Equações Diferenciais

- O que são?
- Classificação.
- Para que servem?
- Tipos de solução.
- Como se resolve?

Definição e Classificação

São equações que envolvem uma função e suas derivadas

- Equações diferenciais ordinárias – EDO

Exemplo: $\frac{dN}{dt} = kN$

- Equações diferenciais parciais – EDP

Exemplo: $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

Aplicações

- Decaimento radioativo: $\dfrac{dN}{dt} = kN$

- Crescimento populacional: $\dfrac{dP}{dt} = kP$

- Absorção de medicamentos: $\dfrac{dy}{dt} = ky$

- Reações químicas: $\dfrac{dC_A}{dt} = kC_A$

Aplicações

- Problemas de mistura: $\frac{dQ}{dt} = taxa_{entrada} - taxa_{saída}$

- Queda de corpos: $v' + \frac{k}{m} v = g$

- Circuitos Elétricos: $L \frac{di}{dt} + Ri = V$

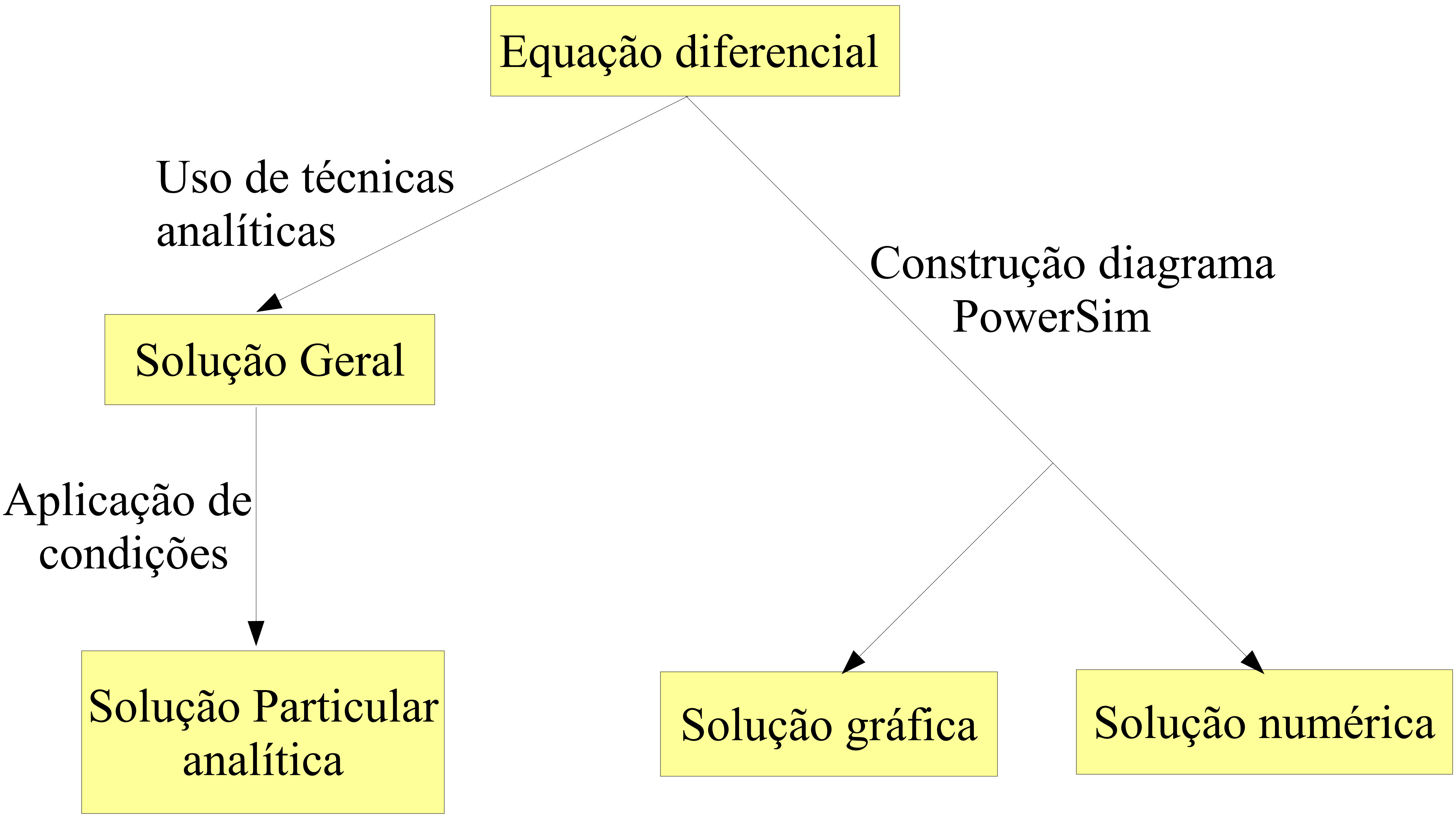
- Resfriamento de corpos: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$

