Guia de Atividades usando o método de Euler para encontrar a solução de uma Equação Diferencial Ordinária

Para algumas situações-problema, cuja formulação matemática envolve equações diferenciais, é possível resolver a equação e obter uma solução analítica a partir de expressões matemáticas envolvendo funções conhecidas, como polinômios, exponenciais, ... Em muitos casos, não é possível encontrar tais soluções e precisamos, então, recorrer a métodos numéricos. Estes métodos também podem ser úteis mesmo quando existem soluções exatas, pois muitas vezes é muito complicado obtê-las analiticamente.

Vamos investigar a situação que envolve o movimento de objetos na vertical, sob ação da gravidade e resistência do ar, explorando a velocidade e a posição do objeto em função do tempo, do método de Euler, usando como recurso a planilha de cálculos do OpenOffice. Adotamos um sistema de referência cujo eixo vertical aponta para cima. Assim, quando o corpo se move para cima sua velocidade é positiva e para baixo, negativa. Lembramos que a equação que rege a velocidade do corpo é:

$$v' + \frac{k}{m} v = -g \qquad \text{Eq. 1}$$

Inicialmente nosso interesse será verificar a velocidade da esfera em qualquer instante de tempo. Sabemos que para um corpo que se move com aceleração constante, a velocidade em um instante t_1, pode ser calculada a partir da velocidade no instante t_0, pela relação $v_1 = v_0 + a \cdot \Delta t$, sendo Δt igual a $t_1 - t_0$. Vamos considerar agora um corpo cuja aceleração não é constante, dada pela curva mostrada na Figura 1. Aplicar o Método de Euler implica fazer uma aproximação em que se supõe que a aceleração pode ser considerada constante para pequenos intervalos de tempo, representados pelos retângulos da Figura 1.

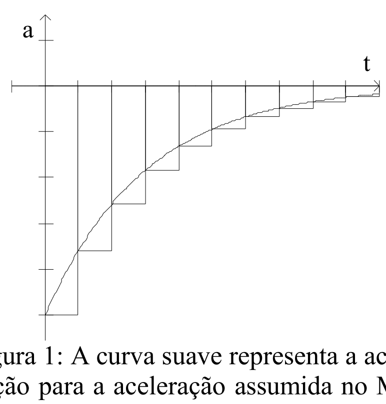

Figura 1: A curva suave representa a aceleração versus tempo para um determinado corpo. A outra curva representa a aproximação para a aceleração assumida no Método de Euler. Supõe-se a aceleração constante e igual ao valor exato no início do intervalo de tempo.

Definindo a aceleração por uma função $f(t,v)$, concluímos que $f(t,v)=a=\frac{dv}{dt}=v'=-g-\frac{k}{m}v$.

Conhecendo v_0 e t_0 , temos $f(t_{0,}v_0)$ e podemos obter um valor aproximado para a velocidade num instante posterior t_1 : $v_1=v_0+\Delta t\cdot f(t_{0,}v_0)$, sendo $\Delta t=t_1-t_0$.

Conhecendo v_1 podemos calcular $f(t_{1,}v_1)=-g-\frac{k}{m}\cdot v_1$ e usar este valor para obter a velocidade num instante posterior t_2 : $v_2=v_1+\Delta t\cdot f(t_{1,}v_1)$, sendo $\Delta t=t_2-t_1$. Por simplicidade, vamos tomar $t_2-t_1=t_1-t_0$.

E assim sucessivamente, utiliza-se o valor da velocidade em um dado instante t_n (v_n) para determinar a aceleração no instante t_n $(f(t_n,v_n))$, que permite calcular a velocidade em um instante posterior, t_{n+1} . Por simplicidade, tomamos os incrementos de tempo $t_{n+1}-t_n=constante=\Delta t$. Generalizando, obtemos:

$v_n=v_{n-1}+\Delta t\cdot f(t_{n-1},v_{n-1})$, com $n=1,2,3,...$.

Usando intervalos de tempo cada vez menores, os degraus da Figura 1 se tornam cada vez mais estreitos e pequenos, e obtemos uma boa aproximação da velocidade num instante de tempo.

É importante destacar que para cada intervalo de tempo Δt da Figura 1 formamos um retângulo e calculamos a sua área, pois fizemos Δt (base) x $f(t,v)$ (altura). Como o resultado é somado com o resultado anterior, o que está sendo calculado é a área sob a curva "em degrau", portanto, a área sob o gráfico de $a\,x\,t$ fornece a variação da velocidade.

Atividade A

I. Numa planilha de cálculos, simule o Método de Euler para resolver o problema que envolve a situação da esfera que cai do helicóptero:"*Uma esfera de arremesso de peso com massa igual a* $7{,}2\,kg$ *cai de um helicóptero em pleno vôo. Considere que* $g=9{,}8\,m/s^2$ *e* $k=0{,}5\,kg/s$ *.*"

Analise esta planilha e construa o gráfico da velocidade contra o tempo.

