



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI – UNIVATES
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**ESTRUTURAS DE TENSEGRIDADE: APLICAÇÕES, CÁLCULO E
FABRICAÇÃO DE UM PROTÓTIPO**

Waldo Luiz Costa Neto

Lajeado, junho de 2021

Waldo Luiz Costa Neto

ESTRUTURAS DE TENSEGRIDADE: APLICAÇÕES, CÁLCULO E FABRICAÇÃO DE UM PROTÓTIPO

Monografia apresentado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II, do curso de Engenharia Mecânica, da Universidade do Vale do Taquari - Univates, como parte da exigência para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Crespo Izquierdo.

Lajeado, junho de 2021

RESUMO

Tensegridade é um sistema formado por componentes rígidos e cabos submetidos à compressão e tração pura. Por meio da revisão bibliográfica, esta monografia apresentará desde os pioneiros no desenvolvimento deste sistema até estudos mais recentes, que abordam a sua aplicação na criação de robôs para exploração espacial e estruturas para satélites. O objetivo do trabalho é realizar o cálculo de uma estrutura de três barras pelo método de densidade de força e comparar os resultados com o comportamento de um modelo de simulação física e de um protótipo construído com as mesmas dimensões. O protótipo é dotado de molas de extensão que conectam os cabos aos nós, permitindo que a tensão no elemento possa ser inferida pela sua deformação. Os dados dos três modelos serão reunidos e será feita uma análise sobre as diferenças apresentadas. Espera-se, também, contribuir para a difusão deste tema na língua portuguesa visto que a grande parte dos artigos e livros disponíveis estão na língua inglesa.

Palavras-chave: Tensegridade. Simulação. Estruturas.

ABSTRACT

Tensegrity is a structural system in which its rigid elements are subjected only to compression and are connected by a network of tensioned strings. Through literature review, this monograph will present the pioneers in the development of this system to more recent studies, which address its application in the creation of robots for space exploration and structures for satellites. The objective of the work is to perform the calculation of a three-bar tensegrity structure using the force density method and compare the results with the behavior of a physical simulation model and a prototype built with the same dimensions. The prototype is equipped with extension springs that connect the cables to the nodes, allowing the tension to be inferred from its deformation. Data from the three models will be gathered and an analysis of the differences will be done accordingly. It is also expected to contribute to the dissemination of this theme in the Portuguese language since most of the articles and books are only available in English.

Keywords: Tensegrity. Simulation. Structures

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Representação típica das tensões.....	13
Figura 2 - Escultura (1948) e estrutura em arco (2001) produzidas por K. Snelson.	14
Figura 3 - Exemplos de Classes de tensegridade.....	16
Figura 4 - Estrutura para refletores em pequenos satélites.	17
Figura 5: SUPERball em sua forma de serviço (esquerda) e para transporte (direita)	18
Figura 6 - Modelo em CAD e protótipo das articulações do joelho (<i>Knee</i>) e quadril (<i>Hip</i>).	19
Figura 7 - Algoritmo de resolução através da verificação de tensão >0	23
Figura 8: Interface do software Rhinoceros.....	25
Figura 9: Interface do ambiente Grasshopper	26
Figura 10 - Mastro auto implantável.....	27
Figura 11 – Articulações autoblocantes.	28
Figura 12 - Características das molas de extensão	28
Figura 13 - Patente de Kenneth Snelson de 1965.	29
Figura 14 – Reprodução do desenho presente na patente de B.Fuller.	30
Figura 15 - Nó de ligação com ajuste de tensão.	30
Figura 16: Curva dividida em n pontos.....	33
Figura 17: Definição de Grasshopper utilizada para os cabos.	33
Figura 18 - Modelos de estudo.	34
Figura 19 - Molas na estrutura.....	35
Figura 20 – Projeto do Nó de ligação.	37
Figura 21 - Nós de ligação impressos em 3D.....	37
Figura 22 - Extremidades dos tubos com os nós de ligação fixados.	38
Figura 23 - Fixação dos cabos nos nós.	38
Figura 24: Evolução da estrutura até atingir o valor de convergência	40
Figura 25 - Vista de topo da estrutura em equilíbrio.	40
Figura 26 - Visão geral do protótipo.....	41
Figura 27 - Verificação do ângulo de rotação para o triângulo superior da estrutura.	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Registro de cargas e deformação	36
Tabela 2 - Comparação das forças axiais.....	42

SUMÁRIO

RESUMO.....	3	
ABSTRACT.....	4	
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	5	
LISTA DE TABELAS	6	
SUMÁRIO	7	
1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Tema.....	10
1.2	Objetivo geral	10
1.3	Objetivos específicos	11
1.4	Delimitação do tema	11
1.5	Justificativa	11
1.6	Estrutura do Trabalho.....	12
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	13
2.1	Definição de Tensegridade.....	13
2.1.1	Classificação das estruturas.....	15
2.1.2	Aplicações	16
2.2	Métodos de cálculo	19
2.2.1	Método de densidade de força.....	20
2.3	Recursos computacionais de cálculo	24
2.4	Modelagem CAD.....	25
2.4.1	Simulação física	26
2.5	Protótipo	27
2.6	Molas de extensão	28
2.7	Nós de ligação.....	29
3	MATERIAIS E MÉTODOS	31
3.1	Metodologia de pesquisa	31
3.1.1	Tipo de pesquisa	31
3.1.2	Técnica de pesquisa	32
3.2	Modelagem Matemática	32
3.2.1	Modelagem da estrutura.....	32
3.3	Protótipo	34
3.3.1	Características do protótipo	35
3.3.2	Molas	35
3.3.3	Nós de ligação.....	36
3.3.4	Barras de compressão.....	37
3.3.5	Cabos	38
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	39

4.1	Cálculo da estrutura.....	39
4.2	Simulação do comportamento da estrutura	40
4.3	Protótipo	41
4.4	Avaliação dos resultados	42
5	CONCLUSÃO	44
6	REFERÊNCIAS	45
	APÊNDICE A – CÁLCULO DE UM PRISMA DE TRES BARRAS.....	48
	APÊNDICE B – CÁLCULO PARA UMA ESTRUTURA DE TENSEGRIDADE 2D... 	56

1 INTRODUÇÃO

A minimização da massa e do volume transportado é um parâmetro muito importante para projetos de estruturas que devem ser montadas no espaço. Por esta e outras razões que no elenco das pesquisas para aplicação das estruturas de tensegridade destacam-se projetos de estruturas para equipamentos de satélites e robôs autônomos para exploração de terrenos.

Além de ser muito resistente considerando a sua massa, este tipo de estrutura é constituída por barras submetidas apenas à compressão pura e cabos. A ausência de momento fletor permite o uso de seções mais esbeltas, entretanto, como este sistema estrutural depende de um pré-tensionamento inicial para manter-se estável, é preciso verificar o risco de flambagem para tensões muito altas em barras esbeltas.

Neste trabalho será apresentado e utilizado o método de densidade de força para a solução de uma estrutura de tensegridade de três barras, mas este método pode ser aplicado a estruturas muito mais complexas, exigindo apenas mais esforço computacional. Para auxiliar na resolução será utilizado o *software* MATLAB e para a simulação do comportamento da estrutura e modelagem de peças utilizadas para o protótipo será empregado o Rhinoceros.

1.1 Tema

As estruturas classificadas na bibliografia como tensegridade se diferem de outros tipos como, por exemplo, treliças e pórticos, por serem constituídas por membros que atuam exclusivamente em tração enquanto outros sofrem compressão para qualquer ação de cargas. Diferentemente de uma treliça, não é possível a mudança no sentido das forças axiais pois os elementos de tração geralmente são cabos ou molas ligados a barras submetidas apenas à compressão. Em um estado inicial, para que seja estável, a estrutura inteira está sob um certo nível de tensão, sendo possível alterar a sua forma através da modificação das tensões com o uso de atuadores.

A complexidade do tipo de estrutura estudada neste trabalho fez com que fosse necessária uma extensa pesquisa bibliográfica, buscando as suas potencialidades e formas de calcular. Para melhor aprofundar o entendimento do sistema, foi definido um exemplar que foi utilizado para estudar as equações que definem a sua forma e estabilidade, reproduzido em um ambiente de simulação de física e, por fim, a comparação dos resultados obtidos com um protótipo construído com as mesmas dimensões utilizadas no cálculo e simulação.

1.2 Objetivo geral

A partir de uma estrutura de tensegridade escolhida, dimensionar e encontrar a solução para o seu estado de tensões inicial, encontrar o estado de equilíbrio de tensões através de uma simulação construção de um protótipo com as mesmas dimensões utilizadas para o cálculo e simulação com a finalidade de fazer uma comparação entre os resultados e comportamentos encontrados no modelo matemático, modelo físico e no protótipo.

1.3 Objetivos específicos

- a) Identificação das possibilidades de utilização das estruturas de tensegridade;
- b) Criar um algoritmo para a simulação física dentro do ambiente de programação do software de CAD Rhinoceros;
- c) Projetar o nó de conexão entre os cabos e barras para fabricação por impressão 3D;
- d) Produzir material sobre o tema na língua portuguesa.

1.4 Delimitação do tema

Dentro do universo das estruturas de tensegridade, será analisado o prisma simétrico de três barras. O dimensionamento dos membros será feito pelo método geométrico e as tensões através do método de densidade de força. Não será considerado o peso próprio da estrutura e nenhuma carga externa será aplicada. A simulação utilizará as mesmas dimensões da estrutura calculada e irá realizar sucessivas iterações partindo de um ponto de desequilíbrio até convergir para o ponto de equilíbrio de suas tensões. O protótipo construído também terá as mesmas dimensões e será construído com materiais disponíveis localmente.

1.5 Justificativa

Esse trabalho se justifica pela falta de material na língua portuguesa sobre tensegridade, além da relevância deste assunto para a solução de problemas atuais, buscando em livros e artigos científicos o estado da arte sobre este tipo de estrutura, que podem ser utilizados desde a construção de robôs autônomos, estruturas para uso em satélites ou até como peças de arte.

1.6 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho é organizado em cinco capítulos: introdução, revisão bibliográfica, materiais e métodos, discussão dos resultados e conclusão.

No primeiro capítulo são apresentados a introdução, tema, objetivos gerais e específicos, a delimitação do tema, justificativa e a descrição da estrutura do trabalho.

O segundo capítulo trata da revisão bibliográfica, abordando os conceitos para o entendimento do tema, aplicações, métodos de cálculo, recursos para simulação física e os elementos que compõem a estrutura estudada.

O terceiro capítulo descreve a metodologia de pesquisa, tipo de pesquisa, técnica de pesquisa e as ferramentas que serão utilizadas para o desenvolvimento do cálculo, simulação e a construção do protótipo.

O quarto capítulo é reservado resultados e a discussão sobre o cálculo, a simulação o protótipo e a avaliação dos resultados.

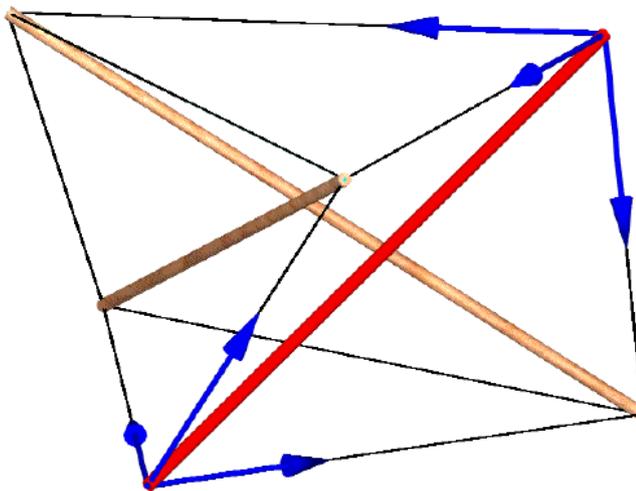
O quinto capítulo traz a conclusão do trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Definição de Tensegridade

Tensegridade, ou integridade tensional, é um tipo de sistema estrutural com a característica de possuir elementos submetidos à compressão e tração pura, sendo os membros comprimidos, geralmente barras, enquanto a tensão se dá por cabos fixados em suas extremidades formando um sistema pré-tensionado estável. Segundo Shawkat (SHAWKAT *et al.*, 2019), este sistema depende do equilíbrio de suas tensões internas para permanecer em um estado estável e, quando submetido à esforços externos, há uma redistribuição das tensões entre todos componentes. Na Figura 1 podemos ver um exemplo de prisma de 3 barras e os esforços que atuam sobre os elementos da estrutura: em azul estão representados os esforços de tração que causam a compressão de um corpo rígido, a barra representada em vermelho.

Figura 1: Representação típica das tensões.



