



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO PARA SOLUÇÃO DAS
EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM REGIME TRANSIENTE E
ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS**

Daniel Gustavo Benvenuti

Lajeado, junho de 2018

Daniel Gustavo Benvenuto

**DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO PARA SOLUÇÃO DAS
EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM REGIME TRANSIENTE E
ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS**

Monografia apresentada na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II, do curso de Engenharia Mecânica, da Universidade do Vale do Taquari, como parte da exigência para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Doutor Lober Hermany

Lajeado, junho de 2018

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, Maria Izabel de Lima, por me ensinar os valores e virtudes necessários para uma vida digna.

Ao meu orientador, professor Doutor Lober Hermany, pela confiança e dedicação na realização deste trabalho.

Ao restante da minha família e a minha namorada, pelo amor, apoio e incentivo.

Aos meus amigos, que nossas jogatinas online nunca terminem.

EPÍGRAFE

“DON'T PANIC”

MARVIN, O ROBÔ PARANÓIDE

RESUMO

Até os anos de 1950, os engenheiros e cientistas estudavam os fenômenos da dinâmica dos fluidos através de métodos analíticos ou experimentais, porém, devido à complexidade das equações de Navier-Stokes, as quais modelam estes problemas, ou devido ao alto custo laboratorial envolvido em determinados experimentos, muitas vezes um problema específico não podia ser avaliado corretamente. Com o avanço das tecnologias computacionais, ocorreu a viabilização da utilização de métodos numéricos na solução de problemas de escoamento de fluidos, permitindo a análise detalhada destes fenômenos com grande precisão e em curtos períodos. Sendo assim, o presente trabalho tem como objetivo desenvolver um código numérico na linguagem FORTRAN 90, capaz de solucionar as equações de Navier-Stokes para escoamento de fluidos transientes, incompressíveis, bidimensionais e com baixo números de Reynolds. Para a discretização das equações governantes, foi utilizado o método dos volumes finitos, com malha estruturada e arranjo desencontrado. O problema de acoplamento pressão-velocidade e a não linearidade das equações governantes, foram tratados utilizando o algoritmo SIMPLE. Três estudos foram realizados com o objetivo de testar o código criado, comparando os resultados obtidos no presente trabalho, com os da literatura, verificando assim a acurácia do algoritmo e do método numérico utilizado.

Palavras-chave: Método dos volumes finitos, Dinâmica dos fluidos computacional, Navier-Stokes, FORTRAN.

ABSTRACT

Until the 1950s, engineers and scientists studied the phenomena of fluid dynamics through analytical or experimental methods, but because of the complexity of the Navier-Stokes equations, which shape these problems, or because of the high laboratory cost involved in certain experiments, usually a specific problem could not be evaluated correctly. With the advancement of computational technologies, it was possible to use numerical methods to solve problems of fluid flow, allowing the detailed analysis of these phenomena with great precision and in short periods. Thus, this work aims to develop a numerical code in the FORTRAN 90 language, capable of solving the Navier-Stokes equations for transient, incompressible, two-dimensional and low Reynolds numbers fluid flow problems. For the discretization of the governing equations, the finite volume method was used, with a structured mesh and staggered grid. The pressure-velocity coupling problem and the non-linearity of the governing equations were treated using the SIMPLE algorithm. Three studies were carried out to test the code created, comparing the results obtained in the present work, and the ones from the literature, the accuracy of the algorithm and the numerical method used.

Key-words: Finite volume method, Computational fluid dynamics, Navier-Stokes, FORTRAN.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Campo de velocidade sobre aerofólio	26
Figura 2 – Tensões superficial sob uma partícula de fluido	28
Figura 3 – Linhas de corrente na asa dianteira de uma fórmula Indy.....	31
Figura 4 – Expansão em torno do ponto x1	34
Figura 5 – Volume de controle infinitesimal.....	38
Figura 6 – Tensões sobre um elemento de fluido na direção x.....	42
Figura 7 – Domínio contínuo vs discreto	48
Figura 8 – Malha estruturada vs não estruturada vs híbrida	52
Figura 9 – Arranjo co-localizado.....	53
Figura 10 – Arranjo desencontrado	54
Figura 11 – Principais etapas realizadas.....	59
Figura 12 – Volume finito para componente u da velocidade.....	67
Figura 13 – Volume finito para componente v da velocidade	71
Figura 14 – Volume finito para equação da continuidade	72
Figura 15 – Escoamento em cavidade com tampa móvel.....	77
Figura 16 – Malha 130 x 130.....	78
Figura 17 – Malha 200 x 200.....	78
Figura 18 – Linhas de corrente para $Re = 100$	80
Figura 19 – Linhas de corrente para $Re = 400$	83
Figura 20 – Linhas de corrente para $Re = 1000$	85
Figura 21 – Linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para $Re = 3200$..	88
Figura 22 – Linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para $Re = 3200$..	89
Figura 23 – Escoamento entre placas paralelas	91

Figura 24 – Malha 50 x 300.....	91
Figura 25 – Campo da componente u da velocidade até 0,4 metros para Re = 50 ..	92
Figura 26 – Campo da componente u da velocidade até 0,8 metros para Re = 100	94
Figura 27 – escoamento sobre degrau	96
Figura 28 – Malha 50 x 300.....	97
Figura 29 – Campos de velocidade para Re = (a) 200, (b) 300, (c) 400, (d) 500	98
Figura 30 – Linhas de corrente para Re = (a) 200, (b) 300, (c) 400, (d) 500.....	99

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Definição das variáveis φ , Γ e S para as equações da quantidade de movimento e conservação de massa	46
--	----

LISTA DE FLUXOGRAMAS

Fluxograma 1 – Algoritmo do código criado	75
---	----

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Comparação componente u da velocidade para $Re = 100$	79
Gráfico 2 – Comparação componente v da velocidade para $Re = 100$	80
Gráfico 3 – Evolução temporal componente u da velocidade para $Re = 100$	81
Gráfico 4 – Comparação componente u da velocidade para $Re = 400$	82
Gráfico 5 – Comparação componente v da velocidade para $Re = 400$	82
Gráfico 6 – Evolução temporal componente u da velocidade para $Re = 400$	83
Gráfico 7 – Comparação componente u da velocidade para $Re = 1000$	84
Gráfico 8 – Comparação componente v da velocidade para $Re = 1000$	85
Gráfico 9 – Evolução temporal componente u da velocidade para $Re = 1000$	86
Gráfico 10 – Comparação componente u da velocidade para $Re = 3200$	87
Gráfico 11 – Comparação componente v da velocidade para $Re = 3200$	87
Gráfico 12 – Comparação analítico x numérico para $Re = 50$	92
Gráfico 13 – Evolução temporal da componente u da velocidade para $Re = 50$	93
Gráfico 14 – Comparação analítico x numérico para $Re = 100$	94
Gráfico 15 – Evolução temporal da componente u da velocidade para $Re = 100$	95

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

g	Aceleração da gravidade	[m/s ²]
A	Área	[m ²]
CMI	Instituto Clay de Matemática	[-]
u	Componente escalar x da velocidade	[m/s]
u'	Correção da componente escalar x da velocidade	[m/s]
v	Componente escalar y da velocidade	[m/s]
v'	Correção da componente escalar y da velocidade	[m/s]
w	Componente escalar z da velocidade	[m/s]
u_p	Componente escalar x da velocidade de uma partícula	[m/s]
v_p	Componente escalar y da velocidade de uma partícula	[m/s]
w_p	Componente escalar z da velocidade de uma partícula	[m/s]
x	Componente x da posição	[m]
y	Componente y da posição	[m]
z	Componente z da posição	[m]
Γ	Coeficiente difusivo	[-]
DFC	Dinâmica dos Fluidos Computacional	[-]
div	Divergente	[-]
EDO	Equação diferencial ordinária	[-]
EDP	Equação diferencial parcial	[-]
$n!$	Fatorial de n	[-]
F_s	Força de superfície	[N]
F_c	Força de campo	[N]

F_g	Força de gravidade	[N]
grad	Gradiente	[-]
<i>h. o. t</i>	Termos de ordem superior	[-]
LU	Lower and Upper	[-]
m	Massa	[kg]
ρ	Massa específica	[kg/m ³]
MDF	Método das diferenças finitas	[-]
MEF	Método dos elementos finito	[-]
MVF	Método dos volumes finitos	[-]
NS	Navier-Stokes	[-]
$\vec{\nabla}$	Operador Laplaciano	[-]
x_p	Posição x de uma partícula	[m]
y_p	Posição y de uma partícula	[m]
z_p	Posição z de uma partícula	[m]
p	Pressão termodinâmica local	[Pa]
p'	Correção de pressão	[Pa]
PISO	Pressure Implicit with Splitting of Operator	[-]
φ	Propriedade genérica	[-]
\vec{p}	Quantidade de movimento linear	[kg.m/s]
Re	Reynolds	[-]
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations	[-]
SIMPLER	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised	[-]
SIMPLEC	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Consistent	[-]
∂	Símbolo derivada parcial	[-]
$d = D$	Símbolo derivada total	[-]
Σ	Somatório	[-]
S.C.	Superfície de Controle	[-]
swuds	Skew Weighted Upstream Differencing Scheme	[-]
τ	Tensão de cisalhamento	[Pa]
σ	Tensão normal	[Pa]
S	Termo fonte	[-]
TCC I	Trabalho de conclusão I	[-]
TCC II	Trabalho de conclusão II	[-]

Δ	Varição	[-]
μ	Viscosidade	[Pa.s]
\vec{a}	Vetor aceleração	[m/s ²]
\vec{V}	Vetor velocidade	[m/s]
\vec{a}_p	Vetor aceleração de uma partícula	[m/s ²]
\hat{i}	Vetor unitário da direção x	[-]
\hat{j}	Vetor unitário da direção y	[-]
\hat{k}	Vetor unitário da direção z	[-]
\vec{V}_p	Vetor velocidade de uma partícula	[m/s]
V	Volume	[m ³]
V.C.	Volume de Controle	[-]

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.2 Objetivos	16
1.2.1 Objetivo geral	16
1.2.2 Objetivos específicos.....	16
1.3 Justificativa.....	17
1.4 Delimitação do tema	17
1.5 Estrutura do trabalho	18
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	20
2.1 Conceitos básicos na mecânica dos fluidos	20
2.1.1 Definição de fluido	20
2.1.2 Campo escalar e vetorial	20
2.1.3 Hipótese do contínuo.....	21
2.1.4 Viscosidade	21
2.1.5 Fluido Newtoniano e não Newtoniano.....	22
2.1.6 escoamento compressível e incompressível	23
2.1.7 escoamento laminar e turbulento.....	23
2.1.8 escoamento interno e externo	24
2.1.9 escoamento permanente e transiente.....	24
2.1.10 Descrição Lagrangeana e Euleriana	24
2.1.11 Campo de velocidade.....	25
2.1.12 Campo de tensão	26
2.1.13 Pressão termodinâmica local.....	28
2.1.14 Campo de aceleração.....	28
2.1.15 Linhas de corrente	31
2.2 Modelagem matemática	31
2.2.1 Equações diferenciais.....	32

2.2.2 Operadores vetoriais.....	32
2.2.2.1 Operadores gradiente	32
2.2.2.2 Operadores divergente	33
2.2.3 Expansão em série de Taylor	33
2.2.4 Leis fundamentais da física.....	34
2.2.5 Formulação integral vs diferencial	35
2.2.6 Sistema e volume de controle.....	35
2.2.7 Teorema de transporte de Reynolds	36
2.2.8 Equação da continuidade ou da conservação de massa	37
2.2.9 Equação da quantidade de movimento	40
2.2.10 Equação de Navier-Stokes	43
2.2.11 Forma genérica da equação de transporte	46
2.3 Modelagem numérica.....	47
2.3.1 Métodos numéricos.....	47
2.3.2 Métodos das diferenças finitas (MDF).....	49
2.3.3 Métodos dos elementos finitos (MEF).....	49
2.3.4 Métodos dos volumes finitos (MVF).....	49
2.3.4.1 Condições iniciais e de contorno	50
2.3.4.2 Tipos de malha	52
2.3.4.3 Arranjo das variáveis dependentes na malha.....	52
2.3.5 Interpolação polinomial	54
2.3.6 Discretização temporal	55
2.3.7 Linearidade e acoplamento pressão-velocidade.....	55
2.3.8 Métodos diretos e iterativos	56
3 METODOLOGIA	58
3.1 Método científico.....	58
3.2 Etapas metodológicas	58
3.2.1 Discretização do domínio (geração da malha)	59
3.2.2 Discretização das equações governantes	59
3.2.3 Problema acoplamento pressão-velocidade.....	61
3.2.4 Interpolação entre os valores nodais e aproximação dos gradientes.....	63
3.2.5 Solução do sistema algébrico gerado na discretização das equações.....	64
3.2.6 Disponibilização dos resultados.....	65
4 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES.....	66
4.1 Discretização das equações.....	66
4.2 Algoritmo utilizado.....	74
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	76
5.1 Escoamento em cavidade com tampa móvel	76
5.1.1 Cálculos para $Re = 100$	78

5.1.2 Cálculos para $Re = 400$	81
5.1.3 Cálculos para $Re = 1000$	84
5.1.4 Cálculos para $Re = 3200$	86
5.2 Escoamento entre placas planas paralelas	90
5.2.1 Cálculos para $Re = 50$	92
5.2.2 Cálculos para $Re = 100$	93
5.3 Escoamento sobre degrau	96
6 CONCLUSÕES	101
REFERÊNCIAS.....	103

1 INTRODUÇÃO

A mecânica dos fluidos, como o nome indica, é o ramo das ciências exatas que estuda os fluidos, tanto em repouso quanto em movimento. O estudo deste estado físico é extremamente importante para o desenvolvimento tecnológico, uma vez que está presente em diversas aplicações do dia a dia, desde o escoamento de ar sob aeronaves, até no sistema circulatório de seres vivos.

As primeiras informações qualitativas referente aos fluidos, datam dos séculos III e II a.C., na Grécia antiga, quando Aristóteles descreveu o princípio da continuidade e Arquimedes formulou as leis dos corpos submersos. Após Arquimedes, diversos cientistas se dedicaram em compreender melhor os fenômenos envolvidos na mecânica dos fluidos, dentre as contribuições gerais, destacam-se, Leonardo da Vinci, Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Jean d'Alembert, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Osborne Reynolds, George Gabriel Stokes, Claude Louis Marie Henri Navier, entre outros (ROUSE, 1983).

Conforme Sears et al. (1984), a mecânica dos fluidos é dividida em duas áreas, a estática dos fluidos ou hidrostática, que é relacionada ao estudo dos fluidos em repouso, e a dinâmica dos fluidos ou hidrodinâmica, que é relacionada ao estudo dos fluidos em movimento.

Em relação a hidrostática, os tratados matemáticos que descrevem seus fenômenos são mais simples do que os dos fluidos em movimento, embora seu

estudo seja muito importante em aplicações submersas, tais como barragens e submarinos (FOX; PRITCHARD; MCDOLAND, 2010).

Em contrapartida, os fenômenos envolvendo a dinâmica dos fluidos são mais complexos, o conjunto de equações que modelam estes eventos é conhecido como equações de Navier-Stokes e foram derivadas pelos matemáticos George Stokes e Claude Navier, por volta do século XVIII. Caso não sejam aplicadas simplificações, essas equações apresentam enormes dificuldades matemáticas, sendo que uma solução analítica única é até hoje desconhecida, além disso, uma solução que comprove as equações de NS faz parte do projeto *The Millennium Problems*, iniciado pelo *Clay Mathematics Institute* (CMI), que atualmente oferece um prêmio de um milhão de dólares para quem resolver o problema (RODRIGUEZ, 2011).

Conforme Maliska (2014), existem três ferramentas básicas que os engenheiros e cientistas podem utilizar para a análise ou desenvolvimento de seu projeto na dinâmica dos fluidos. A primeira técnica e a mais antiga, é a utilização de métodos experimentais, nos quais o estudo do escoamento dos fluidos é realizado em tuneis de vento e tanques de água, porém, nem sempre são satisfatórios ou viáveis, já que nem todo fenômeno em estudo é passível de reprodução laboratorial, tais como previsão do tempo, movimento de sangue através das veias do corpo humano, estudo do comportamento dos gases no interior de reatores, simulação de água no subsolo, entre outros. Além disso, este tipo de prática pode acarretar em um elevado custo e tempo de montagem experimental (FORTUNA, 2012).

A segunda ferramenta é a utilização de métodos analíticos na solução dos problemas da dinâmica dos fluidos, porém, conforme Fortuna (2012), por requerer diversas simplificações nas equações governantes do movimento de fluidos, muitas vezes não descrevem de forma adequada um fenômeno real.

Por fim, a terceira e última ferramenta, são os métodos numéricos, que, de acordo com Yang et al. (2005), paralelo ao surgimento do computador digital na década de 50, permitiu a utilização e desenvolvimento de algoritmos capazes de solucionar os problemas da dinâmica dos fluidos utilizando técnicas numéricas de aproximação, possibilitando assim, soluções numéricas de suas equações governantes. Esta técnica, que permite o estudo e obtenção de dados de

escoamento de fluidos de fenômenos reais, sem custos elevados referente aos testes laboratoriais ou simplificações inadequadas nas equações governantes, é denominada dinâmica dos fluidos computacional (DFC), ou *computational fluid dynamics* (CFD), em inglês.

Sendo assim, de acordo com Zuo (2005), devido as suas vantagens, existem diversos campos de atuação para a utilização da DFC, dentre eles se encontram as áreas da biomedicina, automotiva, processos químicos, processos de resfriamento, hidráulica, geração de potência, esportes, marinha, aeronáutica, aeroespacial, entre outros.

Tendo em vista as considerações apresentadas acima, devido a possibilidade de trabalhar com métodos numéricos utilizando recursos computacionais, diversos problemas, antes não solucionáveis e de difícil reprodução laboratorial, podem ser aproximados e, se tratados de forma correta, fornecerem resultados muito próximos com os encontrados em fenômenos reais, auxiliando assim os engenheiros e cientistas em seus campos de atuação.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é o desenvolvimento de um código computacional em linguagem FORTRAN 90, capaz de solucionar as equações de Navier-Stokes por meio de um método numérico, permitindo a obtenção dos campos de velocidade e linhas de corrente característicos de determinado escoamento.

1.2.2 Objetivos específicos

Este trabalho apresenta os seguintes objetivos específicos:

- Discretizar as equações de Navier-Stokes;

- Desenvolver um código DFC em FORTRAN 90 utilizando as equações de Navier-Stokes discretizadas, permitindo a solução de problemas da dinâmica dos fluidos;
- Apresentar os resultados obtidos nos problemas através de gráficos e imagens ilustrativas, geradas por um software de pós processamento;
- Verificar o código numérico, comparando os resultados obtidos no algoritmo desenvolvido com simulações e testes semelhantes existentes na literatura.

1.3 Justificativa

Na década de 60, no início da utilização de computadores para cálculos numéricos, a simulação de um escoamento supersônico consumiria um tempo computacional de aproximadamente 30 anos, gerando um custo de 10 milhões de dólares. Atualmente, com o aumento da capacidade de processamento e armazenamento dos computadores, uma simulação do mesmo problema requer minutos de tempo computacional, gerando um custo de algumas centenas de dólares (MALISKA, 2014). Devido a esta evolução tecnológica, a utilização da DFC para simular problemas reais está em constante expansão, e tem se tornado uma grande ferramenta na elaboração de projetos e pesquisas científicas.

Atualmente, existem diversos softwares comerciais que permitem a simulação de problemas que envolvem a dinâmica dos fluidos, porém, uma licença para sua utilização pode se tornar bastante cara. Além disso, a NASA, maior empresa aeroespacial do mundo, possui códigos próprios para realizar suas simulações, um dos benefícios disto é a possibilidade de alterações no código fonte, permitindo testes com novos métodos numéricos, além de possibilitar otimizações.

1.4 Delimitação do tema

Este trabalho é delimitado principalmente devido as simplificações impostas nas equações de Navier-Stokes. Sendo assim, o escoamento será aproximado

como incompressível, de viscosidade constante, isotérmico, e específico para baixos números de Reynolds. Também será limitado pelo espaço bidimensional.

Outra limitação é o tipo de malha e arranjo utilizado nas simulações, sendo que a malha será estruturada e o arranjo desencontrado.

1.5 Estrutura do trabalho

O trabalho está estruturado em sete capítulos.

No primeiro capítulo é abordado uma breve introdução sobre o histórico e aplicação de métodos numéricos na dinâmica dos fluidos, bem como algumas de suas vantagens em relação as outras ferramentas de análise.

No segundo capítulo, é apresentada a revisão bibliográfica sobre o assunto abordado no trabalho, onde são expostos os conceitos físicos e matemáticos básicos envolvidos no estudo da dinâmica dos fluidos, bem como a derivação de suas equações governantes. Além disso, foram apresentados alguns métodos utilizados para solucionar numericamente estas equações, e conceitos importantes acerca destes.

O terceiro capítulo contém a metodologia, onde foram abordados os métodos utilizados para o desenvolvimento do código.

O quarto capítulo consiste em uma demonstração de como foi realizada a discretização das equações de Navier-Stokes através do método numérico escolhido e qual é a sequência de processamento do algoritmo criado.

No quinto capítulo, que consiste nos resultados, apresentam-se três problemas em que o código numérico foi utilizado, sendo que para cada um dos problemas, foram realizados testes com diferentes números de Reynolds e, quando possível, comparado com dados disponíveis na literatura, a fim de verificar a discretização realizada e o algoritmo desenvolvido.

O sexto capítulo contém a conclusão do presente trabalho, além de algumas sugestões para trabalhos futuros.

E ao final, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas para elaboração deste estudo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Conceitos básicos na mecânica dos fluidos

Neste tópico serão abordados os conceitos básicos dos fluidos e da dinâmica dos fluidos, uma vez que estes conceitos são fundamentais para um entendimento completo dos fenômenos envolvidos neste campo de atuação.

2.1.1 Definição de fluido

Conforme Fox et al. (2010), um fluido é uma substância que sofre deformação contínua sob a aplicação de tensões cisalhantes, mesmo que estas possuem valores muito pequenos. Ainda, como após a aplicação da tensão cisalhante, o fluido continua em movimento, também é possível defini-lo como uma substância que não sustenta uma tensão de cisalhamento quando estiver em repouso.

Sendo assim, de acordo com Çengel e Cimbala (2015), dos três estados fundamentais da matéria (sólido, líquido e gasoso), uma substância no estado líquido ou gasoso é denominada fluido.

2.1.2 Campo escalar e vetorial

A noção de campo é fundamental na mecânica dos fluidos. Quando uma determinada propriedade está definida em todos os pontos de uma região do espaço tridimensional, afirma-se que há um campo naquela região. Se a propriedade de estudo for um vetor, o campo será vetorial, em contrapartida, se a propriedade for um escalar, o campo será escalar (GOBBI; DIAS; MASCARENHAS; VALENTINE, 2004).

Além disso, segundo os mesmos autores, vários campos, tanto vetoriais como escalares, podem existir simultaneamente na mesma região, que é o caso encontrado em escoamento de fluidos, onde tem-se, por exemplo, o campo de massa específica (escalar) e o de velocidade (vetorial) na mesma região.

2.1.3 Hipótese do contínuo

Segundo Fox et al. (2010), todos os fluidos presentes na natureza são compostos de moléculas, com isso, um estudo completo das propriedades dos fluidos deveria levar em consideração o comportamento das moléculas que os compõe, porém, este estudo resultaria em um conjunto extremamente complexo de equações governantes, que, na maioria dos casos, seria de impossível solução, mesmo com os artifícios computacionais existentes atualmente.

Com isso, os fluidos, na grande maioria de suas aplicações, são tratados como um meio contínuo, onde sua composição molecular e descontinuidades são desprezadas, isto é, qualquer divisão de um fluido, por mais pequena que seja, apresentará as mesmas propriedades e características que o fluido como um todo. Sendo assim, estas pequenas parcelas podem então ser tratadas como partículas individuais do fluido (CAVALCANTI, 2001).

2.1.4 Viscosidade

A viscosidade é uma das propriedades mais importantes e que mais requer consideração no estudo de dinâmica dos fluidos. É uma medida de resistência às tensões cisalhantes e deformação angular do fluido, ou seja, é definida como o atrito

interno deste, no qual as forças de atrito resultam das permutações de momentum e coesão entre as moléculas do fluido, gerando uma resistência ao movimento deste e ocasionando um gradiente de velocidade no domínio do escoamento (DAUGHERTY; FRANZINI, 1965; STREETER; WYLIE, 1982).

Ainda, de acordo com White (1991), uma aproximação fundamental para viscosidade é de que esta é uma propriedade dos fluidos que relaciona as tensões aplicadas com a deformação resultante.

2.1.5 Fluido Newtoniano e não Newtoniano

A fim de relacionar as tensões cisalhantes e as taxas de deformação em fluidos, Newton, em sua obra intitulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural) de 1687, estuda os efeitos da viscosidade na dinâmica dos fluidos e formula a equação de Newton da viscosidade para escoamento unidimensional, conforme Equação 1 (FRANCO; PARTAL, 2010).

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} \quad (1)$$

Onde τ é a tensão de cisalhamento (Pa), μ é a viscosidade (Pa.s) e $\frac{du}{dy}$ é a taxa de cisalhamento (s^{-1}).

