



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**

**PROPOSTA DE ATIVIDADES DE TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS  
QUAISQUER PARA ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A  
ENGENHARIA DIDÁTICA**

**Ivana Maria Nascimento dos Santos<sup>1</sup>, Angélica Vier Munhoz<sup>2</sup>, Marli Teresinha  
Quartieri<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Mestranda do Ensino em Ciências Exatas– Centro Universitário UNIVATES  
Rua Avelino Tallini, 171 CEP: 95900-000 - Bairro Universitário – Lajeado – RS – Brasil

<sup>2</sup>Professora do Mestrado em Ensino de Ciências Exatas – Centro Universitário  
UNIVATES  
Rua Avelino Tallini, 171 CEP: 95900-000 - Bairro Universitário – Lajeado – RS – Brasil

<sup>3</sup>Professora do Mestrado em Ensino de Ciências Exatas – Centro Universitário  
UNIVATES  
Rua Avelino Tallini, 171 CEP: 95900-000 - Bairro Universitário – Lajeado – RS – Brasil

### **Contextualização**

A presente proposta de atividades, foi realizada como parte da dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, do Centro Universitário Univates, intitulada, “Processos de ensino e aprendizagem de trigonometria em triângulos quaisquer a partir da engenharia didática”, realizada numa escola no município de Santana-AP”.

No campo de Educação Matemática, a francesa Michèle Artigue (1988) proporcionou sua contribuição desenvolvendo e divulgando a teoria da engenharia didática em meados de 1980, como metodologia de pesquisa no

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**

ensino de matemática. Seu estudo possibilitou a articulação entre a teoria e a prática, pois essa metodologia consiste na elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática que pode ser desenvolvida em sala de aula ou fora dela. Almouloud e Coutinho (2008, p. 05) consideram a Engenharia Didática uma metodologia de pesquisa:

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

É importante destacar que o objeto central, nessa metodologia, é a sequência didática por meio da qual são observadas as interações entre o tripé professor, aluno e saber. Nesse sentido, Brousseau (1996, p. 49) “[...] coloca que é preciso criar situações didáticas que façam funcionar o saber, a partir dos saberes definidos culturalmente nos programas escolares” (GÁLVEZ, 1996, p. 32). Nesta metodologia de pesquisa, Artigue (1988, p. 283) compara o trabalho do professor com o de um engenheiro, pois, nessa relação:

Tal como o engenheiro, o professor necessita de um conjunto de conhecimentos teóricos, ter planejamento de todas as etapas da pesquisa, ir prevendo as possíveis dificuldades e soluções para os problemas encontrados, até a aplicação da sequência didática.

A autora menciona que, no decorrer de cada fase, durante todo o trabalho de pesquisa e para Artigue (1988), essas fases estão divididas em análise preliminar ou prévia; concepção e análise a priori; experimentação e análise posteriori e validação, e torna-se necessário que tais fases sejam retomadas de acordo com as dificuldades e obstáculos observados.

Nesta perspectiva elaborou-se e aplicou-se uma sequência de atividades



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**

para alunos de 2º ano do Ensino Médio, utilizando os princípios da Engenharia Didática. A turma com a qual foi realizada a prática pedagógica tinha 30 alunos, na faixa etária entre 15 e 17 anos.

Foram utilizados alguns instrumentos para o levantamento de dados desta pesquisa. Dentre estes, foram importantes a aplicação do teste inicial; elaboração e aplicação da sequência didática; gravação das aulas por meio de vídeos (filmagem) e áudio; o diário de bordo dos alunos e do professor e aplicação do teste final.

### **Objetivo**

O objetivo desta proposta é socializar com outros professores, atividades que foram desenvolvidas a partir da metodologia da engenharia didática com alunos do 2º. ano do Ensino Médio, com foco no ensino da trigonometria no triângulo qualquer.