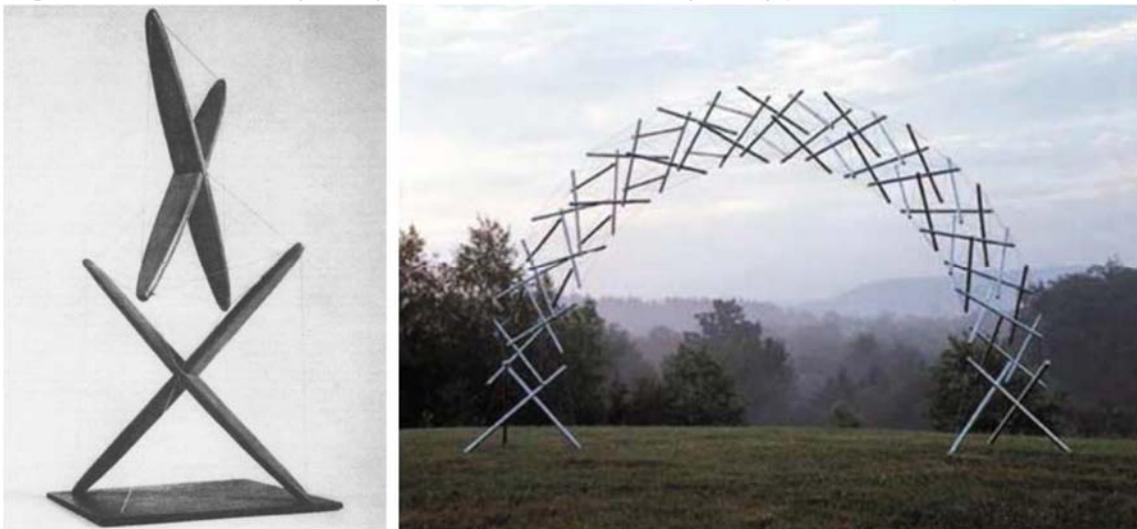
Fonte: (GÓMEZ-JÁUREGUI; OTERO; MANCHADO, 2013)

Os elementos tensionados estão ligados como uma rede contínua e as barras submetidas à compressão não têm contato entre si. Com isso, os esforços sobre a estrutura são distribuídos mais facilmente entre a rede de tensão, diminuindo o risco de flambagem das barras, possibilitando que estas possam ser mais esbeltas sem comprometer a integridade estrutural (BURKHARDT, 2008). A predominância de

elementos tracionados sobre os comprimidos, segundo Burkhardt (2008) e Shawkat (SHAWKAT *et al.*, 2019), resulta em estruturas mais leves e econômicas.

De acordo com Oliveira e Skelton (OLIVEIRA; SKELTON, 2009), os primeiros estudos registrados sobre tensegridade foram feitos por Kenneth Snelson e Buckminster Fuller em 1948 através de modelos e registros de patentes. Fuller registrou as primeiras patentes descrevendo estruturas espaciais formadas por corpos rígidos sujeitos unicamente à compressão e cabos submetidos à tração. Pela característica de permanecerem estáveis (íntegras) submetidas unicamente a esforços axiais (tensão), receberam o nome em inglês de *tensegrity*, que vem da junção dos termos *tensional* (tensão) e *integrity* (integridade). Ainda que o nome desta família de estruturas tenha sido dado por B. Fuller, o autor afirma que Kenneth Snelson teria sido o primeiro a explorar a multiplicidade de formas possíveis através de esculturas (Figura 2).

Figura 2 - Escultura (1948) e estrutura em arco (2001) produzidas por K. Snelson.



Fonte: (OLIVEIRA; SKELTON, 2009)

Apesar de apresentar alguma semelhança, o que distingue este tipo de estrutura das treliças espaciais e outras estruturas rotuladas, segundo Zhang e Ohsaki (ZHANG; OHSAKI, 2015), é a necessidade do pré-tensionamento, sem o qual haveria o colapso da estrutura. Ainda segundo os autores, neste tipo de estrutura há apenas dois tipos de elementos estruturais, os membros, que podem ser barras ou cabos, e os nós, localizados nas extremidades dos membros e não restringem a rotação em qualquer direção.

Outro pioneiro no estudo das estruturas de tensegridade foi David Georges Emmerich quem desconhecendo os trabalhos de Fuller e Snelson dez anos antes, se dedicou-se ao estudo de estruturas livres de acoplamentos direto entre elementos rígidos, sendo essenciais, portanto, o uso de cabos para estas ligações. Emmerich construiu várias destas estruturas formadas apenas por cabos e barras, as quais chamou de Estruturas Auto Tensionáveis (SULTAN, 2018).

2.1.1 Classificação das estruturas

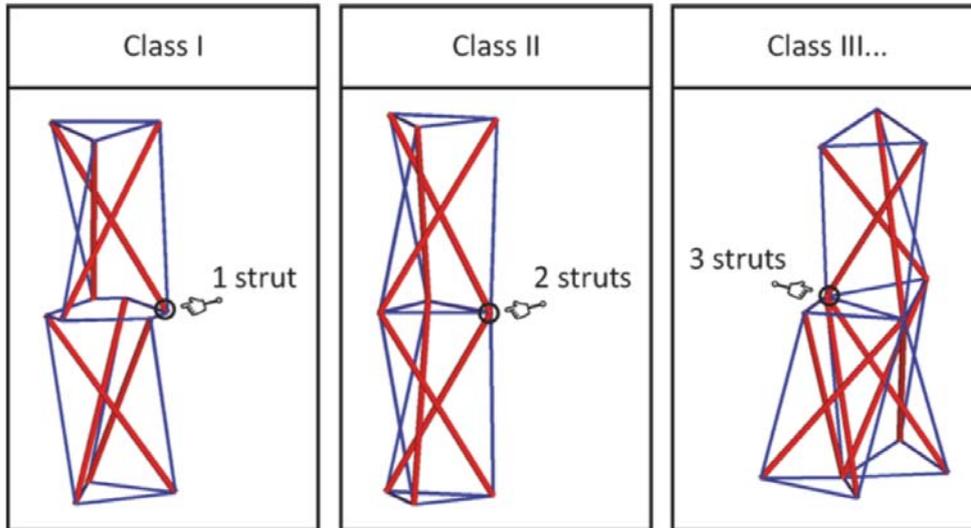
Segundo Oliveira (OLIVEIRA; SKELTON, 2009), além de classificados na classe de estruturas pré-tensionadas, os sistemas de tensegridade possuem uma classificação própria devido à quantidade de barras que se encontram em um mesmo nó:

Classe I, quando a conexão entre as barras é feita apenas através de cabos, não há contato direto entre os corpos rígidos nos nós.

Classe k , quando há um número k de barras em contato nos nós (Figura 3).

As estruturas de Classe I seguem o conceito de tensegridade originalmente definido por B. Fuller e possuem maior flexibilidade, o que traz vantagens para alguns tipos de aplicações. Por outro lado, as estruturas de Classe II e III são geralmente utilizadas quando é necessária maior rigidez (GAN, 2020).

Figura 3 - Exemplos de Classes de tensegridade.



Fonte: Gan (2020, p. 9).

2.1.2 Aplicações

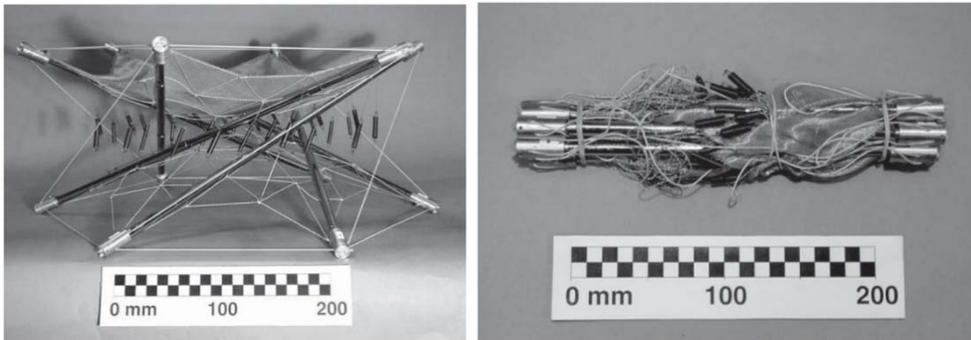
Inicialmente utilizada para esculturas por K. Snelson, permaneceu por muito tempo sem aplicação em outras áreas devido à falta de informações sobre o cálculo das dimensões dos membros. Na própria patente de B. Fuller havia o desenho da estrutura com suas dimensões, mas nenhuma indicação de como estas eram obtidas. Embora houvesse interesse na utilização deste tipo de estrutura, haviam muitos obstáculos relativos à dificuldade de fabricação, falta de rigidez comparada com estruturas convencionais e a carência de informações de cálculo para projeto (BURKHARDT, 2008).

O primeiro momento de grande interesse nas estruturas de tensegridade, segundo Sultan (2018), foi durante a era de exploração espacial dos anos 1960. A sua leveza, flexibilidade e a capacidade de ser transportada de forma compacta e ser facilmente colocada em sua forma de trabalho a colocaram como uma possível solução para estruturas espaciais. Durante as décadas seguintes houve grandes avanços nos modelos matemáticos, chegando em soluções através de métodos numéricos, geométricos e até mesmo algoritmos generativos.

Atualmente podemos encontrar estruturas de tensegridade em várias áreas de estudo, inclusive na área que primeiro despertou interesse no seu uso, a exploração espacial.

Tibert e Pellegrino (2002) apresentam um conceito de estrutura de refletor parabólico para pequenos satélites. Na Figura 4 podemos observar um modelo de testes em escala reduzida desta estrutura, demonstrando que pode ser transportada em um estado relaxado de tensões (Figura 4, direita), ocupando um volume pequeno se comparado com o seu estado de trabalho (Figura 4, esquerda). A estrutura em tamanho real teria 3m de diâmetro com a massa de apenas 6,3kg. Os autores apontam que apesar de haver uma redução nos custos e massa por não utilizar articulações mecânicas, o conjunto necessita de maiores seções transversais nos membros comprimidos pela característica de ser uma estrutura sob constante tensão, acarretando um aumento massa nestes elementos se comparada com estruturas articuladas (TIBERT; PELLEGRINO, 2002).

Figura 4 - Estrutura para refletores em pequenos satélites.

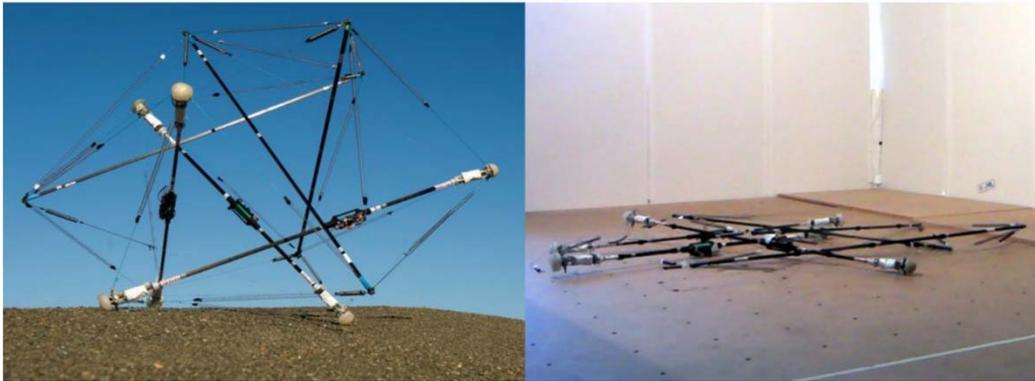


Fonte da imagem: (TIBERT; PELLEGRINO, 2002)

A relação entre a massa e resistência, além da possibilidade de alterar as dimensões de seus componentes através de atuadores é um dos motivos se utilizar este sistema em robôs para exploração espacial. Na Figura 5 **Erro! Fonte de referência não encontrada.** podemos observar o SUPERball, projetado em conjunto pela *NASA Ames Research Center's Group* e *Dynamic Tensegrity Robotics Lab*. Segundo Sunspiral, Agogino e Atkinson (2015), este robô possui seis barras não paralelas conectadas por 24 cabos com molas e atuadores capazes de alterar o comprimento de seis destes cabos, reconfigurando a sua forma e possibilitando o movimento através da rolagem. Uma vantagem em relação à outros robôs de

exploração é a sua leveza e flexibilidade, o que faz com que ele seja mais apto à enfrentar terrenos acidentados do que robôs dotados de rodas (SABELHAUS *et al.*, 2015). Além de ser uma solução de baixo custo, a característica de poder ativamente relaxar o seu estado de tensões até atingir um volume mínimo para transporte (Figura 5, direita) possibilita que sejam enviadas várias unidades de forma compactada e, chegando ao destino, retornarem à forma de trabalho sem a necessidade de intervenção humana (SUNSPIRAL; AGOGINO; ATKINSON, 2015).

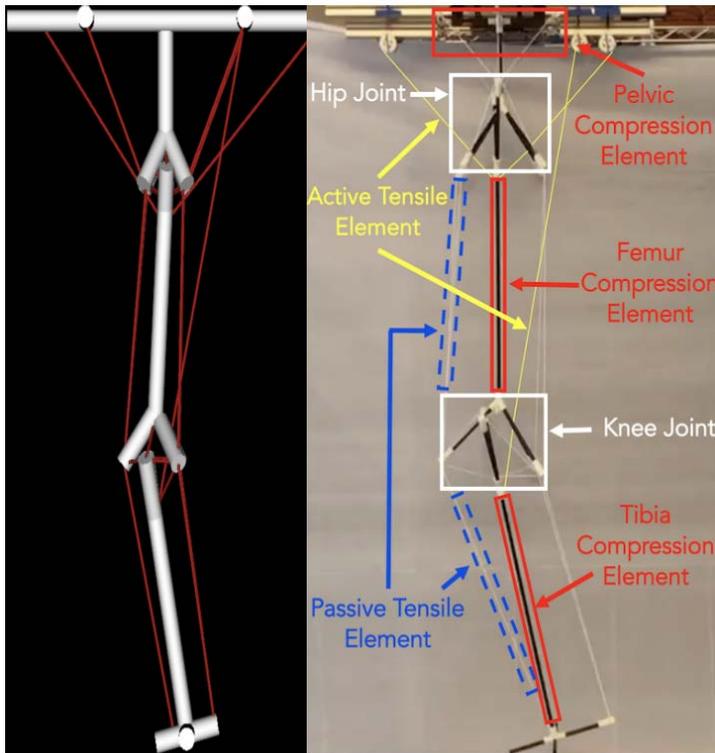
Figura 5: SUPERball em sua forma de serviço (esquerda) e para transporte (direita)



Fonte: (SUNSPIRAL; AGOGINO; ATKINSON, 2015)

O sistema esqueleto-musculatura dos animais é um exemplo de tensegridade encontrado na natureza em que todo o movimento de um membro se dá pela tração de músculos contrapostos ligados aos ossos por tendões, ou seja, no momento que um músculo se contrai para criar ação em um sentido, outro em contraposição entra em atividade para controlar este movimento ou desfazer. Bem como nas estruturas de tensegridade, os músculos são responsáveis pelos esforços de tração, transferindo aos ossos cargas de compressão (OLIVEIRA; SKELTON, 2009). Dessa forma, articulações com movimentos mais livres poderiam ser criadas. A proposta de Jung et al. (2018) é estudar uma nova estrutura que permite um comportamento mais natural para um joelho ou quadril projetado para um robô, ou para uma prótese. Na Figura 6 são apresentados uma simulação computacional e o protótipo de um membro utilizando as articulações de joelho e quadril propostas no artigo. Os cabos são divididos entre elementos de tensão ativos e passivos. Os elementos passivos impedem que os elementos de compressão entrem em contato, ao passo que os elementos ativos são conectados à motores na parte superior do protótipo e através da tração, possibilitam movimento ao sistema.