Esta equação implica que as tensões cisalhantes em um fluido são diretamente proporcionais à taxa de deformação destes. Os fluidos que obedecem esta proporcionalidade levam o nome de fluidos Newtonianos, e são os mais comuns na natureza, tais como água e ar (DAUGHERTY; FRANZINI, 1965; FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

Quando os fluidos não obedecem esta proporcionalidade, ou seja, a viscosidade μ varia com a taxa de deformação, eles são denominados fluidos não Newtonianos, e mesmo que menos comuns que os Newtonianos, são bastante importantes nas práticas do dia a dia, sendo que dentre estes, se encontram, tintas, certos plásticos, fluidos de perfuração de poços de petróleo, entre outros (DAUGHERTY; FRANZINI, 1965; FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

2.1.6 Escoamento compressível e incompressível

Segundo Çengel e Cimbala (2015), é possível classificar um escoamento como compressível e incompressível, sendo que os escoamentos nos quais a massa específica não varia significativamente no espaço e no tempo, denominam-se incompressível, enquanto que os escoamentos onde a variação da massa não é desprezível, denominam-se compressível. É importante destacar que a incompressibilidade é uma aproximação, ou seja, em qualquer escoamento existirá a variação da massa específica em seu campo. Geralmente, escoamentos de líquidos podem ser tratados como incompressível e gases como compressível.

2.1.7 Escoamento laminar e turbulento

Conforme Fox et al. (2010), em um escoamento laminar, as partículas do fluido movem-se em lisas camadas, ou como o nome já diz, em lâminas, apresentando um movimento suave e ordenado, geralmente, o escoamento de fluidos com alta viscosidade e baixa velocidade são tratados como laminar. Em contrapartida, em um escoamento turbulento, as partículas do fluido misturam-se rapidamente, apresentando um movimento altamente desordenado e com flutuações no campo tridimensional de velocidade, escoamentos de baixa viscosidade e alta velocidade geralmente são tratados como turbulento.

Ainda, conforme Çengel e Cimbala (2015), um escoamento pode ser chamado de transitório, quando este alterna entre os regimes laminares e turbulento. A fim de distinguir de forma parametrizada os escoamentos laminares e turbulento, Osborn Reynolds (1880), estudou ambos e criou o número adimensional, denominado número de Reynolds (Re), que é utilizado como um limiar entre os regimes de escoamento, sendo que quando o número de Reynolds é baixo, o regime é laminar, e quando é alto, turbulento. A Equação 2 permite calcular o número de Reynolds de determinado escoamento com base em suas propriedades.

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} \quad (2)$$

Onde ρ é a massa específica do fluido, u é a velocidade média, L é o comprimento característico em que o fluido escoar, e μ é a viscosidade dinâmica do fluido.

2.1.8 Escoamento interno e externo

Outra classificação para os escoamentos, é o escoamento interno e externo, que como o nome já indica, no escoamento interno, o fluido é confinado em um certo espaço, sendo assim limitado por superfícies sólidas, o movimento de fluidos em tubos ou dutos são exemplos deste. Quando o movimento do fluido ocorre sobre uma superfície, não estando confinado por superfícies sólidas, é denominado escoamento externo, o fluxo de ar sobre uma placa, é um exemplo típico desta classe (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

2.1.9 Escoamento permanente e transiente

De acordo com Çengel e Cimbala (2015), um escoamento é dito como permanente quando suas propriedades em um determinado ponto de seu domínio não variam ao longo do tempo. Ainda, conforme o mesmo autor, se as propriedades do escoamento em um determinado ponto de seu domínio variam com o tempo, este é denominado escoamento transiente.

2.1.10 Descrição Lagrangeana e Euleriana

Conforme Welty et al. (1984), na mecânica dos fluidos, uma propriedade genérica pode ser descrita através de duas formas básicas.

A primeira forma é a descrição Lagrangeana, na qual as propriedades físicas são descritas para um elemento particular de fluido, conforme este percorre o fluxo. Sendo assim, as coordenadas x , y e z são coordenadas do elemento de fluido, e são variáveis dependentes de t , uma vez que a posição de uma partícula de fluido varia com o decorrer do tempo (WELTY; RORRER; FOSTER, 1984).

De acordo com Welty et al. (1984), esta forma é a mais comumente utilizada na mecânica dos sólidos, porém, pouco utilizada na mecânica dos fluidos, uma vez que a informação desejada em seus fenômenos é o valor de uma determinada variável do fluido em um ponto fixo do escoamento, e não o valor de uma variável do fluido experimentada por uma partícula deste ao longo de seu escoamento. Além disso, seria muito difícil acompanhar o movimento de cada partícula ou parcela de fluido separadamente (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010)

Sendo assim, de acordo com o mesmo autor, outro tipo de descrição é utilizada para estudos de escoamento de fluidos, a denominada descrição Euleriana, na qual as coordenadas x , y e z são determinadas regiões do espaço, e são variáveis independentes, já que, para uma região fixa do espaço, x , y e z não dependem do tempo. Nesta forma de descrição, as propriedades do domínio do escoamento são descritas como funções das coordenadas espaciais e do tempo, e não das coordenadas da posição de uma partícula individual de fluido (WELTY; RORRER; FOSTER, 1984; ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

2.1.11 Campo de velocidade

De acordo com Daugherty et al. (1965), um dos campos da dinâmica dos fluidos de maior importância é o campo de velocidade, descrito conforme Equação 3.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \quad (3)$$

Como a velocidade é uma grandeza vetorial, necessitando de um módulo e direção para sua descrição completa, esta pode ser decomposta em suas três componentes escalares, de acordo com a Equação 4.

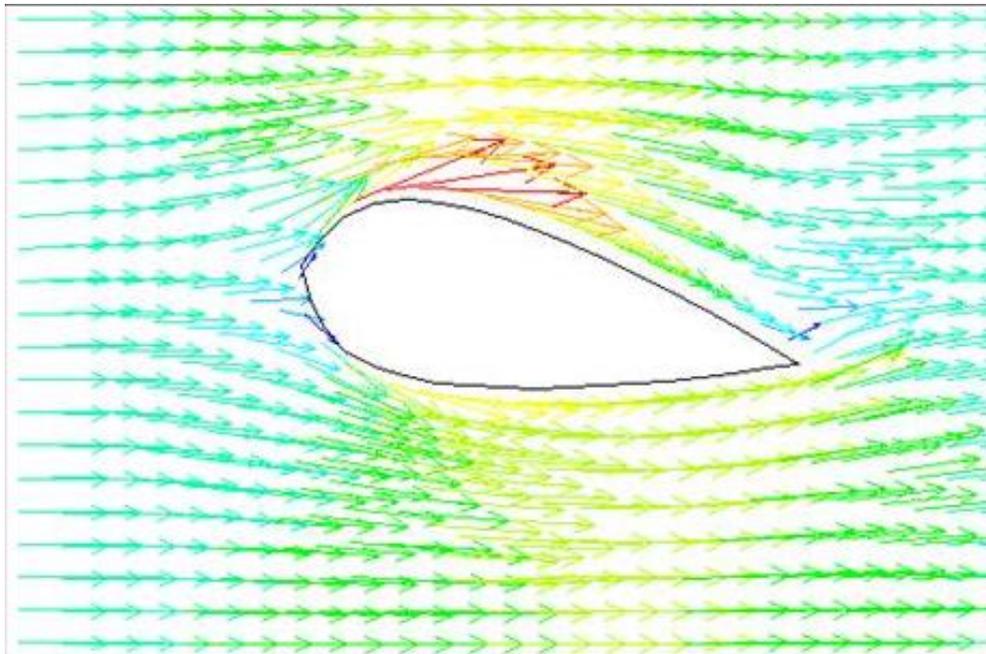
$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k} \quad (4)$$

Onde \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são os vetores unitários nas três direções espaciais e u , v e w são as três componentes escalares do vetor velocidade, nas direções x , y e z respectivamente.

É preciso deixar claro que este campo de velocidade indica a velocidade de uma parcela de fluido que passa pelo ponto x , y e z , no instante t , na descrição Euleriana, sendo assim, x , y e z não representa a posição de uma partícula individual, mas sim um ponto do espaço em que o escoamento está sendo analisado (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

A Figura 1 apresenta o campo de velocidade sobre um aerofólio, sendo que as setas representam os vetores de velocidade em cada ponto do domínio do escoamento.

Figura 1 – Campo de velocidade sobre aerofólio



Fonte: CARNEGIE MELLON (2017).

2.1.12 Campo de tensão

Segundo Çengel e Cimbala (2015), na mecânica dos fluidos, as partículas podem sofrer a ação de dois conjuntos de forças, as forças de campo e as forças de superfície. Em relação às forças de campo, encontram-se as forças de gravidade e forças eletromagnéticas. Em relação às forças de superfície, é possível a existência de forças de atrito ou de pressão.

De acordo com Fox et al. (2010), geralmente, a força da gravidade é a única força de campo agindo sobre uma partícula de fluido de volume dV , e é dada conforme Equação 5.

$$dF_c = dF_g = \rho g dV \quad (5)$$

Onde dF_c corresponde a força de campo (N), dF_g é a força da gravidade (N), ρ é a massa específica do volume infinitesimal dV (m^3) e g é a aceleração da gravidade local (m/s^2).

Conforme o mesmo autor, em relação as forças de superfície, ao agirem sobre uma superfície infinitesimal de área dA (m^2) de uma partícula de fluido, elas acabam gerando tensões normais e cisalhantes naquele ponto, já que:

$$\sigma = \tau = \frac{dF}{dA} \quad (6)$$

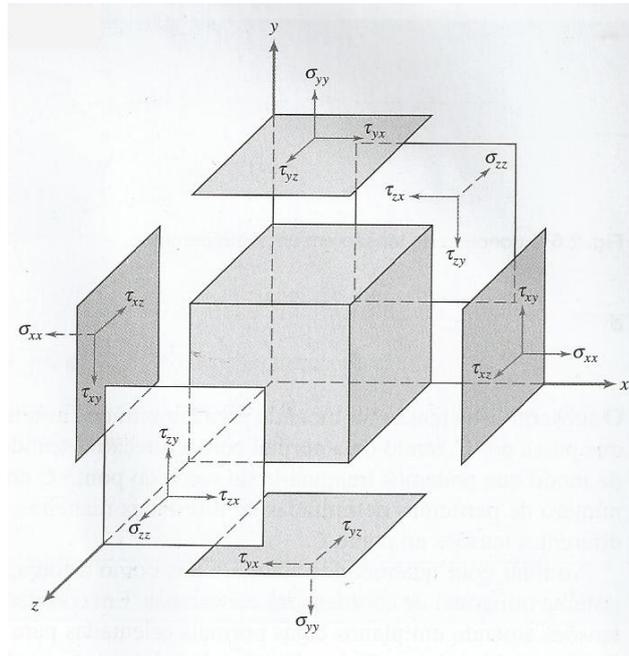
Onde σ representa a tensão normal ao plano e τ a tensão cisalhante. Além disso, as tensões totais geradas pelas forças de superfície agindo em uma partícula de fluido tridimensional, podem ser descritas pelo tensor de tensões, conforme matriz abaixo (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Na Matriz 7, o primeiro sub índice de cada componente representa o plano em que a força está agindo, e o segundo sub índice, representa a direção da força atuante.

A Figura 2 ilustra as 9 componentes das tensões de superfície geradas a partir das forças de superfície aplicadas à uma partícula de fluido tridimensional e infinitesimal.

Figura 2 – Tensões superficial sob uma partícula de fluido



Fonte: Fox, Pritchard, McDonald (2010, p. 28).

2.1.13 Pressão termodinâmica local

De acordo com Sonin (2001), pressão termodinâmica local é uma pressão hipotética que existiria se um fluido estivesse em equilíbrio estático na massa específica e temperatura local. De acordo com a termodinâmica estatística, a pressão termodinâmica pode diferir da pressão mecânica, aprendida nos cursos básicos de física e engenharia, já que o fluido é composto por moléculas complexas com graus de liberdade interno. Além disso, a diferença entre a pressão mecânica e termodinâmica depende da velocidade em que a massa específica do fluido está mudando em relação ao tempo.

2.1.14 Campo de aceleração

Conforme Çengel e Cimbala (2015), outro campo bastante importante na dinâmica dos fluidos, é o campo de aceleração. Porém, de acordo com Nachbin (2015), este campo de aceleração não pode ser derivado diretamente do campo de velocidade na descrição Euleriana, que é o modelo utilizada para descrever o campo

de velocidade de um escoamento de fluido, já que partículas diferentes ocuparão o mesmo ponto na região do espaço analisado em dois instantes de tempo diferentes, ou seja, a variação da velocidade para encontrar a aceleração não fará sentido, pois para o mesmo ponto, será utilizada a velocidade de duas partículas distintas.

Sendo assim, conforme Çengel e Cimbala (2015) e Daugherty et al. (1965), para encontrar o campo de aceleração de um escoamento, é necessário, inicialmente, encontrar a aceleração de uma partícula de fluido¹, que é descrita como a taxa de variação da velocidade da partícula em relação ao tempo.

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} \quad (8)$$

Onde \vec{a}_p é a aceleração instantânea da partícula, e $\frac{d\vec{V}_p}{dt}$ é o diferencial da velocidade da partícula no intervalo de tempo dt , quando este tende a zero.

Segundo os mesmos autores, como a velocidade da partícula tem de ser descrita na forma Lagrangeana para permitir a derivação, tem-se que as coordenadas x , y e z são dependentes do tempo, conforme visto no tópico 2.1.10 e descrito pela Equação 9.

$$\vec{V}_p(t) = \vec{V}(x_p(t) + y_p(t) + z_p(t), t) \quad (9)$$

Finalmente, utilizando a regra da cadeia, é possível derivar a velocidade da partícula em relação ao tempo e encontrar sua aceleração.

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\vec{V}(x_p(t) + y_p(t) + z_p(t), t)}{dt} \quad (10)$$

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}_p}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_p}{\partial x_p} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_p}{\partial y_p} \frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_p}{\partial z_p} \frac{dz_p}{dt} \quad (11)$$

¹ O sub índice p, significa que a propriedade é analisada no referencial Lagrangeano, ou seja, é a propriedade de uma certa partícula ou parcela de fluido conforme esta avança pelo escoamento.

De acordo com Çengel e Cimbala (2015), sabendo que a taxa de variação das componentes escalares da posição da partícula em relação ao tempo resulta nas componentes escalares da velocidade da partícula, conforme Equação 12.

$$\frac{dx_p}{dt} = u_p ; \frac{dy_p}{dt} = v_p ; \frac{dz_p}{dt} = w_p \quad (12)$$

E, conforme o mesmo autor, assumindo, por definição, que tanto o vetor velocidade quanto o vetor posição da partícula na descrição Lagrangeana no instante t é equivalente a um vetor velocidade e posição em um determinado ponto do espaço na descrição Euleriana, sendo que este ponto coincide com a posição da mesma partícula, no instante t, tem-se que a aceleração de uma partícula é dada por:

$$\vec{a}_p = \frac{D\vec{V}}{Dt} \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w \quad (13)$$

Por fim, cancelando a razão de dt, no lado direito da equação, e assumindo que a aceleração da partícula (Lagrangeano) na posição x, y, z no tempo t deve ser igual a aceleração no ponto (Euleriano) x, y e z no instante t do campo de aceleração, tem-se que, o campo de aceleração para o escoamento estudado é dado de acordo com a Equação 14 (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010; ÇENGEL; CIMBALA, 2015; DAUGHERTY; FRANZINI; 1965).

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w \quad (14)$$

Que pode ser expressa como variável de campo pela seguinte Equação:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (15)$$

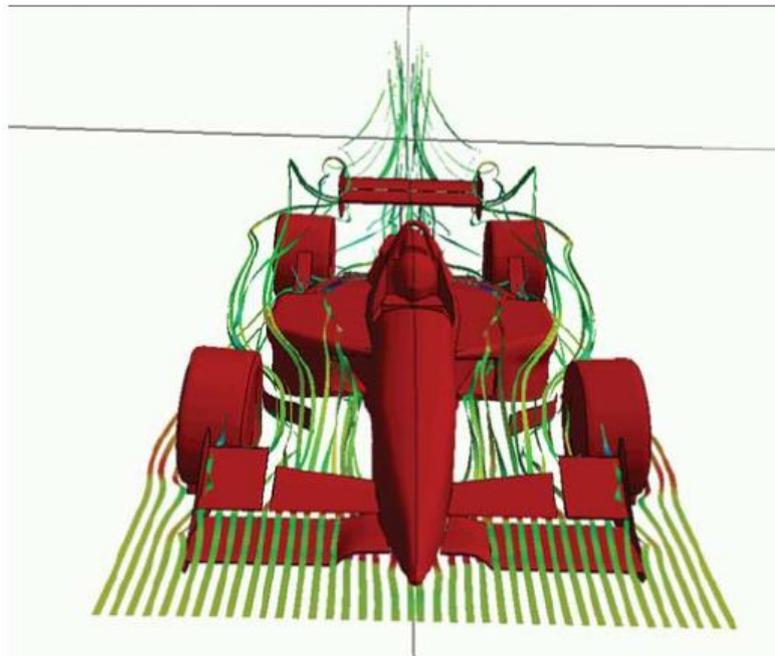
Sendo que ∇ é o operador Laplaciano, o termo $\vec{a}(x, y, z, t)$ se refere a aceleração total de um ponto ou partícula do escoamento, na posição x, y e z, no tempo t, conforme a descrição Euleriana, o termo $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ é a aceleração local e $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ é a aceleração convectiva, onde as partículas são aceleradas devido as diferenças de velocidade no domínio do escoamento.

2.1.15 Linhas de corrente

Linhas de corrente são linhas que tangenciam os vetores velocidade em todos os pontos do escoamento, além disso, duas linhas de corrente não podem se interceptar, uma vez que isso implicaria em um ponto com duas velocidades distintas. Esta ferramenta é bastante utilizada em simulações computacionais, pois facilita a visualização e o entendimento dos dados encontrados nas reproduções virtuais (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010; ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

A Figura 3 representa linhas de corrente do escoamento de ar sob uma fórmula Indy.

Figura 3 – Linhas de corrente na asa dianteira de uma fórmula Indy



Fonte: Katz (2006, p. 56).

2.2 Modelagem matemática

Neste tópico, serão abordadas as leis básicas juntamente com as equações governantes dos escoamentos de fluido. Além disso, serão abordados alguns métodos matemáticos utilizados para representar ou deduzir estas equações.

2.2.1 Equações diferenciais

De acordo com Nagle et al. (2012), geralmente o modelamento matemático de fenômenos físicos envolve uma ou mais derivadas em sua formulação. Sendo assim, quando derivadas de uma função estão presentes em equações, estas levam o nome de equação diferencial.

Conforme o mesmo autor, quando uma equação diferencial envolve derivadas relacionadas a apenas uma variável independente, esta é denominada equação diferencial ordinária (EDO). Quando a equação diferencial envolve derivadas relacionadas a mais de uma variável independente, é denominada equação diferencial parcial (EDP).

As equações que governam o escoamento de fluidos e serão abordadas em seguida, fazem parte da segunda classe, as EDP's.

2.2.2 Operadores vetoriais

É possível utilizar as operações vetoriais tanto em campos vetoriais como em escalares, sendo que quando este tipo de processo é realizado em operações diferenciais, ou seja, quando as operações vetoriais diferenciais são utilizadas, um operador diferencial $\vec{\nabla}$ (ou operador laplaciano), em coordenadas cartesianas, é definido conforme Equação 16 (GRAÇA, 2012).

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (16)$$

As operações vetoriais mais utilizadas na mecânica dos fluidos são as gradientes e as divergentes.

2.2.2.1 Operadores gradiente

Conforme Graça (2012), o gradiente de uma grandeza escalar, é a sua variação por unidade de espaço, ou seja, o produto escalar do operador vetorial e a

grandeza escalar. Por exemplo, o gradiente da massa específica ρ , é dado conforme Equação 17.

$$\text{grad } \rho = \vec{\nabla} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \hat{k} \quad (17)$$

2.2.2.2 Operadores divergente

Segundo Graça (2012), o divergente de uma grandeza vetorial, é o produto escalar entre a grandeza e o operador vetorial. Por exemplo, o divergente do vetor velocidade \vec{V} , é dado pela Equação 18.

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (18)$$

Onde u , v e w são as componentes escalares da velocidade nas três dimensões do espaço.

2.2.3 Expansão em série de Taylor

Conforme Fortuna (2012), seja $f(x)$ uma função arbitrária e contínua, é possível utilizar o teorema de Taylor para estudar o comportamento desta função em torno de um ponto fixo x_1 , ou seja, qual será o comportamento desta função no ponto $x = x_1 + \Delta x$ ou $x = x_1 - \Delta x$, partindo de uma expansão em série de Taylor em torno do ponto x_1 da função. A expansão em série de Taylor em torno de x_1 que permite conhecer o comportamento de um ponto vizinho $x = x_1 + \Delta x$ é dada conforme Equação 19.

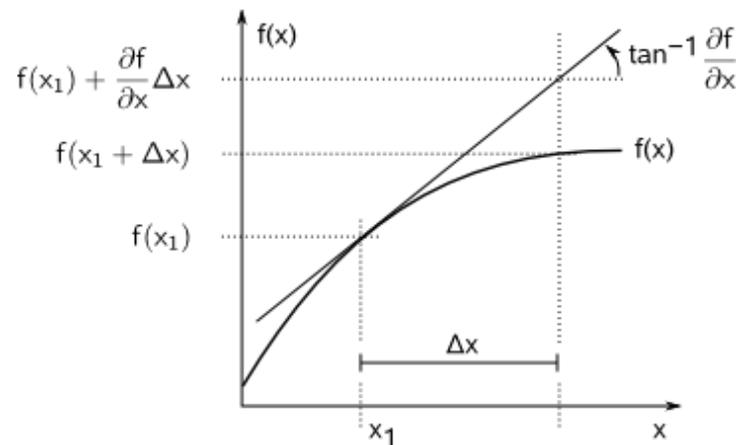
$$f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_1} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{x_1} + h.o.t \quad (19)$$

Onde x_1 é o ponto em que a função foi expandida, $x_1 + \Delta x$ é o ponto vizinho de x_1 e onde se pretende analisar o comportamento, $n!$ é o n fatorial e $\left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_{x_1}$ é a n ésima derivada de $f(x)$ em relação a x avaliada no ponto x_1 . O termo h.o.t

representa os termos de ordem superior (*high order terms*) da expansão, e em muitas aplicações, podem ser desconsiderados.

A Figura 4 representa a expansão em séries de Taylor em torno do ponto x_1 .

Figura 4 – Expansão em torno do ponto x_1



Fonte: Fortuna (2012, p. 85).

Conforme observado na Figura 4, quanto menor o Δx , o valor $x_1 + \Delta x$ se aproxima cada vez mais do valor no ponto x_1 , mais a inclinação da reta tangente no ponto x_1 , que é a derivada de $f(x)$ em relação a x neste ponto, sendo assim, para pequenos valores de Δx , o ponto $x_1 + \Delta x$ pode ser analisado, através da expansão de série de Taylor em torno do ponto x_1 , considerando apenas a primeira derivada na expansão de Taylor, conforme Equação 20 (FORTUNA, 2012).

$$f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_1} + h. o. t \quad (20)$$

Este artifício matemático é de grande utilidade na dedução das equações governantes dos problemas envolvidos na dinâmica de fluidos, uma vez que permite, através de sua expansão em torno de um ponto que possui uma propriedade ϕ , encontrar os valores vizinhos desta propriedade. Além disso, a expansão em séries de Taylor é utilizada como base para alguns métodos numéricos utilizados na solução de equações diferenciais parciais (PATANKAR, V. S., 1980).

2.2.4 Leis fundamentais da física

Segundo Welty et al. (1984), existem três leis físicas que, com exceção de fenômenos nucleares e relativísticos, podem ser aplicadas a qualquer estudo na dinâmica dos fluidos:

- Conservação de massa;
- Segunda Lei de Newton;
- Primeira Lei da Termodinâmica.

2.2.5 Formulação integral vs diferencial

De acordo com Fox et al. (2010), as leis fundamentais aplicadas na mecânica dos fluidos podem ser formuladas de duas maneiras distintas, a formulação integral e a formulação diferencial.

Na formulação diferencial, o conjunto de equações que descrevem os fenômenos estudados, como o nome já sugerem, são diferenciais, e fornecem uma maneira de determinar detalhadamente o comportamento do fenômeno, como a distribuição de pressão na superfície de uma asa. Já a formulação integral, não fornece uma descrição detalhada do fenômeno, mas sim uma resposta mais global, como a sustentação total que uma asa produz. A vantagem da formulação integral é que, em geral, ela apresenta um tratamento analítico mais simples (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

2.2.6 Sistema e volume de controle

As leis fundamentais da física apresentadas no tópico 2.2.4 são escritas em termos de um sistema, que tem como principal característica o fato de conter uma quantidade fixa de matéria. Sendo que estas leis fundamentais descrevem a interação do sistema com sua vizinhança. Sendo assim, para uma partícula de fluido que compõe um sistema, sua descrição é feita na forma Lagrangeana, já que é necessário acompanhar esta partícula para aplicar as leis fundamentais da física,

conservando assim a sua massa (WELTY; RORRER; FOSTER, 1984; FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

Como a aplicação de sistemas resulta na descrição Lagrangiana, é necessário utilizar outro modelo para aplicar as leis fundamentais da física na mecânica dos fluidos na descrição Euleriana, este modelo se baseia no conceito de Volume de Controle (V.C.), que é definido como uma região do espaço por onde um fluido escoar e que tem como fronteira uma Superfície de Controle (S.C.), além disso, este conceito de V.C. facilita muito a aplicação destas leis quando comparada ao sistema de massa fixa (WELTY; RORRER; FOSTER, 1984).

Sendo assim, conforme Welty et al. (1984), é necessário converter as leis fundamentais que são aplicadas na aproximação de sistema, para uma aproximação de V.C., sendo que este pode ser tanto finito, como infinitesimal. Por exemplo, para a equação da conservação de massa na forma diferencial, o teorema de transporte de Reynolds (TTR) é responsável por esta conversão.

2.2.7 Teorema de transporte de Reynolds

De acordo com Lai et al. (2010), em 1800, Osborn Reynolds desenvolveu o teorema de transporte de Reynolds com o objetivo de estabelecer uma correspondência entre um sistema de massa fixa na descrição Lagrangiana, para um volume de controle de massa variável na descrição Euleriana, permitindo assim a correlação entre as leis aplicadas a um sistema e a um volume de controle.