### **Detalhamento das Atividades**

Para a aplicação da sequência didática, fez-se necessário realizar uma atividade inicial de diagnóstico, com os alunos do 2º ano, instrumento utilizado na metodologia da engenharia didática. Salienta-se que nesta metodologia foram desenvolvidas atividades envolvendo conceitos matemáticos das leis trigonométricas no triângulo não retângulo e cálculo da área de um triângulo qualquer, os quais, necessariamente, não são desenvolvidos em apenas uma hora-aula.

Da engenharia didática, na fase preliminar ou prévia, aplica-se inicialmente um teste diagnóstico individual. Como explica Artigue (1988), é na primeira fase que as “análises prévias ou preliminares” são realizadas; e, na qual é analisado o conteúdo a ser trabalhado, bem como as formas de desenvolvê-lo. Ademais,

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**

investigam-se dificuldades e obstáculos observados durante os processos de ensino e de aprendizagem.

De maneira geral, após o desenvolvimento do teste inicial, eram perceptíveis as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação aos conceitos trigonométricos no triângulo retângulo, evidenciando-se, assim, a presença de lacunas. Logo, havia a necessidade de estas serem preenchidas no sentido de superar as dificuldades observadas durante a pesquisa. Diante do resultado da primeira fase, deu-se início a fase da análise a priori. Esta fase é mais dinâmica que a anterior, pois são definidas as variáveis didáticas do estudo em questão, ou seja, estratégias de ensino e resolução de atividades que têm o intuito de possibilitar a evolução do desempenho dos alunos envolvidos na pesquisa (POMMER, 2013). Envolve o planejamento, em que o professor pesquisador elabora suas estratégias didáticas considerando as variáveis globais e locais. Ressalta-se que, nela, o planejamento de pesquisa é focado no aluno.

A análise a priori, tem como objetivo:

[...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, ela fundamenta-se em hipóteses; será a validação destas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise a priori e a análise a posteriori (ARTIGUE, 1996, p. 205).

Após essa fase, elaborou-se uma sequência de atividades, que foi aplicada aos alunos, cujos resultados estão descritos na fase seguinte, que é da experimentação. Conforme Machado (2002), a terceira fase da Engenharia Didática consiste na aplicação da sequência didática junto aos alunos com objetivo de verificar as ponderações levantadas na análise a priori. A fase da experimentação é a da prática, em que o professor pesquisador coloca em ação tudo o que foi planejado nas anteriores, e seu foco é a sequência didática. Para

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**

essa fase, foram colocadas em prática as atividades propostas na concepção da análise a priori.

A experimentação foi desenvolvida por meio de encontros no próprio horário de aula, ou seja, duas horas aulas em um dia e uma hora aula em outro dia, somando três aulas semanais. Salienta-se que, para a realização de algumas atividades, os alunos foram divididos em grupos de cinco componentes ou em duplas. Neste contexto, segue a sequência de atividades com as questões que envolveram conteúdos de trigonometria em triângulos quaisquer (leis dos senos, lei dos cossenos e cálculo de área). Destaca-se que em cada atividade foi escrito o objetivo e o que se esperava alcançar, pois isto é pressuposto da Engenharia Didática.

*Atividade 1 - Travessia do rio da Ilha de Santana*

Santana é uma cidade onde está localizado o Porto. Por existir um grande movimento de embarcações, é normal o trânsito de pessoas da região metropolitana para a ilha e vice versa, por diferentes rios dessa região. Neste sentido, pensou-se na elaboração de questões que levassem em consideração situações envolvendo o cotidiano dos alunos. Como exemplo, é apresentado o seguinte problema.

**Situação proposta:** A figura 1 mostra que existem duas embarcações atracadas nos portos B e C, respectivamente. A distância uma da outra é de 100 metros e ambas ficam no mesmo lado de um rio. Além disso, há o porto de Santana em A do outro lado do mesmo rio. Usando equipamentos apropriados, verificou-se que o ângulo A mede  $30^\circ$  e o B,  $45^\circ$ . Determine (aproximadamente) a distância que separa a embarcação que está no porto C do de Santana A.

Figura 1 - Problema das distâncias na Ilha de Santana

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**



Fonte: Google Earth (2014).

