)

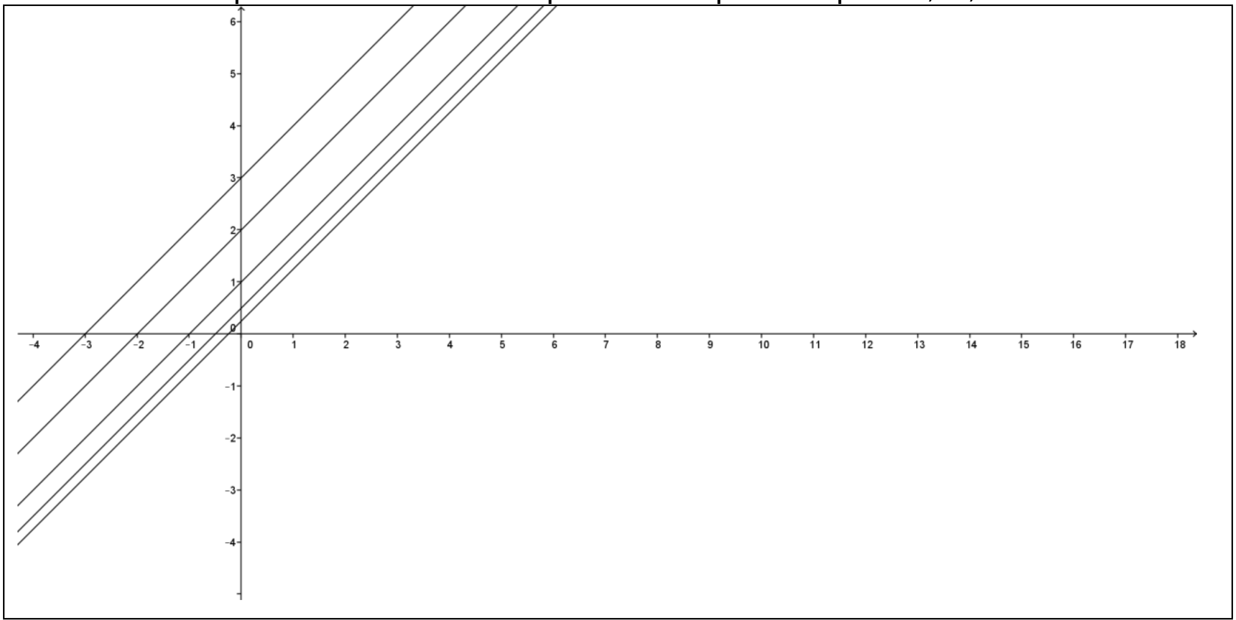
5.3.1 Análise a *priori*

Essa atividade foi elaborada objetivando que o aluno observasse o efeito que causa no gráfico ao variarmos o valor do coeficiente linear, bem como, identificar o ponto onde a reta intercepta o eixo y. A partir dessas constatações, é possível relacionar a representação algébrica com a gráfica.

5.3.2 Análise a *Posteriori*

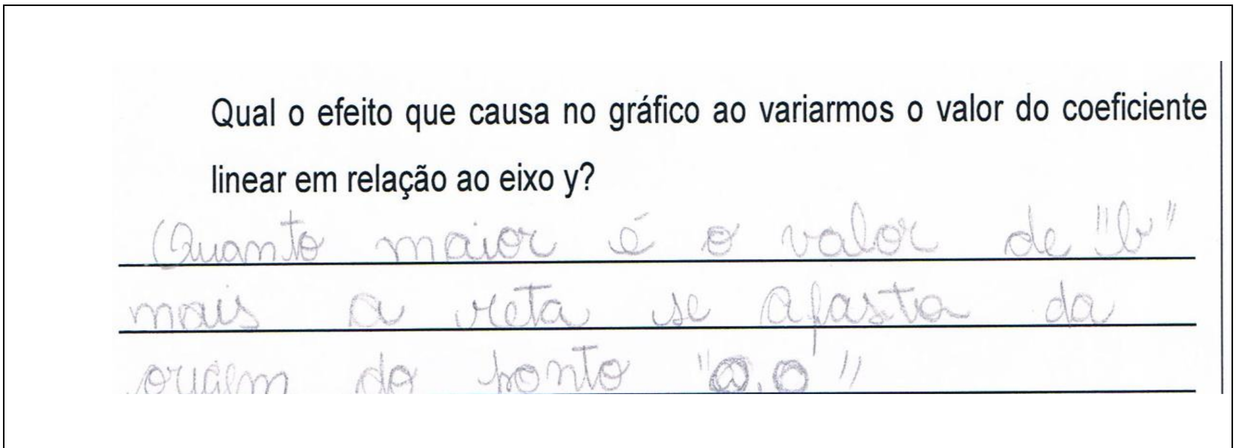
Comentários de alguns estudantes durante o desenvolvimento da atividade nos permitem constatar que, nesse processo de compreensão, eles consideraram fácil construir o gráfico da Função Afim a partir dos pontos informados na tabela. Após a construção dos gráficos eles conseguiram perceber o efeito que causa no gráfico ao variarmos o valor do coeficiente linear, conforme pôde ser percebido na resposta apresentado na Figura 24 e reescrita aqui em função de não estar nítido: ” quanto maior é o valor total de *b*, mais a reta fica longe da origem do ponto (*0,0*)”.

Gráfico 7 - Resposta da atividade 3 apresentada pelas duplas B, D, E e F.



Fonte: Atividade das duplas B, D E e F (2013).

Figura 24 - Resposta da atividade 3 apresentada pela dupla D.



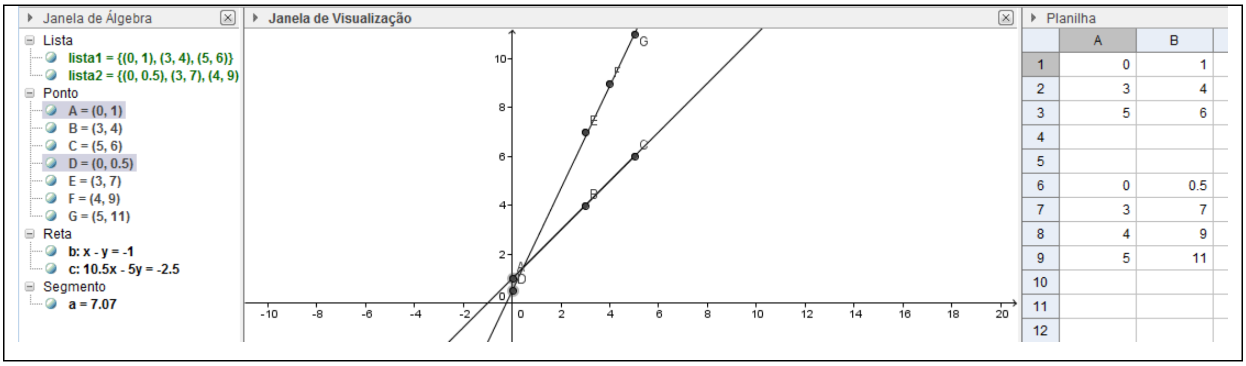
Qual o efeito que causa no gráfico ao variarmos o valor do coeficiente linear em relação ao eixo y?

(Quanto maior é o valor de "b" mais a reta se afasta da origem do ponto "0,0")

Fonte: Atividade da dupla D (2013).

Uma dupla de alunos analisou a questão após manipular as três representações no *GeoGebra*: gráfica, tabular e algébrica. Conforme protocolo de construção disponível no *software* constatamos que a dupla construiu a planilha obtendo a lista de cada reta com sua respectiva equação.

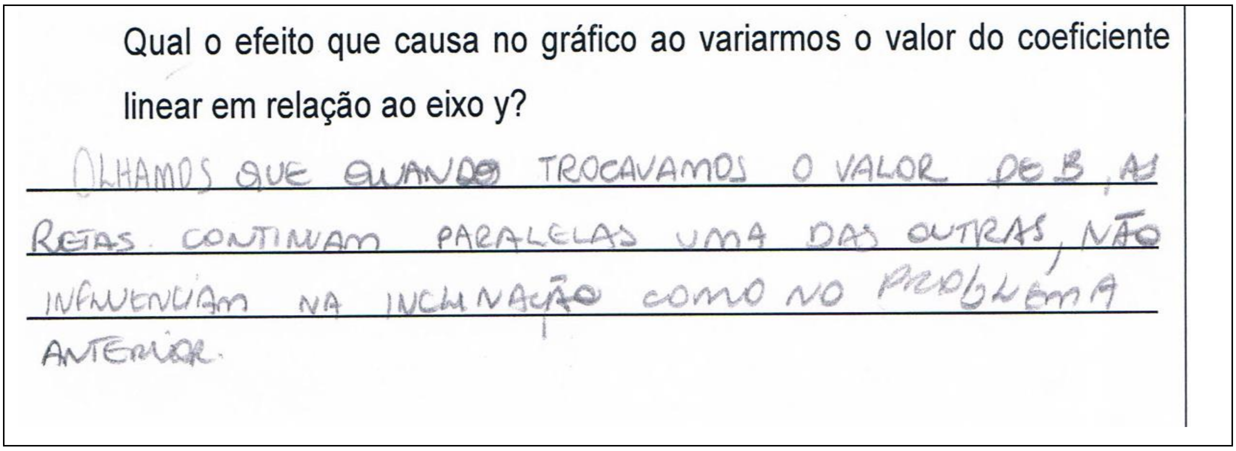
Figura 25- Resposta da atividade 3 apresentada pela dupla A.



Fonte: Atividade da dupla A (2013)

Os estudantes também observaram que o ponto de intersecção das retas representativas de cada uma das funções com o eixo *y* acontece em (0,b) (FIGURA 26, 27 e 28).