Figura 6 - Modelo em CAD e protótipo das articulações do joelho (*Knee*) e quadril (*Hip*).



Fonte: (JUNG *et al.*, 2018).

Os elementos passivos são pré-tensionados, dando estabilidade à estrutura e fazendo resistência à tensão aplicada pelos elementos ativos, realizando o retorno ao estado inicial quando a tensão deixa de ser presente.

2.2 Métodos de cálculo

Com o decorrer do tempo, várias alternativas de cálculo para estruturas de tensegridade surgiram. Muitos destes métodos são voltados para a descoberta de configurações possíveis da forma final ou das tensões a partir dos dados de conectividade entre os elementos. Há ainda a possibilidade de encontrar as coordenadas dos nós e comprimentos dos elementos da estrutura através de cálculos mais simples, mas com o prejuízo de não encontrar os valores das tensões nos membros.

Tibert e Pelegriano (2003b), no artigo “Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures” apresentam o estado da arte dos métodos de cálculo para

tensegriedade. Entre os métodos cinemáticos encontram-se as soluções analíticas, programação não linear e relaxamento dinâmico, enquanto entre os métodos estáticos são listadas as soluções analíticas, método da densidade da força, método da energia e de coordenadas reduzidas. A escolha entre qual dos métodos é o mais adequado depende de que parâmetros se dispõe inicialmente e qual a complexidade do modelo de estudo (HARICHANDRAN; YAMINI SREEVALLI, 2016). O método da densidade da força parte inicialmente da conectividade entre os membros e um vetor de densidade de força, podendo obter uma forma resultante para este vetor dado, ou ser utilizado de forma iterativa para encontrar os valores de densidade de força para uma geometria específica. Por esta razão, e por ser o método utilizado em grande parte da bibliografia pesquisada, este será o método utilizado neste trabalho.

2.2.1 Método de densidade de força

O método de densidade de força transforma o conjunto de equações de equilíbrio para as direções x , y e z (1), que dependem ao mesmo tempo do comprimento de um membro, seja cabo ou barra, e a coordenada do nó que ele está conectado em um conjunto de equações lineares através da introdução do elemento densidade de força (2) para cada elemento (TIBERT; PELLEGRINO, 2003b).

$$\begin{cases} \sum_j \frac{t_{ij}}{l_{ij}} (x_i - x_j) = f_{ij} \\ \sum_j \frac{t_{ij}}{l_{ij}} (y_i - y_j) = f_{ij} \\ \sum_j \frac{t_{ij}}{l_{ij}} (z_i - z_j) = f_{ij} \end{cases} \quad (1)$$

$$q_{ij} = t_{ij}/l_{ij} \quad (2)$$

Sendo:

i e j são os índices dos nós.

t_{ij} é a força axial no elemento ij .

l_{ij} é o comprimento do elemento ij .

q_{ij} precisa ser conhecido ou ter um valor pré-definido.

A equação de equilíbrio para o eixo x de uma estrutura com um número b de elementos e n nós, pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s = \mathbf{f}_x \quad (3)$$

Sendo:

\mathbf{C}_s : a matriz de incidência.

\mathbf{Q} : a matriz diagonal contendo as densidades de força.

\mathbf{x}_s : um vetor coluna das coordenadas em x .

\mathbf{f}_x : um vetor coluna das forças externas na direção x .

A matriz de incidência, também chamada de matriz de conectividade (TRAN; LEE, 2010) é a responsável por definir a topologia da estrutura e é construída através de:

$$C_{s(k,p)} \begin{cases} 1 & \text{para } p = i, \\ -1 & \text{para } p = j, \\ 0 & \text{se outro.} \end{cases} \quad (4)$$

Sendo k o membro que se conecta ao nó i e j , sempre com $i < j$.

Se houver coordenadas de nós previamente conhecidos ou fixos em algum ponto, estes devem ser colocados nas últimas colunas da matriz de incidência e ela pode ser dividida na forma:

$$\mathbf{C}_s = [\mathbf{C} \ \mathbf{C}_f] \quad (5)$$

Assim, a equação (3) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f = \mathbf{f}_x \quad (6)$$

Onde os termos com índice f são referentes aos pontos fixos ou conhecidos. A equação (6) pode analogamente ser também escrita para os eixos y e z .

Considerando que não há forças externas agindo sobre a estrutura, podemos obter a matriz de densidade de forças \mathbf{D} através da equação (3) com:

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s \quad (7)$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{D}\mathbf{z} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (8)$$

É possível ainda escrever a matriz de densidade de forças \mathbf{D} diretamente utilizando as instruções abaixo:

$$D_{ij} \begin{cases} -q_{ij} & \text{para } i \neq j, \\ \sum_{k \neq i} q_{ik} & \text{para } i = j, \\ 0 & \text{se } i \text{ e } j \text{ não se conectam.} \end{cases} \quad (9)$$

Multiplicando \mathbf{D} pelos vetores coluna para as coordenadas x , y e z obtemos:

$$\mathbf{D}[\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}] = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \quad (10)$$

Substituindo a equação (7) no sistema de equações (8), as equações de equilíbrio podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{q}) \mathbf{C}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{q}) \mathbf{C}\mathbf{y} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{q}) \mathbf{C}\mathbf{z} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (11)$$

E então reorganizadas como:

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (12)$$

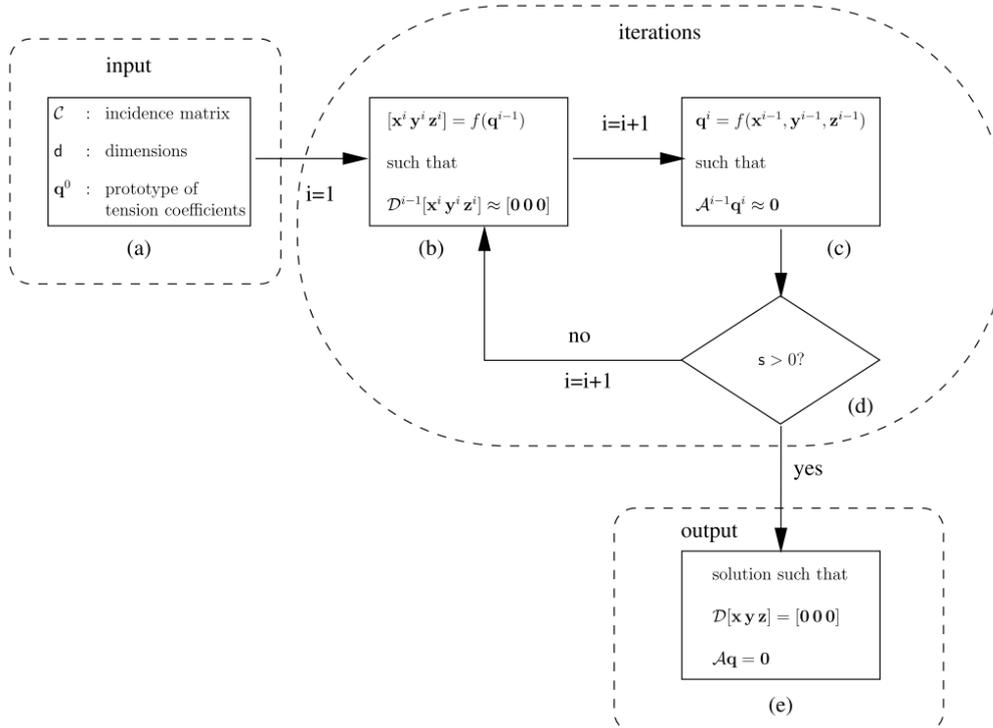
Sendo \mathbf{A} denominada matriz de equilíbrio e definida por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C}\mathbf{x}) \\ \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C}\mathbf{y}) \\ \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C}\mathbf{z}) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Estrada, Bungartz e Mohrdieck (2006) propõem um algoritmo iterativo de resolver o problema, apresentado na Figura 7, partindo de um vetor de coeficientes de tensão \mathbf{q}^0 com valores +1 para os membros que sofrem tração e -1 para os que sofrem compressão:

$$\mathbf{q}^0 = [+1 + 1 + 1 \dots - 1 - 1 - 1 \dots]^T \quad (14)$$

Figura 7 - Algoritmo de resolução através da verificação de tensão >0 .



Fonte:(ESTRADA; BUNGARTZ; MOHRDIECK, 2006).

Tran e Lee (2010) propõem uma alternativa de algoritmo composto de dez passos que pode facilmente ser reproduzido em um *software* de cálculos com recursos de programação:

Passo 1: Definir a matriz de incidência por meio do esquema de construção (4).

Passo 2: Especificar valores iniciais para o vetor de densidade de força \mathbf{q}^0 conforme a Eq. (12).

Passo 3: Calcular a matriz de densidade de força utilizando a matriz de incidência e o vetor de densidade de força calculados anteriormente utilizando a Equação (7)

Passo 4: Fazer a decomposição $\mathbf{D} = \Phi \Lambda \Phi^T$ onde Φ é a matriz ortogonal na qual a coluna de índice i é o autovetor base Φ_i de \mathbf{D} e Λ é a matriz diagonal com os autovalores correspondentes.

Definir $[0 \ 0 \ 0]$ através da aproximação $\mathbf{D}[\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}] \approx [0 \ 0 \ 0]$.

Passo 5: Determine a matriz de equilíbrio \mathbf{A} pela equação (13).

Passo 6: Fazer a decomposição em valores singulares para a matriz de equilíbrio \mathbf{A} e resolver a aproximação $\mathbf{A}\mathbf{q} \approx \mathbf{0}$.

Passo 7: Definir D^{i+1} com q^{i+1} através da equação (7). Se $n_D^* = d + 1$ e $n_A^* = 1$ forem verdadeiras, a solução existe. De outra maneira, fazer $i = i + 1$ e retornar ao Passo 4.

Passo 8: Se \mathbf{D} é uma matriz positiva e semi-definida, ir para o Passo 10. De outra maneira, especificar as propriedades materiais e coeficiente de densidade de força para cada membro com base no vetor de densidade de força encontrado.

Passo 9: Se: $\text{eig}(\mathbf{K}_T) = [\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{dn-r} > 0 \ \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0]$ for satisfeita, ir para o Passo 10. De outra maneira, fazer $i = i + 1$ e retornar ao Passo 4.

Passo 10: Se a equação $\epsilon = \sqrt{\epsilon_f(\epsilon_f)^T}$ for satisfeita, o processo é encerrado e os valores de coordenadas e do vetor de densidade de força são a solução. Se não for satisfeito, fazer $i = i + 1$ e retornar ao Passo 4.

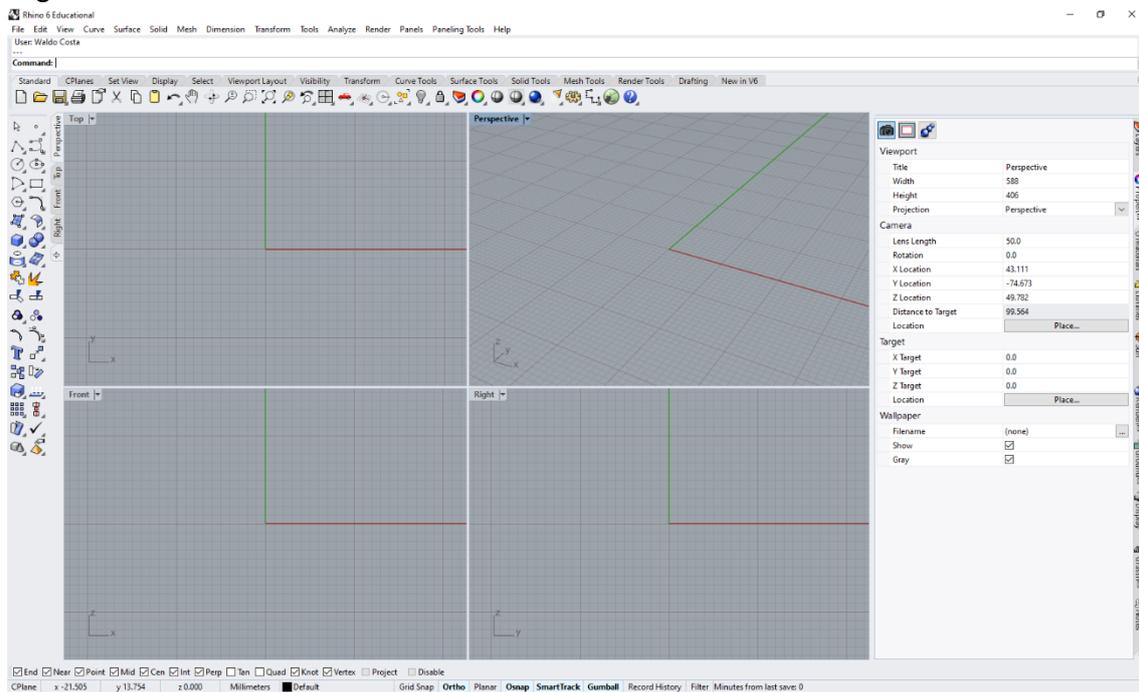
2.3 Recursos computacionais de cálculo

Para estruturas de tensegridade 3D de apenas três barras e nove cabos, a matriz de incidência \mathbf{C} é de ordem 12×6 , e a matriz equilíbrio \mathbf{A} é de ordem 18×12 . Por esse motivo, o auxílio de recursos computacionais de cálculo é muito importante, tanto pela velocidade de cálculo, quanto para evitar o acúmulo de erros. *Softwares* como o MATLAB e SageMATH são poderosas ferramentas para a resolução de sistemas de equações e soluções numéricas, sendo possível ainda utilizar rotinas comuns de programação como loops ou condicionais.

