Guia de Atividades para explorar a Resolução Analítica de Equações Diferenciais Ordinárias a partir de situações-problema

Nestas atividades temos como objetivo abordar a resolução analítica de equações diferenciais e, através do estudo de situações-problema que envolvem o crescimento de uma cultura de bactérias, a lei do Resfriamento de Newton, a mistura de soluções e reações químicas, investigar o comportamento da solução e da taxa de variação destas situações e suas equações diferenciais de acordo com as condições fornecidas, inclusive na forma gráfica. Exploraremos também a associação da descrição de uma situação-problema com a correspondente equação diferencial na forma analítica e a análise dimensional de algumas equações diferenciais envolvidas neste guia.

Atividade A

O tempo de geração é o intervalo de tempo requerido para que a população em uma cultura de microorganismos duplique em número. A bactéria *Mycobacterium tuberculosis,* causadora da tuberculose, possui um tempo de geração de aproximadamente 14 horas[1] .

I. Sabendo que **uma cultura de bactérias cresce a uma taxa que é proporcional a quantidade de bactérias existentes no instante t**, escreva uma equação diferencial que represente a situação e resolva-a para encontrar a solução geral.

II. Determine a constante de crescimento, com a respectiva unidade de medida, da cultura de bactérias *Mycobacterium tuberculosis*.

III. Considerando que existam inicialmente 400 bactérias, determine a solução particular para este caso.

1 PELCZAR Jr., M. J. Et al. Microbiologia Conceitos e Aplicações, Makron Books, 2005.

IV. Esboce um gráfico da quantidade de bactérias contra o tempo. Justifique ou interprete esta curva.

V. Esboce um gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação ao tempo. Justifique ou interprete esta curva.

VI. Esboce um gráfico da variação da quantidade de bactérias em relação à quantidade de bactérias.Justifique ou interprete esta curva.

Atividade B

A lei de resfriamento de Newton estabelece que: *a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.* Considerando que a temperatura do corpo depende do tempo e que a temperatura do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência, a equação diferencial que descreve a situação acima é $\frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$ onde T é a temperatura do corpo no instante t, T_m é a temperatura constante do meio ambiente, $\frac{dT}{dt}$ é a taxa segundo à qual a temperatura do corpo varia e k é uma constante de proporcionalidade que depende do material com que o corpo foi construído.

Por exemplo, uma xícara de café sobre a mesa da cozinha esfria a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o café e o ar que o cerca, então:

I. A medida que o café esfria, a taxa de resfriamento diminui, aumenta ou permanece sempre igual? Explique.

II. A longo prazo, a temperatura do café aproxima-se de zero? Explique.

III. A longo prazo, a taxa de resfriamento tende a zero? Explique.

Suponha que a temperatura de uma xícara de café recém preparado seja de $90^\circ C$. Cinco minutos mais tarde a temperatura já diminuiu para $60^\circ C$ numa sala à temperatura constante $20^\circ C$.

IV. Sabendo que a equação diferencial da variação da temperatura é separável, resolva-a e escreva a solução particular para a situação apresentada.

V. Esboce o gráfico da temperatura contra o tempo.

VI. Determine a temperatura do café após 10 minutos nesta sala.

VII. Considere que alguém deseja tomar este café a uma temperatura de $50^\circ C$. Quanto tempo precisará esperar desde o momento em que ele foi preparado.

Atividade C

Um problema de mistura pode ser representado por um tanque preenchido, até um nível especificado, com uma solução que contém uma quantidade conhecida de substância solúvel (por exemplo cloro). A solução completamente misturada flui do tanque a uma taxa conhecida, e ao mesmo tempo uma solução com uma concentração conhecida de uma substância solúvel é acrescentada ao tanque a uma taxa conhecida que pode ou não ser diferente da taxa de vazão. À medida que o tempo passa, a quantidade de substância solúvel no tanque irá, em geral, variar, e o problema de mistura usual procura determinar a quantidade de substância no tanque num instante especificado. A descrição matemática desta situação pode ser representada por

$$\frac{dQ}{dt} = taxa\ de\ entrada - taxa\ de\ saída$$

Este tipo de problema serve como modelo para muitos outros fenômenos: descarga e filtragem de poluentes em um rio, injeção e absorção de medicamentos na corrente sanguínea, migração de espécies para dentro e para fora de um sistema ecológico, reações químicas, entre outros.