Figura 26 - Respostas da atividade 3 apresentadas pelas duplas D.

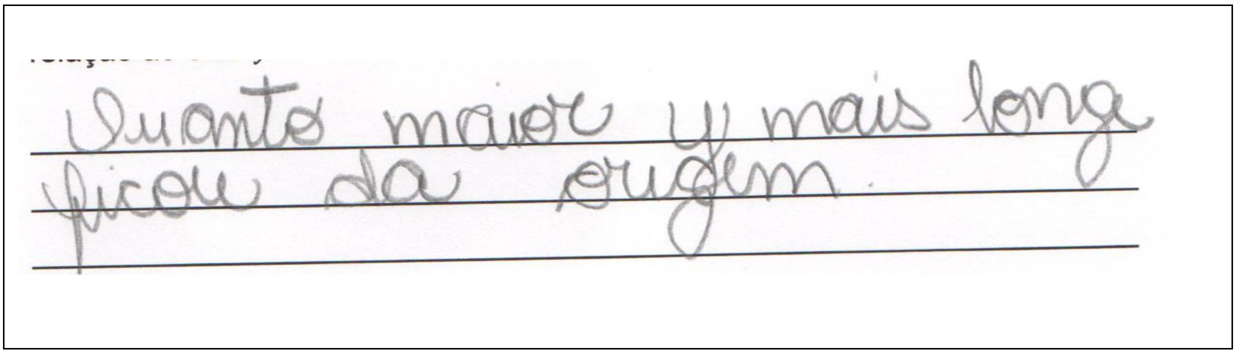


Qual o efeito que causa no gráfico ao variarmos o valor do coeficiente linear em relação ao eixo y?

OLHAMOS QUE QUANDO TROCAVAMOS O VALOR DE B, AS RETAS CONTINUAM PARALELAS UMA DAS OUTRAS, NÃO INFLUENCIAM NA INCLINAÇÃO COMO NO PROBLEMA ANTERIOR.

Fonte: Atividade das duplas D(2013).

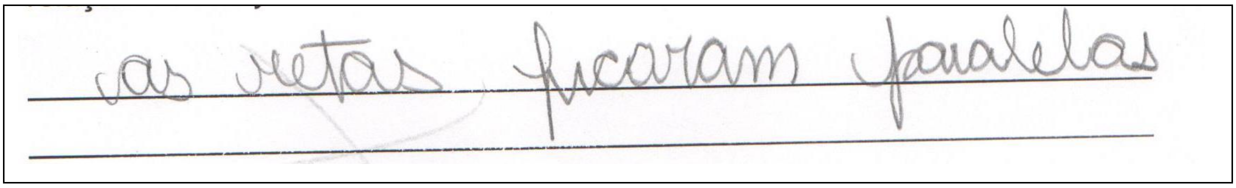
Figura 27 - Respostas da atividade 3 apresentadas pelas duplas F.



Quanto maior y mais longe ficou da origem.

Fonte: Atividade das duplas F (2013).

Figura 28 - Respostas da atividade 3 apresentadas pelas duplas E.


as retas ficaram paralelas

Fonte: Atividade das duplas E (2013).

5.4 Atividade: estudo do crescimento e decrescimento da função

A atividade do Quadro 7 aborda o crescimento e decrescimento da Função Afim.

Quadro 7 - Aula nº 4: estudo do crescimento e decrescimento da função.

a) Construa o gráfico das seguintes funções:

$y = x$

x	-2	-1	1	2
y				

$y = -x$

x	-2	-1	1	2
y				

$y = 2x$

x	-2	-1	1	2
y				

$y = -2x$

x	-2	-1	1	2
y				

$y = 3x$

Y	-2	-1	1	2
X				

$y = -3x$

x	-2	-1	1	2
y				

Escreva o valor do coeficiente angular de cada uma das funções:

____

____

Escreva qual implicação ocorreu nos gráficos quando atribuímos o sinal negativo no coeficiente angular das funções:

____

____

Escreva qual implicação ocorreu no gráfico quando atribuímos o sinal positivo no coeficiente angular das funções:

____

____

Se o coeficiente angular for igual a zero o que acontece?

____

____

Escreva quais funções são crescente e decrescente:

____

____

b) Represente o gráfico da função $y = 4x - 3$

x	1	2	3	4
y				

Visualizando somente a lei da função afim, como sabemos se ela é crescente ou decrescente?

.

____

____

Visualizando somente o gráfico, como sabemos se a função representada é crescente ou decrescente?

____

____

O preço da passagem do ônibus urbano na cidade de Blumenau é de R$ 2,75. Com base nesse dado, construa a tabela Nº de passagens (x)e Valor Pago (y) e o gráfico e a função correspondente:

De acordo com os dados da tabela esta função é crescente ou decrescente?

____

____

e) Analisando a variação do parâmetro a, com base nos estudos já realizados quando $\mathrm{y} = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$ o que ocorre nos casos em que:

$a > 0$ ____

$a < 0$ ____

$a = 0$ ____

$b = 0$ ____

Fonte: Autora (2012).

5.4.1 Análise a *priori*

Essa atividade foi planejada objetivando que o aluno observe quando a função é crescente ou decrescente, e identifique que isso está diretamente relacionado ao sinal do coeficiente a. Se a é positivo, a função é crescente, ou seja,

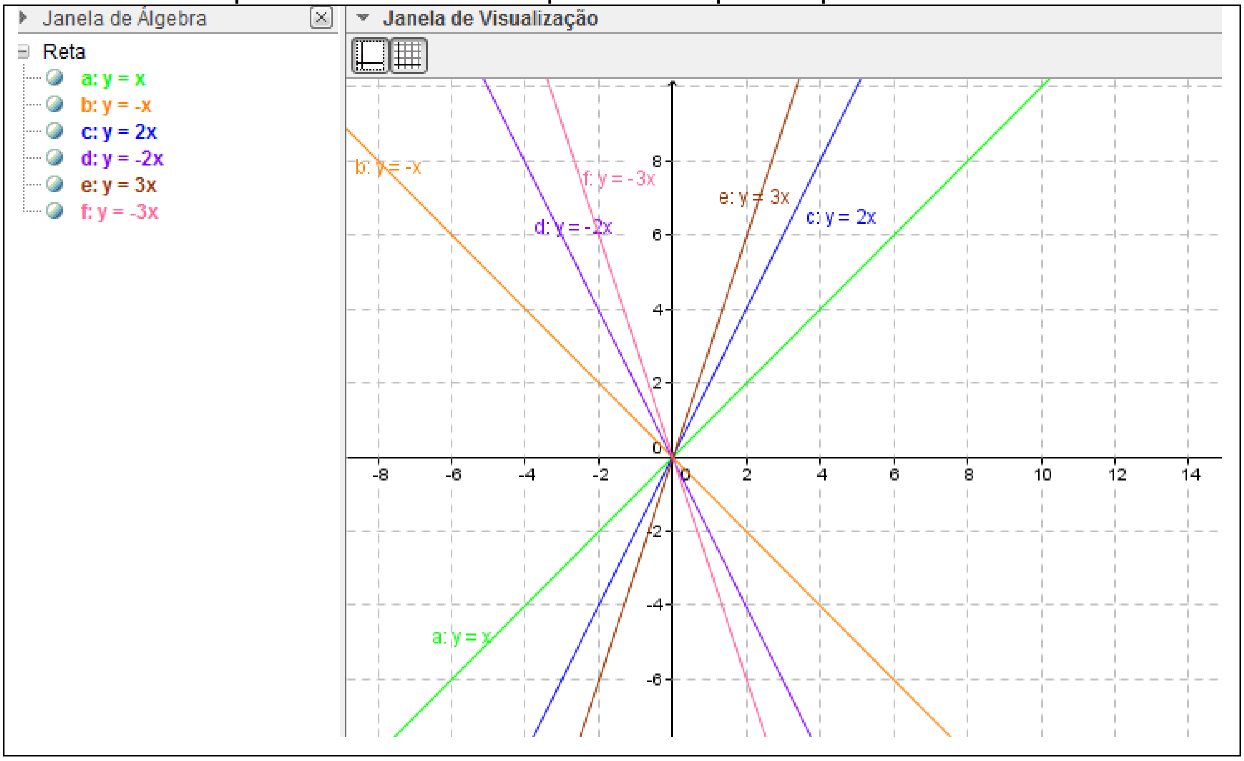
$a > 0$, a medida que os valores de x vão aumentando; os valores de y também vão aumentando, essa e uma característica das funções crescentes. Se a é negativo, ela é decrescente, ou seja, $a < 0$, à medida que os valores de x vão diminuindo, os valores de y vão diminuindo, essa é uma característica das funções decrescentes. Como na atividade anterior exploramos também casos em que $a = 0$ e $b = 0$.

Esperamos também que o aluno percebesse a representação de função em linguagem natural (escrita), de modo que possa relacionar a expressão algébrica com a tabular, com o texto e com o gráfico correspondente.

5.4.2 Análise a *posteriori*

Essa atividade abordava funções $y = x, y = -x, y = 2x, y = -2x, y = 3x, y = -3x$. Por meio da análise do seu gráfico, os alunos puderam observar claramente o crescimento e decrescimento da função, o deslocamento da reta na tela do *software GeoGebra*, como também, as seguintes representações gráficas para $x > 0$, para $x < 0$ e para $x = 0$, conforme Gráfico 8.