2.4 Modelagem CAD

O Rhinoceros é um *software* de modelagem NURBS desenvolvido por *Robert McNeel & Associates* e que, além dos recursos de modelagem 3D comuns a outros programas CAD semelhantes, possui um ambiente de programação linear por blocos chamado Grasshopper.

Figura 8: Interface do software Rhinoceros



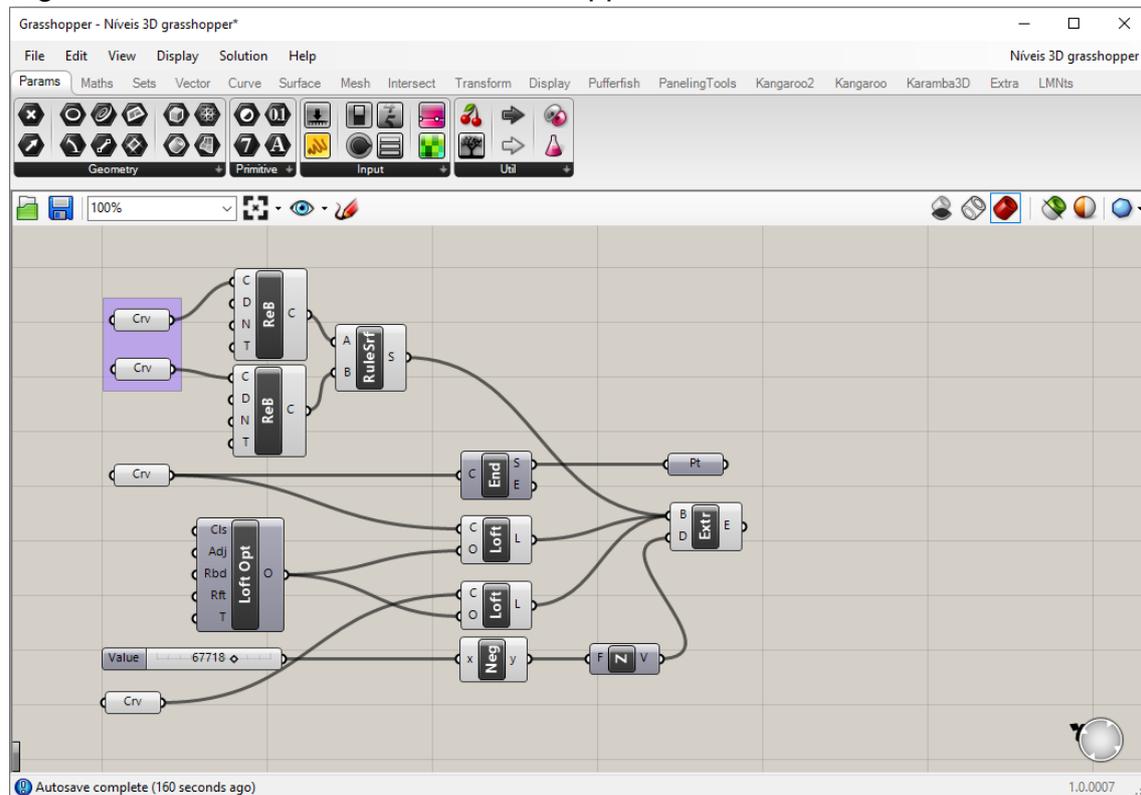
Fonte: tela do *software* Rhinoceros 7 no Windows 10.

A Figura 8 e **Figura 9** apresentam as interfaces do Rhinoceros e Grasshopper respectivamente. O Grasshopper aumenta o potencial de criação por oferecer ferramentas para trabalhar utilizando um método de programação linear por blocos, em que a informação é processada pelos componentes da esquerda para a direita. Os componentes disponíveis vão desde elementos mais primitivos de geometria como pontos, linhas e curvas até a manipulação e transformação de sólidos, superfícies e malhas. É possível ainda realizar operações matemáticas e adicionar blocos de programação em C#, Vb Script e Python (PINTO; REGIANE, 2015).

Os programas gerados no ambiente do Grasshopper são chamados definições e a geometria gerada é visualizada nas *viewports* do Rhinoceros. Uma conveniência na utilização das definições de Grasshopper durante o trabalho de modelagem é que,

por utilizar parâmetros de entrada flexíveis, permite que a experimentação e visualização em tempo real dos resultados das modificações destes parâmetros no modelo 3D (PASSARO *et al.*, 2014).

Figura 9: Interface do ambiente Grasshopper



Fonte: tela do *plug-in* Grasshopper para Rhinoceros 7 no Windows 10.

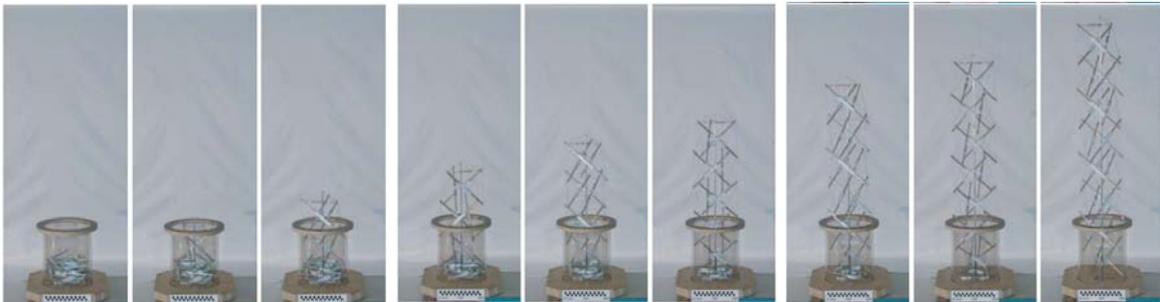
2.4.1 Simulação física

O *plug-in* Kangaroo foi criado por Daniel Piker para adicionar a capacidade de realizar simulações físicas dentro do ambiente do Grasshopper. Através da discretização do modelo em linhas e pontos, permite adicionar forças e restrições em quaisquer direções e sentidos, além de dar propriedades elásticas para as geometrias submetidas a estes esforços. É utilizado principalmente para encontrar o efeito destas forças sobre a forma como deformações ou deslocamentos, utilizando a Lei de Hooke para chegar ao resultado (PIKER, 2020).

2.5 Protótipo

A criação de um protótipo possui grande importância durante a fase de projeto de um produto ou estudo por permitir a reflexão sobre aspectos que geralmente são ignorados inicialmente e ainda ajuda a ter uma visão mais geral do problema. Diferente da fabricação de um modelo físico, o protótipo não serve apenas ao visual, mas ao que se descobre durante a sua criação. (HALLGRIMSSON, 2012). Motro utilizou extensivamente protótipos para estudar e testar as características, potencialidades e diferentes ligações entre os membros das estruturas de tensegridade (MOTRO, 2003).

Figura 10 - Mastro auto implantável

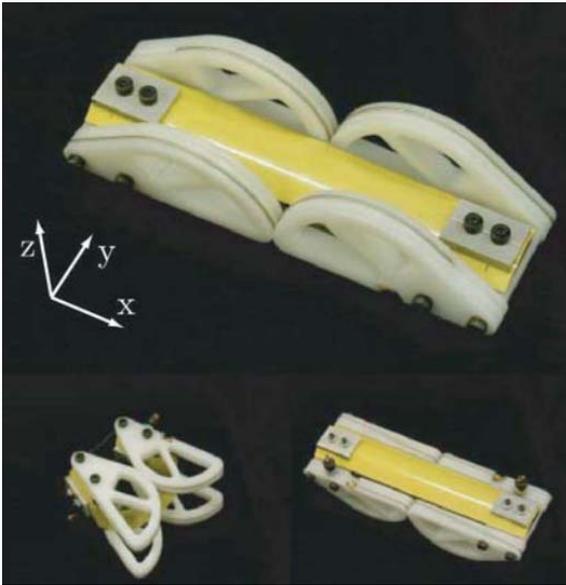


Fonte: (TIBERT; PELLEGRINO, 2003a)

Tibert e Pellegrino criaram um protótipo de um mastro auto implantável (Figura 10) com a utilização de articulações auto blocantes exibida na Figura 11. Os experimentos demonstraram o potencial que esta configuração possui e os problemas que poderia enfrentar durante a implantação não assistida, como emaranhamento dos cabos e instabilidade no início de seu desenvolvimento, enquanto as tensões ainda não são o suficiente para garantir a rigidez do conjunto.

O protótipo, portanto, torna-se um importante instrumento para o melhor entendimento dos fenômenos previstos na revisão teórica, assim como traz à luz outros elementos que possam não ter sido elencados inicialmente.

Figura 11 – Articulações autoblocantes.

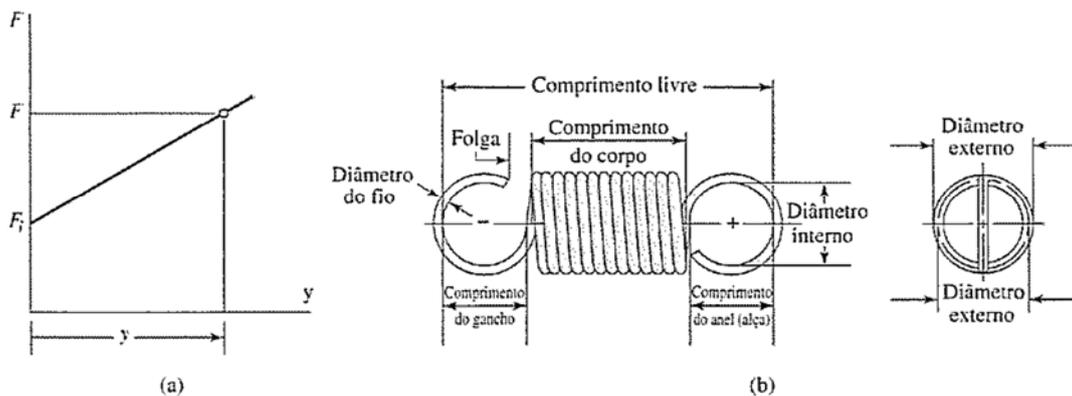


Fonte: (TIBERT; PELLEGRINO, 2003a).

2.6 Molas de extensão

As molas de extensão diferem-se das molas de compressão não apenas pela sua forma, mas também por possuírem uma tração inicial (F_i na Figura 12.a) que garante a correta dimensão de seu comprimento livre quando em repouso, ou submetida a uma carga menor do que a sua tração inicial (SHIGLEY; MISCHKE; BUDYNAS, 2005).

Figura 12 - Características das molas de extensão



Fonte: (SHIGLEY; MISCHKE; BUDYNAS, 2005).

Por efeito da força inicial F_i , a relação entre a força e a deflexão na mola é dada pela equação:

$$F = F_i + ky \quad (15)$$

Sendo:

F : A força exercida pela mola (N).

F_i : A força de tração inicial (N).

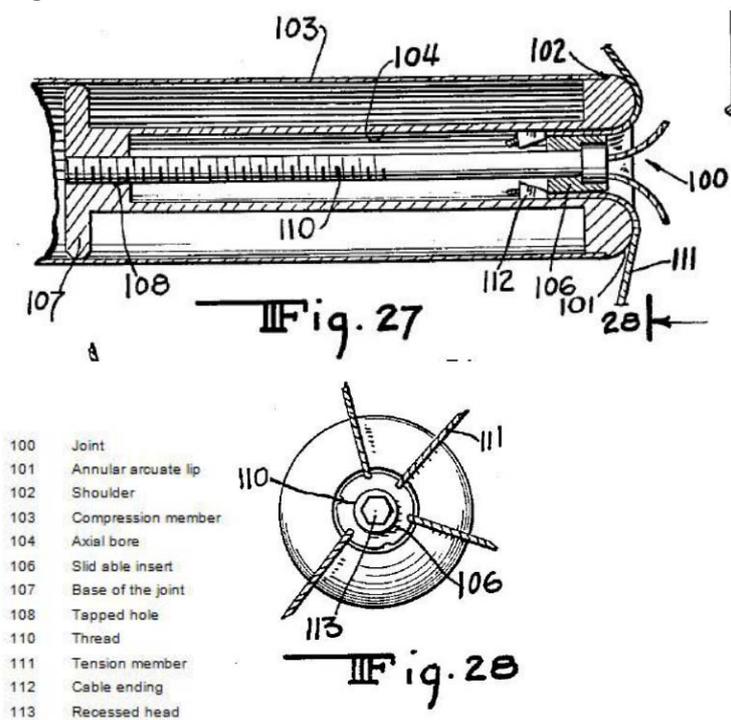
k : Razão da mola (N/mm)

y : Deflexão da mola (mm)

2.7 Nós de ligação

Os nós de ligação são os responsáveis por transmitir os esforços de tensão entre os elementos da estrutura. Bernaards (2014) descreve os elementos de ligação patentados por Kenneth Snelson em 1965 e Buckminster Fuller em 1984. Embora dezenove anos tenham passado desde o registro de Snelson e o de Fuller, há uma grande semelhança entre os dois projetos.