II. Faça simulações variando o tamanho do intervalo de Δt e verifique o que acontece com o valor da velocidade no instante $t=2\,s$.

III. Obtenha a solução analítica da Eq. 1 e utilize-a para obter o gráfico da velocidade contra o tempo. Obs. Construa o gráfico de solução analítica e da solução numérica no mesmo sistema de eixos coordenados. Escolha um valor de Δt tal que as duas curvas lhe pareçam suficientemente próximas.

IV. Construa o gráfico da aceleração contra o tempo.

V. A aceleração do movimento aumenta, diminui ou permanece sempre igual à medida que o tempo passa? Comente.

VI. Considere agora, o caso da esfera, com massa igual a $7{,}2\,kg$, $g=9{,}8\,m/s^2$ e $k=0{,}5\,kg/s$ lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 100m/s. Simule esta situação na planilha de cálculos e construa o gráfico da velocidade contra o tempo.

VII. Descreva o comportamento da taxa de variação da velocidade da esfera desde o momento que ela foi lançada até atingir o chão.

VIII. Construa o gráfico da aceleração contra o tempo.

Nas atividades anteriores abordamos a situação que envolve movimento de objetos (com resistência do ar) usando o Método de Euler e nos concentramos na velocidade do objeto em função do tempo. Agora vamos investigar, também, a variação da posição do objeto com o tempo.

Lembramos que, se $x(t)$ representa a posição do corpo do instante *t,* a equação diferencial que rege o movimento do objeto é:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=-g \qquad \text{Eq. 2}$$

Nosso interesse é verificar a posição da esfera em qualquer instante de tempo. Sabemos que para um corpo que se move com velocidade constante, a posição em um instante t_1 , pode ser calculada a partir da posição no instante t_0 , pela relação $x_1=x_0+v\cdot\Delta t$, sendo Δt igual a t_1-t_0 . Vamos considerar agora um corpo cuja velocidade não é constante, e aplicar o Método de

Euler para fazer uma aproximação, supondo a velocidade constante para pequenos intervalos de tempo.

Conhecendo x_0 e t_0 , podemos obter um valor aproximado para a posição num instante posterior t_1 : $x_1 = x_0 + \Delta t \cdot v_0$, sendo $\Delta t = t_1 - t_0$.

Conhecendo x_1 podemos usar este valor para obter a posição num instante posterior t_2 : $x_2 = x_1 + \Delta t \cdot v_1$. E assim sucessivamente, utiliza-se o valor da posição em um dado instante t_n (x_n) para determinar a posição em um instante posterior, t_{n+1} . Generalizando, obtemos:

$x_n = x_{n-1} + \Delta t \cdot v_{n-1}$, com $n = 1,2,3,...$.

Usando intervalos de tempo cada vez menores, obtemos uma boa aproximação da posição num instante de tempo.

I. Acrescente na planilha, onde foi utilizado o Método de Euler para resolver o problema que aborda a velocidade da esfera que cai do helicóptero, uma coluna para explorar a posição da esfera em função do tempo e construa o gráfico da posição contra o tempo.

II. Faça simulações variando o tamanho do intervalo de Δt e verifique o que acontece com o valor da posição no instante $t = 2\,s$. Quanto deve valer Δt para que tenhas uma precisão de metros da posição? Sugestão: Para Δt use $1\,s$, $0{,}1\,s$, $0{,}05\,s$, $0{,}01\,s$ e $0{,}005\,s$.

III. Verifique a posição da esfera no instante $t = 1\,s$ e $t = 3\,s$, usando o Δt considerado de boa precisão na atividade anterior.

IV. Considere agora, o caso da esfera, com massa igual a $7{,}2\,kg$, $g = 9{,}8\,m/s^2$ e $k = 0{,}5\,kg/s$ lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de $100\,m/s$. Simule esta situação na planilha de cálculos variando o valor de Δt até obter uma boa precisão, em metros, e construa o gráfico da posição contra o tempo.

<u>Tarefa avaliativa</u>: Crescimento populacional

Na disciplina de Modelagem Matemática trabalhamos com questões relacionadas ao crescimento populacional (população do RS) explorando o Modelo de Malthus, onde a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional à população existente no instante t, o que resulta na equação diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$.

I. De acordo com o censo realizado em 2000, a população de Lajeado era de 59.849[1] pessoas e em 2007, era de 67.474 pessoas. Se considerarmos que a população de Lajeado esta crescendo de acordo com o modelo de Malthus, a taxa anual com que a população está crescendo é de 1,7%.

a. Utilize o Método de Euler, para obter, aproximadamente, o tamanho da população de Lajeado em função do tempo se ela continuar crescendo exponencialmente. Utilize a planilha.

b. Construa o gráfico da população contra o tempo, em anos.

c. Qual o tamanho da população em 2020?

d. Em quanto tempo a população duplica? E quadruplica?

---

1 www.ibge.gov.br