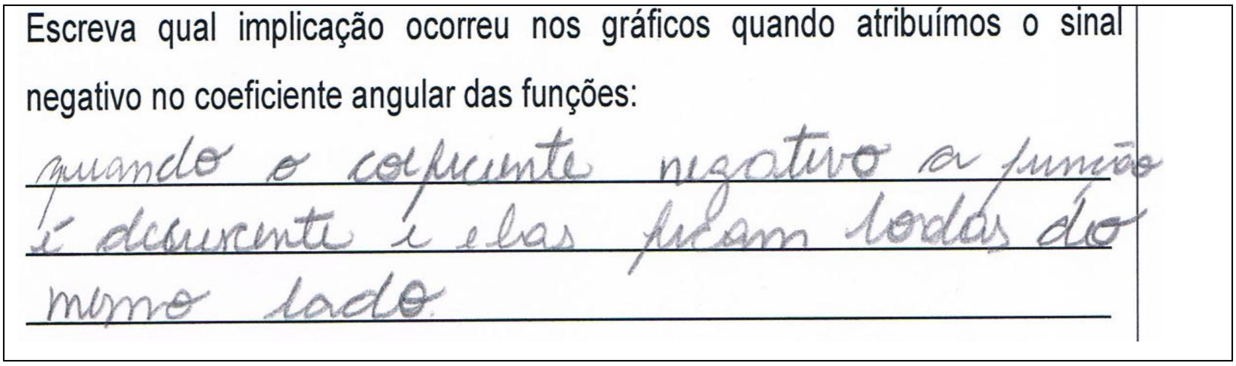
Gráfico 8 - Resposta da atividade 4 apresentada pela dupla F.



Fonte: Atividade da dupla F (2013).

Apresentamos o exemplo de uma dupla de alunos como resposta da atividade 04, onde eles contemplaram itens envolvendo funções crescentes e decrescentes.

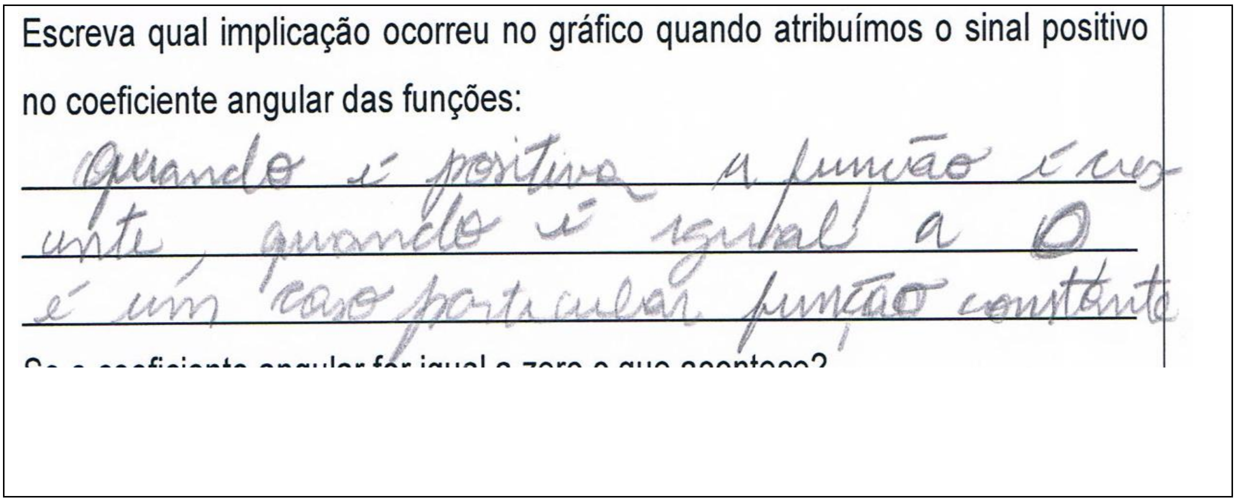
Figura 29- Resposta da atividade 4 apresentada pela dupla F.


Escreva qual implicação ocorreu nos gráficos quando atribuímos o sinal negativo no coeficiente angular das funções:

quando o coeficiente negativo a função é decrescente e elas ficam todas do mesmo lado

Fonte: Atividade da dupla F (2013)

Figura 30- Resposta da atividade 4 apresentada pela dupla F


Escreva qual implicação ocorreu no gráfico quando atribuímos o sinal positivo no coeficiente angular das funções:

quando é positiva a função é crescente, quando é igual a 0 é um caso particular função constante

Se o coeficiente angular for igual a zero o que acontece?

Fonte: Atividade da dupla F (2013)

Os resultados sugerem que os estudantes foram capazes de usar a ferramenta proposta com agilidade, utilizando-a como um instrumento para a construção e extração de dados dos gráficos apresentados, reconhecendo-os, localizando-os e classificando-os em crescentes ou decrescentes. Fazendo as conversões do registro de representação algébrica para o registro de representação gráfico, leitura e interpretação do gráfico, exigindo articulação com as noções de função crescente e decrescente.

Figura 31 - Resposta da atividade 4 apresentada pela dupla B.

Visualizando somente o gráfico, como sabemos se a função representada é crescente ou decrescente?

QUANTO X AUMENTA Y TAMBÉM (CRESCE); QUANDO X DIMINUI Y ,, (DECRESCE

Fonte: Atividade da dupla B(2013).

Figura 32 - Resposta da atividade 4 apresentada pela dupla E.

Analisando a variação do parâmetro a, com base nos estudos já realizados quando $y = ax + b$ o que ocorre nos casos em que:

$a > 0$ crescente

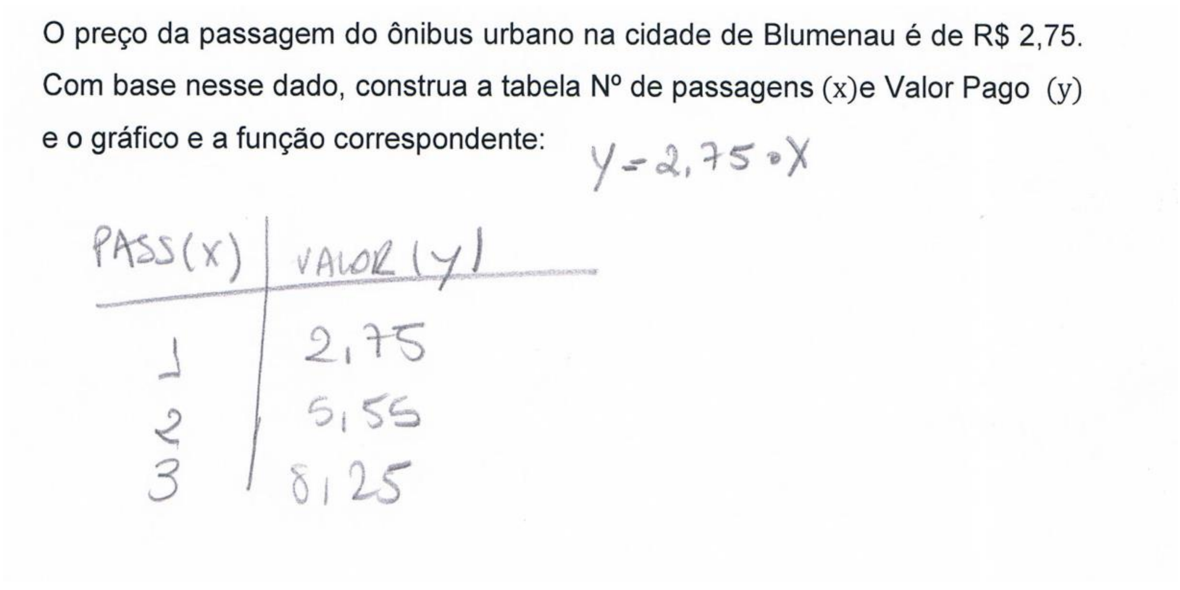
$a < 0$ decrescente

$a = 0$ constante

$b = 0$ linear

Fonte: Atividade da dupla E (2013).

Figura 33 - Resposta da atividade 4 apresentada pela dupla B



O preço da passagem do ônibus urbano na cidade de Blumenau é de R$ 2,75.
Com base nesse dado, construa a tabela Nº de passagens (x)e Valor Pago (y)
e o gráfico e a função correspondente: $y = 2{,}75 \cdot x$

PASS(x)	VALOR(y)
1	2,75
2	5,55
3	8,25

Fonte: Atividade da dupla B (2013).

5.5 Atividade: estudo do coeficiente linear e angular

No Quadro 8 apresentamos a atividade que aborda questões envolvendo o coeficiente angular e linear da Função Afim.