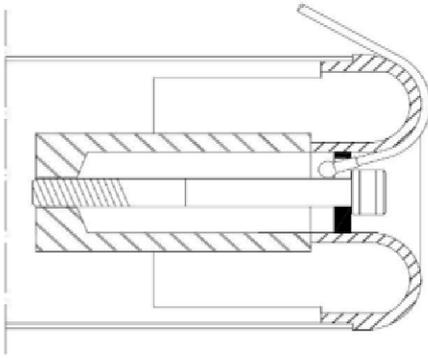
Figura 13 - Patente de Kenneth Snelson de 1965.



Fonte: (BERNAARDS, 2014).

Em ambos os projetos, de Fuller (Figura 14) e de Snelson (Figura 13) todos os cabos são fixados por um único parafuso que ao mesmo tempo é responsável pela tensão, não possibilitando o ajuste individual dos cabos. Outra semelhança é a curvatura em que o cabo se acomoda, que impede que o cabo entre em contato com a parede fina do tubo, o que poderia danificar o cabo ou a própria borda do tubo. Uma diferença assinalada por Bernaards é que o projeto de Fuller possui fendas na superfície para manter os cabos no lugar sem deslizar para outra direção.

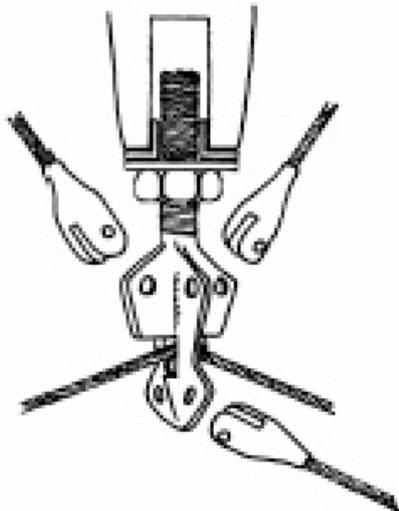
Figura 14 – Reprodução do desenho presente na patente de B.Fuller.



Fonte: (BERNAARDS, 2014).

O nó de ligação representado na Figura 15 traz uma solução diferente dos anteriores, sendo possível adicionar ou remover cabos individualmente e seu desenho contempla diversas direções para fixação dos cabos. A forma com que os cabos são ancorados na peça permite a aplicação de tensões maiores se comparado com os exemplares anteriores.

Figura 15 - Nó de ligação com ajuste de tensão.



Fonte: (FALK; GUNNAR, 2005)

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Metodologia de pesquisa

Por meio de extensa pesquisa bibliográfica sobre o objeto de estudo, foram reunidas primeiramente as informações que serviram de fundamentação teórica e forneceram as ferramentas necessárias para os cálculos e análises. A partir da seleção da topologia e dimensões de uma estrutura, foi gerado um modelo matemático com base nas equações e algoritmos encontrados na literatura. Para auxílio na solução dos cálculos foram utilizados os *softwares* SageMath 9.2 e MATLAB. Em seguida, foi realizada a verificação virtual da estabilidade do modelo utilizando as ferramentas de simulação de física do *software* de CAD Rhinoceros 7. Um protótipo foi construído com as mesmas dimensões utilizadas para o cálculo e a simulação. Para aferir a tensão nos cabos, estes foram conectados aos nós através de molas de extensão, sendo possível assim medir a sua deformação e, conseqüentemente a tensão através da Lei de Hooke.

Por fim, os resultados foram analisados com o objetivo de avaliar se há significativas diferenças entre os três modelos trabalhados.

3.1.1 Tipo de pesquisa

Quanto à sua natureza, por ser dirigida a um problema específico, é classificada como pesquisa aplicada, quanto ao modo de abordagem é classificada como quantitativa, pois tem como objetivo a análise por modelos matemáticos. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

3.1.2 Técnica de pesquisa

Este trabalho tem início com a fundamentação teórica através da pesquisa bibliográfica, servindo-se de livros e artigos científicos para reunir informações sobre o objeto de estudo e as ferramentas que serão utilizadas. A partir dos dados recolhidos foram realizados o cálculo, modelagem 3D e a prototipagem de um exemplar escolhido. Portanto, as técnicas utilizadas são as de pesquisa bibliográfica e estudo de caso.

3.2 Modelagem Matemática

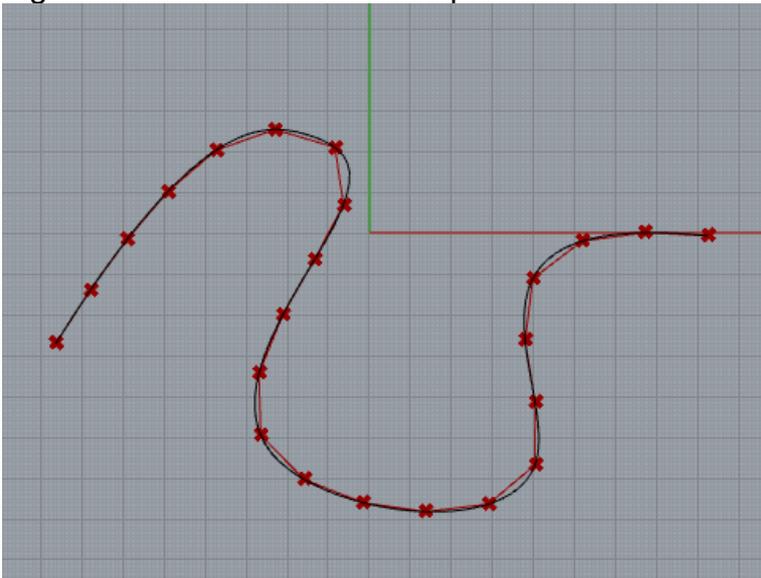
Apesar da aparente simplicidade formal, o projeto de uma estrutura deste tipo envolve cálculos complexos para determinar o estado de tensões iniciais que garanta a sua estabilidade, principalmente quando submetida a uma carga externa. Neste trabalho foi dimensionada uma estrutura de tensegridade 3D estática de três barras através do método de densidade de força, com o auxílio do método geométrico para encontrar as coordenadas dos nós.

Os dois métodos de cálculo apresentados na revisão bibliográfica foram utilizados. O Algoritmo proposto por Tran e Lee (2010) foi utilizado para calcular uma estrutura de tensegridade 2D e está apresentado no Apêndice B, enquanto que o método de densidade de forças foi utilizado para a solução das tensões a quais a estrutura 3D está submetida e é apresentado no Apêndice A.

3.2.1 Modelagem da estrutura

Para que seja possível a simulação dos esforços causados pela tensão nos corpos é necessário discretizar a geometria em apenas pontos e linhas. Para exemplificar de forma simples, é exibida na Figura 16 uma curva qualquer, em preto.

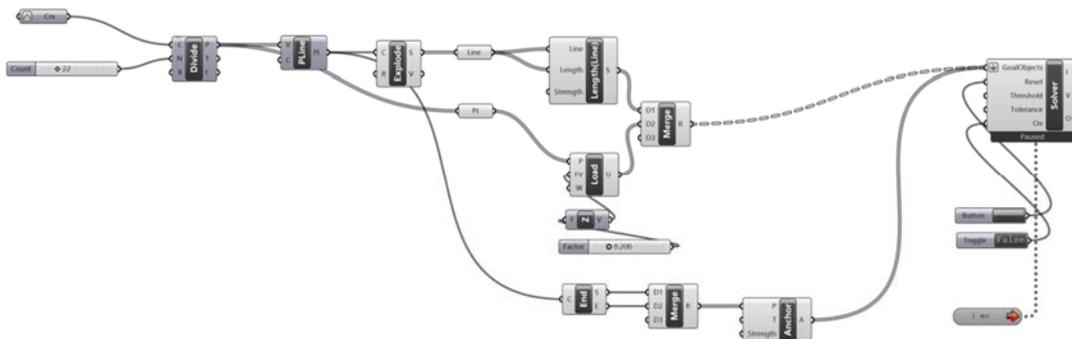
Figura 16: Curva dividida em n pontos.



Fonte: Do autor (2021);

A curva foi então dividida em n segmentos de reta de mesmo tamanho e com atribuição de características físicas como módulo de elasticidade e a razão entre o comprimento do segmento e o comprimento de relaxamento utilizando um algoritmo desenvolvido no Grasshopper, apresentado na Figura 17.

Figura 17: Definição de Grasshopper utilizada para os cabos.



Fonte: Do autor (2021).

Este pequeno algoritmo da Figura 17: Definição de Grasshopper Figura 17 foi repetido para todas as linhas que representam cabos, sendo que nos cabos que formam os triângulos da base e topo a razão entre o comprimento de relaxamento e o comprimento do cabo desenhado é igual à um. Para cabos que representam os tendões, o comprimento de relaxamento utilizado foi metade do inicial, garantindo assim o pré-tensionamento do sistema.

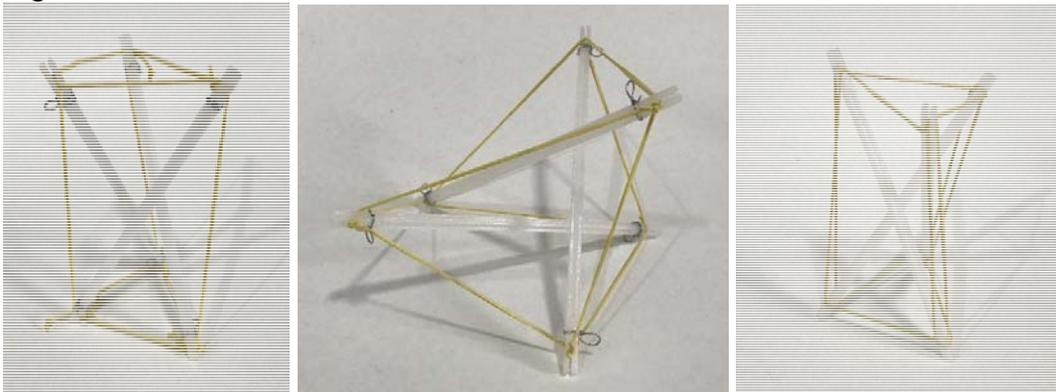
A programação então foi concluída com a inclusão das barras e a indicação dos vínculos entre os elementos.

3.3 Protótipo

A produção de um protótipo tem como objetivo validar a estabilidade do modelo escolhido e confrontar os resultados obtidos através da modelagem matemática e do modelo simulado em 3D. A importância do protótipo é também entender o procedimento de montagem de um sistema complexo como este e, segundo GÓMEZ-JÁUREGUI (2013) aprender mais sobre os fenômenos envolvidos na prática confrontando com as informações reunidas durante as etapas anteriores (GÓMEZ-JÁUREGUI; OTERO; MANCHADO, 2013).

Antes da realização do protótipo final, alguns pequenos modelos de estudo (Figura 8) foram construídos com barras impressas em 3D e elásticos com o objetivo de estudar a capacidade de alteração do mesmo prisma de três barras e doze cabos apenas pela ação nas tensões dos elásticos.

Figura 18 - Modelos de estudo.



Fonte: do autor (2021).

3.3.1 Características do protótipo

A escolha dos materiais e dimensões do protótipo foi determinada pela facilidade de obtenção, manuseio e transporte. Com exceção da impressora 3D, nenhuma outra ferramenta especial foi necessária.

3.3.2 Molas

Como forma de avaliar os esforços de tração nos cabos que formam o triângulo superior e os tendões verticais, foram instaladas duas molas de extensão, uma em cada destes elementos. Esticadores são responsáveis pela aplicação da pré-tensão e garantir que o comprimento total continue constante mesmo com a distensão da mola.

Figura 19 - Molas na estrutura



Fonte: do autor (2021)

Como o valor do K da mola não era conhecido anteriormente, um exemplar foi submetido à diversas cargas e a sua deformação medida e registrada na Tabela 1.

