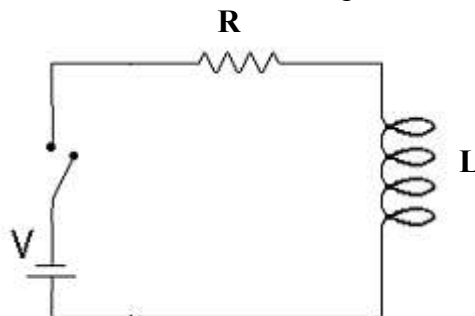


## Guia de Atividades para abordar Equações Diferenciais Ordinárias através da exploração de situações-problema que envolvem queda de corpos e circuitos elétricos.

Nestas atividades temos como objetivo abordar o estudo de situações-problema que envolvem a queda de corpos e circuitos elétricos, e a partir destas, investigar o comportamento da solução de equações diferenciais e a respectiva taxa de variação das situações de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Também exploraremos a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial na forma analítica, a análise dimensional das equações diferenciais envolvidas nestas situações e a sua resolução analítica pela técnica das separáveis.




### Circuito elétrico

Agora vamos trabalhar com equações que podem ser usadas para descrever, com certo grau de aproximação, o comportamento de circuitos elétricos representados esquematicamente na Figura 4.1.



**Figura 4.1:** Circuito elétrico tipo RL com o indutor inicialmente carregado.

Os componentes elétricos que compõem este circuito são:

-  fonte de tensão contínua (bateria, pilha ou gerador elétrico), capaz de fornecer uma certa diferença de potencial (voltagem),  $V$ , medida em volts (V);
-  resistor (resistências, lâmpadas), que possui uma certa resistência elétrica,  $R$ , medida em ohms ( $\Omega$ ). Para certos resistores,  $R$  não depende da corrente que circula pelo resistor, ou seja, é uma constante. (Estes são chamados resistores ôhmicos.)
-  indutor (bobina), que possui indutância  $L$ , medida em henrys (H)

Sobre circuitos elétricos precisamos lembrar:

- i. que a diferença de potencial entre os terminais de resistores e indutores, quando por eles circula uma corrente  $i$  e o indutor está carregando, é dada pelas expressões mostradas na Figura 4.2.
- ii. a soma algébrica das quedas de potencial ao longo de um laço fechado de um circuito elétrico deve ser igual a soma das elevações de potencial.



**Figura 4.2.** Diferença de potencial em a) um resistor percorrido por uma corrente elétrica  $i$ , e b) um indutor que está sendo carregado.

Com estas informações, podemos verificar que a equação diferencial que rege a corrente que circula pelo circuito RL mostrado na Figura 4.1, ao fecharmos a chave é:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V \quad \text{Eq. 1}$$

### Atividade A

Considerando o circuito elétrico mostrado na Figura 4.1, suponha que a fonte de tensão fornece uma voltagem constante de 60V, que a resistência é constante e igual a 12  $\Omega$ , a indutância é de 40 mH, que a corrente no instante inicial é nula ( $i(0)=0$ ) e que a chave foi fechada.

**I.** Construa um diagrama no Powersim para representar esta situação.

**II.** Construa o gráfico da corrente contra o tempo e verifique o que acontece com o valor da corrente a longo prazo.

**III.** Construa o gráfico da taxa de variação da corrente  $\left(\frac{di}{dt}\right)$  em função do tempo e justifique qualitativamente o traçado desta curva.

**IV.** Em qual intervalo de tempo,  $0 < t < 5$  ou  $5 < t < 10$ , a taxa de variação da corrente em função do tempo é maior? Explique.

**V.** Construa o gráfico da taxa de variação da corrente  $\left(\frac{di}{dt}\right)$  em função da corrente e explique-o.

**VI.** Arbitre alguns valores entre 0 e 100V para a diferença de potencial, estabelecida pela fonte de tensão contínua do circuito elétrico mostrado na Figura 4.1, mantendo os outros parâmetros fixos. Qual a influência da alteração de V no(a):

- a) curva da corrente elétrica versus tempo?
- b) valor da corrente elétrica a longo prazo?
- c) comportamento da taxa de variação da corrente elétrica em função do tempo?