Quadro 8 - Aula nº 5: estudo do coeficiente linear e angular:

a) Identifique o coeficiente linear e angular em cada uma das funções, preencha o quadro, depois construa o gráfico:

Função	Coeficiente angular	Coeficiente linear
$f(x) = 1x + 2$		
$f(x) = \frac{1x}{2} + 2$		
$f(x) = 2x + 1$		

$f(x) = 3x + 2$		
$f(x) = 4x + 1$		

Á partir dessas representações o que podemos concluir em relação ao valor do coeficiente angular e linear:

Fonte: Autora (2012)

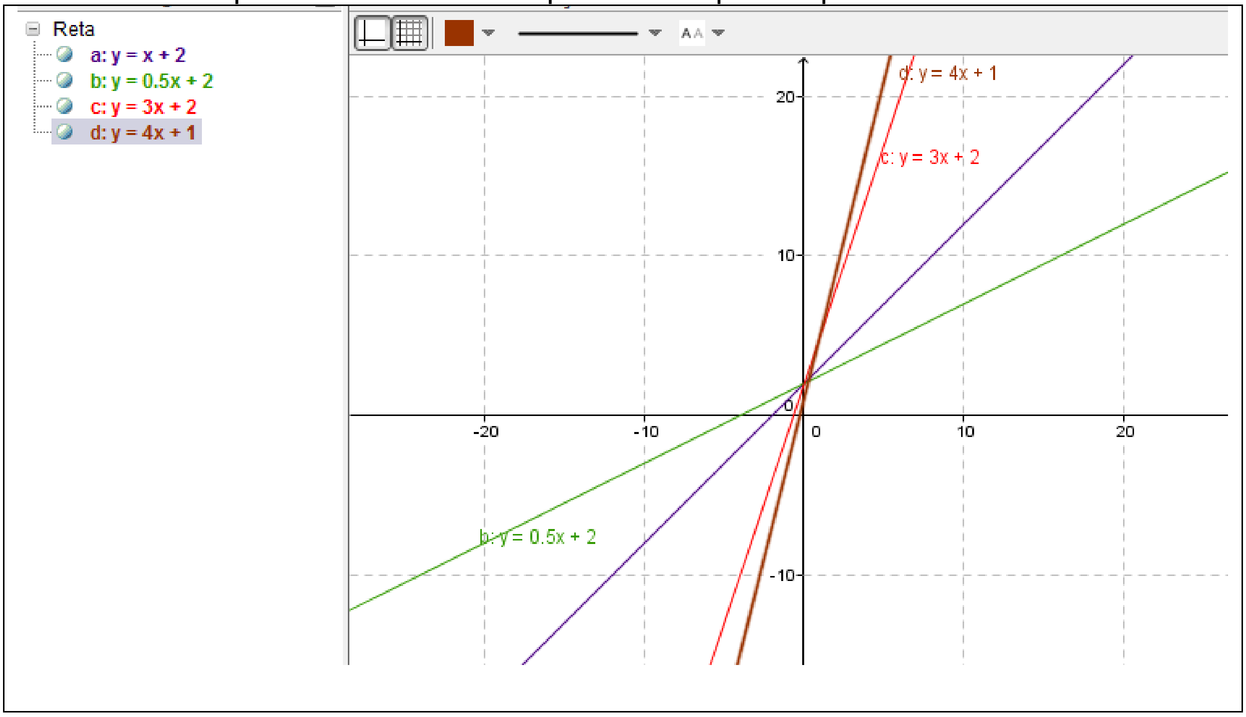
5.5.1 Análise a *priori*

Essa atividade apresentada é uma junção das atividades das aulas 02 e 03. Foi planejada objetivando que o aluno identifique os coeficientes linear e angular de uma representação algébrica, e bem como na representação gráfica. Ou seja, que o aluno perceba que o coeficiente angular está diretamente relacionada à inclinação da reta e o coeficiente linear indica onde essa reta intercepta o eixo y.

5.5.2 Análise a *posteriori*

Os alunos associaram para realização dessa atividade, a noção de Função Afim e articularam com a noção de inclinação da reta: coeficiente angular e coeficiente linear, conforme visualizado no gráfico construído.

Gráfico 9 - Resposta da atividade 5 apresentada pela dupla F.

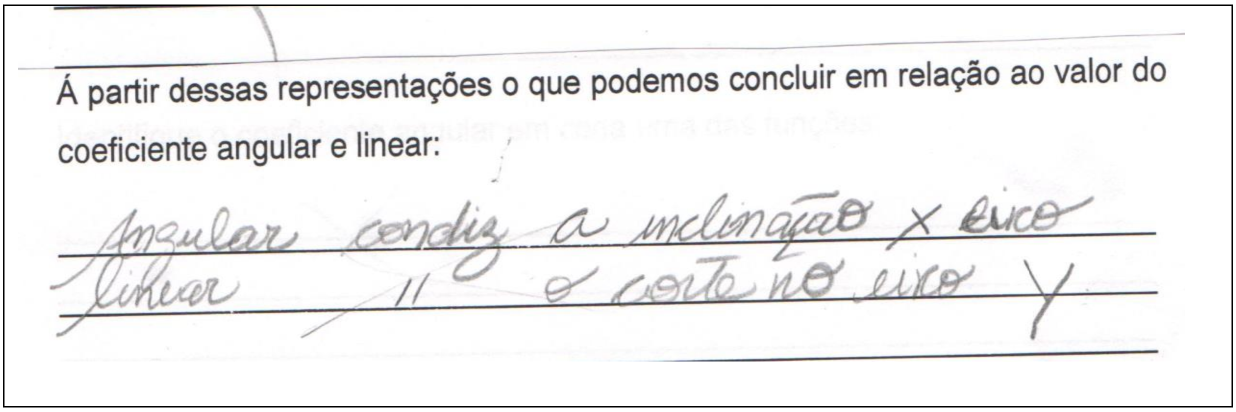


Fonte: Atividade da dupla F (2013).

Conforme Figura 33, pode-se constatar que os alunos conseguiram concluir o efeito que causa o coeficiente angular e linear em relação ao eixo x e eixo y. Observou que eles relacionaram a representação algébrica e gráfica, e quando a resposta estava incorreta identificaram imediatamente, mesmo sem o professor corrigir a atividade apenas com o diálogo entre as duplas fizeram considerações durante a realização das atividades.

Conforme a ideia de Duval(2004) existe a necessidade de explorar e transitar entre registros de representação, uma vez que se introduz o conceito de função e se tem consciência do papel das representações matemáticas, como observou na atividade acima, a relação que os alunos fizeram com a representação algébrica e gráfica.

Figura 34 - Resposta da atividade 5 apresentada pela dupla B


Á partir dessas representações o que podemos concluir em relação ao valor do coeficiente angular e linear:

Angular condiz a inclinação x eixo
Linear // o corte no eixo Y

Fonte: Atividade da dupla B (2013)

5.6 Atividade: estudo da raiz da função

O Quadro 9 apresenta atividade que aborda o estudo da raiz da Função Afim.

Quadro 9 - Aula nº 6: estudo da raiz da função

a) Determine a raiz das funções graficamente e algebricamente.

I. $f(x) = x + 2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

O gráfico da função interceptará (cortará): o eixo $0x$ em ___, que é a raiz da função. O valor de x para o qual $f(x) = 0$ é ___.

II. $f(x) = 2x + 2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

O gráfico da função interceptará (cortará): o eixo $0\mathrm{x}$ em ___, que é a raiz da função. O valor de x para o qual $f(x) = 0$ é ___.

III. $f(x) = 3x + 1$

x	-2	-1	$\frac{-1}{3}$	1	2
y					

O gráfico da função interceptará (cortará): o eixo $0\mathrm{x}$ em ___,que é a raiz da função. O valor de x para o qual $f(x) = 0$ é ___.

IV. $f(x) = x - 2$

x	-2	-1	0	1	2
y					

O gráfico da função interceptará (cortará): o eixo $0\mathrm{x}$ em ___, que é a raiz da função. O valor de x para o qual $f(x) = 0$ é ___.

V. $f(x) = 2x - 2$

x	-	-1	0	1	2
y					

O gráfico da função interceptará (cortará): o eixo 0x em , que é a raiz da função. O valor de x para o qual $f(x) = 0$ é .

VI. $f(x) = 3x - 1$

x	-2	-1	0	1	$\frac{1}{3}$
y					

O gráfico da ,a função interceptará (cortará): o eixo 0x em ___, que é a raiz da função. O valor de x para o qual $f(x) = 0$ é ___.

Fonte: Autora (2012)

5.6.1 Análise a *priori*

Esta atividade foi elaborada objetivando que o aluno interpretasse o registro gráfico e registro algébrico da raiz de uma função. O tratamento algébrico requeria que ele identificasse o valor de x para a qual a função $y = ax + b$ se anula, ou seja, para a qual $y = 0$, que é a raiz ou zero da função. O registro gráfico requeria que ele percebesse que a raiz da função é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x. Em síntese, o objetivo era que o aluno percebesse que o gráfico da função intercepta o eixo x, no valor em que $f(x) = 0$.

5.6.2 Análise a *posteriori*

Notou-se que primeiramente os alunos efetuaram o cálculo algébrico do zero ou raiz da função para depois responder em que ponto a função interceptará o eixo

x e o valor de x para o qual $f(x) = 0$. Foi possível apurar que os alunos observaram qual o papel do zero ou raiz da função na representação gráfica e concluíram que o zero ou raiz de cada função é o ponto onde a função intercepta o eixo $x0$.

Figura 35 - Resposta da atividade 6 apresentada pela dupla C.

I. $f(x) = x + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

$y = x + 2$

$0 = x + 2$

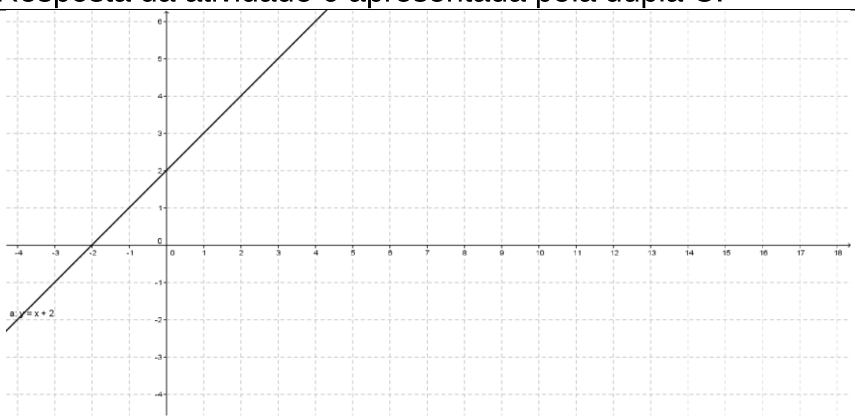
$\boxed{x = -2}$

O gráfico da ,a função interceptará (cortará): o eixo 0x em -2, que é a raiz da função. O valor de x para o qual $f(x) = 0$ é -2.