Tabela 1 - Registro de cargas e deformação

Comprimento livre (mm)	Deformação (mm)	Força (N)
78	0	0
87	9	4,905
99	21	9,81
111	33	14,715
123	45	19,62
135	57	24,525
148	70	29,43

Fonte: do autor (2021)

A partir dos dados da tabela e considerando que há uma pequena força de tração inicial nas molas de extensão adicionada pelos fabricantes (SHIGLEY; MISCHKE; BUDYNAS, 2005), chegamos ao valor da constante K através da resolução da equação (15):

$$F = F_i + K.y$$

Resultando em:

$$F(x) = 0,40875.x + 1,22625 \quad (16)$$

Sendo:

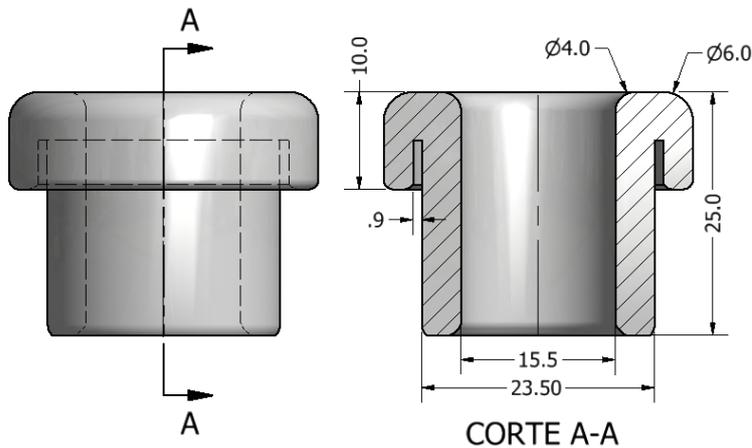
$$K = 0,40875\text{N/mm}$$

$$F_i = 1,22625\text{N}$$

3.3.3 Nós de ligação

Os nós de ligação foram projetados para que fossem fabricados com plástico ABS em uma impressora 3D e este condicionante resultou em um desenho simples (Figura 20) que pode ser impresso rapidamente e sem nenhum material de suporte, o que reduz o desperdício de plástico e energia.

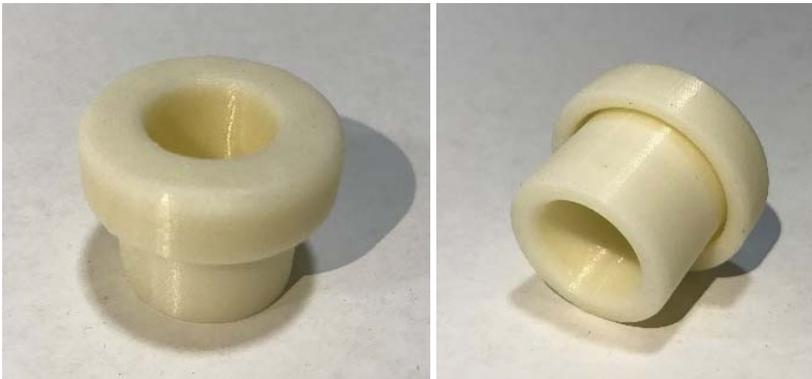
Figura 20 – Projeto do Nó de ligação.



Fonte: do autor (2021)

Estas peças (Figura 21) então são encaixadas nas extremidades do tubo, dando um suporte maior do que a sua parede fina, sem risco de amassar a borda ou ainda danificar o cabo por atrito. Não é necessário nenhum dispositivo de fixação ao tubo pois a própria tração criada pelos cabos faz com que permaneçam no lugar.

Figura 21 - Nós de ligação impressos em 3D.



Fonte: do autor (2021)

3.3.4 Barras de compressão

Foram utilizados três tubos de aço inox com diâmetro externo de 25mm e parede de 0,5mm. O comprimento total de cada elemento é de 945mm, já com os nós de ligação instalados nas duas extremidades.

Figura 22 - Extremidades dos tubos com os nós de ligação fixados.



Fonte: do autor (2021)

3.3.5 Cabos

Para a fixação dos cabos é necessário fazer um furo que ultrapasse a parede do tubo e a parede do nó de ligação que fica interno ao tubo. Os furos foram feitos obedecendo a direção de cada cabo. O cabo é então instalado passando pelo furo e voltando para o exterior apoiando-se na borda de ABS como na Figura 23.

Foi utilizado cabo de aço de 1,59mm (1/16") 6x7 com alma de fibra em toda a estrutura.

Figura 23 - Fixação dos cabos nos nós.



Fonte: do autor (2021)

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Cálculo da estrutura

Reunindo os dados dimensões disponíveis inicialmente para o prisma de três barras o primeiro passo foi encontrar o comprimento mínimo para os cabos verticais que ligam a extremidade inferior de uma barra à extremidade superior da barra seguinte. Em seguida, foi obtida a altura do prisma com isso também as coordenadas de todos os nós da estrutura. Este resultado foi obtido através do cálculo pelo método geométrico, registrado no Apêndice A.

Utilizando o método de densidade de forças foi simples encontrar o vetor de coeficiente de densidade de forças através do método de densidade de forças:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

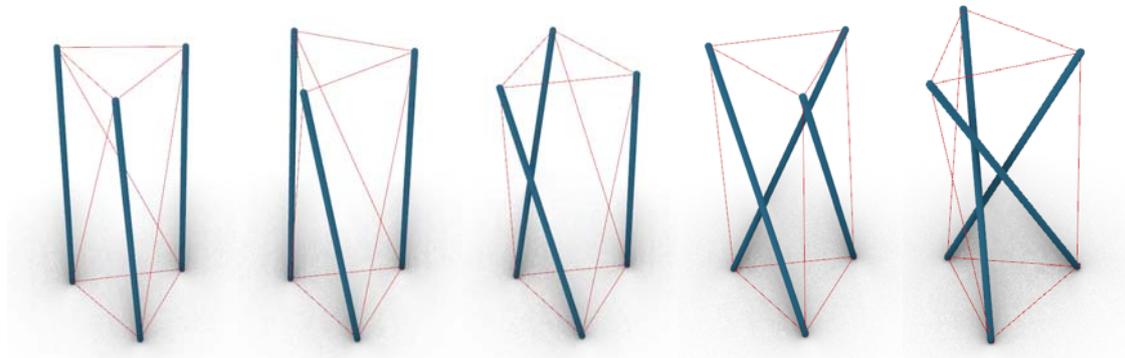
Substituindo o valor de \mathbf{q} na Equação (2) e inserindo os comprimentos calculados para os membros da estrutura, obtemos as forças axiais:

$$\begin{cases} t_{cabos} = 1,16N \\ t_{tensores} = 1,42N \\ t_{barras} = -1,06N \end{cases} \quad (18)$$

4.2 Simulação do comportamento da estrutura

O modelo virtual, após ter os coeficientes de elasticidade das barras e cabos ajustados para que não fossem alteradas as medidas dos membros de dimensões conhecidas, convergiu para o mesmo comprimento de tendão calculado pelo método geométrico. Na Figura 24 são apresentados os estágios de transformação da esquerda para a direita, sendo o último o estágio final, quando o sistema entra em equilíbrio.

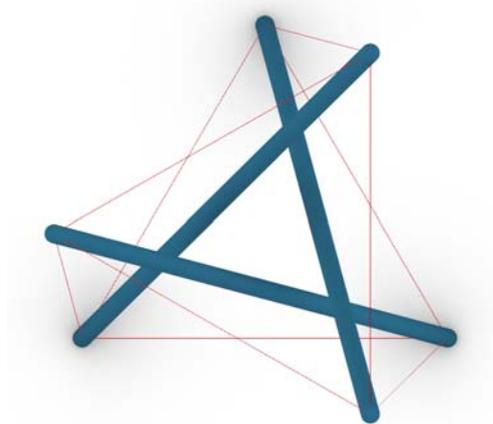
Figura 24: Evolução da estrutura até atingir o valor de convergência



Fonte: Do autor (2021)

A forma convergiu rapidamente para uma geometria semelhante aos modelos de estudo desenvolvidos (Figura 18) e aos exemplos vistos na literatura para esta mesma configuração de barras e cabos, inclusive para a vista de topo (Figura 25) o que eleva a confiança no algoritmo desenvolvido.

Figura 25 - Vista de topo da estrutura em equilíbrio.



Fonte: do autor (2021)

4.3 Protótipo

A Figura 26 apresenta uma visão geral do protótipo permitindo ver a disposição de elementos como os esticadores e molas. A utilização de esticadores nos três tensores facilitou o alinhamento da estrutura, tornando possível pequenos ajustes mesmo com a estrutura tensionada.

Figura 26 - Visão geral do protótipo.



Fonte: do autor (2021)

A deformação medida da mola posicionada no triângulo superior foi de 32,3mm e a posicionada no tensor vertical foi de 80,7mm.

A função para a mola, calculada previamente pela equação (16):

$$F(x) = 0,40875 \cdot x + 1,22625$$

Portanto, a força axial no cabo do triangulo superior é de 14,428N e a força axial no tensor é 34,21N.

4.4 Avaliação dos resultados

Examinando os valores das tensões calculadas para os cabos e as tensões medidas através da deformação medida na mola do protótipo na Tabela 2, é possível perceber que há uma grande diferença de magnitude entre o calculado e o medido. A força medida no protótipo chega a ser até 24 vezes maior para o tensor. A razão entre as forças axiais nos cabos também apresenta diferença. Apesar disso, a força axial para os cabos que formam o triângulo superior é menor do que a força axial para os tensores nos dois modelos.

Tabela 2 - Comparação das forças axiais.

	Força axial triângulo superior	Força axial tensor	Razão $F_{\text{triângulo}}/F_{\text{tensor}}$
Calculado	1,16N	1,42N	0,82
Medido no protótipo	14,428N	34,21N	0,42

Fonte: do autor (2021).

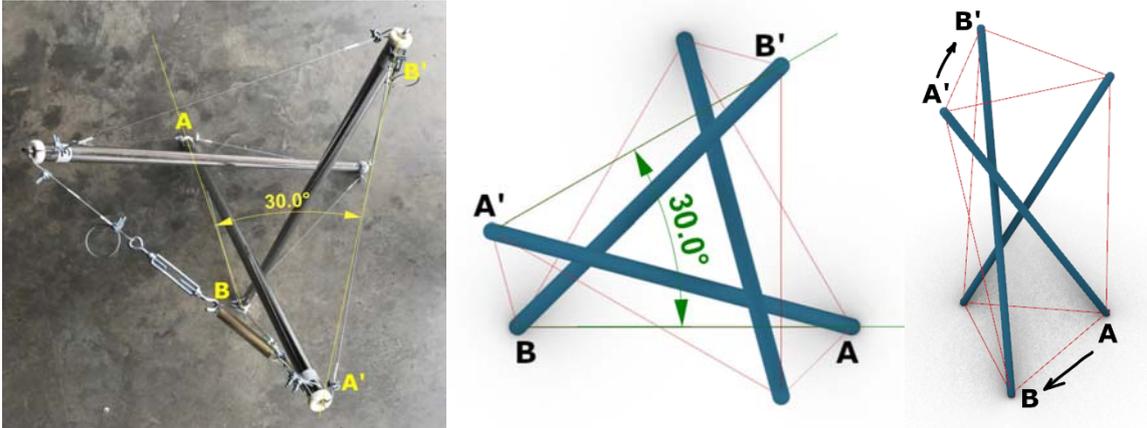
Uma hipótese para o valor tão alto para a força axial medido no tensor do protótipo seria a ação do peso próprio da estrutura. Nos métodos de cálculo não são levados em conta a massa da estrutura e o tensor, por sua posição na estrutura, poderia receber uma proporção maior das cargas de peso próprio.

Outra hipótese seria a de que as molas utilizadas não tenham sido projetadas para este fim e tenham deformado plasticamente.

As vistas de topo do protótipo e do modelo virtual apresentadas na Figura 27 permitem que seja verificado o ângulo de rotação do triângulo superior em relação com o triângulo que forma a base do prisma. Este ângulo, segundo Burkhardt (2008) é de $5\pi/6$ radianos, ou 150° .

A cota de 30° indicada nas duas imagens da Figura 27 é o ângulo suplementar dos 150° e a imagem em perspectiva ajuda a perceber magnitude desta rotação.

Figura 27 - Verificação do ângulo de rotação para o triângulo superior da estrutura.



Fonte: do autor (2021)

Em razão dos cabos não ficarem perfeitamente alinhados com o centro da barra em sua extremidade, a linha traçada para medir o ângulo de rotação na fotografia do protótipo foi feita cruzando o centro dos nós para os segmentos AB, do triângulo inferior, e A'B', do triângulo superior.

5 CONCLUSÃO

Ao final deste trabalho, a conclusão é de que este tema se justifica por sua relevância e o potencial de estudos e experimentações que proporciona. Os diversos métodos de cálculo e aplicações atuais encontrados durante a pesquisa bibliográfica sugerem que há grande interesse nessa área.

Os projetos para implantação em satélites expostos na revisão bibliográfica trazem soluções que podem ser utilizadas em outras aplicações, como as estruturas de mastro que se elevam sem a intervenção humana.

A técnica de pesquisa escolhida para este trabalho deu a oportunidade de perceber diferentes aspectos do objeto de estudo. O protótipo, apesar de quantitativamente ter apresentado tensões diferentes das calculadas pelo modelo matemático, em uma análise qualitativa concordavam ao apontar quais eram os cabos de maior e menor tensão. A experiência de realizar a solução matemática, criar um modelo de simulação do comportamento físico e um protótipo da mesma estrutura mostrou-se válida por terem chegado por meios diferentes em resultados iguais ou pelo menos semelhantes.

A adição de cargas externas no cálculo e aprimoramento do modelo físico para também considerar estas cargas e exibir as tensões nos membros seriam sugestões para trabalhos futuros.

6 REFERÊNCIAS

BERNAARDS, Xander. **Development of a tensegrity joint A research into an adjustable joint for tensegrity structures with.** 118 f. 2014. - Eindhoven University of Technology, [s. l.], 2014.