Conforme Fox et al. (2010), sendo N uma propriedade extensiva, que depende diretamente da massa do sistema, tal como quantidade de massa ou de movimento, e η uma propriedade intensiva, que é definida como a propriedade extensiva dividida por uma unidade de massa, tal como massa específica ou energia específica, a equação geral do teorema de transporte de Reynolds que relaciona a taxa de variação de uma propriedade N em relação ao tempo de um sistema (descrição Lagrangeana), e a taxa de variação da propriedade N em relação ao

tempo de um volume de controle (descrição Euleriana) é dada conforme Equação 21².

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \eta \rho dV + \int_{S.C} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (21)$$

O termo $\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sistema}$ representa a taxa de variação da propriedade N do sistema, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \eta \rho dV$ é a taxa de variação da quantidade da propriedade N dentro do V.C., e por fim, $\int_{S.C} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ representa a taxa na qual a propriedade N está saindo pela superfície de controle.

2.2.8 Equação da continuidade ou da conservação de massa

Conforme discutido anteriormente, a conservação de massa é uma das leis fundamentais utilizadas para descrever o comportamento do escoamento de fluidos, de acordo com Fox et al. (2010), esta lei, que muitas vezes é chamada de equação da continuidade, pode ser escrita pela seguinte igualdade na aproximação de sistema:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sistema} = 0 \quad (22)$$

Isto implica que a taxa de variação de massa (m) em relação ao tempo em um sistema é igual a 0. Como a equação 22 é baseada na descrição Lagrangeana, é necessário converter esta equação utilizando as relações do teorema de transporte de Reynolds. Ou seja, aplicando a equação 21 na 22, considerando $N = m$ e $\eta = m/m = 1$, a forma da equação da continuidade ou da conservação de massa aplicada à um Volume de Controle e conseqüentemente descrita na forma Euleriana, é dada de acordo com a Equação 24.

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \rho dV + \int_{S.C} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (23)$$

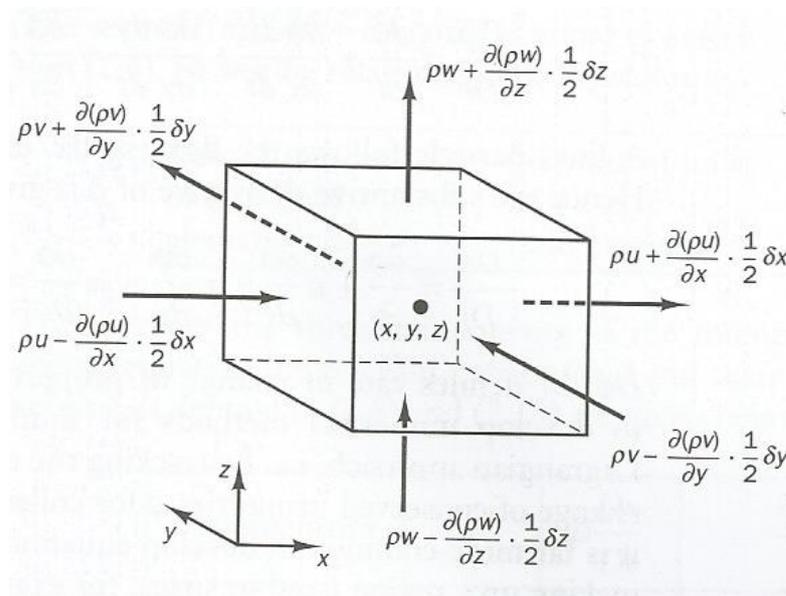
² A dedução do teorema de transporte de Reynolds pode ser encontrada no livro Introdução à Mecânica dos Fluidos, 2010, de Robert W. Fox et al., a partir da página 91.

Sendo assim, a taxa de variação da quantidade de massa no V.C., mais a taxa de massa saindo pela S.C. é igual a 0. Esta é a forma integral da conservação de massa, aproximada para um volume de controle, na descrição Euleriana (WELTY; RORRER; FOSTER, 1984; FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

Porém, como visto nos tópicos anteriores, para um estudo mais detalhado do escoamento de fluidos, que é o objetivo deste trabalho, é necessário utilizar as equações na forma diferencial, ou seja, aplicar a equação da continuidade deduzida a partir do teorema de transporte de Reynolds, para um volume de controle infinitesimal.

De acordo com Fox et al. (2010) e Welty et al. (1984), seja um volume de controle infinitesimal, como o da Figura 5, com dimensões dx , dy e dz , massa específica $\rho(x,y,z)$ e velocidade vetorial $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ no centro O do V.C., é possível aplicar a expansão em série de Taylor em torno do ponto O para avaliar a massa específica e velocidade de seus pontos vizinhos, nas três dimensões espaciais.

Figura 5 – Volume de controle infinitesimal



Fonte: Versteeg e Malalasekera (2007, p. 11).

Sendo assim, de acordo com Fox et al. (2010) e Welty et al. (1984), por exemplo, para analisar o comportamento da massa específica no ponto $\rho\left(x + \frac{dx}{2}\right)$ e

a componente da velocidade no eixo x no ponto $u\left(x + \frac{dx}{2}\right)$, aplicando a expansão de Taylor em torno do ponto $\rho(x)$ e $u(x)$ tem-se, para a massa específica, a Equação 24.

$$\rho\left(x + \frac{dx}{2}\right) = \rho(x) + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + h. o. t \quad (24)$$

E para a componente u da velocidade, a Equação 25.

$$u\left(x + \frac{dx}{2}\right) = u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + h. o. t \quad (25)$$

Além disso, desprezando os termos de ordem superior, já que dx tende a zero, é possível escrever a massa específica e a componente x da velocidade no ponto $\left(x + \frac{dx}{2}\right)$, sendo que para massa específica, tem-se.

$$\rho\left(x + \frac{dx}{2}\right) = \rho(x) + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad (26)$$

E para componente x da velocidade no ponto $\left(x + \frac{dx}{2}\right)$:

$$u\left(x + \frac{dx}{2}\right) = u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad (27)$$

Repetindo esta análise para todas as faces do volume infinitesimal da figura 5, é possível obter expressões semelhantes para massa específica e velocidade nestes planos. Ainda, de acordo com os mesmos autores, as expressões da velocidade e massa específica nas superfícies do V.C. podem ser utilizadas para analisar a integral de superfície da Equação da conservação de massa 23, que resulta na Equação 28.

$$\int_{S.C} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (28)$$

Para completar a análise da Equação 23, é necessário avaliar a integral de volume da expressão, utilizando o V.C. da figura 5, com volume infinitesimal de $dx \cdot dy \cdot dz$ e que resulta na Equação 29.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \eta \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (29)$$

Substituindo as Equações 28 e 29 na expressão da conservação de massa na forma integral (23), tem-se a Equação 30.

$$\left(\frac{dM}{dt} \right)_{sistema} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz = 0 \quad (30)$$

Por fim, segundo Fox et al. (2010) e Welty et al. (1984), cancelando os termos dx, dy e dz, é deduzida a equação da continuidade em coordenadas retangulares, na forma diferencial e na aproximação de volume de controle ou Euleriana.

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (31)$$

Ainda, conforme Çengel e Cimbala (2015), a Equação 31 pode ser simplificada, caso o escoamento analisado seja aproximado como incompressível, de acordo com a Equação 32.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (32)$$

Por fim, conforme o mesmo autor, a Equação 31 também pode ser simplificada aproximando o escoamento como permanente, resultando na Equação 33.

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (33)$$

2.2.9 Equação da quantidade de movimento

Outra lei básica que é utilizada na mecânica dos fluidos, é a equação da quantidade de movimento, ou segunda lei de Newton, que conforme Çengel e Cimbala (2015), relaciona as forças aplicadas à uma partícula e a taxa de variação da quantidade de movimento linear desta, e, para um sistema na descrição Lagrangeana, é dada de acordo com a Equação 34.

$$F = \left. \frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{\text{sistema}} \quad (34)$$

Assim como na equação da continuidade, Fox et al. (2010) demonstra que é necessário aplicar a segunda lei de Newton à um elemento infinitesimal, para um mapeamento completo do domínio do escoamento, partícula por partícula. Sendo assim, a equação 34 pode ser escrita conforme Equação 35.

$$dF = dm \left. \frac{D\vec{V}}{Dt} \right)_{\text{sistema}} \quad (35)$$

O termo da taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, é a aceleração da partícula na descrição Lagrangeana, e conforme já abordado no tópico 2.1.14, a aceleração de uma partícula na aproximação Lagrangeana que está em um instante t em x , y e z , coincide com a aceleração no instante t e no ponto x , y e z do volume de controle, permitindo assim, uma descrição da segunda lei de Newton na aproximação Euleriana, e sua aplicabilidade em diversos problemas da dinâmica dos fluidos.

$$dF = dm \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w \right) \quad (36)$$

A Equação 36 descreve a segunda lei de Newton, na forma diferencial e vetorial.

Ainda, conforme Fox et al. (2010) e Welty et al. (1984), após analisar mais precisamente a velocidade, é necessário obter uma formulação adequada para o diferencial de força do lado esquerdo da igualdade. Conforme visto anteriormente, as forças atuantes em um volume infinitesimal de fluido podem ser de campo e de superfície, conforme Equação 37.

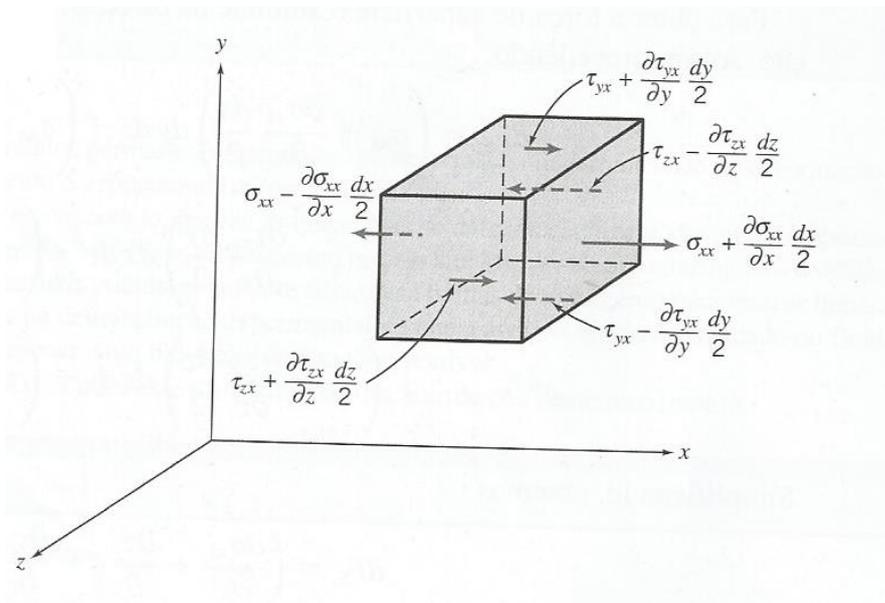
$$dF_s + dF_c = dm \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w \right) \quad (37)$$

Utilizando o tensor de tensões (7), que representa as tensões geradas na superfície de um elemento infinitesimal, e conforme Fox et al. (2010) e Welty et al. (1984), aplicando a expansão em séries de Taylor no centro de um volume

infinitesimal, considerando as tensões que agem na direção x conforme Figura 6, é possível encontrar as tensões de superfície correspondentes nesta direção, em todas as faces do V.C., de acordo com a Equação 38.

$$dF_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (38)$$

Figura 6 – Tensões sobre um elemento de fluido na direção x



Fonte: Fox, Pritchard, McDonald (2010, p. 180).

Para as direções y e z, obtêm-se equações semelhantes, conforme abaixo.

$$dF_{sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (39)$$

$$dF_{sz} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (40)$$

As expressões 38, 39 e 40 representam as forças de superfície nas três dimensões do volume de controle infinitesimal.

Em relação as forças de campo, conforme visto no tópico do campo de tensão, geralmente, a única força atuante em um escoamento de fluido é a força gravitacional, sendo assim, conforme Fox et al. (2010), as componentes escalares

das forças de campo na dinâmica dos fluidos ficam conforme as Equações 41, 42 e 43.

$$dF_{cx} = mg_x = (\rho dx dy dz) g_x \quad (41)$$

$$dF_{cy} = mg_y = (\rho dx dy dz) g_y \quad (42)$$

$$dF_{cz} = mg_z = (\rho dx dy dz) g_z \quad (43)$$

Segundo Fox et al. (2010), e Welty et al. (1984), após deduzir as forças atuantes em um volume de controle infinitesimal, bem como a sua aceleração, é possível, com certa manipulação matemática, reescrever a equação da segunda lei de Newton na forma diferencial para um volume de controle na descrição Euleriana, que por ser uma equação vetorial, pode ser decomposta nos três componentes escalares, conforme Equações 44, 45 e 46.

Em x:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (44)$$

Em y:

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (45)$$

Em z:

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (46)$$

Conforme Fox et al. (2010), as equações acima podem ser aplicadas a todos os volumes de controle infinitesimais do domínio de escoamento, sendo que estes volumes infinitesimais, de acordo com a hipótese do contínuo, podem ser aproximados como partículas de fluido. Porém, antes de aplicar estas equações, é necessário expressar as tensões envolvidas em termos do campo de velocidade e de pressão, permitindo assim, a partir do conhecimento destes dois campos, uma análise completa das relações entre forças e movimento no escoamento.

2.2.10 Equação de Navier-Stokes

Conforme discutido no t3pico anterior, a fim de escrever as equa33es da quantidade de movimento somente atrav3s dos campos de press3o e velocidade, 3 necess3rio encontrar uma rela33o entre as tens3es envolvidas no escoamento e seus campos de velocidade e de press3o. Segundo Fox et al. (2010) e Welty et al. (1984), esta rela33o 3 obtida atrav3s da proporcionalidade entre as tens3es e suas taxas de deforma33o angular, como visto no t3pico 2.1.5³.

Sendo assim, de acordo com Fox et al. (2010), a rela33o entre as tens3es e campos de velocidade e press3o, s3o dadas conforme Equa33es abaixo.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (47)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (48)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (49)$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (50)$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (51)$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (52)$$

Onde p 3 a press3o termodin3mica local.

De acordo com o mesmo autor, substituindo as tens3es nas Equa33es da quantidade de movimento (44, 45 e 46) pelas Equa33es que relacionam tens3es com o campo de velocidade e press3o do escoamento, tem-se:

³ No t3pico fluido Newtoniano e n3o Newtoniano (2.1.5), foi apresentada a rela33o entre tens3o cisalhante e taxa de deforma33o angular para um escoamento Newtoniano, laminar e unidimensional, sendo que, no caso das equa33es 44, 45 e 46, o escoamento 3 tridimensional, conseq3entemente, as rela33es procuradas s3o bem mais complexas e s3o encontradas no livro *Fluid Dynamics, dos autores James Daily e Donald Harleman, 1966.*

Em x:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \left[\mu \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]}{\partial y} + \frac{\partial \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]}{\partial z} \quad (53)$$

Em y:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\mu \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]}{\partial y} + \frac{\partial \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]}{\partial z} \quad (54)$$

Em z:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]}{\partial y} + \frac{\partial \left[\mu \left(-\frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]}{\partial z} \quad (55)$$

Por fim, estas são as equações da quantidade de movimento na forma diferencial em coordenadas retangulares na aproximação Euleriana, escritas em termos do campo de velocidade e pressão, que também são conhecidas como equações de Navier-Stokes, em homenagem aos matemáticos Claude Louis Marie Henri Navier e George Gabriel Stokes, responsáveis pelo seu desenvolvimento.

Conforme Fox et al. (2010), Welty et al. (1984) e Çengel e Cimbala (2015), é possível simplificar as equações de Navier-Stokes, aproximando o escoamento de estudo como incompressível e de viscosidade constante, tornando-as mais simples, uma vez que os termos $\nabla \cdot \vec{V}$ se igualam a zero. Sendo assim, após manipulações matemáticas, as equações da quantidade de movimento, ou da segunda lei de Newton, podem ser descritas conforme abaixo.

Em x:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (56)$$

Em y:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (57)$$

Em z:
$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (58)$$

2.2.11 Forma genérica da equação de transporte

De acordo com Patankar (1980), as equações de conservação abordadas anteriormente possuem diversos termos em comum, que podem, introduzindo uma variável genérica ϕ , que representa a variável dependente de interesse, serem descritas através de uma única equação de forma genérica, chamada equação de transporte, conforme Equação 59⁴.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho\vec{V}\phi) = \text{div}(\Gamma\text{grad}\phi) + S \quad (59)$$

Onde Γ é o coeficiente difusivo, e S é o termo fonte do fenômeno analisado, div é a abreviação do operador divergente e grad do operador gradiente. O $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)$ representa o termo transiente da equação de transporte, $\text{div}(\rho\vec{V}\phi)$ representa o termo convectivo, $\text{div}(\Gamma\text{grad}\phi)$ é o termo difusivo e, por fim, S representa o termo fonte. Além disso, as quantidades de Γ e S são específicas da propriedade de estudo ϕ (PATANKAR, V., S., 1980). O Quadro 1 apresenta quais são os valores das quantidades de ϕ , Γ e S para equação de transporte na forma genérica formar as equações da continuidade e da quantidade de movimento, abordadas anteriormente.

Quadro 1 – Definição das variáveis ϕ , Γ e S para as equações da quantidade de movimento e conservação de massa

Variável	ϕ	Γ	S
Massa	1	0	0
Quantidade de movimento	\vec{V}	μ	$\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}$

Fonte: Adaptado pelo autor com base em Maliska (2014, p. 16).

⁴ As relações entre as equações conservativas e os termos S e Γ podem ser encontradas no livro *Computational Fluid Dynamics – The Basics With Applications*, 1995, do autor John D. Anderson, Jr., a partir da página 82.

É possível analisar qualitativamente a Equação 59, conforme Versteeg e Malalasekera (2007), sendo que o primeiro termo da equação significa a taxa de incremento da propriedade genérica ϕ no volume de controle, o termo convectivo representa a taxa líquida de fluxo da propriedade ϕ no V.C., o termo difusivo representa a taxa de incremento da propriedade ϕ devido a difusão, e o termo fonte representa a taxa de incremento da propriedade dependente devido a fontes externas.

A estrutura comum dos modelos matemáticos da dinâmica dos fluidos, escritos na forma genérica da equação de transporte (59), sugere uma aproximação sistemática para análise, discretização e codificação, facilitando assim o desenvolvimento, implementação e testes de métodos numéricos para aplicações em DFC. Outra característica importante desta equação generalizada, é que ela permite investigar, de forma simples, o comportamento da solução em casos limitados, como na difusão pura, convecção pura, estado estacionário etc., viabilizando modelamentos de problemas testes simplificados e que possuem soluções analíticas (KUZMIN, 2010).

2.3 Modelagem numérica

Neste tópico serão abordados os métodos numéricos utilizados para obtenção das soluções numéricas das equações da quantidade de movimento e da conservação de massa. Também serão discutidas algumas das técnicas e algoritmos utilizados por estes métodos.

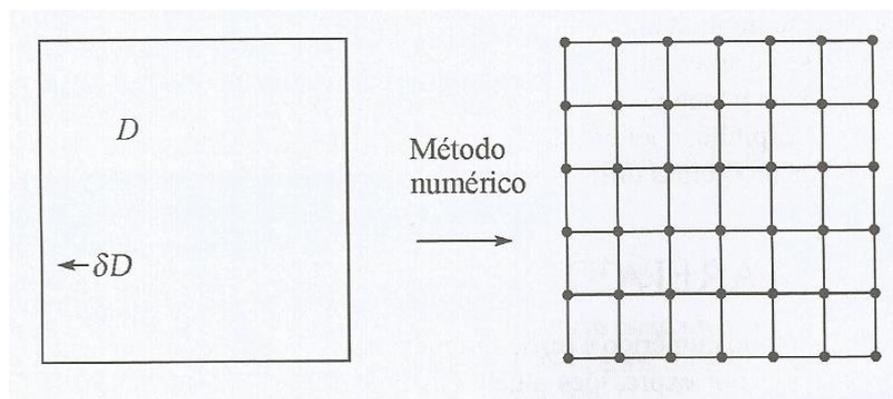
2.3.1 Métodos numéricos

Métodos numéricos são técnicas matemáticas utilizadas na resolução de problemas matemáticos que são difíceis, ou como em muitos casos reais, impossíveis de obter uma solução analítica. Além disso, as soluções numéricas correspondem a soluções aproximadas do problema real, obtidas através de métodos iterativos e de interpolação, com uma precisão desejada, apresentando

soluções muito similares quando comparadas as soluções exatas do problema (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

Basicamente, os métodos numéricos são estruturados a partir do processo de discretização, que consiste em reduzir um problema contínuo, que possui infinitos números de variáveis, para um problema discreto, possuindo finitos números de variáveis, e que podem ser resolvidos através da computação digital (MATSUBARA; ROMEIRO, 2014).

Figura 7 – Domínio contínuo vs discreto



Fonte: Maliska (2014, p. 28).

Como visto anteriormente, as equações que descrevem o escoamento de fluidos são EDP's bastante complexas, que geralmente apresentam uma solução analítica apenas em casos com geometria e condições de escoamento muito simplificadas, obrigando o calculista a utilizar métodos numéricos para encontrar suas soluções aproximadas (SANTOS, 1999).

Sendo assim, de acordo com Sherwin e Pieró (2005), existem três escolhas clássicas para solução numérica de EDP's como as que modelam os escoamentos de fluido, são eles:

- Método das diferenças finitas (MDF);
- Método dos elementos finitos (MEF);
- Método dos volumes finitos (MVF).

2.3.2 Métodos das diferenças finitas (MDF)

De acordo com Deus et al. (2010), o método consiste basicamente na discretização do domínio (seja uma região do espaço, ou uma entidade física), em diversos pontos, chamados pontos de malha, nos quais serão aplicadas a expansão em séries de Taylor para substituir as derivadas que fazem parte da equação diferencial do problema, por formulações algébricas.

Segundo Sherwin e Pieró (2005), o MDF é o método mais antigo aplicado para solução numérica de EDP's e apresenta limitações quando aplicado em geometrias complexas ou com mais de uma dimensão. Por este motivo, novos métodos foram estudados e desenvolvidos para solução de equações diferenciais parciais, utilizando formulações integrais e dando origem aos métodos dos elementos e de volumes finitos.

2.3.3 Métodos dos elementos finitos (MEF)

O método dos elementos finitos, consiste na divisão do domínio no meio contínuo em diversos elementos ou subdomínios, chamados de elementos finitos. Esses elementos são interconectados entre si, a partir de nós ou pontos nodais, sendo que o conjunto de elementos e de nós consistem na malha do problema analisado (De SOUZA, M. R., 2003). Conforme Zienkiewicz (1977), este método numérico tem como objetivo substituir a equação diferencial do problema por uma formulação variacional deste, gerando equações algébricas lineares que fornecem a solução do problema de forma aproximada nos diversos nós da malha.

Segundo Maliska (2014), o MEF é um método numérico amplamente utilizado, foi inicialmente empregado na área de elasticidade, possibilitando soluções aproximadas precisas em problemas com geometrias complexas, fornecendo resultados com grande grau de precisão, característica que faltava no método das diferenças finitas.

2.3.4 Métodos dos volumes finitos (MVF)

De acordo com Moukalled et al. (2016), o método dos volumes finitos é uma técnica numérica utilizada para transformar as equações diferenciais parciais que representam as leis fundamentais da física no contínuo, em equações algébricas discretas sobre volumes de controle.

Segundo o mesmo autor, primeiramente, é necessário discretizar o domínio geométrico do problema em diversos volumes finitos, sem sobrepô-los, sendo que um nó computacional é localizado no centro de cada volume. Esta discretização gerará uma malha de volumes finitos, semelhante ao MEF.

Posteriormente, para obtenção das equações algébricas, as EDP's são discretizadas, integrando-as sobre os volumes finitos criados anteriormente e sobre o tempo, caso o fenômeno seja transiente, gerando valores das variáveis dependentes nos nós localizado no centro do volume finito, enquanto que os valores das variáveis nas superfícies do volume finito são obtidos por meio de interpolações em função dos valores nodais. Por fim, o sistema de equações algébricas geradas anteriormente e que apresentam as relações da variável analisada entre os diversos nós dos volumes de controle, é solucionado utilizando métodos iterativos ou diretos, fornecendo as variáveis dependentes para cada volume (GONÇALVES, 2007).

Conforme Maliska (2014), tanto o MDF quanto o MEF trabalham com pontos da malha, ao contrário do MVF, que trabalha com volumes de controle de malha. Por este motivo, uma das principais vantagens de utilizar o MVF como método numérico para discretização de EDP's na dinâmica dos fluidos é a sua característica conservativa, já que, para este tipo de estudo, é muito importante a satisfação dos princípios de conservação em nível discreto, e, como nesta técnica o balanço de energia é realizado em cada volume finito, todos os princípios conservativos são satisfeitos.

2.3.4.1 Condições iniciais e de contorno

Diversas equações diferenciais parciais governam incontáveis problemas semelhantes, esta característica ocorre, pois, este tipo de equação possui infinitas soluções. O que diferencia uma solução específica de um fenômeno físico estudado

e o conjunto de infinitas soluções das EDP's são as condições impostas nas equações governantes, estas condições são denominadas condições iniciais, quando elas existem em certo instante inicial, e de condições de contorno, quando existem nas fronteiras do meio analisado (POLYANIN, 2002).

Ainda, de acordo com Malalasekera e Versteeg (2007), todos os problemas da dinâmica dos fluidos computacional são definidos em termos das condições iniciais e de contorno. Sendo assim, é muito importante que o calculista aplique estas condições de forma correta e que entenda sua importância no método numérico. Em relação as condições iniciais, o autor afirma que em fenômenos transiente, estas condições precisam ser aplicadas para todas as variáveis e em todos os pontos do domínio do escoamento, ou seja, os valores das variáveis precisam ser especificados no instante de tempo inicial.