Fonte: Atividade da dupla C (2013).

Constatou-se que o *GeoGebra* auxiliou na representação dos registros. Dessa forma, os resultados apontaram uma clara percepção do papel do zero ou raiz das funções tratadas nesta pesquisa.

Gráfico 10- Resposta da atividade 6 apresentada pela dupla C.



Fonte: Atividade da dupla C (2013).

5.7 Atividade: estudo de casos particulares de Função Afim: linear e constante

O Quadro 10 apresenta uma atividade que aborda o estudo de casos particulares de Função Afim.

Quadro 10 - Aula nº 7: casos particular de Função Afim : linear e constante.

a) Represente o gráfico da função

.

$y = x$

x	-2	-1	0	1	-2
y					

$y = 2x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

$y = 4x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

$y = 6x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

$y = 8x$

x	-2	-1	0	1
y				

O que ocorre com o termo independente neste caso?

Quando isso ocorre o gráfico intercepta os eixos em que ponto?

Isso irá ocorrer em todos os gráficos das funções em que a termo independente for nulo?

b) Represente o gráfico da função no mesmo plano cartesiano:

$y = 2$

$y = -3$

$y = 0$

$y = 5$

$y = 6$

Existe variável independente neste caso? E termo independente, existe?

O gráfico de uma função constante é uma reta?

Fonte: Autora (2012)

5.7.1 Análise a *priori*

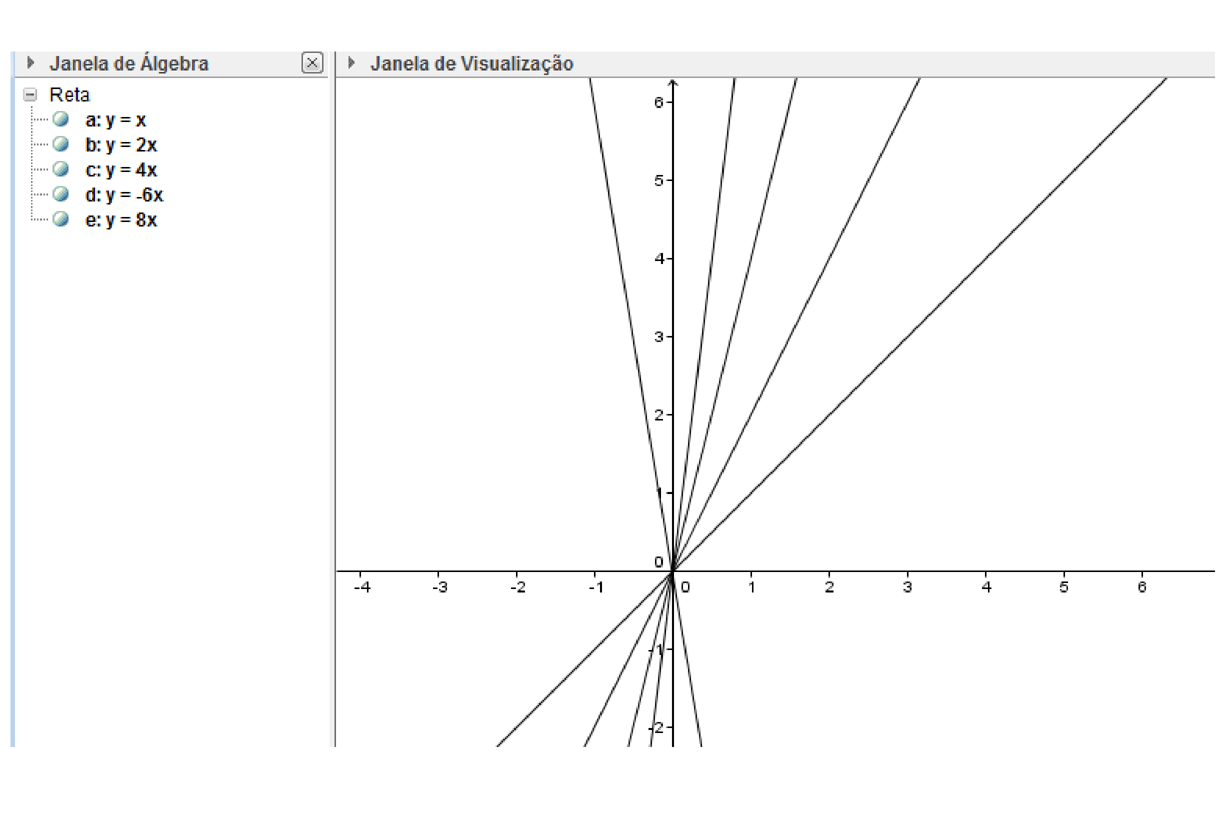
O objetivo era que o aluno visualizasse que a função linear definida por $y = ax$, é um caso particular da função afim $y = ax + b$, em que $a \neq 0$ e $b = 0$ e seu registro gráfico é uma reta que passa pela origem $(0{,}0)$.

Também que o aluno visualizasse que a função constante definida por y= b é outro caso particular da função afim $y = ax + b$, com $a = 0$. Neste caso o gráfico será uma reta paralela ao eixo x, passando pelo ponto da variável independente $(0, b)$.

5.7.2 Análise a *posteriori*

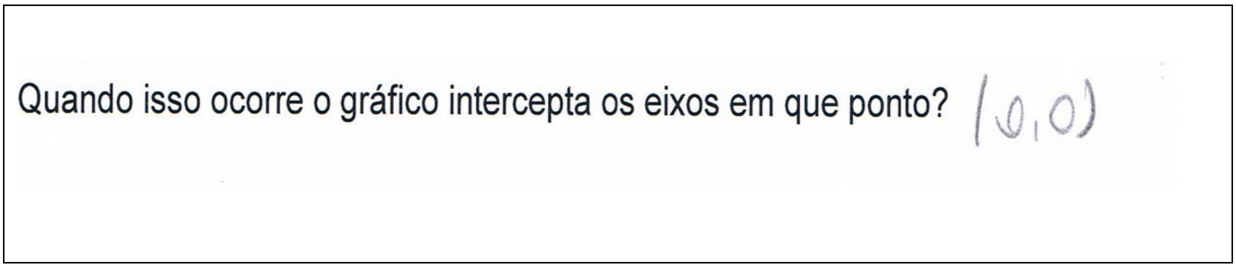
Podemos relatar que essa atividade foi extremamente rápida. A grande maioria da turma já possuía conhecimento sobre os significados de a e b da expressão $y = ax + b$, como podemos ver nos gráficos construídos pelos alunos e respostas das Figuras 36 e 37.

Gráfico 11 - Resposta da atividade 7 apresentada pela dupla F.



Fonte: Atividade da dupla F(2013).

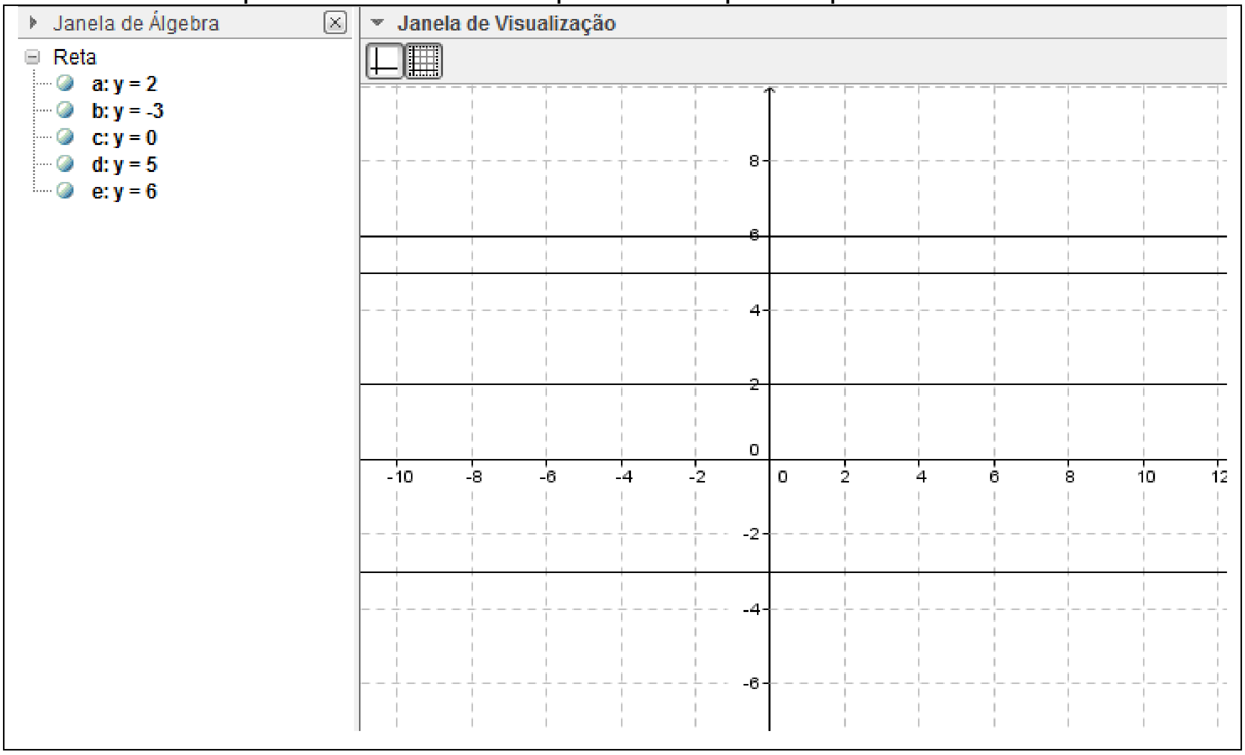
Figura 36 - Resposta da atividade 7 apresentada pela dupla C.



