Guia de Atividades para Introduzir Equações Diferenciais Ordinárias usando o *Software* Powersim

Nestas atividades temos como objetivo abordar a definição, solução e notação de uma equação diferencial e, através do estudo de situações-problema que envolvem o decaimento radioativo, o crescimento populacional e a absorção de medicamentos, investigar o comportamento da solução e da taxa de variação destas situações de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Também exploraremos a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial na forma analítica. E finalmente abordaremos o comportamento da solução de equações diferenciais de acordo com as condições fornecidas.

Materiais radioativos – e especialmente seu lixo – é um tema que preocupa a sociedade contemporânea, tendo em vista suas possíveis conseqüências danosas à vida (humana, vegetal e animal). Materiais radioativos apresentam em sua composição elementos químicos que não são estáveis, porque seus núcleos emitem partículas ou energia eletromagnética.

Atividade A

Consideremos o caso do iodo-131, utilizado nos exames de tiróide, cuja meia-vida é de oito dias[1]. Isto significa que o número de núcleos instáveis, capazes de emitir partículas ou radiação, cairá à metade em 8 dias, e novamente à metade após mais 8 dias e assim por diante. Considerando que no instante inicial existam $N = 1.000.000$ átomos radioativos em certa amostra, construímos a Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Número de átomos radioativos para diferentes valores de tempo (em dias).

t (dias)	N (átomos radioativos
0	1000000
8	500000
16	250000
24	125000
32	62500
40	31250
48	15625
56	7813
64	3906
72	1953
80	977
88	488
96	244
104	122

1 http://www.cnen.gov.br/cnen_99/educar/apostilas/radio.pdf

I. Quantos átomos radioativos haverá na amostra ao final de 64 dias?

II. Quantos dias demorarão para que haja em torno de 30 átomos radioativos?

III. Esboce um gráfico do número de átomos radioativos de Iodo-131 contidas na amostra em função do tempo, medido em dias.

IV. É correto afirmar que o número de átomos radioativos da amostra que decaem por dia é constante? (Dizer que um átomo radioativo decaiu significa dizer que se transmutou em outro, porque emitiu partícula ou radiação, deixando de ser radioativo).

V. Suponha que o exame clínico fosse realizado com um elemento químico cuja meia vida fosse de 4 dias e que o número inicial de átomos radioativos fosse o mesmo (1.000.000). Esboce um gráfico do número de átomos radioativos deste elemento químico em função do tempo, medido em dias.

VI. A Figura 2.1 mostra a curva de decaimento de certa quantidade de um elemento radioativo em função do tempo.

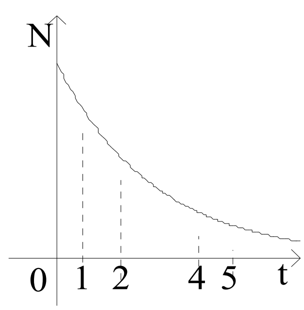

Figura 2.1. Decaimento radioativo

Em qual intervalo de tempo, $1 < t < 2$ ou $4 < t < 5$, o decréscimo de átomos radioativos é maior? Explique.

Atividade B

Como podemos construir, no *Powersim,* a situação descrita na atividade A?

Para fazer o diagrama da situação precisamos ter o valor inicial e a taxa de decrescimento k, que em situações de meia-vida é chamada de constante de decaimento radioativo.

I. Construa um diagrama no *Powersim* considerando $k=0.1/dias$ e depois verifique as equações que o programa gerou.

Você encontrará a equação *taxa = n_atomos* k*

A taxa significa a taxa de variação instantânea que pode ser descrita pela derivada, portanto, temos:

$$\frac{dN}{dt}=kN \quad , \qquad \text{Eq. 1}$$

onde N representa o número de átomos e $\frac{dN}{dt}$ a taxa de variação do número de átomos em função do tempo. A Eq.1 informa que **a taxa de variação do número de átomos em relação ao tempo é proporcional ao número de átomos existentes no instante t**.

A Eq. 1 é chamada de uma equação diferencial, porque envolve a derivada de uma função desconhecida (N). A solução desta equação diferencial é

$$N=N_0 \cdot e^{-kt} \quad , \qquad \text{Eq. 2}$$

onde N_0 é a quantidade inicial de átomos radioativos considerado.