- Objetivo: Calcular a distância que separa a embarcação que está no porto C até o porto de Santana, aplicando a lei dos senos.

- O que se esperava alcançar: que os alunos lessem, interpretassem e resolvessem a situação- problema, utilizando conteúdos já estudados e uma estratégia própria.

*Atividade 2 - Travessia do rio do Igarapé da Fortaleza*

O porto C (Igarapé da Fortaleza) está distante das embarcações A e B a 80 metros e 30 metros, respectivamente (ver Figura 2). Do porto C, observam-se as embarcações A e B tal que o ângulo BCA mede  $120^\circ$ . Determine a distância entre as embarcações A e B.

Figura 2 - Problema das distâncias no rio Igarapé da Fortaleza



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**



Fonte: Google Earth (2014).

- Objetivo: Calcular a distância que separa as duas embarcações A e B, aplicando a lei dos cossenos.

- O que se esperava alcançar: que os alunos lessem, interpretassem e resolvessem a situação problema, utilizando estratégias próprias e conhecimentos já adquiridos.

*Atividade 3 – Cálculo da área de uma região triangular*

A aquisição da casa própria é sonho de algumas pessoas e pode acontecer de formas diferentes, por exemplo, comprando um apartamento, uma casa pronta, um chalé ou um terreno para posterior construção de uma casa do seu jeito. Na aquisição de um terreno, duas perguntas são básicas ao vendedor: qual o valor e a metragem. Por isso, a importância de saber como é realizado o cálculo de área de uma determinada região. As dimensões também são importantes, ou seja, a área do terreno deve permitir a construção de um bom imóvel. O ideal é contratar

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**

profissionais da área, como um arquiteto ou engenheiro para avaliá-lo.

**Situação Proposta:** Sabe-se que os lados de um terreno triangular medem 40m e 31m e o ângulo formado por eles é de  $60^\circ$ . Calcule a área dessa região.

- Objetivo: Calcular a área de uma região triangular, sabendo-se a medida de dois lados do triângulo e o valor do ângulo por eles formado.

- O que se esperava alcançar: que os alunos calculassem a área, utilizando a fórmula de  $\sin \alpha$ .

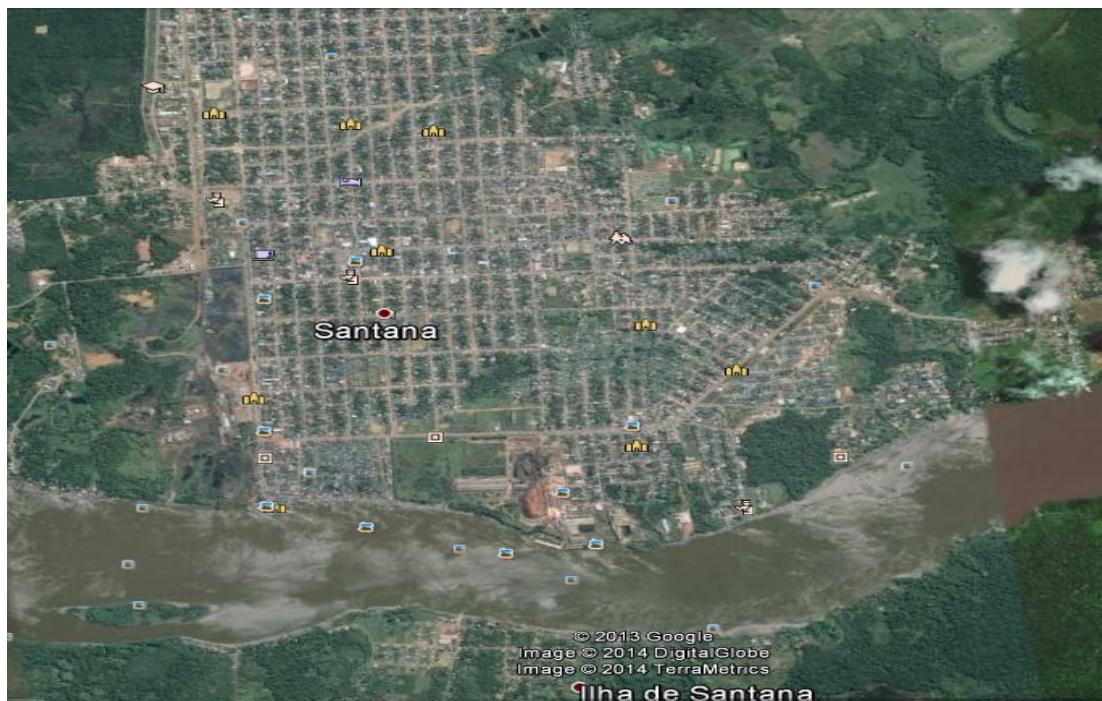
*Atividade 4 - Aplicação da trigonometria*