Quando isso ocorre o gráfico intercepta os eixos em que ponto? (0,0)

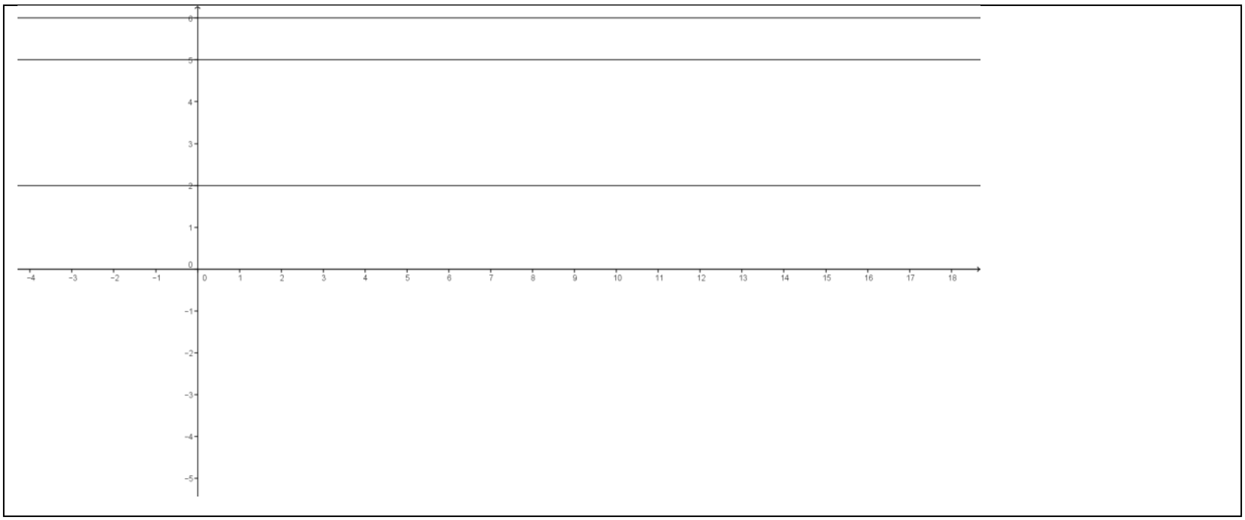
Fonte: Atividade da dupla C (2013).

Gráfico 12- Resposta da atividade 7 apresentada pela dupla C.



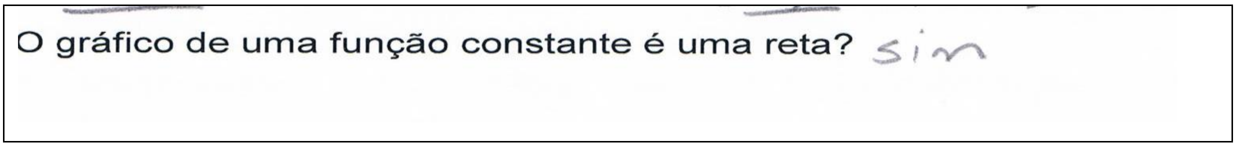
Fonte: Atividade da dupla C (2013).

Gráfico 13 - Resposta da atividade 7 apresentada pela dupla B.



Fonte: Atividade da dupla B (2013).

Figura 37 - Resposta da atividade 7 apresentada pela dupla E.



O gráfico de uma função constante é uma reta? sim

Fonte: Atividade da dupla E (2013)

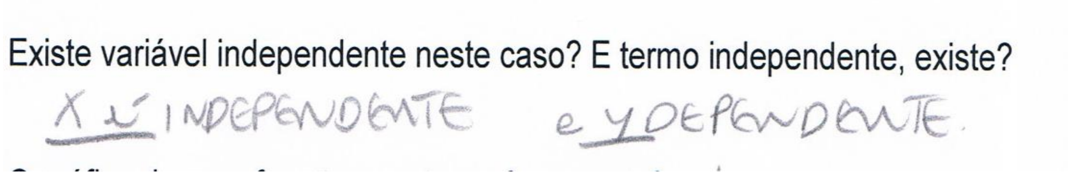
Apresentamos algumas respostas dos alunos referentes ao estudo de função constante, nos casos em que a função y= b, obtivemos as seguintes respostas: “gráficos são paralelos ao eixo x,” “gráficos são paralelos ao eixo das abscissas; e outros casos são perpendiculares às ordenadas”,“ gráfico interceptam o eixo y em um único ponto”.

Percebeu que nessa aula a turma já estava familiarizada com as nomenclaturas dos eixos das coordenadas com o eixo y. Durante a realização da atividade para visualizar os gráficos, os alunos utilizaram recurso disponível no *Geogebra* de “*zoom”* na tela, que aproxima e distância dos objetos, e também exibiram a malha quadriculada.

Dessa forma, a visualização durante o desenvolvimento da atividade tiveram um papel importante também na compreensão casos particular de Função Afim, por exemplo, a linear e constante, pois percebeu-se que a visualização desempenhou o papel de guia para a investigação dos estudantes. Nesse sentido, Borba(2007), escreve sobre a importância da visualização deve ser apresentada como um modo particular no processo de ensino aprendizagem, no sentido de ajudar na compreensão da álgebra como ela realmente é ou resolver os problemas da educação matemática.

Através da análise das respostas dos alunos, podemos relatar que a maioria conseguiu perceber que o termo independente é “b”. Ainda com relação essa atividade, constatou o equívoco de uma dupla que respondeu incorretamente o termo dependente “y” ao invés de “b”, equivocando-se com a variável independente.

Figura 38- Resposta da atividade 7 apresentada pela dupla B.



Existe variável independente neste caso? E termo independente, existe?

X é INDEPENDENTE e Y DEPENDENTE.

Fonte: Atividade da dupla B (2013)

5.8 Atividade de revisão

Para uma melhor análise e reflexão por parte do aluno foi elaborado uma atividade em que ele escrevesse exemplos de Função Afim:

Quadro 11 - Aula nº 8: Revisão

a) Escreva três funções afins, depois construa gráfico:

b) Escreva três funções afins crescentes, depois construa gráfico:

c) Escreva três funções afins decrescentes, depois construa gráfico:

d) Escreva uma equação algébrica identificando casos particulares de função afim: constante e linear
e) Escreva uma função afim que intercepta o eixo das abscissas em -2:

f) Escreva uma função afim que intercepta o eixo das ordenadas em 3:

g) Escreva uma função afim que seja crescente e intercepta o eixo das abscissas em 1:

h) Escreva uma função afim que intercepta o eixo das ordenadas em -2:

i) Escreva uma função afim que seja decrescente e intercepta o eixo das ordenadas em 1:

Fonte: Autora(2012)

5.8.1 Análise a *priori*

Na realização da atividade 08 os estudantes deveriam utilizar os conhecimentos construídos no desenvolvimento das outras atividades e fazer a respectiva representação algébrica e gráfica, percebendo que estas são representações de uma mesma função.

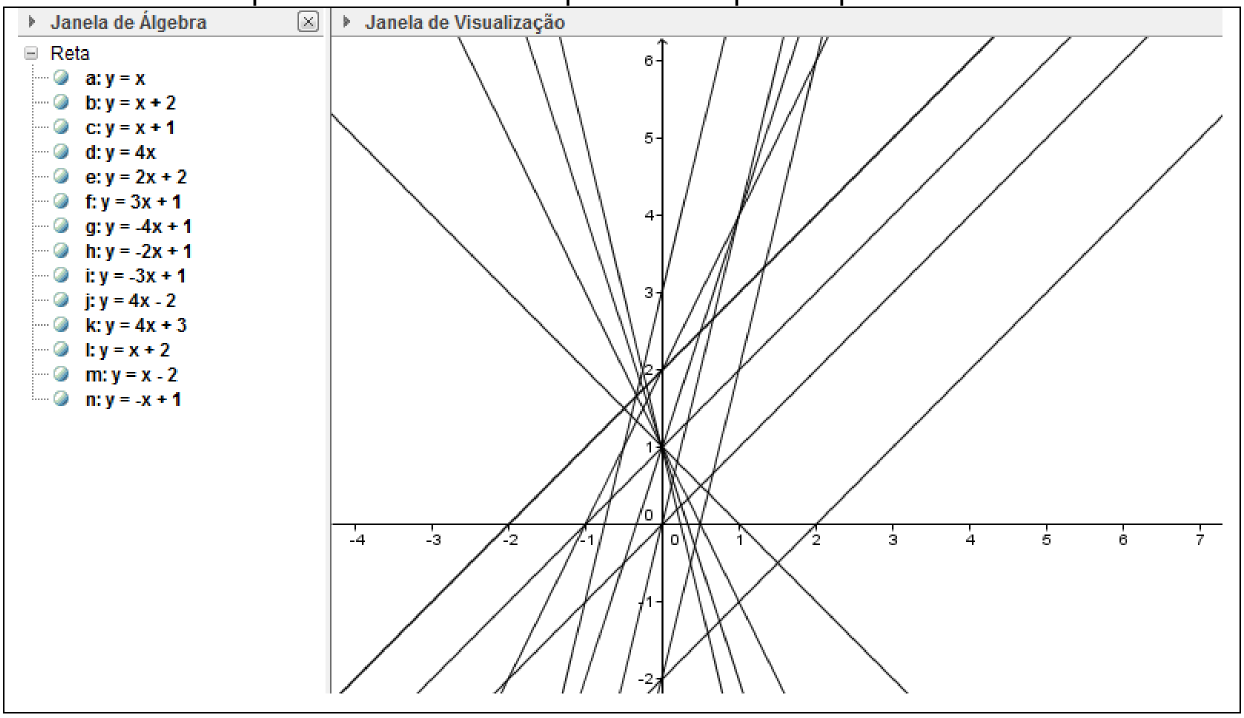
5.8.2 Análise a *posteriori*

As duplas relacionaram cada expressão algébrica formulada com o gráfico construído, desenvolvendo atividade de acordo com a ordem do enunciado da questão. Conforme previmos, os alunos não tiveram dificuldades em relacionar os registros algébricos com os respectivos registros gráficos, mostraram-se mais seguros em relação à execução das atividades anteriores, visto que este procedimento já havia sido realizado nas atividades anteriores.