Isto pode ser provado analiticamente, lembrando a derivada de uma exponencial, pois se

$N=N_0 \cdot e^{-kt}$, $\frac{dN}{dt}=-kN_0 \mathrm{e}^{-kt}=-kN$, que é exatamente a Eq. 1.

Sabendo-se que a solução da equação diferencial Eq. 1 tem a forma dada na Eq. 2, podemos obter a constante de decaimento *k* de um modo simples. Basta lembrar que, por definição, meia-vida é o tempo necessário para que o número de átomos radioativos decaia à metade. Vamos representar a meia-vida por τ . Usando a Eq. 1 obtemos

$$\frac{N}{N_0}=\frac{1}{2}=e^{(-k\tau)}$$

Calculando o logaritmo natural dos dois lados desta equação, temos:

$$\ln(0,5)=-k\tau \quad \text{ou} \quad k=\frac{-\ln(0,5)}{\tau}=\frac{0,69315}{\tau} \qquad \text{Eq. 3}$$

Então, se a meia-vida do iodo-131 é $\tau = 8\,dias$, a constante de decaimento dada pela Eq.3 é $k = 0{,}0866 / dias$.

II. Use a constante de decaimento encontrada e construa um diagrama no Powersim para representar a atividade A.

III. Gere a tabela e o gráfico da atividade anterior e compare os resultados com os da atividade A.

Atividade C

Os cientistas aprenderam a deduzir a idade de ossos, pedras, planetas e estrelas através da medida da quantidade de isótopos existentes no material em estudo. Para isto há diferentes métodos, dependendo da escala de tempo em que trabalham. Por exemplo, para estudar um período que vai até cerca de 40 ou 50 mil anos atrás, pode ser usado o método do C^{14} , que consiste em determinar qual a proporção de C^{12} e C^{14} existente na amostra. Apesar do C^{14} ser radioativo – decaindo em N^{14} - nos seres vivos a absorção de dióxido de carbono do ar mantém constante os níveis de C^{12} e C^{14} . Então, a proporção entre estes dois isótopos é fixa e bem conhecida. A partir da morte, não há reposição de C^{14} e consequentemente sua quantidade começa a diminuir. Comparando-se o nível de C^{14} com a quantidade total de carbono, é possível calcular há quanto tempo a planta ou o animal está morto. A meia-vida do C^{14} é de 5730 anos[2] . Considere que foi encontrado um osso fossilizado com 20% da quantidade de C^{14} usualmente encontrada num ser vivo e resolva as seguintes atividades:

I. Estime a idade do osso. Justifique sua resposta.

II. Conforme o texto, a meia-vida do C^{14} é $\tau = 5730$ anos. Use este valor na Eq. 3 para determinar a constante de decaimento do C^{14} . Considere uma quantidade inicial de 1.000.000 átomos radioativos, represente a situação no *Powersim* e gere a tabela do número de átomos em função do tempo.

III. Verifique se a sua estimativa do item I está adequada aos resultados da tabela.

---

2 Informações obtidas na revista National Geographic Brasil, de setembro de 2001.

IV. Esboce a curva do número de átomos contra o tempo, medido em anos.

V. Faça no *Powersim* este gráfico e compare com a sua previsão.

VI. Faça no *Powersim* o gráfico da taxa de variação do número de átomos $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ em relação ao número de átomos (*N)*. Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?

VII. Faça no *Powersim* o gráfico de $\frac{dN}{dt}$ em relação ao tempo *t.* Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?

Atividade D

Questões relacionadas a crescimento populacional são de interesse dos mais diversos setores da sociedade, por exemplo é importante saber a projeção da população de um país, estado ou município para planejar ações que objetivam suprir as necessidades da sociedade no campo da educação, saúde, trabalho, entre outras. Os biólogos buscam usar este conhecimento para proteger os recursos do meio ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies. Existem várias formas de descrever o crescimento populacional, e destas, uma das mais conhecidas é o Modelo de Malthus. Ele é chamado o Modelo de Crescimento Exponencial, pois **a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional à população existente no instante t**:

$$\frac{dP}{dt} alfa\, k$$

ou seja, o que resulta na mesma Equação Diferencial $\frac{dP}{dt}=kP$ da atividade B (Eq. 1). Este modelo supõe que as taxas de nascimento e morte são constantes, a população irá (de)crescer exponencialmente, ou seja, o modelo malthusiano descreve como as populações crescem ou decrescem quando nada mais acontece (ausência de quaisquer fatores perturbadores) e mesmo sabendo que existem estes fatores, o modelo nos dá uma descrição razoável para o crescimento populacional dentro de seu contexto de validade.