Em relação as condições de contorno, Malalasekera e Versteeg (2007), afirmam que, para os problemas em DFC utilizando o método dos volumes finitos, as mais utilizadas são:

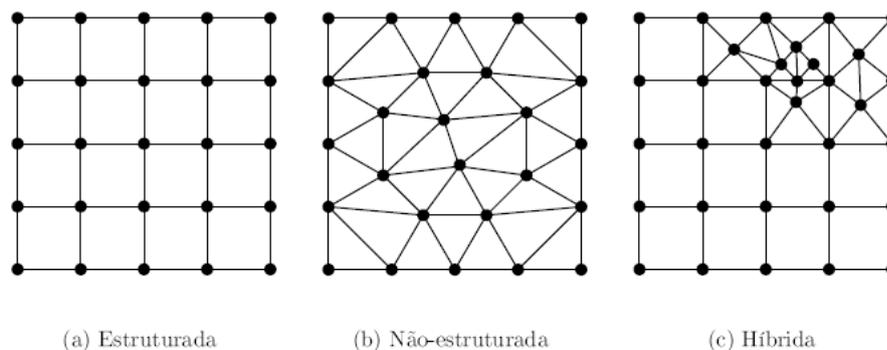
- Condições de entrada: são condições aplicadas na entrada do domínio de estudo, sendo que a distribuição de todas as variáveis do escoamento nesta entrada é obrigatória para aplicação do método numérico.
- Condições de saída: são condições aplicadas na saída do domínio, estas condições de contorno podem ser usadas em conjunto com as condições de entrada, porém, não são obrigatórias.
- Condições de parede: são as condições mais comuns em escoamento de fluidos confinados, sendo aplicada onde fluidos não podem atravessar ou onde existe a condição de não deslizamento, o que impõe que o valor das velocidades neste contorno é igual a zero.
- Condições de pressão pré-estabelecidas: são condições aplicadas em situações em que os detalhes exatos da distribuição das variáveis do fluido são desconhecidos, porém, os valores de contorno das pressões são conhecidos.
- Condições de simetria: Esta condição de contorno é caracterizada pela ausência de fluxo escalar através do eixo de simetria onde a condição foi aplicada.

2.3.4.2 Tipos de malha

Conforme Batista (2005), existem basicamente três tipos de malhas para discretização do domínio de estudo, as malhas estruturadas, as não estruturadas e as híbridas.

As malhas estruturadas são as utilizadas em problemas com geometrias mais simples, sendo que sua principal característica é que os volumes ou elementos da malha possuem um número constante de elementos vizinhos. Nas malhas não estruturadas, ao contrário das estruturadas, diferentes elementos não terão um número constante de elementos vizinhos, permitindo a discretização de geometrias e domínios mais complexos. Por fim, as malhas híbridas são geradas na junção das malhas estruturadas com as não estruturadas, não possuindo características bem definidas (BATISTA, 2005; PAITAN, 2013). A Figura 8 ilustra os três tipos de malha citadas acima.

Figura 8 – Malha estruturada vs não estruturada vs híbrida



Fonte: Batista (2005, p. 2).

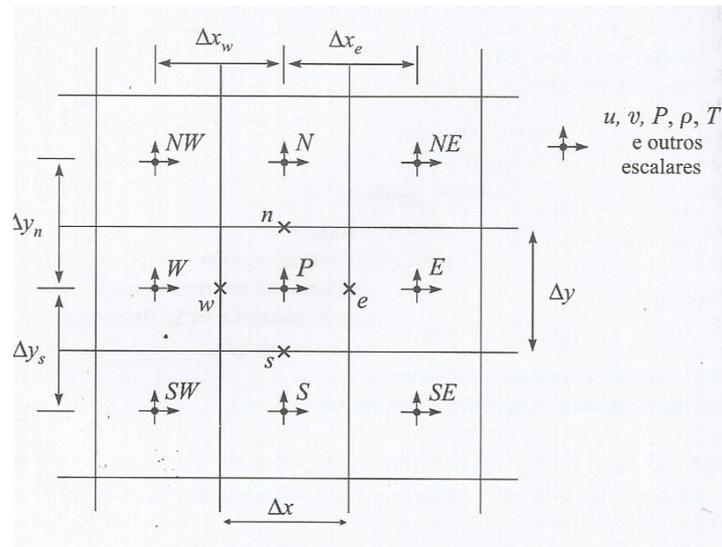
2.3.4.3 Arranjo das variáveis dependentes na malha

O arranjo das variáveis na malha indica a posição relativa das variáveis dependentes do fenômeno analisado na malha computacional, e tem como principal característica a posição relativa entre a pressão e os componentes do vetor velocidade, sendo que diversos arranjos podem ser feitos, porém, para sistemas

mais simples, apenas dois destes arranjos são empregados, o co-localizado e o desencontrado (MALISKA, 2014).

Nos arranjos co-localizados, todas as variáveis dependentes são armazenadas no centro do volume de controle, ou volume finito, conforme Figura 9.

Figura 9 – Arranjo co-localizado

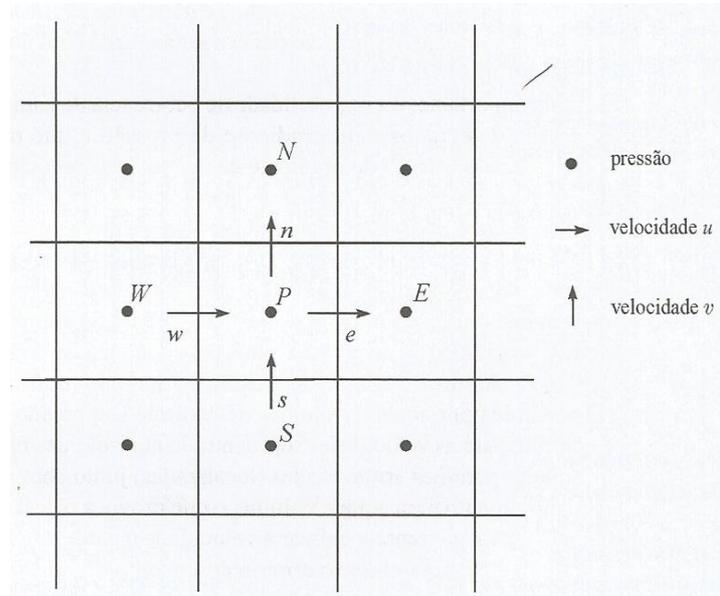


Fonte: Maliska (2014, p. 118).

De acordo com Maliska (2014), este tipo de arranjo apresenta simplicidades nas implementações computacionais, uma vez que os índices de todas as variáveis dependentes são os mesmos para um determinado ponto, e, principalmente pelo fato de que é necessário utilizar somente um único volume finito para realizar a integração no processo de discretização da EDP.

Em relação ao arranjo desencontrado, conforme Maliska (2014), as variáveis dependentes escalares continuam avaliadas no centro dos volumes finitos, porém, os componentes da velocidade são armazenados ao redor das faces dos volumes, conforme Figura 10.

Figura 10 – Arranjo desencontrado



Fonte: Maliska (2014, p. 120).

A principal vantagem deste método é que ele lida com alguns problemas encontrados no arranjo co-localizado, porém apresenta complexidades na implementação numérica, já que, como as variáveis dependentes não se encontram no mesmo ponto, serão necessários mais índices para representá-las. Além disso, pelo mesmo motivo, os balanços de conservação não podem ser feitos em um único volume finito, como no arranjo co-localizado, demandando maior esforço computacional (MALISKA, R. C., 2014).

2.3.5 Interpolação polinomial

De acordo com Gilat e Subramaniam (2008), a interpolação polinomial consiste em uma aproximação de valores localizado em certos pontos e que se encontram entre outros pontos cujos valores são conhecidos. Sendo assim, quando se utiliza métodos numéricos para discretizar e solucionar uma equação diferencial, valores de uma propriedade de interesse ϕ são obtidos em determinados pontos nodais da malha criada na discretização do domínio. Porém, em alguns casos específicos, pode existir a necessidade de conhecer o valor de ϕ em um ponto que não coincide com os pontos da malha onde a variável de interesse foi armazenada. Nesses casos, é necessário utilizar métodos de interpolação polinomial. Entre estes

métodos se encontram o método de interpolação por polinômios de Lagrange, interpolação por splines, interpolação de Gregory-Newton, interpolação de Rhie-Chow, interpolação por diferenças centrais, entre outros.

2.3.6 Discretização temporal

Conforme abordado no tópico das condições iniciais e de contorno, para escoamentos transientes, é necessário a atribuição de uma condição inicial. Esta condição inicial representa o valor de uma propriedade de interesse no instante inicial $t = t_0$. Sendo assim, de acordo com Fortuna (2012), a partir dos valores iniciais da propriedade de interesse, problemas transientes demandam a discretização e posterior solução das EDP's em sucessivos períodos de tempo Δt , até o instante final $t = t_f$, conforme esquema abaixo, sendo que para cada $t_0 + n\Delta t$, será encontrada a solução da EDP.

$$t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, t_0 + 3\Delta t, \dots, t_f - \Delta t, t_f$$

As principais técnicas de discretização temporal são as técnicas explícita, implícita e totalmente implícita (FORTUNA, 2012).

2.3.7 Linearidade e acoplamento pressão-velocidade

De acordo com Versteeg e Malalasekera (2007), existem dois desafios principais na aplicação dos métodos numéricos para discretização da equação de transporte, sendo que estes problemas aparecem quando a equação representa a conservação da quantidade de movimento de um escoamento.

O primeiro, conforme o autor, ocorre no termo convectivo da equação, uma vez que estes apresentam não linearidade em $div(\rho \vec{V} \vec{V})$, que pode ser facilmente visualizado quando considerado um escoamento unidimensional em x , onde o valor do vetor velocidade é o mesmo que o componente escalar deste vetor em x , ou seja, o vetor velocidade \vec{V} é igual a u . Levando em conta o conceito de divergente abordado no referencial, para uma única dimensão, x , o termo convectivo se torna

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho uu)$ ou $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^2)$, apresentando no termo elevado ao quadrado, a não linearidade comentada.

O outro problema está na pressão termodinâmica que aparece no termo fonte, S , mais especificamente no termo divergente de p , $\nabla \cdot p$. Caso o gradiente de pressão seja conhecido, o processo de discretização é simples, e consiste basicamente na integração da equação de transporte para cada volume finito que compõe a malha do domínio. O problema é que na maioria dos fenômenos da dinâmica dos fluidos, o gradiente de pressão é desconhecido, esta adversidade é denominada como problema do acoplamento pressão-velocidade (MALISKA, 2014). Este problema consiste no fato de que o gradiente de pressão não aparece na equação da continuidade, sendo que a presença do gradiente nesta, é fundamental para resultar num conjunto de três equações e três incógnitas. Sendo assim, de acordo com Pires (1994), como a pressão não aparece explicitamente na equação da continuidade, algoritmos para determinar a pressão e solucionar o problema do acoplamento pressão-velocidade são utilizados, manipulando as equações da continuidade e da quantidade de movimento.

Entre os algoritmos mais utilizados, conforme Versteeg e Malalsekera (2007), encontram-se o SIMPLE, o SIMPLER, o SIMPLEC e o PISO.

2.3.8 Métodos diretos e iterativos

Como visto no tópico do método dos volumes finitos, após a discretização das equações governantes, o resultado é um sistema de equações lineares algébricas que precisa ser solucionado. A complexidade e o tamanho do conjunto de equações dependem da dimensionalidade do problema, do número de nós gerados na discretização do domínio, e do método utilizado para discretização das EDP's (MALALASEKERA; VERSTEEG, 2007).

Para solucionar o sistema de equações algébricas geradas na discretização da equação de transporte, podem ser utilizados dois métodos específicos, os métodos diretos e os métodos iterativos (MALISKA, 2014).

Conforme Sperandio et al. (2003), os métodos diretos são as técnicas que determinam a solução exata do sistema linear, através de um número finito de passos previamente conhecidos. Além disso, de acordo com Maliska (2014), estes métodos trabalham com processos análogos à inversão da matriz criada a partir do sistema linear, e como os problemas da DFC geram sistemas e conseqüentemente matrizes muito esparsas, o empenho computacional é muito grande, tornando este método inadequado para fenômenos de escoamento de fluidos. Entre os métodos diretos, encontram-se o método da eliminação de Gauss, decomposição LU, método de Crout, método de Gauss-Jordan, entre outros.

Segundo Maliska (2014), os métodos iterativos são os que necessitam de uma aproximação inicial para prosseguir o processo e encontrar uma solução. Este método apresenta como principais vantagens o fato de serem de fácil implementação, por serem aplicáveis em sistemas de equações não lineares e por serem menos suscetíveis a erros de arredondamento quando comparado aos métodos diretos (FORTUNA, 2012). Exemplo dos métodos iterativos são o método de Jacobi, o método das sobre-relaxações sucessivas (S.O.R), método de Gauss-Seidel, entre outros.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão demonstradas as etapas metodológicas das atividades desenvolvidas pelo autor deste estudo.

3.1 Método científico

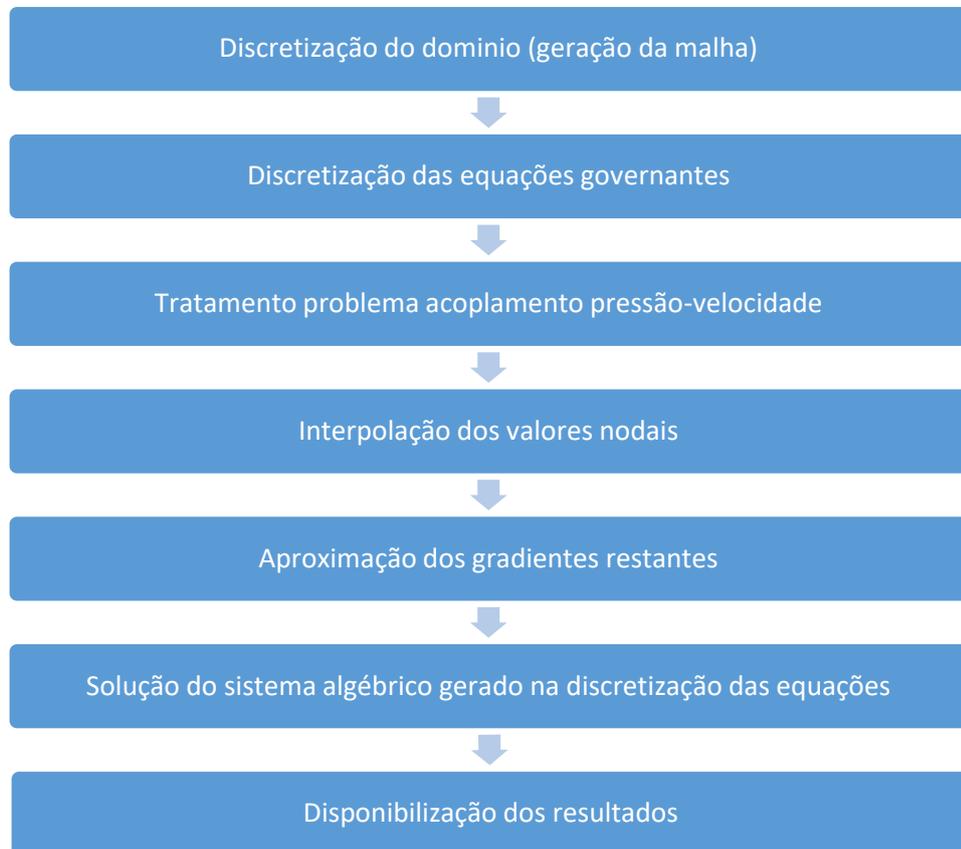
De acordo com Silva e Menezes (2005), o presente trabalho é de natureza aplicada, já que tem por objetivo a geração de conhecimentos para aplicação prática e para a solução de problemas específicos. É de abordagem quantitativa, já que as informações são descritas em números, a fim de analisá-las e classificá-las. Por fim, o trabalho tem objetivo exploratório e descritivo, uma vez que para realização deste, foram utilizados métodos e formas de análise encontradas no referencial teórico, e visa descrever as características de um fenômeno.

3.2 Etapas metodológicas

Para realização do presente trabalho, o método numérico utilizado na simulação dos problemas de dinâmica dos fluidos foi o método dos volumes finitos (MVF). Além disso, o método numérico será implementado em um código computacional desenvolvido na linguagem de programação FORTRAN 90. Sendo assim, para uma melhor compreensão das etapas metodológica realizadas para obtenção da solução numérica, e que, na maior parte serão processadas pelo

código desenvolvido, foi criado o fluxograma abaixo e dividido em respectivos tópicos.

Figura 11 – Principais etapas realizadas



Fonte: Do autor (2018).

3.2.1 Discretização do domínio (geração da malha)

Primeiramente, é realizada a discretização do domínio em volumes de controle, ou seja, a geração da malha computacional. Para isso, o código desenvolvido utiliza malhas estruturadas e com arranjo desencontrado, sendo que a malha é implementada diretamente no código criado. Como a malha é estruturada e o escoamento é limitado pelo espaço bidimensional, é necessário apenas atribuir o número de volumes em x e y .

3.2.2 Discretização das equações governantes

A próxima etapa foi a discretização das equações governantes dos problemas que o código é capaz de resolver. Uma vez que o código é específico para escoamentos isotérmicos, as equações governantes são a equação da quantidade de movimento e da continuidade. Além disso, como o código trabalhará com fluidos de viscosidade constante e incompressível, o termo difusivo Γ e a massa específica ρ não variam no espaço e no tempo, possibilitando sua retirada dos operadores divergentes e gradientes da Equação 59 (equação geral de transporte). Sendo assim, com o auxílio do Quadro 1, as equações que substituirão a forma genérica da equação de transporte e representarão a quantidade de movimento para escoamento bidimensional, são dadas conforme segue.

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(u) + \rho \text{div}(u\vec{V}) = \mu \text{div}(\text{grad}u) + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (60)$$

Sendo que a Equação 60 representa a componente x da quantidade de movimento do escoamento de fluido.

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(v) + \rho \text{div}(v\vec{V}) = \mu \text{div}(\text{grad}v) + \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (61)$$

A Equação 61 representa a componente y da quantidade de movimento do escoamento de fluido.

Em relação a equação da continuidade ou conservação de massa, considerando um fluido incompressível, e com o auxílio do Quadro 1, tem-se que a equação na forma genérica terá a forma da Equação 62.

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(1) + \text{div}(\vec{V}) = \text{div}(0\text{grad}1) + 0 \quad (62)$$

Que, após as multiplicações, resulta na Equação 63.

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (63)$$

As Equações 60, 61 e 63 são as três equações governantes que podem ser solucionadas pelo algoritmo do presente trabalho, e que precisaram ser discretizadas para possibilitar a solução numérica.

Para discretizar estas equações, foi utilizado o método dos volumes finitos, que consiste na integração da equação de transporte sob um volume de controle e sob o tempo, representadas nas equações abaixo. Para o componente escalar x da equação da quantidade de movimento, a integração fica conforme a Equação 64.

$$\begin{aligned} & \int_{V.C.,t} \rho \frac{\partial}{\partial t}(u) dV dt + \int_{V.C.,t} \rho \operatorname{div}(\vec{V}u) dV dt \\ &= \int_{V.C.,t} \mu \operatorname{div}(\operatorname{grad}u) dV dt + \int_{V.C.,t} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \right) dV dt \end{aligned} \quad (64)$$

Assim como no componente escalar x, é necessário integrar o componente y sob o tempo e sob o volume de controle, conforme Equação 65.

$$\begin{aligned} & \int_{V.C.,t} \rho \frac{\partial}{\partial t}(v) dV dt + \int_{V.C.,t} \rho \operatorname{div}(\vec{V}v) dV dt \\ &= \int_{V.C.,t} \mu \operatorname{div}(\operatorname{grad}v) dV dt + \int_{V.C.,t} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \right) dV dt \end{aligned} \quad (65)$$

A equação da continuidade deve ser integrada somente sob o volume de controle, uma vez que se trata de problemas incompressíveis, nos quais a massa específica não varia no tempo, de acordo com a Equação 66.

$$\int_{V.C.} \operatorname{div}(\vec{V}) dV = 0 \quad (66)$$

Além disso, para discretização temporal, foi utilizado o esquema totalmente implícito, que relaciona a variável de interesse encontrada no intervalo de tempo anterior, com a variável de interesse que está sendo analisada no intervalo de tempo atual, conforme abordado no referencial, sendo que todos os pontos vizinhos envolvidos para encontrar a variável de interesse são avaliados no tempo atual, ou seja, são incógnitas, gerando um sistema linear que deve ser solucionado por um método iterativo.

3.2.3 Problema acoplamento pressão-velocidade

Como para utilização do código não é necessário saber os campos de pressão iniciais, e, conforme visto no tópico 2.3.7, o problema de acoplamento pressão-velocidade existirá, necessitando de um algoritmo que trate este de forma adequada. Sendo assim, o algoritmo utilizado para o desenvolvimento do código foi o algoritmo SIMPLE, que significa *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations* (Método Semi-Implicito para equações com pressão acoplada), e foi desenvolvido por Patankar e Spalding em 1972. O algoritmo é basicamente um procedimento de tentativa e erro para calcular a pressão em arranjo desencontrado, e seus passos são descritos abaixo e foram retirados do livro de Suhas V. Patankar, 1980.

Antes de descrever as etapas principais do algoritmo, é necessário apresentar as relações entre os valores atribuídos e os valores reais da pressão e das componentes escalares do vetor velocidade, sendo que esta descrição está exposta nas equações abaixo.

$$p = p^* + p' \quad (67)$$

$$u = u^* + u' \quad (68)$$

$$v = v^* + v' \quad (69)$$

$$w = w^* + w' \quad (70)$$

Com as correlações acima, a sequência de operação do algoritmo SIMPLE definida por Patankar (1980) é a seguinte:

1. Estimar um valor para o campo de pressão p^* ;
2. Resolver as equações de momento utilizando a pressão p^* , encontrando assim valores para os componentes escalares da velocidade, u^* , v^* e w^* ;
3. Encontrar a pressão p' , que é obtida através de uma equação auxiliar, derivada da equação da continuidade;
4. Calcular a pressão p a partir da equação 67;

5. Encontrar os valores de u' , v' e w' através de equações que correlacionam a pressão p' e as velocidades u^* , v^* e w^* ;
6. Calcular os valores de u , v e w seguindo as equações, 67, 68 e 69;
7. Caso outras propriedades, como temperatura, concentração de massa e etc. influenciam o escoamento, discretizar as equações para estas propriedades;
8. Utilizar a pressão p como estimativa para p^* e retornar ao passo 2, repetindo todo o procedimento até que a convergência da solução.

3.2.4 Interpolação entre os valores nodais e aproximação dos gradientes

Em relação a interpolação dos valores nodais para os termos convectivos das equações governantes, foi utilizado o método das diferenças centrais, que consiste em interpolar linearmente uma variável, localizada entre dois pontos adjacentes, um anterior e outro posterior, utilizando a média entre estes. Este método é de fácil implementação, porém, apresenta limitações para grandes números de Reynolds, o que não é um problema para o presente trabalho, cujo foco são baixos números de Reynolds.

Além disso, como pode ser observado nas equações de momento, o termo difusivo apresenta gradientes de segunda ordem, e como no método utilizado é realizada a integração especial da equação governante apenas uma vez, eliminando assim, um destes gradientes, o outro continuará, sendo assim, o gradiente restante é aproximado pela já abordada expansão em Séries de Taylor, utilizando a formulação por diferenças centrais, que basicamente consiste em aproximar a derivada utilizando dois pontos da função expandida, sendo que um deste é o ponto de expansão x_1 e o outro é o ponto vizinho, ou seja, $x_1 + \Delta t$ ou $x_1 - \Delta t$, conforme abordado no tópico de expansão em séries de Taylor, no caso da formulação por diferenças centrais, são utilizados os dois pontos vizinhos ($x_1 + \Delta t$ e $x_1 - \Delta t$) para aproximar a derivada, reduzindo o erro de aproximação.

3.2.5 Solução do sistema algébrico gerado na discretização das equações

O último passo matemático realizado, consiste na solução das equações algébricas obtidas no processo de discretização das equações diferenciais parciais e que apresentam as correlações entre os nós de cada volume de controle (volume finito) criado. Para isto, foi utilizado o método iterativo de Gauss-Seidel, conforme descrito por Gilat e Subramaniam (2008), e que tem como principal característica o fato de que a medida que um valor novo é obtido, este é prontamente utilizado para calcular o novo valor da próxima incógnita.

Primeiramente, é necessário escrever o sistema de equações na sua forma explícita, sendo assim, para um sistema com n equações, as equações explícitas para as incógnitas (x_i) são encontradas conforme Equação 71.

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} a_{ij} x_j \right) \right] \quad (71)$$

Onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Após a obtenção do sistema de equações na forma explícita, é possível, utilizando as características do método de Gauss-Seidel, escrever a seguinte fórmula iterativa para solução de sistemas lineares.

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - \left(\sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} x_j^{(k)} \right) \right]$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \left(\sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \right] \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (72)$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - \left(\sum_{j=1}^{j=n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)} \right) \right]$$

É possível observar que os valores de $x_i^{(k+1)}$, na iteração $k+1$ são calculados através dos valores de $x_j^{(k+1)}$, obtidos pela iteração $k+1$, quando $j < i$ e através dos valores de $x_j^{(k)}$, quando $j > i$.

As iterações realizadas através do sistema 72 continuam até um critério de convergência ser respeitado. No caso, a convergência ocorre quando uma pequena diferença entre os valores gerados nas iterações repetidas é atingida. Matematicamente, esta diferença se dá conforme Equação 73.

$$\left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^k} \right| < \varepsilon \quad (73)$$

Para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, onde ε é um valor predeterminado.

3.2.6 Disponibilização dos resultados

A última etapa do trabalho, consiste em disponibilizar os resultados obtidos no código através de imagens ilustrativas, uma vez que o código em si fornece os resultados em dados e não em imagens. Para isto, foi utilizado um software de pós processamento, que permite a criação dos campos de velocidades e linhas de corrente, em imagens com escalas de cores, a partir dos dados obtidos no código, facilitando assim a visualização dos resultados.