Vale salientar conforme a Teoria dos Registros de Representação Matemática, nessa atividade foi utilizado diferentes registros de representação, dentre eles o algébrico, o tabular e o gráfico, permitindo aos alunos a conversão entre esses registros, o que, para Duval (2004), é importante para que suceda a compreensão dos objetos matemáticos.

Porém, observamos que um dos grupos ao preencher as repostas da atividade, respondeu corretamente os itens que solicitavam a representação algébrica e gráfica de Funções Afins: $y = x, y = x + 2, y = x + 1$, três crescentes $y = 4x, y = 2x + 2, y = 3x + 1$, três decrescentes $y = -4x + 1, y = -2x + 1, y = -3x + 1$, uma que intercepta o eixo das ordenadas em 3: $y = -4x + 3$, uma função crescente e intercepta o eixo das abscissas em 1: $y = x + 2$, intercepta o eixo das ordenadas em 1: $y = -x + 1$. Responderam incorretamente os itens que solicitavam um exemplo de uma função que intercepta o eixo das abscissas em -2: $y = -4x - 2$, não mostraram exemplos de casos particulares de Função Afim: constante e linear e também não apresentaram resposta no item que solicitava uma Função Afim que intercepta o eixo das ordenadas em -2:

Gráfico 14 - Resposta da atividade 7 apresentada pela dupla A.



Fonte: Atividade da dupla A (2013).

5.9 Validação da Engenharia

Constatamos que a proposta da Engenharia didática foi válida. Após fazer um confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori, pôde-se verificar que os objetivos esperados no início da pesquisa foram alcançados, ou seja, que os registros de representação matemática com uso do *software GeoGebra* contribuem para aprendizado do aluno no ensino de Função Afim.

Dessa forma, analisando as atividades como um todo, o estudo do objeto Função Afim e as relações existentes entre suas representações gráficas, algébricas e tabulares, com auxilio do *GeoGebra* promoveu maior rapidez na construção dos gráficos, permitindo observar pontos importantes: como a reta se comporta em relação aos eixos coordenados e das abscissas, equações de retas, crescimento e decrescimento, raiz da função, casos especiais de Função Afim, coordenadas de pontos, equações de retas.

Quadro 8, que constitui-se no resumo das análises para validação da atividade. As formas de conversão e tratamento de registros são vários, uma vez que se verificou mais de um tipo de desenvolvimento da atividade na obtenção de uma resposta, que gerou mais de um tipo de registro (algébrico, tabular, gráfico, linguagem natural).

Quadro 8 - Validação das atividades.

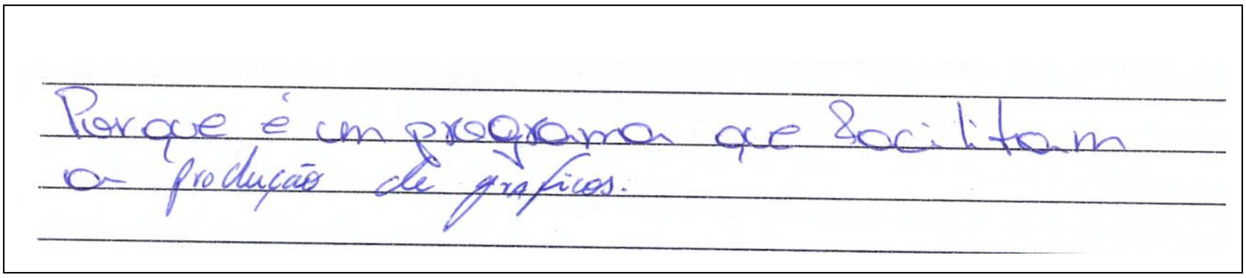
Atividade	Validação
Propriedade característica da Função Afim	Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios, pois os alunos demonstraram um bom conhecimento sobre as características e propriedades da Função Afim. Foram essenciais as representações gráficas para se distinguir a Função Afim de outros tipos de funções, e a maioria dos alunos conseguiu perceber que a mesma é uma reta. O GeoGebra para a construção gráfica possibilitou uma melhor visualização como um todo, de modo a favorecer a percepção de características comuns entre as representações gráficas.
O coeficiente angular	As respostas dos grupos estavam em sua maioria correta, e estava prevista em nossa análise a priori. Pode-se observar que eles conseguiram identificar o coeficiente angular primeiramente na representação algébrica, em seguida converter para representação gráfica, assim o aluno verificou qual efeito causa a variação do coeficiente angular.

O coeficiente linear	Foi válida, dado que a maioria dos alunos conseguiu apresentar o valor do coeficiente linear, bem como identificar o ponto onde a reta intercepta o eixo y.
Crescimento e decrescimento	Percebemos pelas análises feitas da atividade que os alunos perceberam que o crescimento e decrescimento da reta estão diretamente relacionados ao sinal do coeficiente a. Crescente quando $a > 0$, a medida que os valores de x vão aumentando, os valores de y também vão aumentando. Decrescente quando $a < 0$, à medida que os valores de x vão diminuindo, os valores de y vão diminuindo.
Os coeficientes angulares e lineares	A resposta dessa atividade revelou validade das atividades anteriores que exploravam os coeficientes angulares e lineares. Os alunos conseguiram resolver a atividade visualizando a representação algébrica e representação gráfica.
Raiz ou Zero da Função do 1º grau	Os resultados apontaram uma clara percepção do zero da função, os alunos concluíram que o zero da função é o ponto onde a função intercepta o eixo x. Ao terminar essa atividade conseguiram desenvolver a capacidade de analisar funções, observando e interpretando a representação gráfica. Percebeu-se que foi de grande valia aos estudantes a conversão para mais de um tipo de registro e a efetuação do tratamento de registro algébrico.
Função linear e função constante.	Os alunos conseguiram desenvolver essa atividade. Sobre função constante, após traçar várias retas no *GeoGebra*, os alunos fizeram relação do gráfico com esta função e o eixo das abscissas. Com relação à função linear os alunos compreenderam que todas as funções lineares intersectam a origem, perceberam isso quando traçaram várias funções sobrepostas no *GeoGebra.*
Revisão	Essa atividade foi válida, uma vez que os alunos conseguiram, com exceções de algumas duplas, relacionar as representações algébricas com as gráficas, eles recorreram a conhecimentos obtidos nas atividades anteriores com os quais já estavam familiarizados para representar algebricamente as situações de funções e fazer a conversão para forma gráfica.

Fonte: Autora (2013).

Ao final da atividade desenvolvida no *GeoGebra* foi aplicada uma avaliação, composta por duas questões, sendo que a primeira perguntava se os alunos julgavam importante o uso de recursos tecnológicos como o *software GeoGebra* para o ensino de matemática.

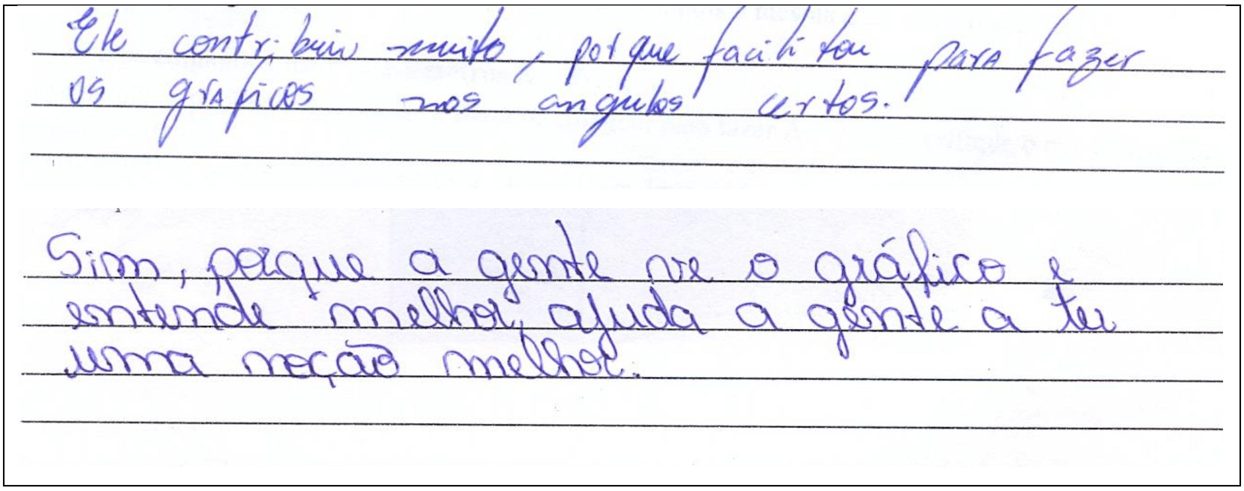
Figura 39- Opinião dos alunos sobre o *software GeoGebra.*


Porque é um programa que facilitam a produção de graficos.

Fonte: Questionário do Aluno (2013).

Segunda perguntava se essa atividade contribuiu para compreensão de função e suas representações.

Figura 40- Opinião dos alunos se atividade contribui para suas representações.


Ele contribuiu muito, por que facilitou para fazer os graficos nos angulos certos.