**VII.** Tendo em mente a mesma sistemática do exercício anterior, arbitre alguns valores para a resistência elétrica do resistor entre 0 e 20 ohms, mantendo os outros parâmetros com os mesmos valores do exercício I. Qual a influência da alteração de R no(a):

- a) curva da corrente elétrica versus o tempo?
- b) valor da corrente elétrica a longo prazo?
- c) comportamento da taxa de variação da corrente elétrica em função do tempo?

**VIII.** Resolva, analiticamente, a equação  $L \frac{di}{dt} + Ri = V$  para encontrar a solução geral.

**IX.** Use as condições fornecidas para encontrar a solução particular.

**X.** Calcule o valor da corrente no instante  $t=0,25s$  e  $t=1s$  e compare os resultados com os obtidos no Powersim.

### Queda de corpos

Um corpo de massa  $m$  em queda vertical, fica sujeito à resistência do ar, que é proporcional à sua velocidade. Atuam sobre o corpo, de massa  $m$ , a força gravitacional, responsável pelo seu peso,  $F_1 = -mg$ , e a força resistiva do ar,  $F_2 = -kv$ , sendo  $k$  uma constante positiva, que depende do formato e rugosidade da superfície do corpo e de propriedades do ar. Um dos eixos do sistema de referência adotado é vertical e tem seu sentido positivo arbitrado para cima, e  $v$  representa a componente da velocidade na direção deste eixo. Assim, a componente da força na direção do eixo é força dada por:  $F = F_1 + F_2 = -mg - kv$ .

De acordo com a Segunda Lei de Newton, temos que:  $F = ma = m \frac{dv}{dt}$ , então, a equação que rege o movimento do corpo é

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv \quad \text{ou} \quad v' + \frac{k}{m}v = -g \quad \text{Eq. 2}$$

### Atividade B

Uma esfera de arremesso de peso com massa igual a  $7,2kg$  cai de um helicóptero em pleno vôo. Considere que  $g = 9,8m/s^2$  e  $k = 0,5$ .

**I.** Qual a unidade de medida do  $k$ ?

**II.** Construa um diagrama no Powersim para representar esta situação.

**III.** Construa o gráfico do módulo da velocidade contra o tempo e analise se a taxa de variação da velocidade da esfera do momento que ela cai do helicóptero até imediatamente antes de atingir o solo aumenta, diminui ou permanece sempre igual.

**IV.** Durante a queda, a velocidade da esfera tende a zero? Comente.

**V.** Qual é a velocidade máxima (velocidade limite) atingida pela esfera durante sua queda?

**VI.** O que se alteraria no gráfico da velocidade contra o tempo se o  $k$  fosse zero?

### **Atividade C**

Considere agora, o caso da esfera, com massa igual a  $7,2\text{ kg}$ ,  $g=9,8\text{ m/s}^2$  e  $k=0,5\text{ kg/s}$  lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de  $100\text{ m/s}$ .

**I.** Simule esta situação no Powersim.

**II.** Construa o gráfico do módulo da velocidade contra o tempo e descreva o comportamento da taxa de variação da velocidade da esfera desde o momento que ela foi lançada até atingir o chão.

**III.** Resolva, analiticamente, a equação  $v' + \frac{k}{m}v = g$  para encontrar a solução geral.

**IV.** Use as condições fornecidas para encontrar a solução particular.

**V.** Calcule o valor da velocidade no instante  $t=1\text{ s}$  e  $t=20\text{ s}$  e compare os resultados com os obtidos no Powersim.

### **Atividade D**

Considere a eq. dif. dada por  $\frac{dy}{dt} + ay = b$  e trace o perfil do gráfico de  $y$  versus  $t$ , nos seguintes casos:

**I.**  $a=b=0$

**II.**  $a=0$  e  $b$  é uma constante qualquer

**III.**  $a$  é uma constante qualquer e  $b$  é uma constante qualquer

**IV.**  $a$  é uma constante qualquer e  $b=0$