4 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Neste capítulo, será abordado o procedimento numérico adotado para discretizar as equações governantes, bem como um fluxograma que apresenta a sequência utilizada no algoritmo criado.

4.1 Discretização das equações

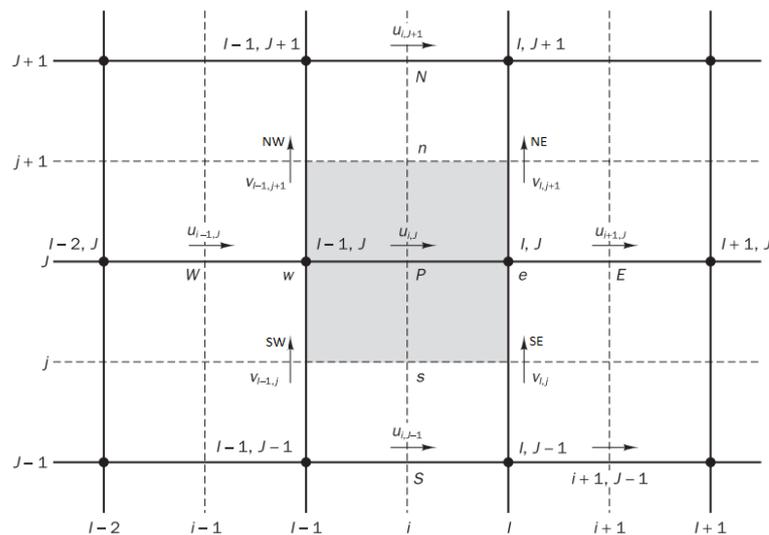
Conforme visto anteriormente, as equações conservativas (64), (65) e (66) foram solucionadas utilizando o método dos volumes finitos, que tem como característica a integração destas no espaço e no tempo. As faces dos volumes de controle, nas quais existe fluxo de massa, são utilizadas como limites na integração espacial, enquanto que os instantes t e $t + \Delta t$ são utilizados como limites para a integração temporal.

Como a malha utilizada foi a desencontrada, na qual as variáveis dependentes são armazenadas em diferentes posições do espaço, foi necessário realizar a integração utilizando diferentes volumes de controle, um para cada equação, uma vez que a variável de interesse precisa estar no centro do V.C.

Sendo assim, a discretização das equações para um V.C. localizado em um ponto do domínio em que este não coincide com nenhuma fronteira, cujo volume é o produto $dx dy dz$, sem gerações internas ($\rho g = 0$), com fluxo de massa em todas as faces, será apresentada abaixo.

Inicialmente, é realizada a discretização espacial da equação 64, que representa a equação da quantidade de movimento no eixo x e que após a discretização, fornece uma equação algébrica linear, relacionando a componente u da velocidade no centro do V.C., com as componentes escalares e pressões vizinhas. A Figura 12 representa um volume finito com as características citadas no parágrafo anterior, e será utilizada como base para desenvolver a discretização das equações nesta região do espaço, sendo que nos pontos P, E, W, N e S são armazenadas as componentes u da velocidade, nos pontos (e) e (w) as pressões vizinhas e nos pontos NE, NW, SE e SW são armazenadas as componentes v da velocidade, e que interferem diretamente no valor da variável de interesse no centro do V.C.

Figura 12 – Volume finito para componente u da velocidade



Fonte: Adaptado pelo autor com base Versteeg e Malalasekera (2007, p. 184).

Com isso, para o volume da Figura 12, expandindo a Equação 60 através dos conceitos de gradiente e divergente, e integrando-as em relação ao volume de controle e o tempo, tem-se a equação 74.

$$\begin{aligned}
 & \int_{V.C.,t} \rho \frac{\partial u}{\partial t} dVdt + \int_{V.C.,t} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} dVdt + \int_{V.C.,t} \rho v \frac{\partial u}{\partial y} dVdt \\
 & = \mu \left(\int_{V.C.,t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dVdt + \int_{V.C.,t} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dVdt \right) - \int_{V.C.,t} \frac{\partial p}{\partial x} dVdt
 \end{aligned} \tag{74}$$

É possível, aplicando o Teorema da Divergência de Gauss, relacionar as integrais volumétricas da Equação 74 com integrais de superfície, de modo que os limites de integração não sejam mais os volumes de controle, mas sim as áreas superficiais dos volumes de controle, sendo que, para os gradientes em relação ao eixo x, os limites de integração serão a área superficial direita (e), e a área superficial esquerda (w), enquanto que para os gradientes relacionados ao eixo y, os limites de integração serão a área superficial superior (n) e a inferior (s), resultando na Equação 75.

$$\begin{aligned} & \int_{V.C.,t} \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_{Aw,t}^{Ae} \rho u u dAdt + \int_{As,t}^{An} \rho v u dAdt \\ &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \int_{Aw,t}^{Ae} u dAdt + \frac{\partial u}{\partial y} \int_{An,t}^{As} u dAdt \right) - \int_{Aw,t}^{Ae} \frac{\partial p}{\partial x} dAdt \end{aligned} \quad (75)$$

Observando a equação 75, é possível analisar que o primeiro termo desta, envolvendo o gradiente temporal, será tratado de forma diferente, uma vez que a sua derivada não é em relação ao espaço, e sim ao tempo, não permitindo a utilização do teorema de Gauss. Neste caso, o limite de integração será o volume do próprio volume de controle. A Equação 76 apresenta o resultado da integração acima.

$$\begin{aligned} & \int_t \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta V dt + \int_t (\rho u Au|_e - \rho u Au|_w) dt + \int_t (\rho v Au|_n - \rho v Au|_w) dt \\ &= \mu \left(\int_t \left(\frac{\partial u}{\partial x} A|_e - \frac{\partial u}{\partial x} A|_w \right) dt + \int_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} A|_n - \frac{\partial u}{\partial y} A|_s \right) dt \right) - \int_t (pA|_e - pA|_w) dt \end{aligned} \quad (76)$$

Após a integração em relação ao espaço, é possível realizar a integração temporal, conforme Equação 77.

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta V dt + \int_t^{t+\Delta t} (\rho u Au|_e - \rho u Au|_w) dt + \int_t^{t+\Delta t} (\rho v Au|_n - \rho v Au|_w) dt \\ &= \mu \left(\int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} A|_e - \frac{\partial u}{\partial x} A|_w \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} A|_n - \frac{\partial u}{\partial y} A|_s \right) dt \right) - \int_t^{t+\Delta t} (pA|_e - pA|_w) dt \end{aligned} \quad (77)$$

A integração temporal de todos os termos da equação, exceto pelo primeiro, é simples, resultando em Δt . Voltando ao primeiro termo, em que o gradiente existente é em relação ao tempo, conforme Versteeg e Malalasekera (2007), assume-se que a velocidade contida neste prevalece em todo V.C., permitindo que a variável u , localizada no centro deste, seja definida em função do tempo no instante t (u^0) e no instante $t + \Delta t$ (u), sendo que é neste termo que ocorre a ligação entre o valor calculado no instante anterior, com o instante atual. O resultado desta integração está representado na equação 78.

$$\begin{aligned} & \rho(u^P - u^0)\Delta V + (\rho u A u|_e - \rho u A u|_w)\Delta t + (\rho v A u|_n - \rho v A u|_s)\Delta t \\ & = \mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} A \Big|_e - \frac{\partial u}{\partial x} A \Big|_w \right) \Delta t + \left(\frac{\partial u}{\partial y} A \Big|_n - \frac{\partial u}{\partial y} A \Big|_s \right) \Delta t \right) - (p A|_e - p A|_w)\Delta t \end{aligned} \quad (78)$$

É possível analisar que mesmo após a integração temporal e espacial, restam dois gradientes de velocidade no termo difusivo da equação, em relação a x e a y . Estes gradientes são aproximados utilizando a já explorada expansão em séries de Taylor, a partir dos pontos P, E, W, N e S da Figura 12. Após a aproximação, a Equação 78 pode ser reescrita de acordo com a 79.

$$\begin{aligned} & \rho(u^P - u^0)\Delta V + (\rho u A u|_e - \rho u A u|_w)\Delta t + (\rho v A u|_n - \rho v A u|_s)\Delta t \\ & = \mu \left(\left(A_e \frac{(u^E - u^P)}{\Delta x} - A_w \frac{(u^P - u^W)}{\Delta x} \right) \Delta t \right. \\ & \left. + \left(A_n \frac{(u^N - u^P)}{\Delta y} - A_s \frac{(u^P - u^S)}{\Delta y} \right) \Delta t \right) - (p A|_e - p A|_w)\Delta t \end{aligned} \quad (79)$$

É importante notar que a equação 79 continua apresentando termos não lineares, sendo assim, o método iterativo SIMPLE permite a linearização da equação, sendo que o método consiste em utilizar os valores de u e v da iteração anterior. Esta variável, da iteração anterior, será caracterizada pelo sobre índice *. Além disto, a componente v do vetor velocidade que aparece na equação também é aproximada utilizando os valores desta, encontrados na iteração anterior, e armazenadas em NE, NW, SW e SE.

Finalmente, como a integração espacial dos termos do lado esquerdo da Equação 79 envolve os pontos das superfícies dos volumes de controle (e, w, n e s),

é necessário realizar uma interpolação entre os pontos vizinhos a estes, já que as variáveis dependentes, como as componentes u do vetor velocidade, estão armazenadas nos pontos P, E, W, N e S, e não em e, w, n e s. Sendo assim, as velocidades nos pontos e, w, n e s são aproximadas utilizando as velocidades armazenadas em P, E, W, N e S, através do método das diferenças centrais.

Dividindo todos os termos por Δt e levando em conta as observações anteriores, a Equação 80 pode ser reescrita conforme a Equação 81, na forma algébrica, sem gradientes e representando aproximadamente a equação da quantidade de movimento em x no V.C. da Figura 12, permitindo a implementação numérica da variável de interesse, no caso a componente u do vetor velocidade, localizada no ponto P do volume de controle, fornecendo uma relação entre o valor da variável neste ponto, com as variáveis de interesse localizadas nos pontos vizinhos.

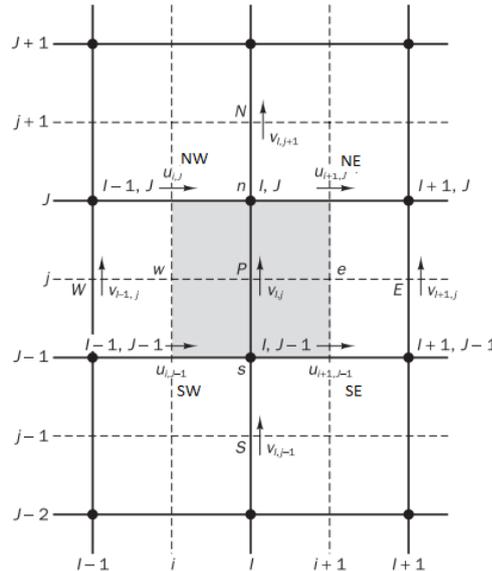
$$\begin{aligned}
 & \rho(u^P - u^{P^0}) \frac{\Delta V}{\Delta t} \\
 & + \left(\rho A_e \left(\frac{u^{P^*} + u^{E^*}}{2} \right) \left(\frac{u^P + u^E}{2} \right) - \rho A_w \left(\frac{u^{P^*} + u^{W^*}}{2} \right) \left(\frac{u^P + u^W}{2} \right) \right) \\
 & + \left(\rho A_n \left(\frac{v^{NE^*} + v^{NW^*}}{2} \right) \left(\frac{u^P + u^N}{2} \right) - \rho A_s \left(\frac{v^{SE^*} + v^{SW^*}}{2} \right) \left(\frac{u^P + u^S}{2} \right) \right) \quad (80) \\
 & = \mu \left(\left(A_e \frac{(u^E - u^P)}{\Delta x} - A_w \frac{(u^P - u^W)}{\Delta x} \right) + \left(A_n \frac{(u^N - u^P)}{\Delta y} - A_s \frac{(u^P - u^S)}{\Delta y} \right) \right) \\
 & \quad - (p_e A_e - p_w A_w)
 \end{aligned}$$

Para quantidade de movimento em y , a Equação a ser discretizada é a 61, que após ser expandida utilizando os conceitos de gradiente e divergente, e integrando-a em relação ao tempo e ao volume de controle, é descrita conforme a Equação 81.

$$\begin{aligned}
 & \int_{V.C.,t} \rho \frac{\partial}{\partial t} (v) dV dt + \int_{V.C.,t} \rho u \frac{\partial v}{\partial x} dV dt + \int_{V.C.,t} \rho v \frac{\partial v}{\partial y} dV dt \\
 & = \mu \left(\int_{V.C.,t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dV dt + \int_{V.C.,t} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dV dt \right) - \int_{V.C.,t} \frac{\partial p}{\partial y} dV dt \quad (81)
 \end{aligned}$$

O processo é semelhante ao feito para discretização em x, porém, utilizando um volume de controle no qual é armazenada a componente escalar v da velocidade no centro deste, conforme Figura 13.

Figura 13 – Volume finito para componente v da velocidade



Fonte: Adaptado pelo autor com base Versteeg e Malalasekera (2007, p. 185).

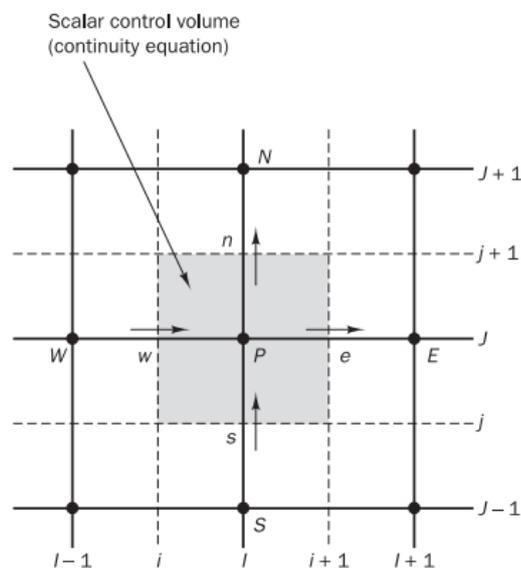
A Equação 82 representa a forma algébrica da Equação 61, relacionando a variável de interesse, no caso a componente v do vetor velocidade, no centro do V.C., armazenada no ponto P , com as velocidades e pressões armazenados nos pontos vizinhos.

$$\begin{aligned}
 & \rho(vP - vP^0) \frac{\Delta V}{\Delta t} \\
 & + \left(\rho A_e \left(\frac{uNE^* + uSE^*}{2} \right) \left(\frac{vP + vE}{2} \right) - \rho A_w \left(\frac{uNW^* + uSW^*}{2} \right) \left(\frac{vP + vW}{2} \right) \right) \\
 & + \left(\rho A_n \left(\frac{vN^* + vP^*}{2} \right) \left(\frac{vN + vP}{2} \right) - \rho A_s \left(\frac{vP^* + vS^*}{2} \right) \left(\frac{vP + vS}{2} \right) \right) \quad (82) \\
 & = \mu \left(\left(A_e \frac{(vE - vP)}{\Delta x} - A_w \frac{(vP - vW)}{\Delta x} \right) + \left(A_n \frac{(vN - vP)}{\Delta y} - A_s \frac{(vP - vS)}{\Delta y} \right) \right) \\
 & \quad - (p_e A_e - p_w A_w)
 \end{aligned}$$

Por fim, é necessário discretizar a equação diferencial 63, que representa a equação da conservação de massa ou da continuidade na forma diferencial. O

método de discretização é o mesmo, realizando a integração da equação, a diferença é que, por se tratar de escoamentos incompressíveis, o termo que varia no tempo não está presente, demandando somente uma integração espacial da EDP. Esta discretização é realizada sobre um volume de controle, no qual as componentes das velocidades estão armazenadas nas áreas superficiais do V.C. (e, n, s e w), sendo que a pressão (P) é armazenada no centro deste, conforme Figura 14.

Figura 14 – Volume finito para equação da continuidade



Fonte: Adaptado pelo autor com base Versteeg e Malalasekera (2007, p. 187).

A Equação 63, expandida, utilizando o operador divergente, pode ser integrada em relação ao V.C. conforme Equação 83.

$$\int_{V.C.} \frac{\partial u}{\partial x} dV + \int_{V.C.} \frac{\partial v}{\partial y} dV = 0 \quad (83)$$

Utilizando novamente o Teorema da Divergência de Gauss, considerando como limites de integração as áreas superficiais A_e , A_w , A_n e A_s do Volume de Controle da Figura 14, a integração da Equação 83 pode ser reescrita conforme a Equação 84.

$$\int_{A_w} u dA + \int_{A_s} v dA = 0 \quad (84)$$

O resultado da integração acima é dado conforme Equação 85.

$$(uA|_e - uA|_w) + (vA|_n - vA|_s) = 0 \quad (85)$$

A Equação 85 é o resultado da discretização da equação da conservação de massa, através do Método dos Volumes Finitos.

Analisando as equações 80, 82 e 85, é possível ver que as componentes escalares do vetor velocidade, u e v aparecem nas três equações, enquanto que a pressão aparece apenas nas equações da conservação quantidade de movimento. Neste caso, a equação da conservação de massa é adaptada através do já explorado algoritmo SIMPLE, relacionando as velocidades nas faces do volume de controle da Figura 14, com um fator de correção das pressões vizinhas deste, permitindo assim uma relação entre pressão e velocidades nas três equações, o que é necessário, já que são três incógnitas (as próprias velocidades e a pressão) para três equações. A Equação 85 pode ser, enfim, descrita em função desta correção de pressão, conforme Equação 86.

$$\begin{aligned} & (A_e(u_e + d_e(p'P - p'E)) - (A_w(u_w + d_w(p'W - p'P)) \\ & + (A_n(v_n + d_n(p'P - p'N)) - (A_s(v_s + d_s(p'S - p'P))) = 0 \end{aligned} \quad (86)$$

Na Equação 86, o termo d é uma correlação entre os coeficientes da velocidade no ponto em que este está relacionado (por exemplo, d_e está relacionado com a velocidade u_e), sendo que esta correlação é encontrada utilizando as equações da quantidade de movimento em x e y , discretizadas anteriormente. As velocidades utilizadas na Equação 86, também são as que foram encontradas através da equação da quantidade de movimento, discretizadas nos parágrafos acima. Além disso, esta Equação (86) permite encontrar a correção de pressão no centro do V.C., sendo que esta é utilizada para corrigir tanto a pressão, quanto as componentes escalares da velocidade, conforme no tópico do método SIMPLE, abordado na metodologia.

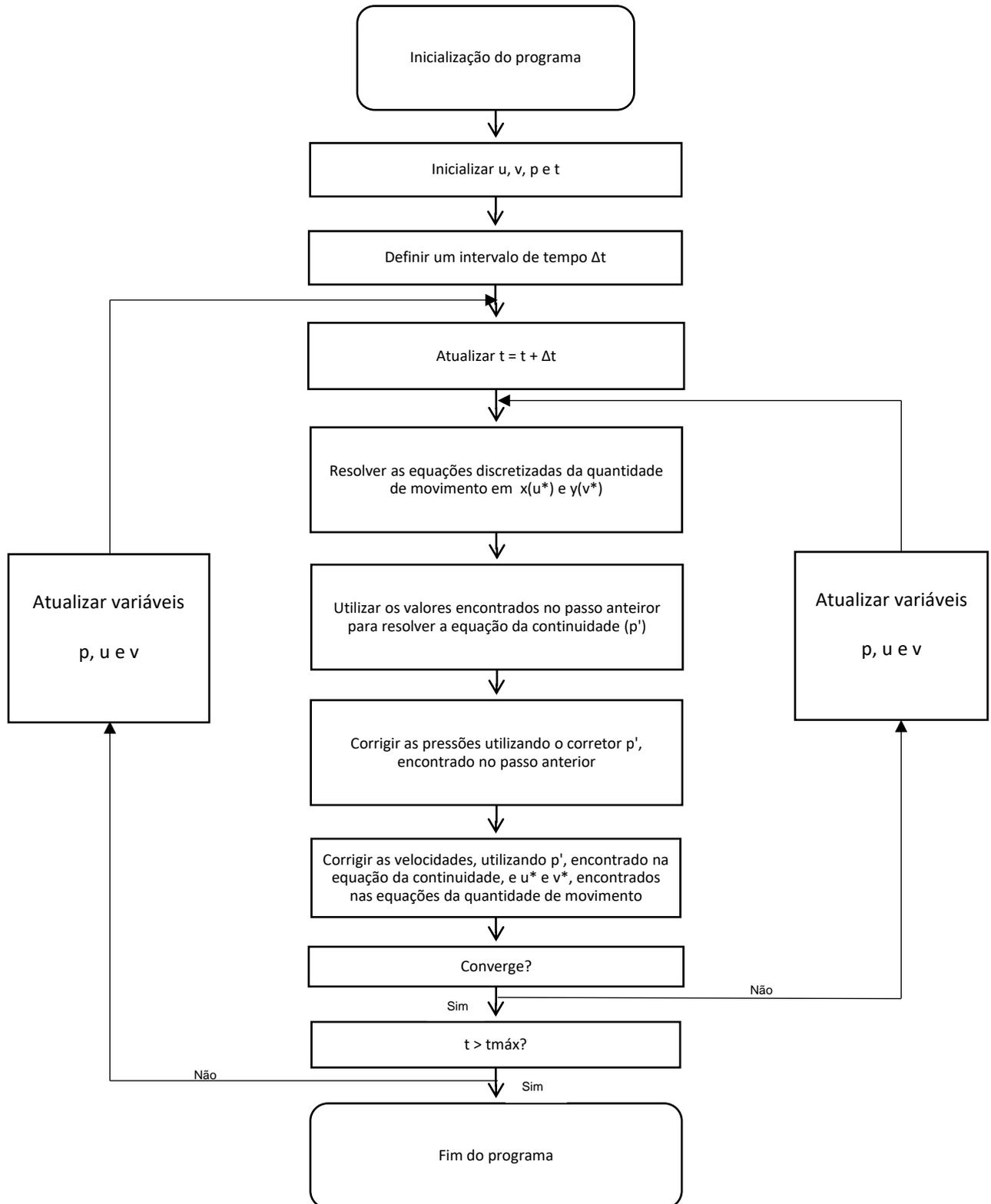
As equações discretizadas acima são utilizadas para encontrar as variáveis de interesse em três pontos/nós do domínio discretizado, armazenados em diferentes posições, já que a malha utilizada foi a desconstruída, sendo que, os mesmos passos explorados acima, precisam ser realizados para cada ponto em que

as variáveis de interesse serão alocadas, resultando assim no sistema de equações algébricas que será solucionado. Além disso, é importante destacar que as equações discretizadas e abordadas neste capítulo são para os volumes internos, conforme citado no começo deste tópico. Para volumes de controle próximos às fronteiras, os quais sofrem influências das condições de contorno, a discretização vai ser um pouco diferente, uma vez que alguns termos não aparecerão, ou ainda, poderão ser adaptados para descrever a condição de contorno utilizada.

4.2 Algoritmo utilizado

O Fluxograma 1 apresenta o algoritmo utilizado no código para resolver as equações de Navier-Stokes com as limitações impostas no primeiro capítulo.

Fluxograma 1 – Algoritmo do código criado



Fonte: Autor (2018)

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

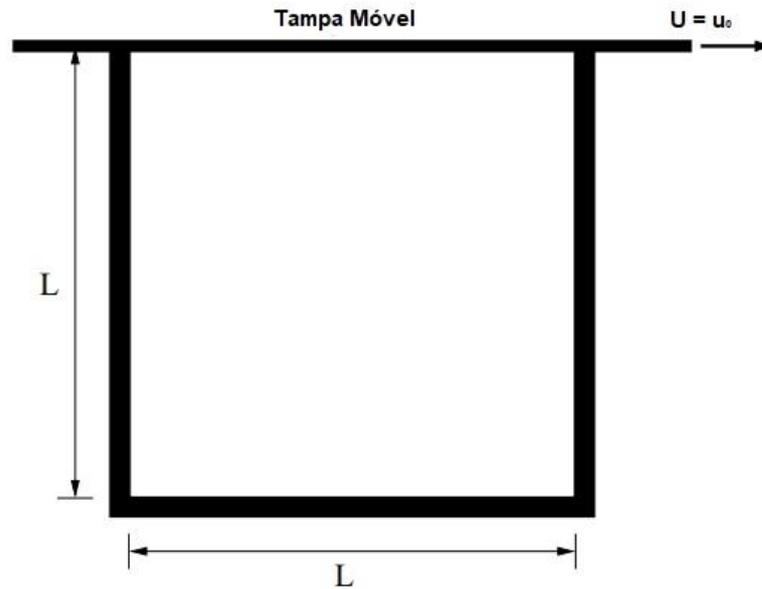
Neste capítulo, serão apresentados alguns resultados obtidos através do código criado no presente trabalho, sendo que estes foram utilizados para verificar o algoritmo. Para melhor visualização dos resultados, foi utilizado um software de pós processamento, que permite relacionar os valores de determinada variável, encontrados pelo código, com imagens ilustrativas de campos de velocidade e linhas de corrente. O tempo computacional necessário para realização das simulações, variou de 2 horas a 3 dias, dependendo do grau de complexidade do problema.

5.1 Escoamento em cavidade com tampa móvel

O primeiro problema abordado se trata do escoamento no interior de uma cavidade quadrada com tampa móvel. De acordo com Lestari (2009), por possuir geometria e condições de contorno bem definidas, por envolver de forma balanceada o termo convectivo e difusivo da equação genérica de conservação (59), e por apresentar regiões de recirculação no escoamento, este problema é um excelente caso para testar novos códigos ou métodos numéricos em DFC. Por fim, diversos autores já exploraram este problema para diversos números de Reynolds, disponibilizando um amplo banco de dados para estes.