Sim, porque a gente ve o gráfico e entende melhor, ajuda a gente a ter uma noção melhor.

Fonte: Questionário do Aluno (2013).

Observou-se que a maioria conseguiu explorar o programa com facilidade e que a interface gráfica do *Geogebra* foi adequada ao conteúdo estudado. Assim ficou evidente que o processo de aprendizado foi prazeroso, alguns anotaram o nome do *software Geogebra* para praticar outros exercícios em casa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação propôs uma intervenção pedagógica voltada ao trabalho com Funções Afins com alunos do 1º ano do Ensino Médio. Para isso, elaboramos uma sequência didática para estudo das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica para a aprendizagem dos alunos utilizando o *software GeoGebra.*

De acordo com a introdução da pesquisa, uma das motivações para o estudo de Representação Matemática decorreu da experiência como professora de informática e matemática no ensino fundamental e médio, onde foi possível constatar dificuldades enfrentadas pelos alunos na construção e interpretação de conceitos matemáticos, principalmente nas atividades que envolvem gráficos.

E, partindo dessa premissa, a problemática desta pesquisa envolveu a questão da importância das representações semióticas para a aprendizagem da matemática, propondo incialmente reconhecer a Função Afim nos registros de linguagem natural, algébrica, tabular e gráfica, compreender os procedimentos de tratamento nos diferentes registros, realizar o procedimento de conversão entre os diferentes registros com auxílio do *GeoGebra.*

Conforme analise nos cadernos dos alunos e depoimentos dos mesmos, observou-se certa resistência em relação à utilização do registro gráfico, notou-se que essa resistência diminuiu durante o desenvolvimento da sequência didática, devido às atividades do objeto matemático Função Afim, exigirem a utilização e relacionamento de diferentes registros, a fim de possibilitar a compreensão do objeto matemático Função Afim com o *Geogebra*. Com o tempo, para responder as atividades, os alunos coordenavam os diferentes registros. Esta coordenação possibilitou a compreensão dos objetos matemáticos, contribuiu também, para que os alunos adquirissem certa familiaridade com os conteúdos comtemplados, tanto que no final do desenvolviam as atividades de Função Afim com maior rapidez e autonomia.

A experiência durante a aplicação desse trabalho com os alunos foi muito gratificante, pois eles interagiram com o Geogebra, manipulando os gráficos, tabelas e consequentemente aprendendo. Essa vivencia faz refletir sobre a prática pedagógica e a importância do planejamento quando é utilizado recursos tecnológicos.

Dessa forma, os resultados dessa pesquisa nos mostraram que na aprendizagem da matemática não há como abstrair das representações semióticas. Para Damm (1999) “Não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação”(p. 137). A Nesse sentido, o que buscamos mostrar nesta dissertação é que as representações e as conversões entre elas no estudo de função com a utilização do *software GeoGebra* como ferramenta pedagógica*,* pôde contribuir significativamente para melhoria do processo de aprendizagem da matemática.

Observamos que a maioria da turma demonstrou interesse pelas atividades, se mostrou participativa, principalmente pelo fato da aula ser realizada no Laboratório de Informática, e em contrapartida, relataram que a atividade foi um pouco extensa, que no final estava repetitiva.

Em geral, os alunos durante o desenvolvimento da sequência didática, questionaram a professora e dialogaram entre as duplas. Com relação ao *GeoGebra,* os alunos elogiaram o *software*, comentaram que ele é muito fácil de ser utilizado, pois apresenta linguagem simples, e organiza de forma clara e precisa os comandos que lhes são dados. A maioria deles utilizou a ferramenta de cor, para distinguir mais claramente os gráficos. Também se mostraram satisfeitos com a opção de modificar as escalas dos eixos, podendo abri-los para uma melhor visualização, entre outros recursos apresentados pelo *software* dinâmico. O *GeoGebra* serviu de grande aliado nesse estudo e mostrou-se fácil de ser manipulado.

Fato que pode ser considerado importante na Engenharia Didática é que nela o professor teve a oportunidade de refletir e avaliar se as suas ações estão alcançando os objetivos esperados. Sendo assim, o trabalho da Engenharia

Didática, se desenvolveu juntamente com a prática do professor, já que ele teve a oportunidade de refletir e avaliar suas práticas educativas.

Devemos chamar atenção para a importância da professora da turma que acompanhou as atividades, sempre nos dando autonomia para nossa proposta de atividade que abordava estudo de Função Afim. Ela também pediu para que o material fosse aplicado com as outras turmas. Tal fato foi fundamental para validação da proposta, já que é uma professora mais experiente e favorável à sugestão de ensino diferenciado.

Durante o desenvolvimento da atividade, os alunos coordenaram os diferentes registros e estabeleciam relação entre esses, assim, com a atividade utilizaram, relacionaram e extraíram conclusões sobre as atividades de Função Afim investigando em função dos registros. Percebeu-se que eles realizaram as conversões e tratamento, e consequentemente, compreenderam diferentes aspectos e propriedades do objeto Função Afim.

No sentido de saber se a compreensão realmente existiu, se foi válida a proposta da Engenharia Didática, entendemos que foi importante o estudo de registros de representação matemática, considerando que essas conversões e tratamento não acontecem espontaneamente, os *softwares* dinâmicos como *GeoGebra*, podem ser utilizados como alternativa pedagógica que possibilita a realização dessas transformações.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba, PR. Editadora UFPR, 2007.

ARTIGUE. M. ***Ingeniere didactique. Recherches em didactiques des mathematiques*. **Grenolbe. Lá Pensee Sauvage. Editions. 1990.

BORBA, M. & PENTEADO, M**. Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autentica. 2007

BORTOLOSSI, H. J. *GeoGebra.* ***Software* de Matemática Dinâmica Gratuito**. Disponível em <http://www.professores.uff.br/hjbortol/*GeoGebra*/index.html>. Acesso em: 25 de abr. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Brasília: MEC, 2006.

CANDEIAS, A. F. **Aprendizagem das funções no 8 ano com auxilio do software Geogebra**.. Dissertação Mestrado em Educação- Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

DAMM, R. F**. Registros de Representação**. In: MACHADO, Silvia D. A. et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999.

DELGADO. C. J. B. **O ensino da função afim a partir dos registros de representação semiótica**. Dissertação Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básico. Universidade do Grande Rio. Duque de Caxias. 2010.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

FREGE, G. **Lógica e filosofia da linguagem**. Cultrix: Ed. Da USP.1978

FONSECA, H. **Aprender a ensinar investigando**. In GTI (Org.), Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 177-188). Lisboa: APM. 2000.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GODINO, J. D. **Teoría de las Funciones Semioticas: un enfoque ontológicosemiótico de la cognición e instrucción matemática**. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2003.

GODINO, JD, BATANERO, C. **A abordagem semiótico para a investigação em educação matemática.** Font, 2006.

GONZÁLEZ, F. ***Lo cualitativo y lo cuantitativo en la investigación de la psicología social*.** Psicologia & Sociedade, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 32-52, 1998.

GRANDO, R C. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

GUZMAN R. ,I.,***Registres mis enjeu par la notion de fonction. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives***. IREM de Strasbourg,vol2, p.229-259,1998.

IEZZI, G. **Matemática: ciência e aplicação**. 6ª edição. São Paulo: Saraiva 2010.

ISOTANI, S. **Desenvolvimento de ferramentas no IGEON:** utilizando a Geometria Dinâmica no ensino presencial e a distancia. Dissertação. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2005.

MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2002.

MARIANI, R. C. P. **A transição da Educação Básica para o Ensino Superior:** a coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de cálculo**.** Tese de doutorado, PUC, São Paulo, 2006.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2001.

MISKULIN, R. G. S.; MARTINS, M. C. MANTOAN,M. T. E. **Análise Microgenética dos Processos Cognitivos em Contextos Múltiplos de Resolução de Problemas**. Campinas: NIED/UNICAMP, memo nº 31, 43 p., 1996.

OLIVEIRA, Nanci. **Conceito de função: Uma abordagem do processo ensinoaprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). PUC-SP, São Paulo, 1997.

OTTE, M. **Mathematical Epistemology from a Peircean's Semiotic Point of View.** In: Educational Studies in Mathematics, Nethelands, v. 61, n. 1-2, 2006.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte. Autêntica.2002.

PEIRCE, C. S. **Collected Papers***,* vols. 1-8. In: Hartshorne , C.; Weiss , P.; Burks , A. W. (Ed.). Cambridge, MA: Harvard University Press, 1958.

PEIRCE, C. S. **Obra lógico-semiótica**. Madrid: Taurus, 1965.

POBLETE, A. L.; GUZMÁN, I. R.; MÉNDEZ, C. O. ***Variedades didáticas matemáticas: su influencia em los logros de aprendizaje****.* Proyecto FONDECYT, n. 1940780, 1996.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica***.* 20. ed. São Paulo: Brasiliense, 2004.

SANTOS, E. P. **Função afim y=ax+b: a articulação entre os registros gráficos e algébricos com o auxílio de um *software* educativo**. Dissertação Mestrado em matemática. Puc. São Paulo, 2005.

SCANO, F. C. **Função Afim: Uma sequência didática envolvendo atividades com *Geogebra*.** Dissertação Mestrado Profissionalizante em Educação. Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

SILVA. J. R. D. **Um estudo de Registros de Representação Semióticos na aprendizagem dos conceitos de máximos e mínimos de Funções**. Dissertação de mestrado. São Paulo. 2005.

STEINBRING, H*.* ***What Makes a Sign a Mathematical Sign. An Epistemological Perspective on Mathematical Interacion***. In: Educational Studies in Mathematics, Nethelands, v. 61, n. 1-2, , 2006.