Aplicações

- Modelo Logístico: $\frac{dP}{dt} = kP - \frac{k}{L} P^2$

- Disseminação de doenças: $\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$

Soluções

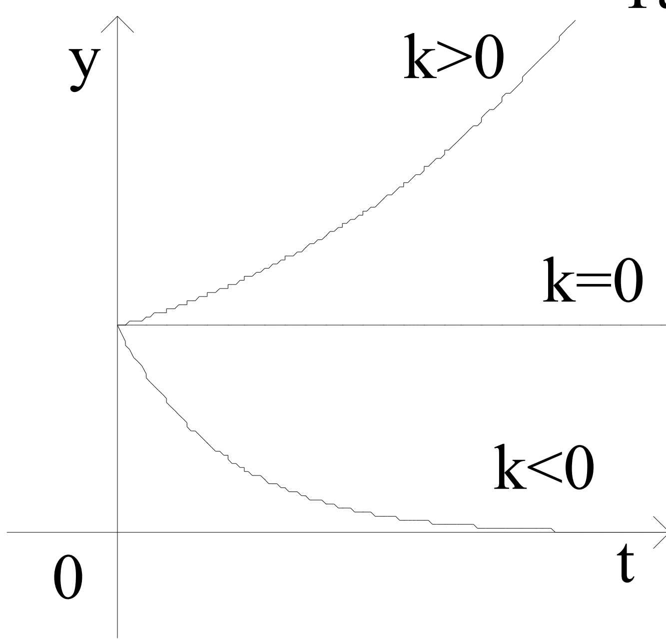

Equação diferencial
Uso de técnicas analíticas
Construção diagrama PowerSim
Solução Geral
Aplicação de condições
Solução Particular analítica
Solução gráfica
Solução numérica

Exemplo de representação gráfica da solução

Crescimento e decaimento exponencial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Taxa de variação vai aumentando



Taxa de variação vai diminuindo

Exemplo de solução numérica

Crescimento exponencial

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Time	população
2.000	10.187.798,0
2.001	10.310.051,6
2.002	10.433.772,2
2.003	10.558.977,5
2.004	10.685.685,2
2.005	10.813.913,4
2.006	10.943.680,4
2.007	11.075.004,5
2.008	11.207.904,6
2.009	11.342.399,4
2.010	11.478.508,2
2.011	11.616.250,3
2.012	11.755.645,3
2.013	11.896.713,1

Técnicas Analíticas de Resolução
(EDOs de primeira ordem)

- Separação de variáveis: $M(y)\,dy = N(x)\,dx$

  Resolução: $\int M(y)\,dy = \int N(x)\,dx$

- Lineares: $y' + p(x)\,y = q(x)$

  Resolução: $FI : e^{\int p(x)\,dx}$

$$\int \frac{d(y \cdot FI)}{dx} = \int q(x) \cdot FI$$

Técnicas Analíticas de Resolução (EDOs de segunda ordem com coeficientes constantes)

- Forma padrão: $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$
  onde a_2, a_1 e a_0 são constantes.
- Se $h(x) = 0$ homogênea

  $h(x) \neq 0$ não-homogênea
- Equação característica: $a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$
- Solução geral: $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

Exemplos de solução analítica

Equação diferencial → Solução Geral → Condições → Solução Particular

$$\frac{dP}{dt} = kP \rightarrow P = P_0 e^{kt} \rightarrow \begin{matrix} P_0 = 1.000 \; pessoas \\ k = 0{,}02 / anos \end{matrix} \rightarrow P = 1.000\, e^{0{,}02\, t}$$

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_m\right) \rightarrow T = C\, e^{kt} + T_m \rightarrow \begin{matrix} C = 50^{\circ} C \\ T_m = 25^{\circ} C \\ k = -0.07 / min \end{matrix} \rightarrow T = 50\, e^{-0.07\, t} + 25$$