Santana está localizada no Estado do Amapá (ver Figura 3), teve um aumento populacional expressivo com a instalação de empresas para extração de minérios. Isso estimulou a vinda à referida localidade de profissionais de várias áreas do conhecimento, contribuindo para um superpovoamento, provocando um processo de urbanização desorganizada. Como essas pessoas precisavam de moradia, isso acabou gerando um problema para a população santanense. Então, solicitou-se aos alunos que buscassem na internet exemplos de aplicações da trigonometria na engenharia, topografia e arquitetura.

Figura 3 – Localização de Santana – AP



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**



Fonte: Google Earth (2014).

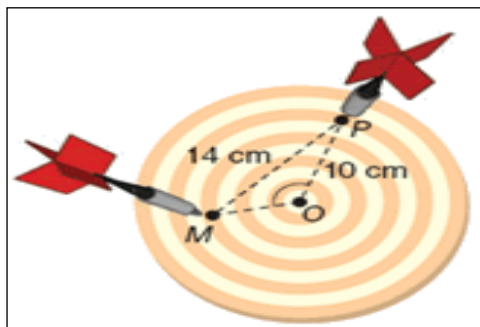
- Objetivo: verificar a aplicação da trigonometria em situações reais.
- O que se esperava alcançar: que os alunos apresentassem exemplos com aplicações de trigonometria.

*Atividade 5 - Atividades complementares: calculando distância e altura*

**Situação Proposta 1 (Unesp):** Paulo e Marta estão brincando de jogar dardos. O alvo é um disco circular de centro O. Paulo joga um dardo, que atinge o alvo num ponto, que vamos denotar por P; em seguida, Marta joga outro dardo, que atinge um ponto denotado por M, conforme a figura. Sabendo-se que a distância do ponto P ao centro O do alvo é  $PO = 10$  cm, que a distância de P a M é  $PM = 14$  cm e que o ângulo POM mede  $120^\circ$ , determine a distância, em centímetros, do ponto M ao centro O (ver Figura 4).

Figura 4 – Problema da distância do alvo e o dardo

CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO



Fonte: Banco de Dados da Professora Pesquisadora.

- Objetivo: Determinar a distância do segmento  $\overline{MO}$ , no triângulo  $P\hat{O}M$ .
- O que se esperava alcançar: que o aluno aplicasse a lei dos cossenos, apoiando-se de outros conceitos já estruturados.

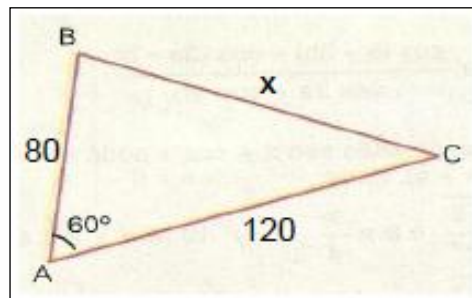
**Situação Proposta 2 (UNIRIO):** Considerando os lados de um triângulo 3, 4 e 6, quanto vale o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo?

- Objetivo: Representar geometricamente os dados do problema e calcular o valor do cosseno do maior ângulo interno desse triângulo.
- O que se esperava alcançar: que o aluno usasse a lei do cosseno, apoderando-se de outros conceitos já estruturados.