Consideremos que um tanque contenha 500 litros de salmoura (isto é, água na qual foi dissolvida uma certa quantidade de sal). Uma outra salmoura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 4 *ℓ/min*; a concentração de sal nessa segunda salmoura é de 3 *kg/ℓ*. Quando a solução no tanque estiver bem misturada, ela será bombeada para fora à mesma taxa de entrada. Supondo que o tanque contenha inicialmente 50 *kg* de sal:

I. Escreva a equação diferencial para a situação apresentada.

II. Estime a quantidade de sal no tanque a longo prazo.

III. Qual é o efeito no limite da quantidade de sal, ao se duplicar o valor da concentração de entrada?

IV. Qual o efeito sobre o limite da quantidade de sal, ao se duplicar o valor da taxa de saída?

V. Considere dois tanques (A e B) que contenham salmoura. Cada um deles tem duas torneiras, uma por onde entra salmoura no tanque e outra por onde sai. Os fluxos de entrada e saída são os mesmos nos dois tanques e as curvas que representam a taxa de variação da quantidade de sal na água está representada no gráfico da Figura 3.1. Sabendo que inicialmente os dois tanques possuíam a mesma quantidade de sal e água, qual deles tem maior taxa de entrada de sal? Explique.

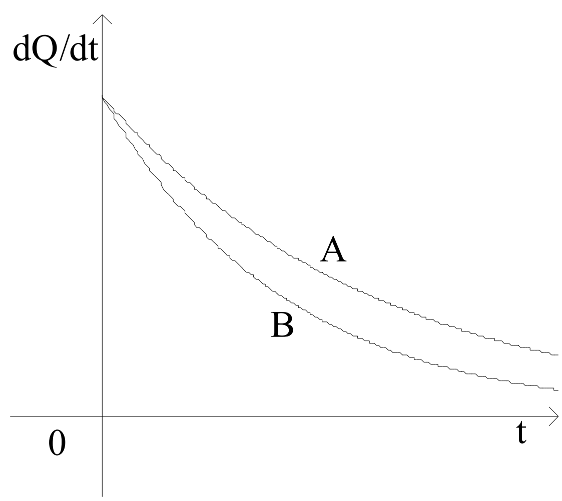

Figura 3.1. Taxa de variação da quantidade de água em um tanque

Atividade D

As reações químicas de primeira ordem podem ser descritas pela equação diferencial $\frac{dC_A}{dt} = -kC_A$, na qual C_A é a concentração do reagente *A*, *k* a constante da reação (depende da natureza da reação e da temperatura) e *t* o tempo decorrido desde o início da reação.

Considerando a decomposição $2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$, a tabela abaixo[2] apresenta a concentração de pentóxido de nitrogênio, N_2O_5, em relação ao tempo, a uma temperatura de $67^\circ C$.

Tempo (min)	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***8***	***10***
Concentração de N_2O_5 (mol/l)	***0,160***	***0,113***	***0,080***	***0,056***	***0,040***			

I. A equação diferencial desta situação é a mesma da atividade A, portanto a solução geral também será a mesma. Usando as condições fornecidas na tabela, encontre a solução particular.

II. Preencha a tabela com a concentração de N_2O_5 após 5, 8 e 10 minutos.

III. Calcule o tempo necessário para a concentração cair de 0,160 para 0,100 *mol*/*ℓ*.

IV. Qual a unidade de medida do *k* nesta situação?

2 MASTERTON, W.L, et. al. Princípios de Química, LTC Editora, 1990.