Sendo assim, o presente problema foi utilizado para verificar o código desenvolvido no trabalho, comparando os resultados obtidos neste, com os dados disponíveis na literatura. A configuração do problema está disposta na Figura 15.

Figura 15 – Escoamento em cavidade com tampa móvel

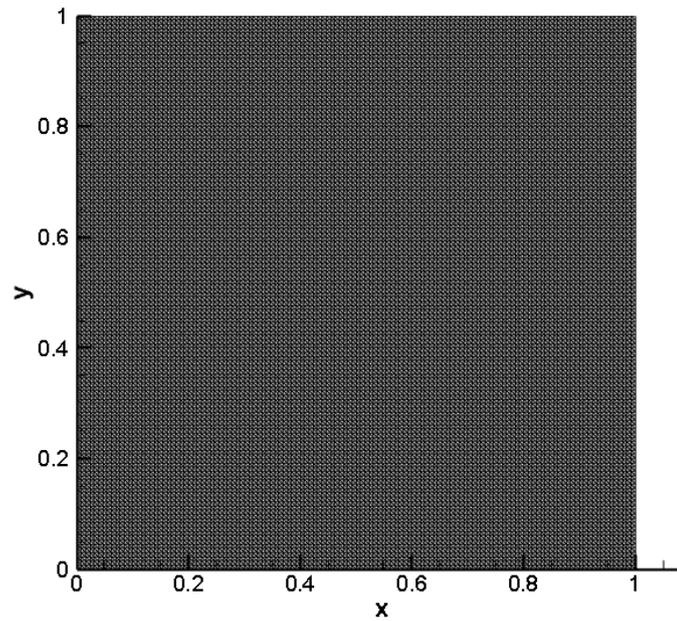


Fonte: Adaptado pelo autor com base em Lestari (2009, p. 46).

Para simular o movimento da tampa, a velocidade atribuída no topo da cavidade é de 1 m/s. A cavidade é um quadrado de dimensões unitárias. Todas as outras componentes das velocidades localizadas nas paredes e a componente v da velocidade no topo da cavidade, são nulas. Para o presente trabalho, foram realizadas 4 simulações deste problema, utilizando número de Reynolds de 100, 400, 1000 e 3200, sendo que estes foram alterados utilizando diferentes valores para a viscosidade. Além disso, os resultados encontrados pelo código foram comparados com os obtidos por Ghia et. al (1982), que discretizou as equações de Navier-Stokes utilizando o método das diferenças finitas (MDF), e solucionou o sistema de equações algébricas resultante através de um método *Multigrid*. O Δt utilizado neste problema, para todos os Reynolds testados, foi de 0,01 segundos.

Para os Reynolds de 100, 400 e 1000 a malha utilizada foi de 130 x 130 volumes finitos, em cada caso, conforme figura 16.

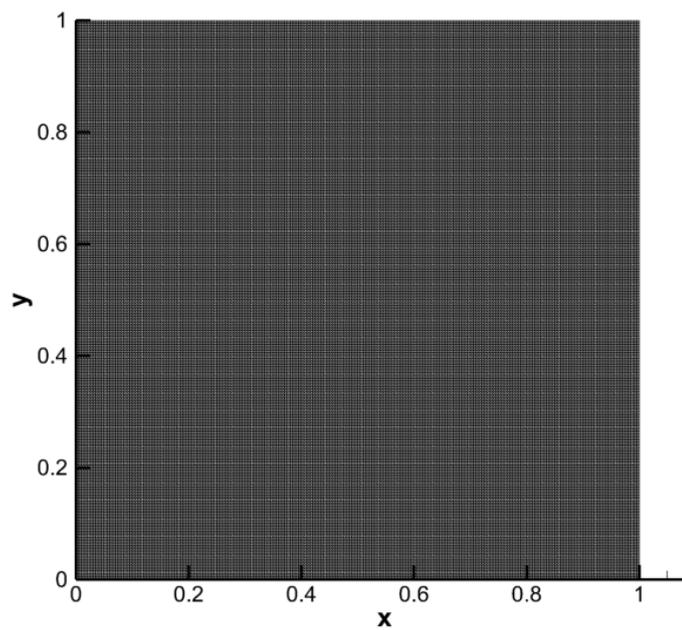
Figura 16 – Malha 130 x 130



Fonte: Do autor (2018).

Para o escoamento com número de Reynolds de 3200, a malha utilizada foi de 200 x 200, conforme figura 18.

Figura 17 – Malha 200 x 200



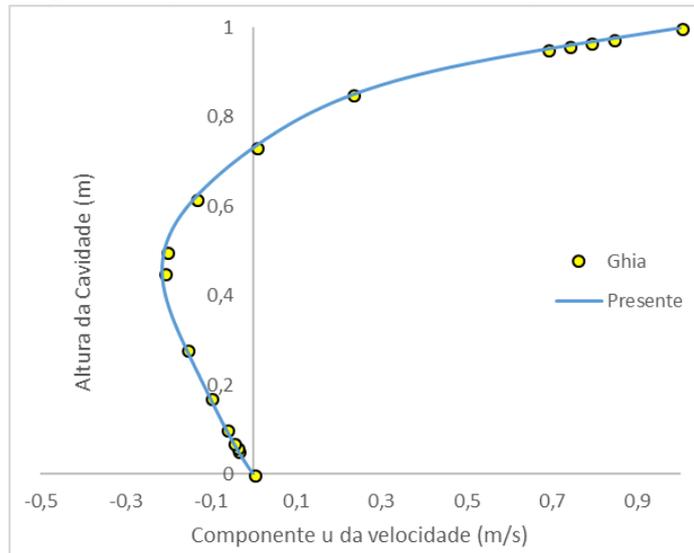
Fonte: Do autor (2018).

5.1.1 Cálculos para $Re = 100$

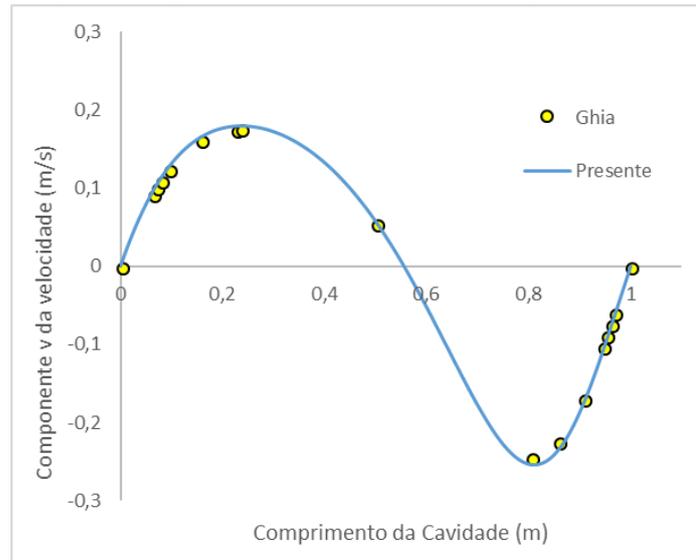
Para o problema com número de Reynolds igual a 100, foi realizada uma comparação entre os resultados obtidos no código e os da literatura, conforme os Gráficos 1 e 2. No Gráfico 1, a comparação é referente aos valores da componente u da velocidade ao longo da linha vertical que passa pelo centro da cavidade, conforme a altura desta varia. Enquanto que no Gráfico 2, a comparação é em relação a componente v da velocidade ao longo da linha horizontal que passa pelo centro da cavidade, conforme seu comprimento varia.

Na Figura 18, são apresentadas as linhas de corrente do escoamento, após este entrar em regime permanente. Por fim, o Gráfico 3 mostra a evolução temporal da componente u da velocidade no centro da cavidade.

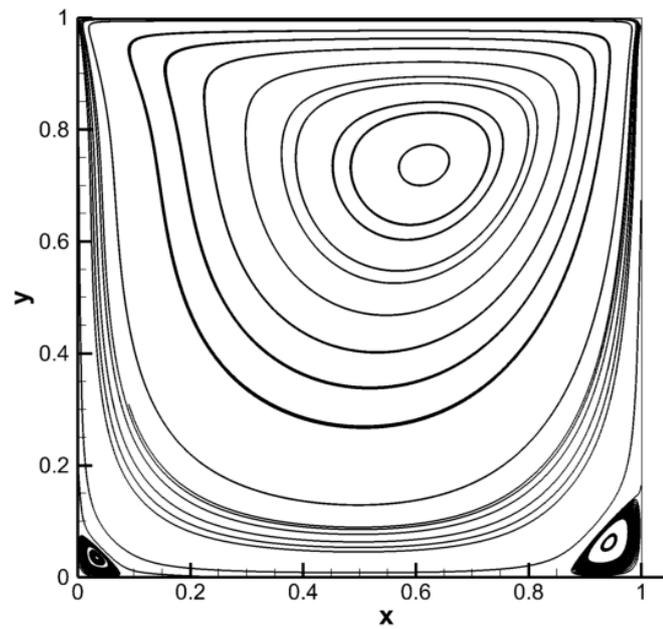
Gráfico 1 – Comparação componente u da velocidade para $Re = 100$



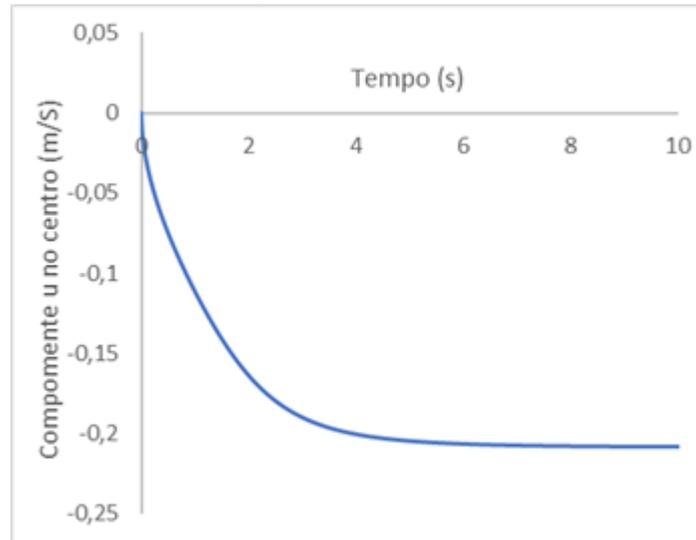
Fonte: Do autor (2018).

Gráfico 2 – Comparação componente v da velocidade para $Re = 100$ 

Fonte: Autor (2018).

Figura 18 – Linhas de corrente para $Re = 100$ 

Fonte: Do autor (2018).

Gráfico 3 – Evolução temporal componente u da velocidade para $Re = 100$ 

Fonte: Do autor (2018).

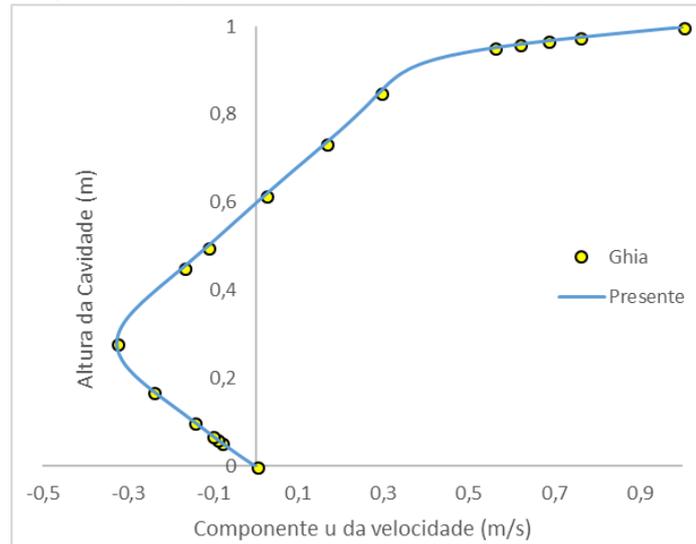
É possível analisar que os valores obtidos no código criado estão em boas concordâncias com os do trabalho utilizado para comparação, comprovando que para o Reynolds testado, e a malha utilizada, o código criado é suficiente para prever o campo de velocidades de forma adequada. Além disto, é possível destacar os vórtices gerados no escoamento, sendo que o dominante está localizado entre o centro e o canto superior direito da cavidade, enquanto que outros menores aparecem nos cantos inferiores desta. Em relação a análise transiente, verifica-se que a componente u da velocidade no centro da cavidade varia suavemente, isto se deve ao fato do número de Reynolds ser baixo, caracterizando um escoamento laminar. Além disto, observa-se que, a partir dos 5 segundos, a variável analisada sofre mudanças muito pequenas, indicando que o escoamento está entrando em regime permanente.

5.1.2 Cálculos para $Re = 400$

Para o problema com número de Reynolds igual a 400, as mesmas análises que no caso anterior foram realizadas, a comparação entre os resultados obtidos no código e os da literatura, estão dispostos nos Gráficos 4 e 5.

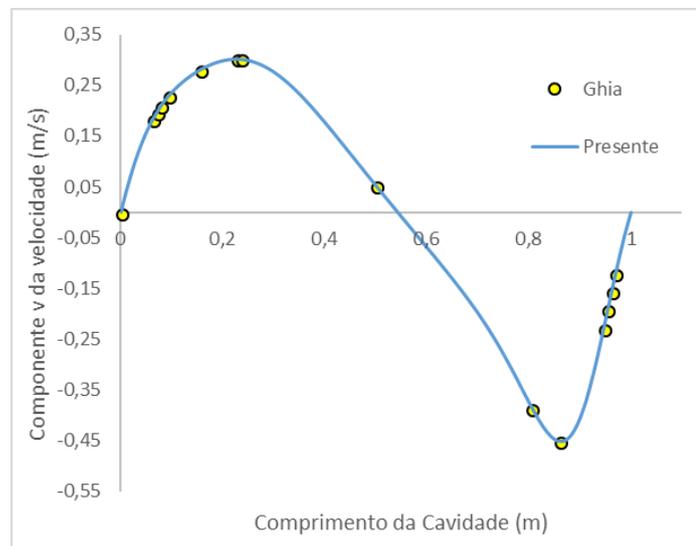
Na Figura 19, são apresentadas as linhas de corrente do escoamento, após este entrar em regime permanente, enquanto que o Gráfico 6 mostra a evolução temporal da componente u da velocidade no centro da cavidade.

Gráfico 4 – Comparação componente u da velocidade para $Re = 400$



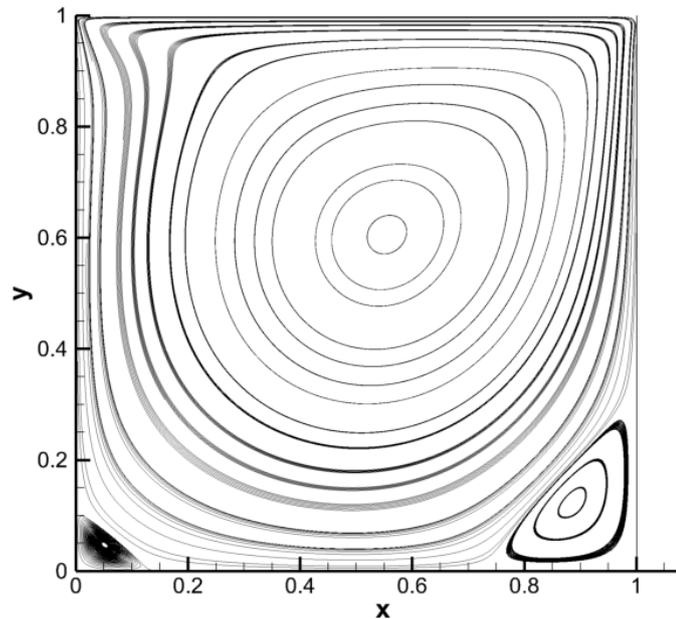
Fonte: Do autor (2018).

Gráfico 5 – Comparação componente v da velocidade para $Re = 400$



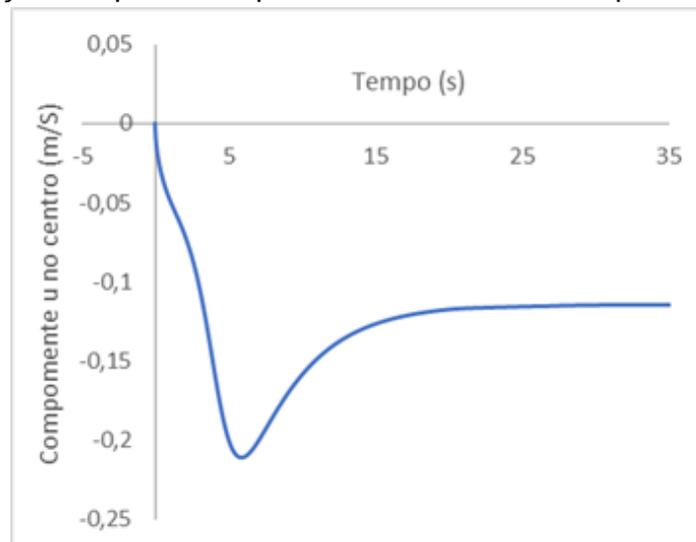
Fonte: Autor (2018).

Figura 19 – Linhas de corrente para $Re = 400$



Fonte: Do autor (2018).

Gráfico 6 – Evolução temporal componente u da velocidade para $Re = 400$



Fonte: Do autor (2018).

Para o $Re = 400$, assim como no caso anterior, é possível analisar que os resultados obtidos no código estão bem próximos dos obtidos na referência utilizada para a comparação, mostrando a acurácia do código e da malha utilizada para este número de Reynolds. Além disso, é possível observar ainda três vórtices criados no interior da cavidade. O de maior tamanho, está mais próximo do centro, quando comparado com o de $Re = 100$. Os outros dois vórtices, localizados nos cantos inferiores da cavidade, aumentaram de tamanho em comparação ao caso anterior, o

que faz sentido, uma vez que o número de Reynolds é maior. É possível ainda notar que no canto esquerdo superior da cavidade, as linhas de corrente não apresentam a mesma suavidade que o primeiro teste.

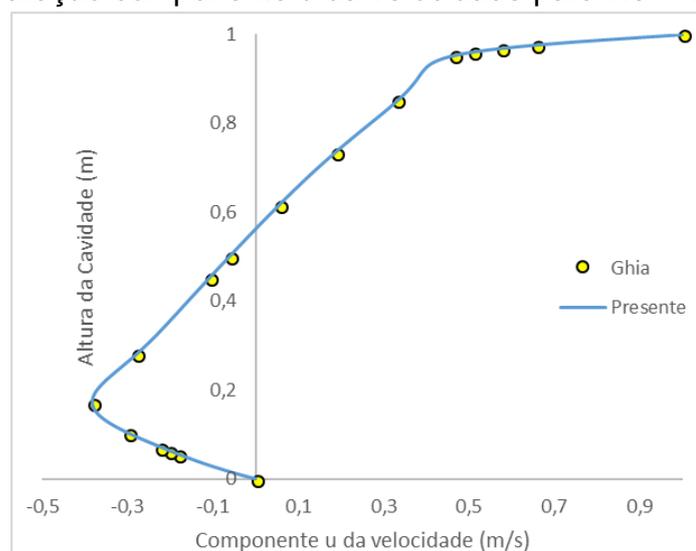
Além do exposto, analisando a Gráfico 6, comparando com o teste de $Re = 100$, percebe-se uma variação mais acentuada na componente u da velocidade no centro da cavidade, e que a mesma começa a convergir para um valor a partir de aproximadamente 20 segundos, indicando que o escoamento está se estabilizando.

5.1.3 Cálculos para $Re = 1000$

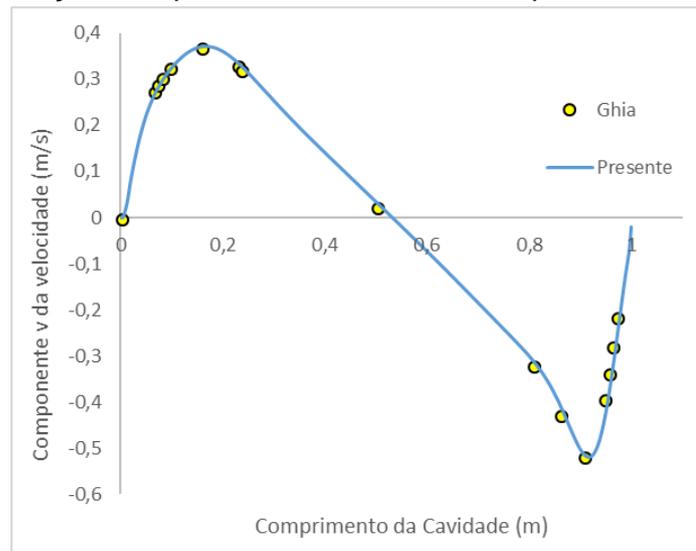
Para o problema com número de Reynolds igual a 1000, foram realizadas as mesmas análises que nos dois casos anteriores, sendo que a comparação entre os resultados obtidos no código e os da literatura, estão dispostos nos Gráfico 7 e 8.

Na Figura 20, são apresentadas as linhas de corrente do escoamento, após este entrar em regime permanente, enquanto que o Gráfico 9 mostra a evolução temporal da componente u da velocidade no centro da cavidade.

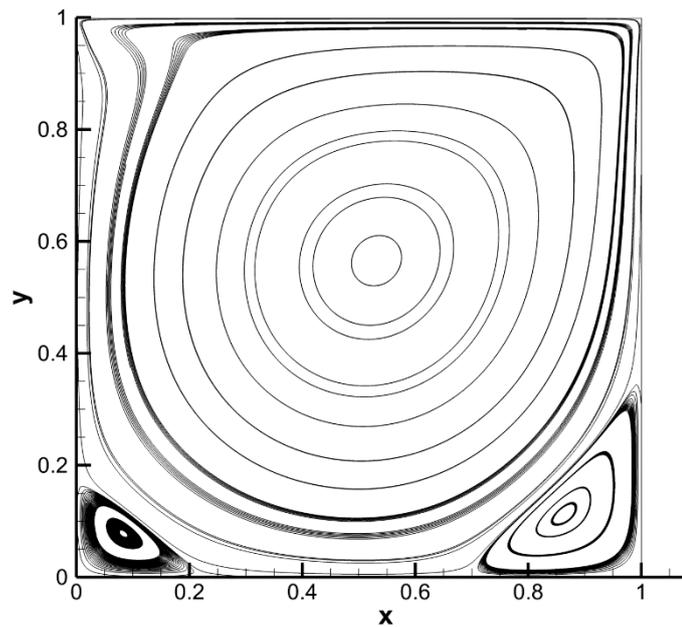
Gráfico 7 – Comparação componente u da velocidade para $Re = 1000$



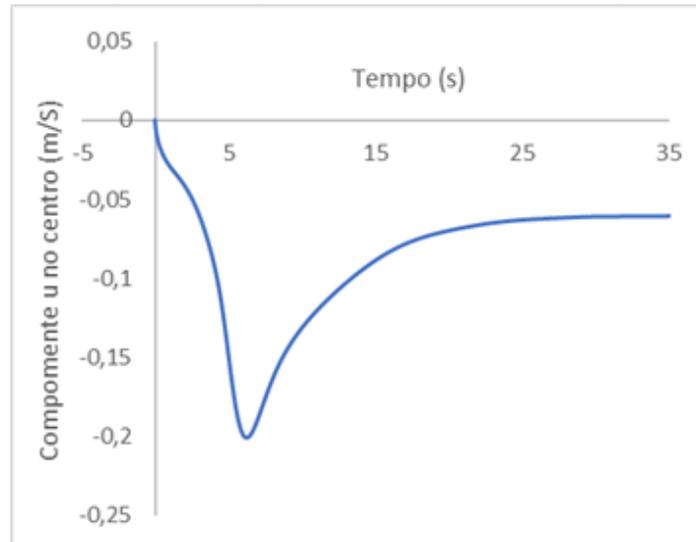
Fonte: Do autor (2018).

Gráfico 8 – Comparação componente v da velocidade para $Re = 1000$ 

Fonte: Do autor (2018).

Figura 20 – Linhas de corrente para $Re = 1000$ 

Fonte: Do autor (2018).

Gráfico 9 – Evolução temporal componente u da velocidade para $Re = 1000$ 

Fonte: Do autor (2018).

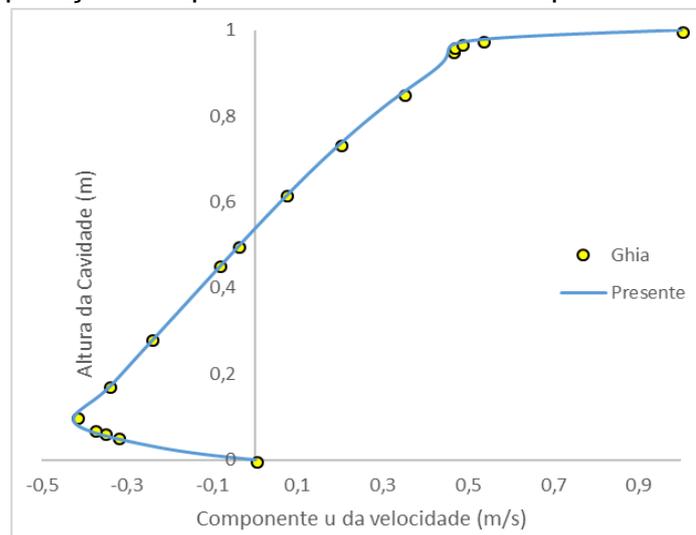
Em relação a simulação com número de Reynolds igual a 1000, os resultados obtidos no código desenvolvido no presente trabalho se mostram bastante próximos dos valores obtidos por Ghia et. al (1982), mais uma vez, mostrando a acurácia do código neste tipo de problema, conforme Gráfico 7 e 8. Em relação aos vórtices criados com este número de Reynolds, é possível visualizar na Figura 20, que o vórtice maior está bem próximo do centro da cavidade.