**Situação Proposta 3 (UNIRIO):** Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala (Figura 5). Sabe-se que  $AB = 80$  km e  $AC = 120$  km, onde A é uma cidade conhecida, como mostra a figura. Calcule a distância entre B e C, em km:

Figura 5 – Problema da distância entre a cidade B e C

CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO

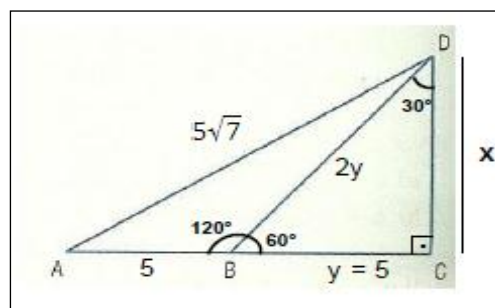


Fonte: Banco de Dados da Professora Pesquisadora.

- Objetivo: Determinar a distância entre duas cidades, representadas por B e C.
- O que se esperava alcançar: que o aluno aplicasse corretamente a lei do cosseno.

**Situação problema 4 (PUC – MG)** – Na figura 6,  $AB = 5\text{dm}$ ,  $AD = 5\sqrt{7}\text{dm}$ ,  $AD = 5\sqrt{7}\text{dm}$ ,  $DBC = 60^\circ$  e  $DCA = 90^\circ$ . Qual é a medida de CD, em decímetros?

Figura 6 – Problema da medida de um CD



Fonte: Banco de Dados da Professora Pesquisadora.

- Objetivo: Determinar a distância do segmento  $\overline{CD}$ .
- O que se esperava alcançar: que o aluno soubesse escolher quais os conceitos já estruturados deveriam ser usados para resolver a questão.

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**

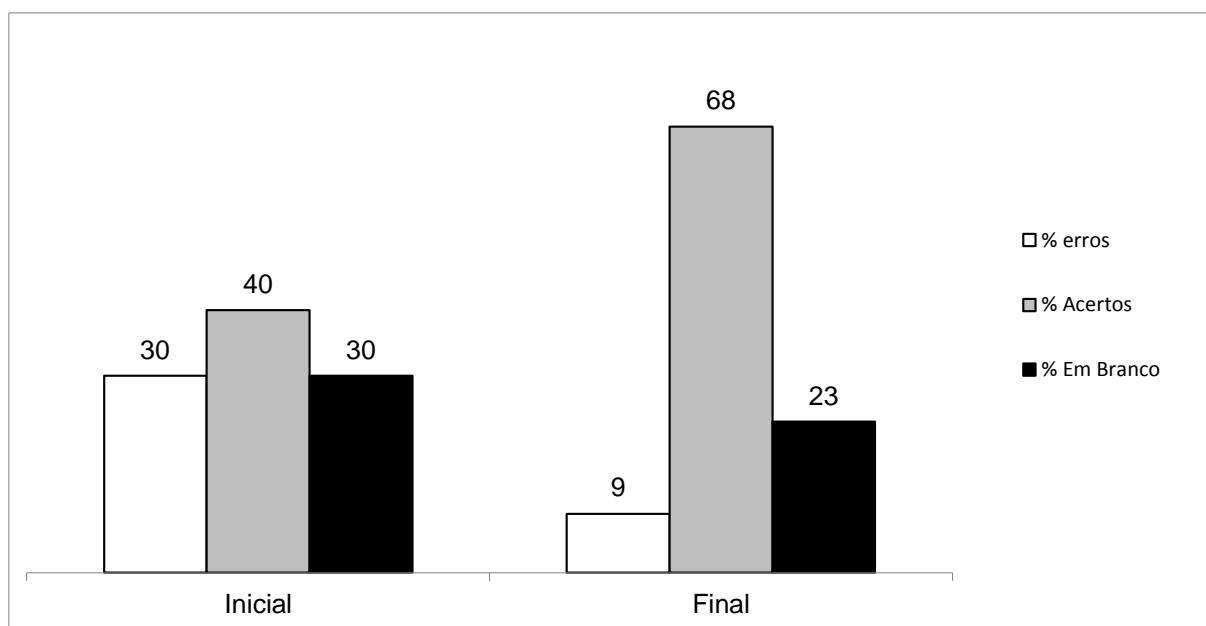
A partir dos resultados obtidos durante a aplicação da sequência didática, pode-se atestar que os objetivos da pesquisa foram alcançados. Trabalhando a sequência de ensino a partir de situação - problema, edifica-se a relação entre teoria e experimentação e finaliza-se com sua validação (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 76).