BURKHARDT, Robert W. **A practical guide to tensegrity design.** Cambridge, MA, EUA: Tensegrity Solutions, 2008. *E-book.*

ESTRADA, G. Gomez; BUNGARTZ, H.-J.; MOHRDIECK, C. Numerical form-finding of tensegrity structures. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 43, n. 22–23, p. 6855–6868, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.02.012>

FALK, Andreas; GUNNAR, Tibert. Plate Based Tensegrity Structures. **IASS Annual Symposium: Theory, Technique, Valuation, Maintenance**, [s. l.], n. August 2014, p. 611–618, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.13140/2.1.2931.9049>

GAN, Buntara Sthenly. **Computational Modeling of Tensegrity Structures.** Cham: Springer International Publishing, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-17836-9>

GERHARDT, Tatiana E.; SILVEIRA, Denise T. **Métodos de Pesquisa.** 1.ed. Porto Alegre: UFRGS Editora, 2009. v. 1 *E-book.*

GÓMEZ-JÁUREGUI, Valentin; OTERO, César; MANCHADO, Cristina. Teaching geometric modeling and analysis of tensegrity structures. **International Conference INGEGRAF-ADM-AIP-PRIMECA. Madrid, 19-21 Junio 2013**, [s. l.], n. February 2014, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/258332449_Teaching_geometric_modeling_and_analysis_of_tensegrity_structures

HALLGRIMSSON, Bjarki. **Prototyping and Modelmaking for Product Design.** Londres: Laurence King, 2012.

HARICHANDRAN, Aparna; YAMINI SREEVALLI, I. Form-Finding of Tensegrity Structures based on Force Density Method. **Indian Journal of Science and Technology**, [s. l.], v. 9, n. 24, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.17485/ijst/2016/v9i24/93145>

JUNG, Erik *et al.* Bio-inspired tensegrity flexural joints. **Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation**, [s. l.], n. July, p. 5561–5566, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICRA.2018.8461027>

MOTRO, R. **Tensegrity: Structural Systems for the Future**. London: Kogan Page Science, 2003.

OLIVEIRA, Mauricio C.; SKELTON, Robert E. **Tensegrity Systems**. 1. ed. Boston, MA: Springer US, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-74242-7>

PASSARO, Andrés *et al.* **Abrigos Sensíveis: Experimentações em Arquiteturas Responsivas e Fabricação Digital**. Rio de Janeiro: Editora Programa de Pós-Graduação em Urbanismo PROURB-FAU-UFRJ, 2014.

PIKER, Daniel. **KANGAROO PHYSICS**. [S. l.], 2020. Disponível em: <https://www.food4rhino.com/app/kangaroo-physics>. Acesso em: 15 jun. 2020.

PINTO, Yuri Assis; REGIANE, Pupo. Explorando a ferramenta de programação em design: um estudo sobre grasshopper. *In:* , 2015, São Paulo. **SIGRADI 2015: project information for interaction**. São Paulo: Blucher, 2015. p. 686–690. Disponível em: <http://sigradi2015.sites.ufsc.br/>. Acesso em: 17 nov. 2016.

SABELHAUS, Andrew P. *et al.* System design and locomotion of SUPERball, an untethered tensegrity robot. **Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation**, [s. l.], v. 2015-June, n. June, p. 2867–2873, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICRA.2015.7139590>

SHAWKAT, Sabah *et al.* **The Art And Engineering of Lightweight Structures**. 1. ed. Brno, República Tcheca: Tribun EU, s.r.o., 2019.

SHIGLEY, Joseph E.; MISCHKE, Charles R.; BUDYNAS, Richard G. **Projeto de Engenharia Mecânica**. 7^o Edição. Porto Alegre: Bookman, 2005.

SULTAN, Cornel. **Tensegrity Structures : Sixty Years of Art , Science , and Engineering**. [S. l.: s. n.], 2018.

SUNSPIRAL, Vytas; AGOGINO, Adrian; ATKINSON, David. **Super Ball Bot - Structures for Planetary Landing and Exploration, NASA Innovative Advanced Concepts (NIAC) Phase 2 Final Report**. Mountain View, CA. EUA: [s. n.], 2015.

TIBERT, A. G.; PELLEGRINO, Sergio. Deployable tensegrity masts. **44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**, [s. l.], n. May 2020, 2003a. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/6.2003-1978>

TIBERT, A. G.; PELLEGRINO, S. Deployable tensegrity reflectors for small satellites. **Journal of Spacecraft and Rockets**, [s. l.], v. 39, n. 5, p. 701–709, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/2.3867>

TIBERT, A. G.; PELLEGRINO, Sergio. Review of form-finding methods for tensegrity structures. **International Journal of Space Structures**, [s. l.], v. 18, n. 4, p. 209–223, 2003b. Disponível em: <https://doi.org/10.1260/026635103322987940>

TRAN, Hoang Chi; LEE, Jaehong. Advanced form-finding of tensegrity structures. **Computers & Structures**, [s. l.], v. 88, n. 3–4, p. 237–246, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.10.006>

ZHANG, Jing Yao; OHSAKI, Makoto. **Tensegrity Structures**. Tokyo: Springer Japan, 2015. (Mathematics for Industry).v. 6 Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-4-431-54813-3>

APÊNDICE A – CÁLCULO DE UM PRISMA DE TRES BARRAS

Memorial de cálculo para o prisma de três barras

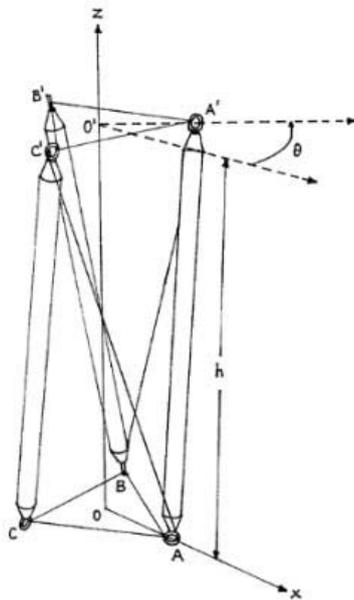
Obtenção das coordenadas pelo método geométrico e dos coeficientes de tensão através do método de densidade de força

1 - Resolução pelo método geométrico (Burkhardt, 2008)

página 41 do livro "A practical guide to tensegrity design - Burkhardt, R - 2008"

```
clear; % all;
clc;
```

Figura 1: Prisma de 3 barras



Fonte: Burkhardt 2008.

Dimensionamento:

Barras:

São representadas pelos segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$.

Tendões laterais:

São representadas pelos segmentos de reta $\overline{AC'}$, $\overline{BA'}$ e $\overline{CB'}$.

Fixando-se os valores de r e usando como u como variável para o comprimento dos tendões dos triângulos inferiores e superiores, este pode ser definido pela equação $u = 2r \sin(\frac{\pi}{3})$.

Para as BARRAS e TENDÕES LATERAIS podemos fixar o valor de um para encontrar o outro.

1. Se forem escolhidos valores para os tendões laterais, devemos procurar o valor do **máximo comprimento** compatível.
2. Se forem escolhidos valores para as barras, devemos procurar pelo **mínimo comprimento** compatível para os tendões.

Fixaremos o valor das barras, por questões de fabricação e, a partir do comprimento definido e das outras considerações, iremos procurar pelo mínimo comprimento compatível para os tendões laterais (variável t).

Ajustar os valores iniciais:

valor de $u = 500$ mm (comprimento dos lados dos triângulos equiláteros superior e inferior)

valor de $s = 945$ mm (comprimento da barra)

```
u = 500 % comprimento lado triangulo
```

```
u = 500
```

```
s = 945 % comprimento da barra
```

```
s = 945
```

```
% declarando as variáveis:
```

```
syms r h
```

```
r = solve(u == 2*r*sin(pi/3), r); % raio do triangulo
```

```
r = round(r)
```

```
r = 289
```

```
teta = (5*pi/6)
```

```
teta = 2.6180
```

```
% substituindo o valor do angulo encontrado, na equação (4):
```

```
solucao = s^2 + 2*r^2*cos(teta)-2*r^2*cos((2*pi/3)-teta)
```

```
solucao = 893025 - 167042  $\sqrt{3}$ 
```

```
solucao = sqrt(solucão)
```

```
solucao =  $\sqrt{893025 - 167042 \sqrt{3}}$ 
```

```
t = round(solucão)
```

```
t = 777
```

```
% substituindo os valores encontrados em Eq.(2) para encontrar h
h = solve(t^2 == h^2 + 2*r^2 - 2*r^2*cos(2*pi/3 - teta), h);
h = round(h(1))
```

```
h = 762
```

Transformação de coordenadas cilíndricas para cartesianas:

```
% Ponto A:
x(1) = r*sin(0);
y(1) = r*cos(0);
z(1) = 0;
% Ponto B:
x(2) = round(r*sin(2*pi/3));
y(2) = round(r*cos(2*pi/3));
z(2) = 0;
% Ponto C:
x(3) = round(r*sin(-2*pi/3));
y(3) = round(r*cos(-2*pi/3));
z(3) = 0;
% Ponto A':
x(4) = round(r*sin(teta));
y(4) = round(r*cos(teta));
z(4) = h;
% Ponto B':
x(5) = r*sin(teta + 2*pi/3);
y(5) = round(r*cos(teta + 2*pi/3));
z(5) = h;
% Ponto C:
x(6) = round(r*sin(teta - 2*pi/3));
y(6) = round(r*cos(teta - 2*pi/3));
z(6) = h;

x = x'
```

```
x =
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 250 \\ -250 \\ 145 \\ -289 \\ 145 \end{pmatrix}$$

```
% x = double(x)
y = y'
```

```
y =
```

$$\begin{pmatrix} 289 \\ -145 \\ -145 \\ -250 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix}$$

```
%y = double(y)
z = z'
```

```
z = 6x1
    0
    0
    0
   762
   762
   762
```

```
%z = double(z)
```

2 - Resolução pelo método de densidade das forças

As coordenadas dos nós já foram calculadas no passo anterior, sendo necessário apenas construir a matriz de incidência e resolver o sistema para encontrar o vetor de densidade de força para a estrutura construída.

C : Matriz de incidência

Q : Matriz diagonal contendo as densidades de força

$Q = \text{diag}(q)$

x : vetor coluna de coordenadas em x

f_x : vetor coluna de forças externas nodais na direção x

D : matriz de densidade de força

"A matriz de incidência descreve a conectividade da estrutura."

$C^T Q C x = f_x - C^T Q C_f x_f$ onde x e x_f são vetores coluna de coordenadas em x desconhecidas e conhecidas respectivamente, Fazendo a resolução das equações análogas para y e z, as coordenadas dos nós podem ser encontradas.

$D = C_f^T Q C_f$

$D x_s = 0$

```
C = [1 0 -1 0 0 0;
     1 -1 0 0 0 0;
     0 1 -1 0 0 0;
     0 0 0 1 0 -1;
```

```

0 0 0 1 -1 0;
0 0 0 0 1 -1;
1 0 0 0 0 -1;
0 1 0 -1 0 0;
0 0 1 0 -1 0;
1 0 0 -1 0 0;
0 1 0 0 -1 0;
0 0 1 0 0 -1]

```

```

C = 12x6
    1     0    -1     0     0     0
    1    -1     0     0     0     0
    0     1    -1     0     0     0
    0     0     0     1     0    -1
    0     0     0     1    -1     0
    0     0     0     0     1    -1
    1     0     0     0     0    -1
    0     1     0    -1     0     0
    0     0     1     0    -1     0
    1     0     0    -1     0     0
    ⋮

```

Número de elementos: nb

```
nb = size(C,1)
```

```
nb = 12
```

Número de nós: nn

```
nn = size(C,2)
```

```
nn = 6
```

Vetor de densidade de força:

```
syms q_cabos q_tensores q_barras
```

```

q = [q_cabos;
     q_cabos;
     q_cabos;
     q_cabos;
     q_cabos;
     q_cabos;
     q_tensores;
     q_tensores;
     q_tensores;
     q_barras;
     q_barras;
     q_barras];

```

```
Q = diag(q)
```

```
Q =
```

$$\begin{pmatrix} q_{\text{cabos}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{\text{cabos}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{\text{cabos}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{\text{cabos}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{\text{cabos}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{\text{cabos}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{\text{tensores}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{\text{tensores}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{\text{tensores}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{\text{barras}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{\text{barras}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{\text{barras}} \end{pmatrix}$$

$$C^T \text{diag}(q) Cx = 0$$

$$C^T \text{diag}(q) Cy = 0$$

$$C^T \text{diag}(q) Cz = 0$$

$$Aq = 0$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} C^T \text{diag}(Cx) \\ C^T \text{diag}(Cy) \\ C^T \text{diag}(Cz) \end{bmatrix}$$

```
CX = C*x;
CY = C*y;
CZ = C*z;
```

```
A = [C'*diag(CX);
      C'*diag(CY);
      C'*diag(CZ)]
```

A =

$$\begin{pmatrix} 250 & -250 & 0 & 0 & 0 & 0 & -145 & 0 & 0 & -145 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 105 & 0 & 0 & 539 & 0 \\ -250 & 0 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 & -395 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 434 & 0 & 0 & -105 & 0 & 145 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -434 & -434 & 0 & 0 & -39 & 0 & -539 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 434 & 145 & 0 & 0 & 0 & 0 & 395 \\ 434 & 434 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 & 539 & 0 & 0 \\ 0 & -434 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 105 & 0 & 0 & -145 & 0 \\ -434 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -145 & 0 & 0 & -395 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & -250 & 0 & 0 & -105 & 0 & -539 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 250 & -250 & 0 & 0 & 145 & 0 & 145 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 250 & -39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 395 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -762 & 0 & 0 & -762 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -762 & 0 & 0 & -762 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -762 & 0 & 0 & -762 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 762 & 0 & 762 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 762 & 0 & 762 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 762 & 0 & 0 & 0 & 0 & 762 \end{pmatrix}$$

$A \cdot q = 0$

calculando o espaço nulo da matriz de equilíbrio A, encontramos os valores de q:

```
q0= null(A)*-1;
%q0 = vpa(q0,4);
q= round(q0,2) % valor de q0 arredondado apenas para visualização
```

```
q =
    (
    0.58
    0.58
    0.58
    0.58
    0.58
    1.0
    1.0
    1.0
    -1.0
    -1.0
    -1.0)
```

Valor de $A \cdot q$:

```
Aq_aproximado = round(A*q0,2) % utilizar valor de q0, sem arredondamento
```


APÊNDICE B – CÁLCULO PARA UMA ESTRUTURA DE TENSEGRIDADE 2D

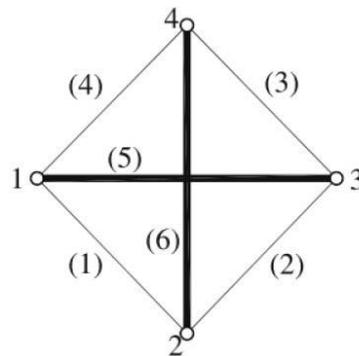
Solução para um modelo de tensegridade 2D

Para esta resolução foi utilizado o algoritmo proposto por Tran e Lee (2010)

TRAN, Hoang Chi; LEE, Jaehong. Advanced form-finding of tensegrity structures. Computers & Structures, [s. l.], v. 88, n. 3-4, p. 237-246, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.10.006> (<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.10.006>)

Pressupostos essenciais

- A topologia da estrutura em termos da conectividade é conhecida.
- A conexão entre os membros não possui restrições de direção.
- Não há carregamento externo e o peso próprio da estrutura é desprezível.
- Não há forças dissipativas agindo no sistema.