Em relação aos os dois vórtices gerados nos cantos inferiores da cavidade, estes permanecem, sendo que ambos aumentaram de tamanho em relação aos testes com Reynolds de 100 e 400, além disso, é possível visualizar que as linhas de corrente do canto esquerdo superior sofreram uma perturbação maior que nos casos anteriores, porém, não suficiente para criar um vórtice na localidade. Por fim, verificando a evolução temporal da componente u da velocidade no centro da cavidade, detalhada no Gráfico 9, é possível visualizar que para este caso, a estabilidade da variável ocorre após os 25 segundos, indicando que o escoamento precisa de mais tempo para entrar em regime permanente, quando comparado as simulações anteriores.

5.1.4 Cálculos para $Re = 3200$

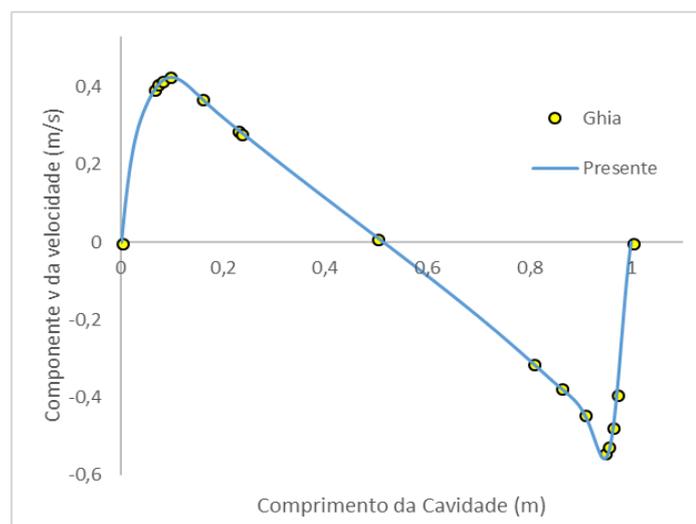
Para a simulação com número de Reynolds de 3200, foram realizadas as mesmas análises das anteriores, porém, neste caso, será apresentada uma sequência de imagens, que correspondem ao processo transiente do escoamento na cavidade, em diferentes instantes de tempo. Os Gráficos 10 e 11, mostram o comparativo das componentes u e v da velocidade que passam pelas linhas centrais da cavidade, entre os resultados obtidos no presente código, com os dados coletados na literatura. As Figuras 21, 22 e 23 ilustram o comportamento do escoamento na cavidade no instante de tempo indicado, obtidos através da solução numérica utilizando o código criado.

Gráfico 10 – Comparação componente u da velocidade para $Re = 3200$

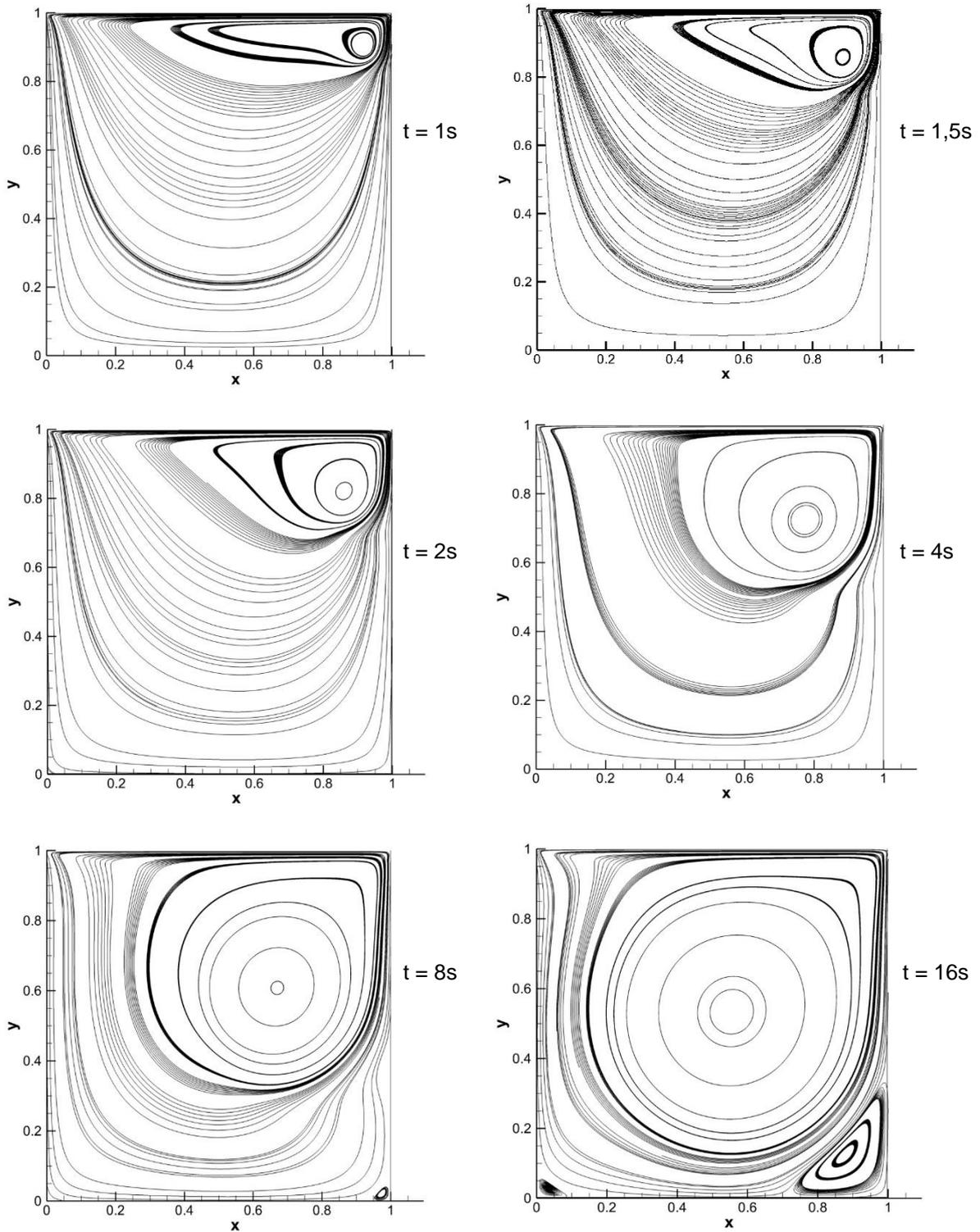


Fonte: Do autor (2018).

Gráfico 11 – Comparação componente v da velocidade para $Re = 3200$

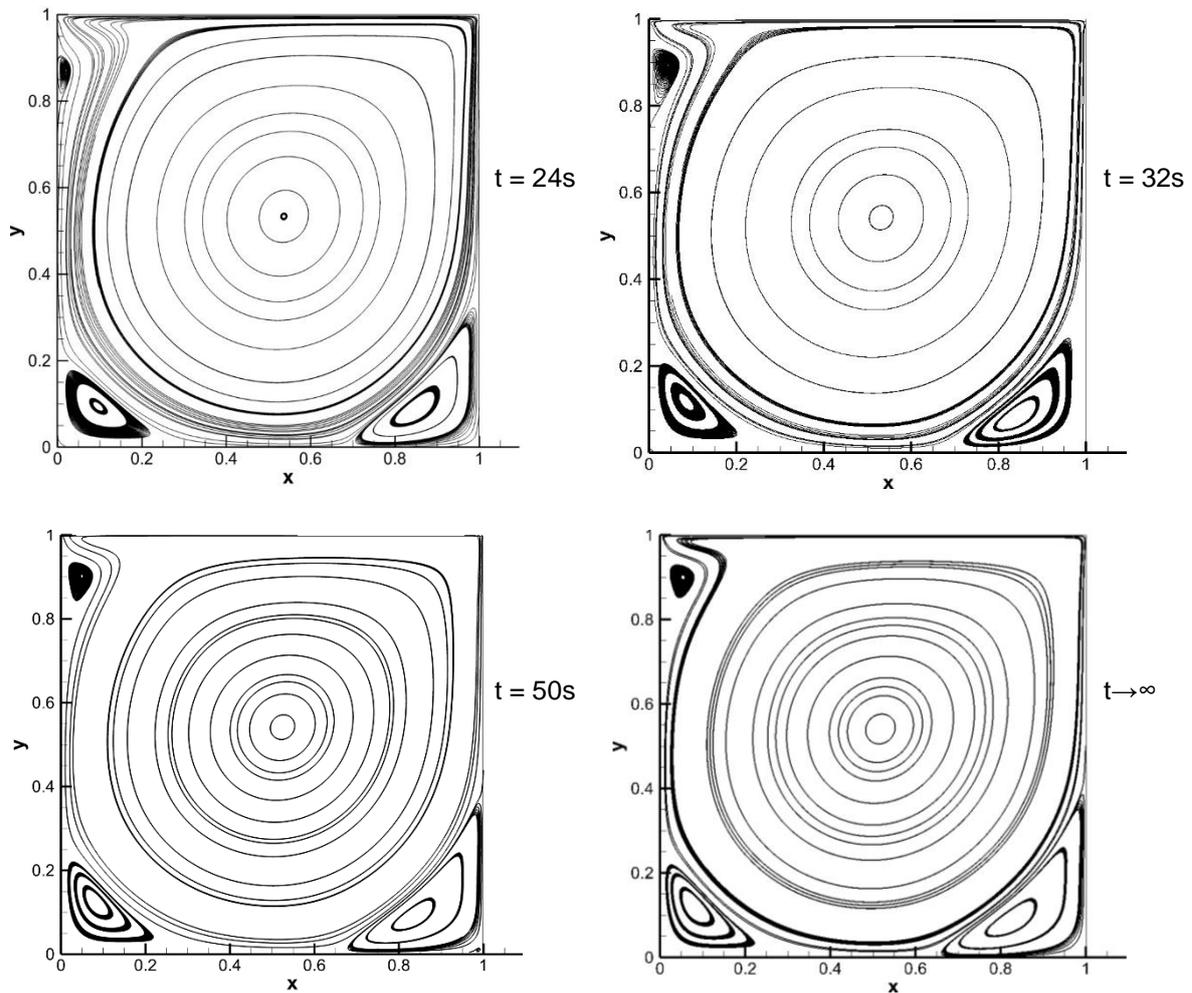


Fonte: Do autor (2018).

Figura 21 – Linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para $Re = 3200$ 

Fonte: Do autor (2018)

Figura 22 – Linhas de corrente em diferentes instantes de tempo para $Re = 3200$



Fonte: Do autor (2018)

É possível concluir, analisando os Gráficos 10 e 11, que o código apresenta resultados bem próximos dos utilizados como comparação, mostrando que, para o Reynolds utilizado, com um certo refinamento na malha (200x200), o algoritmo criado é bastante preciso. Além disto, as Figuras 21 e 22 permitem analisar detalhadamente como se comporta o escoamento no decorrer do tempo, sendo que é possível destacar algumas situações.

Entre estas, observa-se que o vórtice maior, tem seu início no canto direito superior da cavidade, logo após o fluido escoar pelo topo desta. Com o passar do tempo, este vórtice aumenta de tamanho e se desloca para o centro da cavidade. É possível observar também que o vórtice no canto direito inferior, começa a ser formado em aproximadamente 8 segundos de escoamento, e vai aumentando de tamanho gradativamente. O terceiro vórtice é formado a partir de aproximadamente

16 segundos de escoamento, enquanto que um quarto vórtice é formado em aproximadamente 24 segundos de escoamento, sendo que este é o último vórtice formado no interior da cavidade. Por fim, o escoamento começa a se estabilizar, ou seja, a entrar em regime permanente, a partir de aproximadamente 50 segundos, não sofrendo variações significativas, conforme ilustrado na Figura 22, quando o tempo tende ao infinito.

Comparando com os casos anteriores, analisando o escoamento quando este entra em regime permanente, o vórtice maior está mais próximo do centro da cavidade, além disto, os dois vórtices na parte inferior da cavidade, que apareceram com Reynolds menores, continuam localizados na mesma região, porém com tamanhos maiores. Por fim, o último e menor vórtice, localizado na parte superior esquerda da cavidade, não havia aparecido nos Reynolds mais baixos.

5.2 Escoamento entre placas planas paralelas

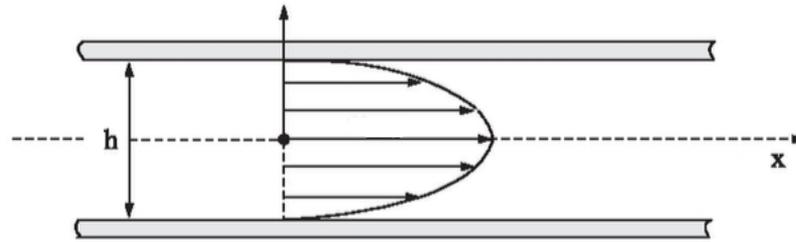
O segundo problema explorado é do escoamento entre placas planas e paralelas, este problema explora de modo bem mais dominante o termo convectivo da Equação (59), enquanto que poucos são os efeitos difusivos. Além disso, este problema possui uma solução analítica bem definida, de acordo com a Equação 87, tirada de Fox et al. (2010), o que permite realizar uma comparação entre os resultados obtidos no código criado, com os resultados analíticos do mesmo problema, servindo como teste de verificação para novos métodos numéricos e algoritmos, assim como o problema da cavidade, abordado no tópico anterior.

$$u = - \left(\frac{a^2}{2\mu} \frac{12a\mu u_0}{a^3} \left[\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{a} \right) \right] \right) \quad (87)$$

Onde a é a distância entre as placas paralelas, u é a componente u da velocidade, u_0 é a componente u da velocidade na entrada, μ é a viscosidade do fluido e y é a altura em que está sendo analisada a componente u da velocidade.

A configuração desta situação está disposta na Figura 23.

Figura 23 – Escoamento entre placas paralelas

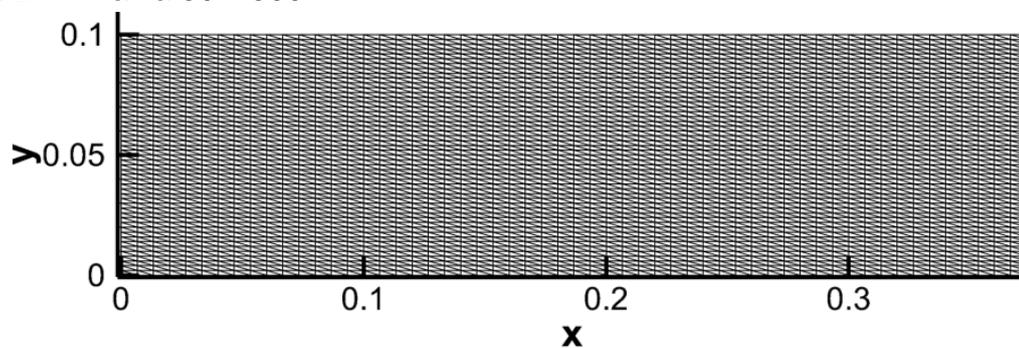


Fonte: Adaptado pelo autor com base em Brunetti (2008, p. 314).

Para o teste realizado no presente trabalho, a distância (h) entre as placas atribuída foi de 0.1 metros, enquanto que o comprimento das placas é de 1,5 metros, o que permite o fluido se desenvolver completamente no escoamento, quando pequenos números de Reynolds são utilizados. Foram realizados dois testes com números de Reynolds distintos, sendo que para o primeiro caso, o Re é de 50, enquanto que para o segundo caso, o Re é de 100. A variação do Reynolds foi realizada alterando a velocidade de entrada do fluido, sendo que no caso de $Re = 50$, a velocidade de entrada é de 5 m/s, enquanto que no caso de $Re = 100$, a velocidade é de 10 m/s. O Δt para este problema foi de 0,1 segundos. Por fim, com o objetivo de garantir que a massa seja conservada na saída do domínio, uma condição de contorno especial de saída foi utilizada.

A malha utilizada para os dois casos foi de 50 x 300, uma vez que o comprimento do domínio é muito maior que sua altura. A Figura 24 representa a malha utilizada para simulação do problema, nos primeiros 40 centímetros de comprimento do domínio.

Figura 24 – Malha 50 x 300

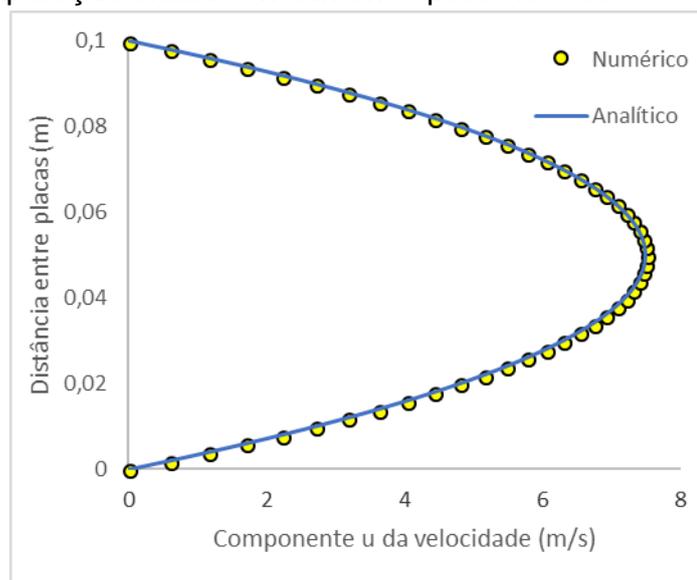


Fonte: Do autor (2018).

5.2.1 Cálculos para $Re = 50$

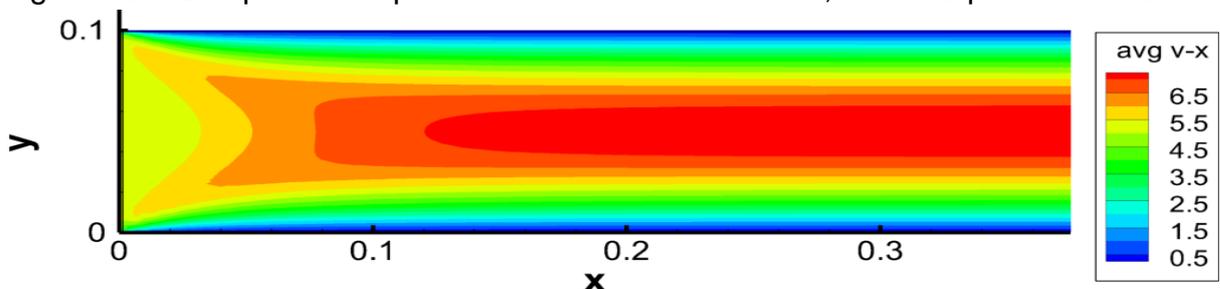
Na simulação com número de Reynolds igual a 50, o perfil parabólico da componente u da velocidade, após o escoamento estar completamente desenvolvido, foi comparado com o perfil obtido através da solução analítica para esta mesma situação, utilizando a Equação 87, sendo que o Gráfico 12 mostra o comparativo entre a solução numérica e analítica. A Figura 25 apresenta o campo da componente u da velocidade, após o escoamento entrar em regime permanente, sendo que a ilustração se refere aos primeiros 0,4 metros da placa, pois é nesta região que o escoamento apresenta um perfil de velocidade completamente desenvolvido. Por fim, o Gráfico 13 mostra a evolução temporal da componente u da velocidade, no centro do domínio.

Gráfico 12 – Comparação analítico x numérico para $Re = 50$

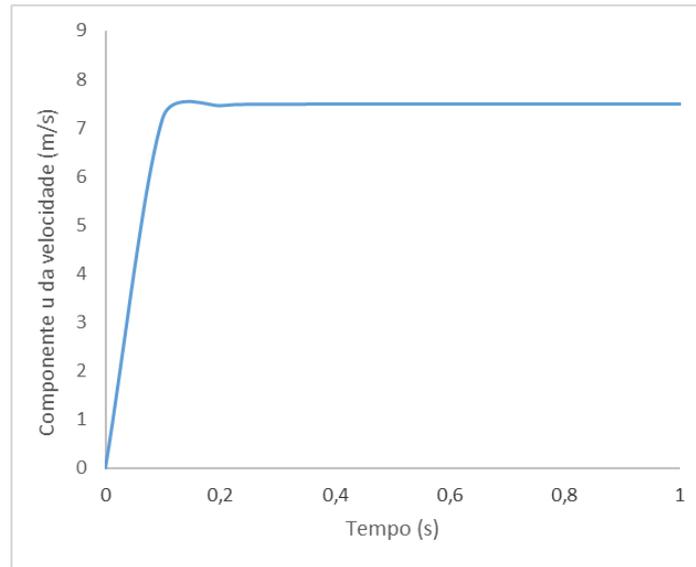


Fonte: Do autor (2018).

Figura 25 – Campo da componente u da velocidade até 0,4 metros para $Re = 50$



Fonte: Do autor (2018).

Gráfico 13 – Evolução temporal da componente u da velocidade para $Re = 50$ 

Fonte: Do autor (2018).

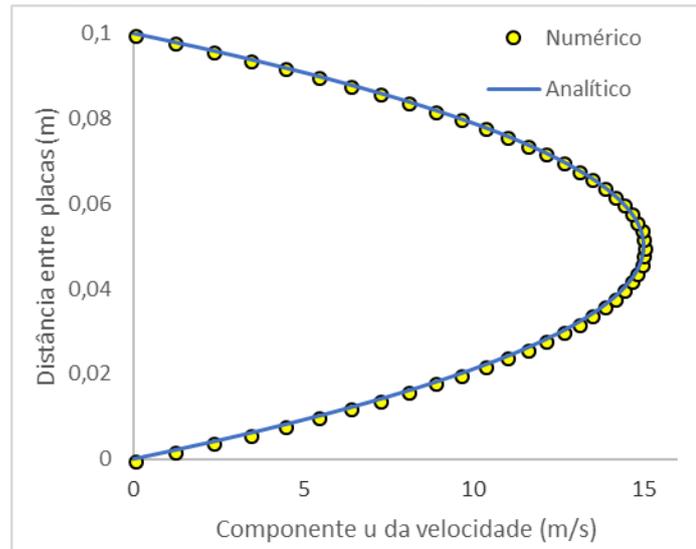
Observando o Gráfico 12, é possível comparar os perfis obtidos pelo código numérico criado e pela solução analítica, sendo que os valores estão muito próximos para os dois métodos, garantindo a acurácia do código neste problema e com este número de Reynolds. Além disso, avaliando o campo de velocidade da Figura 25, após o escoamento entrar em regime permanente, percebe-se que este se desenvolve completamente em torno do ponto de 0,2 metros de comprimento das placas, sendo que, a partir deste ponto, o perfil de velocidade não varia mais até a saída do domínio. Por fim, é possível observar através do Gráfico 13, que a componente u da velocidade no centro do domínio, se estabiliza em um valor a partir de aproximadamente 0,2 segundos, indicando que o escoamento entra em regime permanente em pouquíssimo tempo, o que é esperado, uma vez que não se tem efeitos difusivos e que a componente v da velocidade permanece quase inalterada em todo o escoamento.

5.2.2 Cálculos para $Re = 100$

Para o teste com Reynolds igual a 100, foram realizadas as mesmas análises que o teste anterior, sendo que o perfil da componente u da velocidade obtido pelo código, foi comparado com o da solução analítica, obtido pela Equação 87, e que é exposto pelo Gráfico 14. A Figura 26 apresenta o campo da componente u da

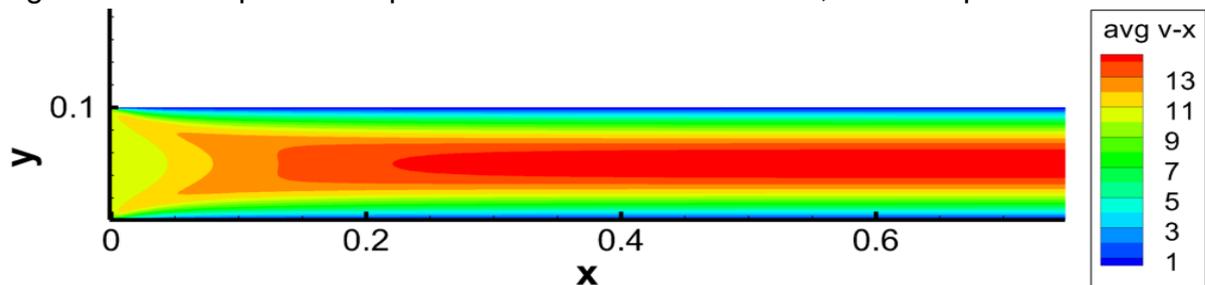
velocidade, obtido após o escoamento entrar em regime permanente, sendo que a ilustração se refere aos primeiros 0,8 metros da placa, já que é nesta região que o escoamento apresenta um perfil de velocidade completamente desenvolvido. O Gráfico 15 representa a evolução temporal da componente u da velocidade no centro do domínio.

Gráfico 14 – Comparação analítico x numérico para $Re = 100$

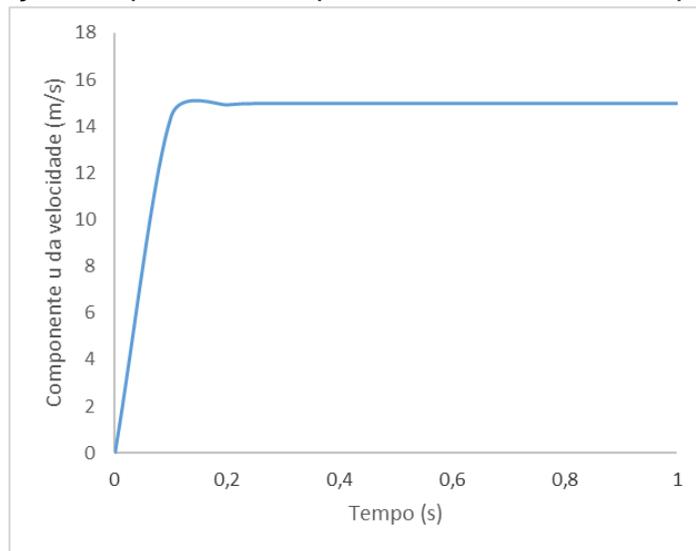


Fonte: Do autor (2018).