I. De acordo com o censo realizado em 2000, a taxa de crescimento anual da população do RS era de aproximadamente 1,2%. Considerando que o RS estava com 10.187.798[3] pessoas, construa, no *Powersim,* um diagrama para representar a situação.(Dica: considere o ano de 2000 como tempo 0).

II. Construa o gráfico da população contra o tempo, em anos e verifique o tamanho da população do RS em 2020, se continuar com este crescimento.

III. Construa o gráfico da taxa de variação da população $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ em relação à população (*P)*. Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?

IV. Construa o gráfico de $\frac{dP}{dt}$ em relação ao tempo *t*. Que curva você obteve? Como você justifica ou interpreta esta curva?

V. Em 1960, a população do RS era de 5.366.720 pessoas. Em 2000 este número praticamente dobrou, se continuasse com esta taxa de crescimento, qual seria a população do RS em 2040?

3 www.ibge.gov.br

Atividade E

Quando uma droga (por exemplo, penicilina, aspirina) é administrada a um indivíduo, ela entra na corrente sangüínea e, então, é absorvida pelo organismo no decorrer do tempo. Pesquisas médicas mostraram que a **quantidade de uma droga na corrente sangüínea tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente** .

I. Expresse matematicamente a frase em negrito do parágrafo anterior.

II. Warfarin é uma droga utilizada como anticoagulante[4], sua meia-vida é de 37 horas. Após interromper o uso da droga, a quantidade que permanece no corpo do paciente diminui a uma taxa que é proporcional à quantidade restante. Quantas horas são necessárias para que o nível da droga no corpo seja reduzido a 25% do nível original?

III. Considerando que a quantidade inicial seja de 5 miligramas construa, no *Powersim*, o diagrama da situação e faça o gráfico da quantidade de Warfarin no corpo do paciente em função do tempo, desde a interrupção do uso da droga até 5 dias após.

IV. Construa no Powersim uma tabela de valores e verifique se a sua resposta da questão I confere.

V. Se dobrarmos o valor da quantidade inicial, quanto tempo levará para que o nível do medicamento no corpo se reduza a metade? E a 25% da quantidade inicial?

VI. Construa o gráfico da taxa de variação da quantidade de droga $\left(\dfrac{dQ}{dt}\right)$ em relação à quantidade (Q*)*. Justifique a curva que você obteve?

4 HUGHES-HALLET, D. et al Cálculo Volume 2, LTC Editora, 1997, pág 504.

Atividade F

I. Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dt}=ky$, em que situações a curva que representa a solução será crescente? E decrescente?

Considerações:

- Equações diferenciais são equações que envolvem uma função e suas derivadas em relação a uma ou mais variáveis independentes, ou seja, são equações que fornecem informações sobre a taxa de variação de uma função desconhecida.
- Todas as situações em que **a taxa de variação da quantidade em relação ao tempo é proporcional à quantidade existente no instante t** pode ser descrita pela equação diferencial $\frac{dy}{dt}=ky$.
- Em situações de meia-vida, para calcular o valor da constante de decaimento faz-se $k=\frac{\ln(0{,}5)}{meia-vida}$.
- Para equações diferenciais $\frac{dy}{dt}=ky$, com $k\neq 0$, o gráfico da solução sempre será uma exponencial crescente ou decrescente, dependendo do valor da constante *k*.
- Para equações diferenciais $\frac{dy}{dt}=ky$, com $k\neq 0$, o gráfico de $\frac{dy}{dt}$ em relação a *y* sempre será uma reta, crescente ou decrescente, dependendo do valor da constante *k*.
- Para equações diferenciais $\frac{dy}{dt}=ky$, com $k\neq 0$, o gráfico de $\frac{dy}{dt}$ em relação a *t* sempre será uma exponencial crescente.