```
In [23]: # numero de membros b=6
b = 6
# numero de free nodes n=4
n = 4
# topologia de dimensão d=2 (2D = 2, 3D = 3)
d = 2
C = matrix([[1, -1, 0, 0],[0, 1, -1, 0],[0, 0, 1, -1],[1, 0, 0, -1],[1, 0, -1, 0],[0, 1, 0, -1]])
print(C)

[ 1 -1  0  0]
[  0  1 -1  0]
[  0  0  1 -1]
[  1  0  0 -1]
[  1  0 -1  0]
[  0  1  0 -1]
```

Algorithm

- Step 1: Define C by Eq. (1) for the given topology of tensegrity structure.
- Step 2: Specify the type of each member to generate initial force density vector q^0 by Eq. (21). Set $i = 0$.
- Step 3: Calculate D^i using Eq. (8).
- Step 4: Carry out Eq. (23) to define $[xyz]^i$ through Eq. (35).
- Step 5: Determine A^i by Eq. (15).
- Step 6: Perform Eq. (36) to define q^{i+1} through Eq. (38).
- Step 7: Define D^{i+1} with q^{i+1} by Eq. (8). If Eq. (22) is satisfied, the solutions exist. Otherwise, set $i = i + 1$ and return to Step 4.
- Step 8: If D is positive semi-definite, go to Step 10. Otherwise, specify material property, force density coefficient for each member based on force density vector found.
- Step 9: If Eq. (34) is fulfilled, go to Step 10. Otherwise, set $i = i + 1$ and return to Step 4.
- Step 10: **The process is terminated until Eq. (43) has been checked. The final coordinates and force density vector are the solutions.** Otherwise, set $i = i + 1$ and return to Step 4.

Step 1:

Define C by Eq. (1) for the given topology of tensegrity structure.

$$C_{s(k,p)} = \begin{cases} 1 & \text{para } p = i \\ -1 & \text{para } p = j \\ 0 & \text{se não atende anteriores} \end{cases} \quad (1)$$

```
In [24]: print(C)
```

```
[ 1 -1  0  0]
[ 0  1 -1  0]
[ 0  0  1 -1]
[ 1  0  0 -1]
[ 1  0 -1  0]
[ 0  1  0 -1]
```

Step 2:

Specify the type of each member to generate initial force density vector q^0 by Eq. (21). Set $i = 0$.

$$q^0 = \left\{ \underbrace{+1 + 1 \cdots + 1}_{\text{cabos}} \quad \underbrace{-1 - 1 \cdots - 1}_{\text{struts}} \right\}^T \quad (21)$$

```
In [25]: # q1, q2, q3, q4, q5, q6 = var('q1, q2, q3, q4, q5, q6')
```

valores iniciais:

```
q1 = 1
q2 = 1
q3 = 1
q4 = 1
q5 = -1
q6 = -1
```

Considerando que todos cabos sofrem a mesma densidade de força na tração e todas barras sofrem a mesma densidade de força na compressão:

```
q1 = q2 = q3 = q4 → qcabos
q5 = q6 → qbarras
```

```
In [26]: q_cabos = 1
q_barras = -1
q = matrix([[q_cabos],[q_cabos],[q_cabos],[q_cabos],[q_barras],[q_barras]])
```

Step 3:

Calculate D^i using Eq. (8).

$$D = C^T \text{diag}(q) C, \quad (8)$$

$$D_f = C_f^T \text{diag}(q) C_f$$

```
In [27]: ## Q = diag(q)
Q = matrix(SR, [[q_cabos,0,0,0,0,0],[0,q_cabos,0,0,0,0],[0,0,q_cabos,0,0,0],[0,0,0,q_cabos,0,0],[0,0,0,0,q_barras,0],[0,0,0,0,0,q_barras]])
D = C.transpose()*Q*C
print(D)
#print(C)

[ 1 -1  1 -1]
[-1  1 -1  1]
[ 1 -1  1 -1]
[-1  1 -1  1]
```

Step 4:

Carry out Eq. (23) to define $[xyz]^i$ through Eq. (35).

$$D = \Phi \Lambda \Phi^T \quad (23)$$

$$D[x \ y \ z] \approx [0 \ 0 \ 0] \quad (35)$$

```
In [28]: U, V = D.eigenmatrix_right()
```

```
In [29]: U
#Phi
```

```
Out[29]: [0 0 0 0]
[0 0 0 0]
[0 0 0 0]
[0 0 0 4]
```

```
In [30]: V
#Delta
```

```
Out[30]: [ 1  0  0  1]
[ 0  1  0 -1]
[ 0  0  1  1]
[ 1 -1  1 -1]
```

```
In [31]: D*V == V*U
#D * Delta == Delta * Phi
```

```
Out[31]: True
```

Definição dos vetores $[x \ y \ z]$ e dos produtos Cx , Cy e Cz

vetores x , y e z :

```
In [32]: vetor_zero = vector([0,0,0,0])

x1, x2, x3, x4 = var('x1, x2, x3, x4')
x1=-10
x2=0
x3=10
x4=0
vetorX = matrix([[x1],[x2],[x3],[x4]])

y1, y2, y3, y4 = var('y1, y2, y3, y4')
y1=0
y2=-10
y3=0
y4=10
vetorY = matrix([[y1],[y2],[y3],[y4]])

z1, z2, z3, z4 = var('z1, z2, z3, z4')
z1=0
z2=0
z3=0
z4=0
vetorZ = matrix([[z1],[z2],[z3],[z4]])

Cx = C*vetorX
Cy = C*vetorY
Cz = C*vetorZ
#print(Cx)
```

Cálculo de Cx e Cy

```
In [33]: # identidade6 = identity_matrix(6)
diagCx = matrix(SR, [[x1-x2,0,0,0,0,0],[0,x2-x3,0,0,0,0],[0,0,x3-x4,0,0,0],[0,0,0,x1-x4,0,0],[0,0,0,x1-x3,0],[0,0,0,0,x2-x4]])
print(diagCx)
print(" ")
diagCy = matrix(SR, [[y1-y2,0,0,0,0,0],[0,y2-y3,0,0,0,0],[0,0,y3-y4,0,0,0],[0,0,0,y1-y4,0,0],[0,0,0,y1-y3,0],[0,0,0,0,y2-y4]])
print(diagCy)

[-10  0  0  0  0  0]
[  0 -10  0  0  0  0]
[  0  0  10  0  0  0]
[  0  0  0 -10  0  0]
[  0  0  0  0 -20  0]
[  0  0  0  0  0  0]

[ 10  0  0  0  0  0]
[  0 -10  0  0  0  0]
[  0  0 -10  0  0  0]
[  0  0  0 -10  0  0]
[  0  0  0  0  0  0]
[  0  0  0  0  0 -20]
```

```
In [34]: resultadoCx = C.transpose()*diagCx
print(resultadoCx)
print(" ")
resultadoCy = C.transpose()*diagCy
print(resultadoCy)

[-10  0  0 -10 -20  0]
[ 10 -10  0  0  0  0]
[  0  10  10  0  20  0]
[  0  0 -10  10  0  0]

[ 10  0  0 -10  0  0]
[-10 -10  0  0  0 -20]
[  0  10 -10  0  0  0]
[  0  0  10  10  0  20]
```

Step 5:Determine A^i by Eq. (15).

$$A = \begin{pmatrix} C^T \text{diag}(Cx) \\ C^T \text{diag}(Cy) \\ C^T \text{diag}(Cz) \end{pmatrix} \quad (15)$$

```
In [35]: # cálculo de A
# parte X
print(" ----- C transposta -----")
print(C.transpose())
linha_1 = C.transpose()*diagCx
print(" ----- C transposta * diag(Cx) -----")
print(linha_1)

# parte y
linha_2 = C.transpose()*diagCy
print(" ----- C transposta * diag(Cy) -----")
print(linha_2)
```

```
----- C transposta -----
[ 1  0  0  1  1  0]
[-1  1  0  0  0  1]
[ 0 -1  1  0 -1  0]
[ 0  0 -1 -1  0 -1]
----- C transposta * diag(Cx) -----
[-10  0  0 -10 -20  0]
[ 10 -10  0  0  0  0]
[ 0  10  10  0  20  0]
[ 0  0 -10  10  0  0]
----- C transposta * diag(Cy) -----
[ 10  0  0 -10  0  0]
[-10 -10  0  0  0 -20]
[ 0  10 -10  0  0  0]
[ 0  0  10  10  0  20]
```

```
In [36]: linha_1*q == 0
```

```
Out[36]: True
```

```
In [37]: linha_2*q
```

```
Out[37]: [0]
[0]
[0]
[0]
```

```
In [38]: A = linha_1
A = A.stack(linha_2)
print(A)
print(A.rref())
```

```
[-10  0  0 -10 -20  0]
[ 10 -10  0  0  0  0]
[ 0  10  10  0  20  0]
[ 0  0 -10  10  0  0]
[ 10  0  0 -10  0  0]
[-10 -10  0  0  0 -20]
[ 0  10 -10  0  0  0]
[ 0  0  10  10  0  20]
[ 1  0  0  0  0  1]
[ 0  1  0  0  0  1]
[ 0  0  1  0  0  1]
[ 0  0  0  1  0  1]
[ 0  0  0  0  1 -1]
[ 0  0  0  0  0  0]
[ 0  0  0  0  0  0]
[ 0  0  0  0  0  0]
```

```
In [39]: A.rank() % rank (posto) da matriz A

File "<ipython-input-39-7b1f2c5fa10e>", line 1
  A.rank() % rank (posto) da matriz A
                        ^
SyntaxError: invalid syntax
```

Step 6:

Perform Eq. (36) to define \mathbf{q}^{i+1} through Eq. (38).

$$\mathbf{A} = \mathbf{UVW}^T \quad (36)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{q} \approx \mathbf{0} \quad (38)$$

```
In [ ]: A*q
```

Step 7:

Define \mathbf{D}^{i+1} with \mathbf{q}^{i+1} by Eq. (8). If Eq. (22) is satisfied, the solutions exist. Otherwise, set $\mathbf{i} = \mathbf{i} + 1$ and return to Step 4.

$$\begin{cases} n_D^* = d + 1 \\ n_A^* = 1 \end{cases} \quad (22)$$

```
In [ ]: nd = n - D.rank()
na = b - A.rank()
print("nd = ",nd)
print("na = ",na)
print("condições Eq.(22): ")
print(nd == d + 1)
print(na == 1)
```

Step 8:

If \mathbf{D} is positive semi-definite, go to Step 10. Otherwise, specify material property, force density coefficient for each member based on force density vector found.

```
In [ ]: print(D)
print("autovalores de D devem ser todos positivos: ",D.eigenvalues())
autovalores = D.eigenvalues()

# Testar se os autovalores são positivos
len(autovalores) # tamanho da lista em que estão alocados os autovalores
```

Todos os autovalores de D são positivos. A solução foi encontrada.

Os valores definidos inicialmente para o vetor de densidade de força são válidos.

```
q1 = 1
q2 = 1
q3 = 1
q4 = 1
q5 = -1
q6 = -1
```

Step 9:

If Eq. (34) is fulfilled, go to Step 10. Otherwise, set $\hat{i} = \hat{i} + 1$ and return to Step 4.

$$\text{eig}(K_T) = \left[\underbrace{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{d_n-r} > 0}_{\text{positive stiffness}} \underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_r = 0}_{\text{rigid-body motions}} \right] \quad (34)$$

Step 10:

The process is terminated until Eq. (43) has been checked. The final coordinates and force density vector are the solutions. Otherwise, set $\hat{i} = \hat{i} + 1$ and return to Step 4.



UNIVATES

R. Avelino Tallini, 171 | Bairro Universitário | Lajeado | RS | Brasil
CEP 95900.000 | Cx. Postal 155 | Fone: (51) 3714.7000
www.univates.br | 0800 7 07 08 09