Figura 26 – Campo da componente u da velocidade até 0,8 metros para $Re = 100$



Fonte: Do autor (2018).

Gráfico 15 – Evolução temporal da componente u da velocidade para $Re = 100$ 

Fonte: Do autor (2018).

Através do Gráfico 14, é possível comparar os resultados obtidos pelo código numérico e pela solução analítica, utilizando a Equação 87, da mesma maneira que no caso anterior. Novamente, os resultados obtidos no presente trabalho estão de acordo com a solução analítica, validando o algoritmo para o problema e o número de Reynolds utilizado. Ademais, analisando a Figura 26, que ilustra o escoamento em regime permanente, é possível destacar que este apresenta um caráter completamente desenvolvido em torno de 0,4 metros após a entrada no domínio, ou seja, o perfil de velocidade apresenta a mesma característica até o fim do domínio, partindo deste ponto. Comparando com o caso anterior, com $Re = 50$, o completo desenvolvimento ocorreu com aproximadamente o dobro de distância, já que anteriormente este comportamento pôde ser observado próximo dos 0,2 metros. Esta característica está de acordo, uma vez que quanto maior o número de Reynolds, maior vai ser a distância necessária para o fenômeno atingir o completo desenvolvimento.

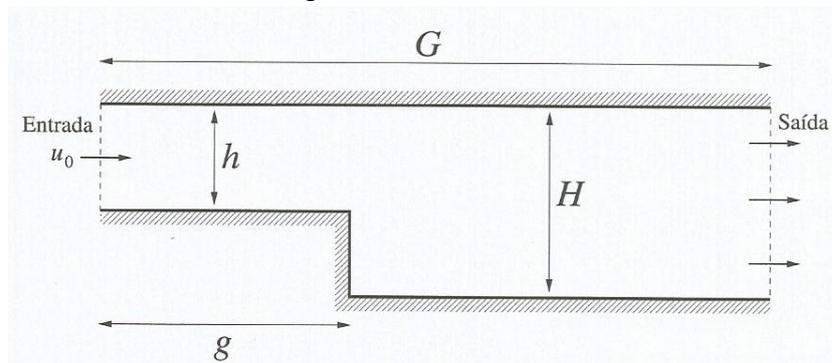
Por fim, observando o Gráfico 15, a evolução temporal da componente u da velocidade no centro do domínio tem um comportamento muito parecido com o do caso anterior, sendo que a variável se estabiliza quase no mesmo ponto, em torno de 0,2 segundos de escoamento, uma possibilidade de explicar isto, é que, como a velocidade de entrada é maior neste caso, o fluido chegará a este ponto mais rápido que para o $Re = 50$, sendo assim, mesmo variando o número de Reynolds, o escoamento começa a entrar em regime permanente em instantes parecidos. Além

disso, a variação do número de Reynolds entre os dois casos foi baixa, podendo ser um dos fatores para a semelhança entre os dois modelos. Por fim, o Δt de 0,1 segundos também pode influenciar na análise transiente, já que é um intervalo de tempo relativamente longo para este tipo de estudo.

5.3 escoamento sobre degrau

O terceiro caso explorado é o de escoamento sobre um degrau, que conforme Fortuna (2012), é muito utilizado para analisar métodos numéricos utilizados na solução das equações de Navier-Stokes. A configuração do problema em questão está ilustrada na Figura 27, sendo que o domínio computacional possui três regiões de destaque, a entrada, na qual o fluido escoava com velocidade u_0 , um degrau, que gera uma região de recirculação, e a saída do escoamento, onde, devido a diferença de altura em relação a entrada, o escoamento deve desacelerar.

Figura 27 – Escoamento sobre degrau



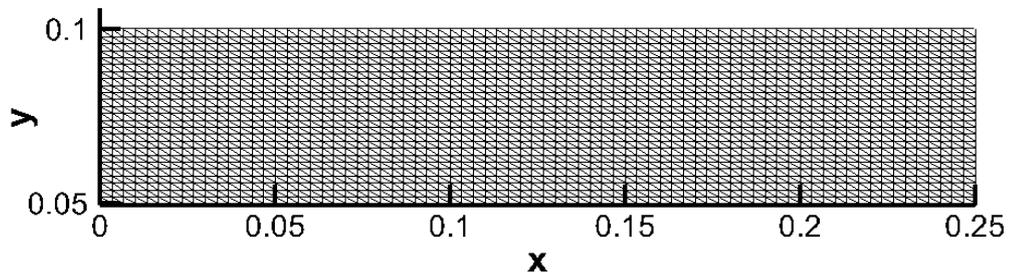
Fonte: Fortuna (2012, p. 365).

Para as simulações realizadas no presente trabalho, o comprimento G do canal é de 1 metro, o comprimento g é de $G/3$, ou seja, 0,33 metros, a altura de saída H é de 0,1 metros, enquanto que a de entrada h é $H/2$, ou seja, 0,05 metros. Os números de Reynolds utilizados para os testes foram de 200, 300, 400 e 500, sendo que as variações nestes, ocorreram por meio da alteração da viscosidade do fluido. Estes valores foram adotados para que o escoamento se desenvolva adequadamente no canal de entrada e que o vórtice não seja influenciado devido à proximidade entre o canal de saída e o degrau. Para este caso, foi adotado um Δt de

0,2 segundos, pois a análise foi realizada após o escoamento entrar em regime permanente, não importando sua evolução temporal.

Sendo assim, a malha utilizada para todos os casos foi de 50 x 300, uma vez que o comprimento do domínio é muito maior que sua altura. A Figura 28 representa a malha utilizada para simulação do problema, nos primeiros 25 centímetros de comprimento do domínio.

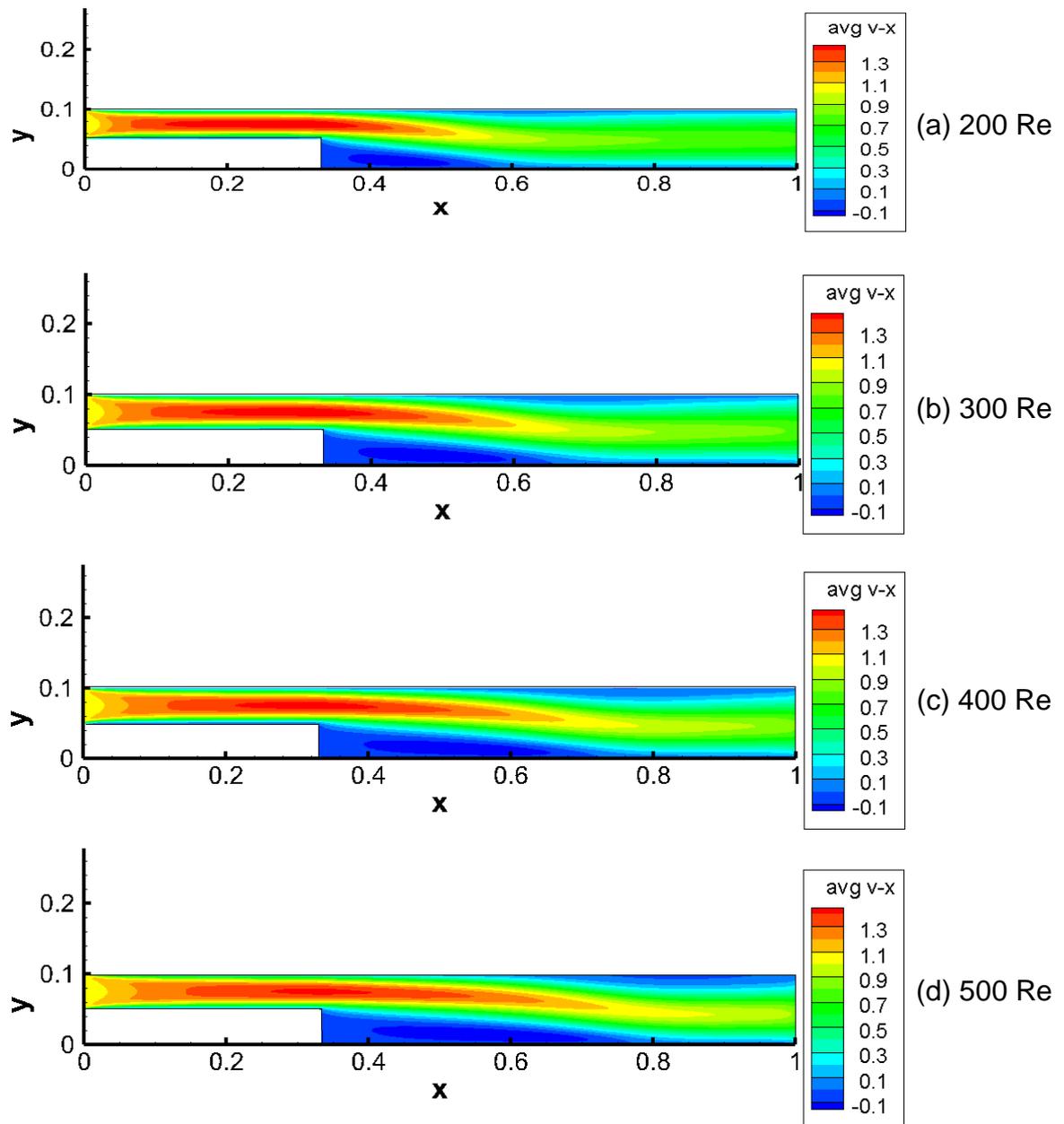
Figura 28 – Malha 50 x 300



Fonte: Do autor (2018).

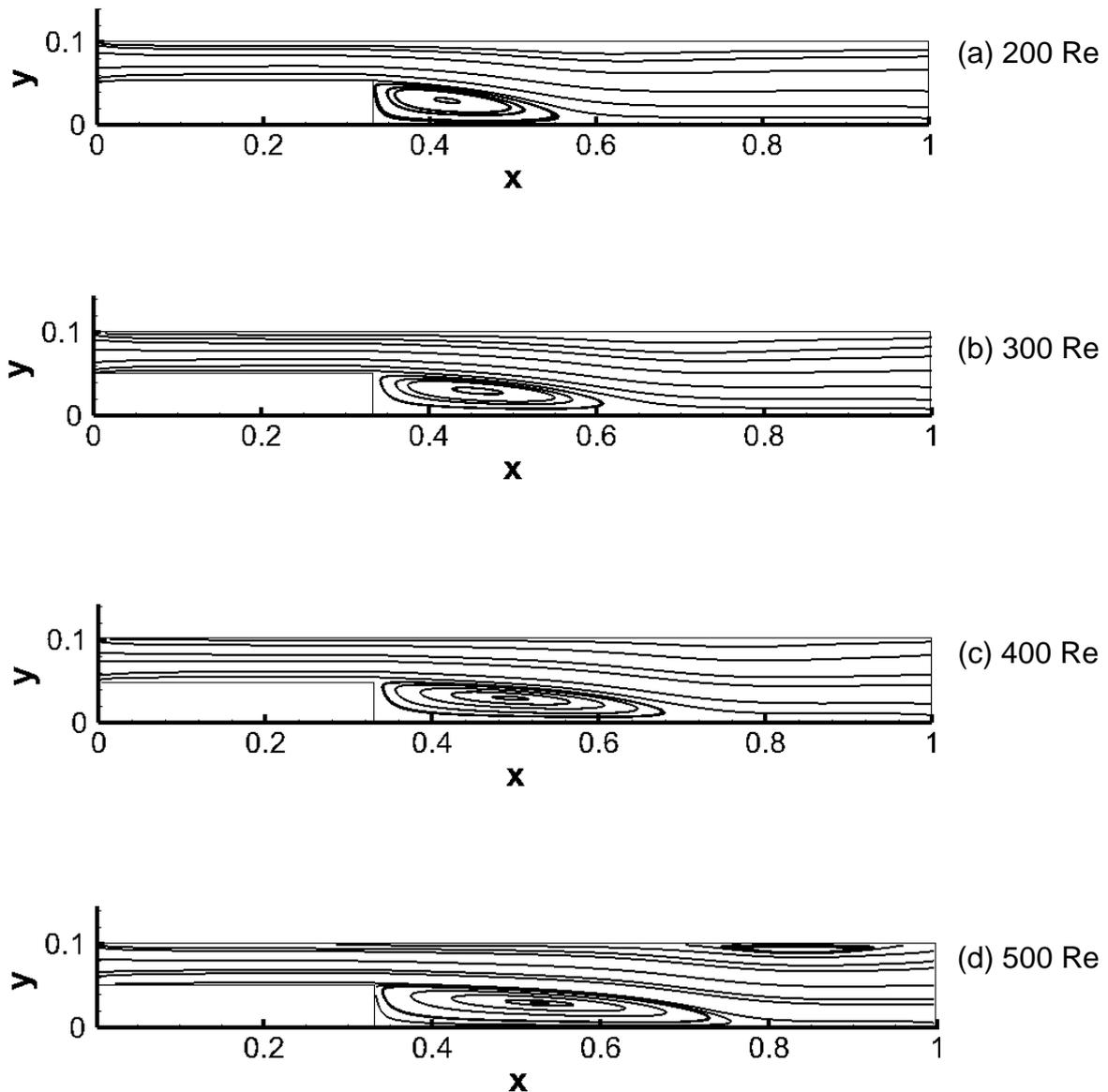
A Figura 29 ilustra os campos da componente u da velocidade, para os escoamentos com os Reynolds de 200 (a), 300 (b), 400 (c) e 500 (d), respectivamente. Enquanto que a Figura 30 ilustra as linhas de corrente para os mesmos escoamentos.

Figura 29 – Campos de velocidade para Re = (a) 200, (b) 300, (c) 400, (d) 500



Fonte: Do autor (2018).

Figura 30 – Linhas de corrente para $Re =$ (a) 200, (b) 300, (c) 400, (d) 500



Fonte: Do autor (2018).

Observando a Figura 29, é possível destacar que o escoamento tende a se desenvolver completamente na entrada, e que, após encontrar o degrau, começa a alterar o perfil, sendo que na saída, o escoamento tende a se desenvolver completamente novamente, para todos os números de Reynolds. Devido ao pequeno domínio considerado, as características citadas acima podem ser observadas de forma clara somente para o $Re = 200$, enquanto que nos outros três casos, o espaço utilizado não é suficiente para ocorrer o completo desenvolvimento do escoamento, tanto na entrada, quanto na saída. Ainda, se o domínio fosse grande o bastante, os perfis de velocidade no canal de entrada e de saída, após o completo desenvolvimento, seriam iguais para os 4 casos, já que a velocidade não

foi alterada para variar o número de Reynolds, e sim a viscosidade do fluido. Além disto, a mesma característica que no caso do escoamento entre placas paralelas é observada, os escoamentos com maior número de Reynolds precisam de mais espaço para se desenvolver completamente. Por fim, observa-se que a velocidade diminui após o escoamento passar pelo degrau, isto se deve a expansão no canal, sendo que a velocidade máxima sempre se localiza na região central do perfil, analisado em determinado ponto x de comprimento, conforme o fluido avança pelo domínio.

Em relação à Figura 30, é possível verificar que o vórtice criado devido as diferenças de pressões logo após o degrau, fica maior conforme aumenta o número de Reynolds, sendo que, para $Re = 200$, o vórtice ocupa aproximadamente 0,2 metros de comprimento do domínio, enquanto que para $Re = 500$, este ocupa aproximadamente 0,4 metros do domínio. Por fim, observa-se que um novo vórtice foi gerado com o Reynolds de 500, próximo ao canto superior direito do canal de saída, conforme Figura 30 (d), ainda que este ocupe uma pequena região do espaço. Isto indica uma tendência de que, quanto maior o número de Reynolds, mais vórtices poderão ser observados.

6 CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi desenvolvido um algoritmo numérico para solução das equações de Navier-Stokes bidimensionais, em regime transiente, sem trocas térmicas, com características incompressíveis, de viscosidade constante, e para baixos números de Reynolds, através de um método numérico, permitindo a análise diferencial de problemas envolvendo a dinâmica dos fluidos. Para discretização das equações, foi utilizado o método dos volumes finitos, sendo que o algoritmo foi desenvolvido em linguagem FORTRAN 90.

Com o objetivo de verificar o código criado, foram realizadas análises em casos testes que envolviam os termos difusivos e convectivos das equações governantes, sendo que estes problemas já foram bastante explorados na literatura, permitindo assim a comparação entre os resultados obtidos no algoritmo criado neste trabalho, com os encontrados pelos outros autores, seja de forma analítica ou numérica. As comparações realizadas para os Reynolds testados se mostraram bastante satisfatórias, demonstrando a acurácia do código.

Sendo assim, o algoritmo desenvolvido no presente trabalho, desde que sejam respeitadas as delimitações impostas no Capítulo 1, pode ser aplicado a qualquer problema da dinâmica dos fluidos, basta alterar as condições de contorno, e se preciso, adicionar condições auxiliares.

O código foi capaz de representar muito bem os vórtices criados nos escoamentos em que estes eram envolvidos, bem como apresentar algumas

características destes, como por exemplo, o aumento de seu tamanho conforme o número de Reynolds aumenta, ou ainda, o aumento do número de vórtices conforme o número de Reynolds aumenta. O código também representou muito bem o espaço necessário para um escoamento interno atingir o completo desenvolvimento, sendo que quanto maior o número de Reynolds, maior foi o espaço necessário, ilustrando de forma coerente o comportamento esperado.

O algoritmo não tem um limite exato de Reynolds em que este representará de forma precisa os escoamentos estudados, porém, devido as limitações do método de interpolação utilizado, bem como ao tipo de malha, o código provavelmente apresentará problemas para tratar de fenômenos envolvendo números de Reynolds que ultrapassam o regime transitório, principalmente quando o termo convectivo das equações é muito mais dominante que o difusivo. Além disto, devido às limitações citadas acima, o tratamento de escoamentos envolvendo geometrias complexas também pode ser um problema, caso não seja realizado um refinamento de malha adequado. Sendo assim, é sugerido, como para todo o problema resolvido por métodos numéricos, que os resultados obtidos no código sejam comparados com problemas semelhantes, porém simplificados, e que devido a estas simplificações, permitam a obtenção de uma solução analítica, ou ainda de um estudo experimental, quando aplicado.

Por fim, são sugeridos alguns tópicos para a continuação deste estudo em trabalhos futuros. Como por exemplo, alterar o tipo de malha e arranjo utilizado neste trabalho, passando de estruturada para malhas não estruturadas e de arranjo desconstruído para co-localizado, permitindo assim analisar de forma mais eficaz, problemas geometricamente mais complexos. Além disto, sugere-se utilizar outro método de interpolação das variáveis, como o método SWUDS, já que este é específico para fenômenos 2D e 3D, evitando problemas encontrados em métodos como o das diferenças centrais, permitindo o tratamento de fenômenos com maiores números de Reynolds. Diversos outros estudos podem ser feitos, como analisar o tempo de simulação utilizando outros métodos para tratar do problema de acoplamento pressão-velocidade, ou ainda, complementar o código, diminuindo as limitações deste em relação as propriedades reais dos fluidos, como por exemplo, trabalhar com domínios tridimensionais, fluidos que envolvem trocas térmicas, entre outros.

REFERÊNCIAS

BATISTA, Vicente H. F. **Geração de Malhas Não-Estruturadas Tetraédricas Utilizando um Método de Avanço de Fronteira**. 98f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

BRUNETTI, Franco. **Mecânica dos Fluidos**. 2. ed. São Paulo: Editora Pearson Prentice Hall, 2008.

CAVALCANTI, Enilson P. **Notas de Dinâmica dos Fluidos**. Campina Grande: Universidade Federal da Paraíba, 2001.

ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Mecânica dos Fluidos: fundamentos e aplicações**. 3. ed. São Paulo: Editora AMGH, 2015.

DAUGHERTY, Robert L.; FRANZINI, Joseph B.; INGERSOLL, Alfred C. **Fluid Mechanics with Engineering Applications**. 6. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1965.

DAILY, James W.; HARLEMAN, Donald R. F. **Fluid Dynamics**. Boston: Addison-Wesley Pub., 1966.

DEUS, R. L.; MACHADO, F. C. S.; SILVEIRA, R. A. M.; NOGUEIRA, C. L. MDF: Conceitos Básicos e algumas Aplicações na Engenharia Estrutural. In: **IX SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**, São João Del Rei, Minas Gerais, 2010

DE SOUZA, Remo M. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor**. Belém: Universidade Federal do Pará, 2003.

FRANCO, José M.; PARTAL, Pedro. **The Newtonian Fluid**. Huelva: Rheology1 2010, v. 1.

FORTUNA, Armando de Oliveira. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Editora EDUSP, 2012.

FOX, Robert W.; PRITCHARD, Philip J.; MCDONALD, Alan T. **Introdução a mecânica dos fluidos**. 7. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2010.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. In: **JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS**, 1982, v. 48.

GILAT, Amos; SUBRAMANIAM, Vish. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma introdução com aplicações usando MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

GOBBI, Maurício; DIAS, Nelson L.; MASCARENHAS, Flavio; VALENTINE, Enise. **Introdução à Mecânica dos Fluidos e aos Fenômenos de Transporte**. Paraná. Disponível em: <<http://www.lemma.ufpr.br/wiki/images/0/0b/MecFlu-v3-8cap.pdf>>. Acesso em: 16 jun, 2018.

GONÇALVES, Nelson D. F. **Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas**. 71f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Matemática) - Universidade do Porto, Porto, 2007.

GRAÇA, Claudio. **Calculo Vetorial**. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2012.

JR, MATSUBARA, Tadas; ROMEIRO, Neyva M. L. Linearização do Sistema resultante da Discretização da Equação de Burgers. In: **CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL DO SUDESTE**, 2014, Curitiba, Paraná. Sociedade de Matemática Aplicada e Computacional. Disponível em: <<https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/issue/view/2>>. Acesso em: 16 jun, 2018.

JR, ANDERSON, John. **Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications**. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1995.

KATZ, Joseph. Aerodynamics of Race Cars. In: **ANNUAL REVIEW OF FLUID MECHANICS**, 2006, v. 38.

KUZMIN, Dimitri. **A Guide to Numerical Methods for Transport Equations**. Nuremberga: Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2010.

LAI, Michael; KAEMPLER, Erhard; RUBEN, Davind. **Introduction to Continuum Mechanics**. 4. ed. Massachusetts: Elsevier Inc., 2010.

LESTARI, Dwi A. **Development of unsteady algorithms for pressure based unstructured solver for two-dimensional incompressible flows**. 114f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeroespacial - Iowa State University, Iowa, 2009.

MALISKA, Clovis R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2014.

MOUKALLED, Fadl; DARWISH, Mohamed; MANGANI, Luca. **The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM and MATLAB**. Suíça: Springer, 2016.

NACHBIN, André. **Programa de Doutorado - Dinâmica dos Fluidos - Aula 02**. 2014. (1h26m03s). Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=GhytDZ_yZ_Y&t=3626s>. Acesso em: 10 jul, 2018.

NAGLE, Kent R.; SAFF, Edward B.; Snider, Arthur D. **Equações Diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Editora Pearson, 2012.

PAITAN, César A. T. **Modelagem numérico de fluxo em meios fraturados e meios porosos fraturados**. 100f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

PATANKAR, Suhas V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. Nova Iorque: Taylor and Francis Group, 1980.

PIRES, Luis F. G. **Um Método Numérico para Solução de Escoamentos Utilizando Componentes Contravariantes em Coordenadas não Ortogonais**. 151f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.

PEIRÓ, Joaquim; SHERWIN, Spencer. **Handbook of Materials Modeling**. Holanda: Springer, 2005. v.1.

POLYANIN, Andrei D. **Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists**. Florida: Chapman & Hall/CRC, 2002.

RODRIGUEZ, Oscar M. H. **Fundamento da Mecânica dos Fluidos**: Notas de aula. São Carlos: Núcleo de Engenharia Térmica e Fluidos. Disponível em: <http://www2.eesc.usp.br/netef/Oscar/Aula21>. Acesso em: 16 jun, 2018.

ROUSE, Hunter. **Highlights in the History of Hydraulics**. Iowa: Books at Iowa, 1983. v. 38.

SANTOS, Luis C. C. Métodos Numéricos para Escoamentos em Alta Velocidade. In: **COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA**, XXII, 1999, Rio de Janeiro. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/22_CBM_99_04.pdf>. Acesso em: 06, nov, 2017.

SEARS, Francis; ZEMANSKY, Mark. **Física 1: Mecânica**. 2. ed. São Paulo: Editora Pearson, 1984.

SILVA, Edna L.; MENEZES, Estera M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4. ed.. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2005.

SONIN, Ain A. **Equation of Motion for Viscous Fluid**. 8. ed. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2001.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João T.; SILVA, Luiz H. M. **Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos**. São Paulo: Editora Pearson, 2003.

STREETER, Victor L.; WYLIE, Benjamin E. **Fluid Mechnics**. 7. ed. Nova Iorque: McGraw-Hil, 1982.

VERSTEEG, Henk K.; MALALASEKERA, Weeratunge. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics**. 2. ed. Londres: Editora Pearson, 2007.

WELTY, James R.; RORRER, Gregory L; FOSTER, David G. **Fundamental of Momentum, Heat, and Mass Transfer**. 3. ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, Inc., 1984.

WHITE, Frank M. **Viscous Fluid Flow**. 2. ed. Nova Iorque: McGraw-Hil, 1991.

YANG, Won Y.; CAO, Wenwu; CHUNG, Tae S.; MORRIS, John. **Applied Numerical Methods Using MATLAB**. Nova Jérsei: John Wiley & Sons, Inc., 2005.

ZIENKIEWICZ, Cecil O. **The Finite Element Method**. 3. ed. Califórnia: McGraw-Hill, 1977.

ZUO, Wangda. **Introduction of Computational Fluid Dynamics**. Nürnberg: FAU Erlangen, 2005.