Ao finalizar a aplicação da sequência didática, que foi desenvolvida seguindo os preceitos da Engenharia Didática, aplicou-se um teste final, com o objetivo de verificar a validação da sequência aplicada.

### Resultados obtidos

A análise dos resultados da aplicação da sequência didática mostrou melhora no desempenho dos alunos, o que pode ser observado no Gráfico 1.

Gráfico 1 - Comparativo entre os testes inicial e final



Fonte: A autora, a partir do resultado dos testes.

Portanto, na 4ª etapa ou fase, ocorreu a análise a posteriori e validação da

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**

pesquisa. De acordo com Pommer (2013), ela se caracteriza pelo levantamento dos dados recolhidos e na confrontação com a análise a priori, permitindo a interpretação dos dados levantados. Assim, após a aplicação e exploração da sequência de atividades, os dados obtidos com as produções dos alunos em sala de aula e fora dela foram recolhidos e comparados. E, por meio do resultado dessa análise e dos decorrentes entre os testes inicial e final,. Nas percepções realizadas em sala de aula, observaram-se algumas dificuldades em relação aos conceitos relacionados com a trigonometria, em particular, a trigonometria em triângulo qualquer, tais como:

- lacunas em relação à trigonometria do triângulo retângulo: foi possível perceber, através da resolução das questões, que havia conceitos ainda não estruturados;

- erros no uso das fórmulas e, conseqüentemente, na resolução dos cálculos: essa dificuldade foi observada em situações- problema onde havia a ausência de desenho representativo;

- problemas de leitura e interpretação da situação – problema, ocasionando erros de desenhos e de uso de fórmulas;

- dificuldades em elaborar situações - problema: mesmo que a professora já houvesse explicado que tipo de situações seria interessante, os alunos acabaram elaborando apenas exercícios, ou seja, problemas-padrão. Quanto a estes, pode-se inferir que era hábito da turma resolvê-los no decorrer das aulas e não situações- problema relacionadas ao seu cotidiano.

- problemas na escrita por meio do uso de termos matemáticos: no momento de escrever, a turma demonstrou dificuldades em explicar o significado de cada uma das leis estudadas. Além disso, afirmavam não ter o hábito de



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**

escrever nas aulas de matemática.

Dessa forma a Engenharia Didática pode ser um importante recurso para os professores que trabalham com as disciplinas de Matemática no Nível Médio, por ser uma metodologia de investigação e produtora de situações de ensino, cujo foco está na aprendizagem do educando e na melhoria da qualidade da aula, na qual o docente se transforma em professor engenheiro. Assim, concluiu-se que a Engenharia Didática torna-se, de acordo com suas fases, um processo contínuo de construção de conhecimento e investigação metodológica. Desse modo, a investigação favoreceu a construção e aquisição do conhecimento dos alunos e a melhoria da qualidade de aula da pesquisadora. Finaliza-se, pois afirmando que não existe uma “receita” ou “fórmula” pronta de como dar uma aula, mas sim a busca constante de novas metodologias que possibilitem uma melhor aprendizagem.

### **Referências**

- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. **Engenharia Didática**: características e seus usos em trabalhos. REVMAT: Anped, v. 3, p. 62-77, 2008.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 193-217.
- ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique. Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.
- BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, cap. 1. p. 35-113, 1996.
- GÁLVEZ, G. A Didáctica da Matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didáctica da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, cap. 2, p. 26-35, 1996.



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –  
MESTRADO**

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. **Educação Matemática: uma introdução**. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo: Tabs, p.72, 2013.