

## **Atividades envolvendo proporcionalidade direta e inversa**

Ieda Maria Giongo (igiongo@univates.br)

Marli Teresinha Quartieri (mtquartieri@univates.br)

Márcia J. Hepp Rehfeldt ([mrefeldt@univates.br](mailto:mrefeldt@univates.br))

Carol Bianchini (lkc\_carol@hotmail.com)

### **Contextualização**

A proporcionalidade direta ou inversa está presente em diferentes contextos e entender as diferenças entre estes conceitos torna-se fundamental na resolução de muitos problemas, sendo produtivo se iniciado com crianças na Escola Básica. Paula (2010) comenta que a temática está presente nos processos ensino e aprendizagem de várias disciplinas, dentre elas as Ciências, as Artes, a Geometria e a própria Matemática.

Nesse contexto, durante o ano de 2011, um dos conteúdos desenvolvidos no curso de formação continuada para docentes da Escola Básica, intitulado “Problematizando a Matemática nas Séries Finais do Ensino Fundamental”, foi a proporcionalidade. Os demais assuntos foram: a trigonometria e a incorporação da calculadora nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Esse curso foi uma das ações da pesquisa vinculada ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Univates denominada “Ciências Exatas na Escola Básica” tendo por objetivo promover discussões por meio de oficinas e encontros com professores da Escola Básica do Vale do Taquari acerca dos rumos da educação em Ciências Exatas, visando a propor movimentos de ruptura nos processos pedagógicos relativos a esse campo.

A carga horária do curso foi de 40 horas, divididas em oito encontros presenciais e dois a distância. Nos encontros presenciais, foram discutidas possibilidades de incorporar atividades – previamente preparadas pelas pesquisadoras e Bolsista de Iniciação Científica – referentes aos conteúdos em foco que, posteriormente, poderiam ser disponibilizadas pelos participantes, nas turmas em que atuavam. No último encontro presencial, os professores entregaram um relatório no qual foram descritas, no mínimo, três atividades que consideraram significativas quando efetivadas em sala de aula com suas turmas.

Nesta produção, destacaremos algumas atividades que foram disponibilizadas aos participantes em relação ao ensino de proporcionalidade nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

### **Objetivos**

- Desenvolver situações de ensino que ofereçam possibilidades de refletir coletivamente sobre processos de ensino e aprendizagem no âmbito da Matemática nas Séries Finais do Ensino Fundamental.

- Examinar a produtividade do ensino de proporcionalidade nos Anos Finais do Ensino Fundamental; em especial, no que diz respeito aos questionamentos sobre a diferença entre proporcionalidade direta e inversa.

## **Detalhamento das atividades**

### **Proporção direta**

A parte teórica disponibilizada aos professores são excertos de MÁXIMO, Antônio; ALVARENGA, Beatriz. *Curso de Física 1*. São Paulo: Scipione, 1997, p. 35-36, conforme segue:

Suponha que duas grandezas estejam relacionadas de tal modo que, dobrando o valor de uma delas, o valor da outra também dobre; triplicando a primeira, a segunda também fique multiplicada por três, etc. Sempre que isso acontece, dizemos que existe, entre as grandezas, uma *proporção direta*. Por exemplo, medindo as massas de blocos de ferro de diversos volumes, encontramos os seguintes resultados:

*um volume  $V1 = 1 \text{ cm}^3$  tem massa  $M1 = 8 \text{ gramas}$*

*um volume  $V2 = 2 \text{ cm}^3$  tem massa  $M2 = 16 \text{ gramas}$*

*um volume  $V3 = 3 \text{ cm}^3$  tem massa  $M3 = 24 \text{ gramas}$*

e assim sucessivamente. Concluimos que “a massa desse bloco de ferro é diretamente proporcional ao seu volume”.

#### **Constante de proporcionalidade**

Observando os valores das massas e dos volumes apresentados, verificamos que:

$$\frac{M1}{V1} = \frac{8\text{gramas}}{1\text{cm}^3} = 8 \text{ gramas/cm}^3$$

$$\frac{M2}{V2} = \frac{16\text{gramas}}{2\text{cm}^3} = 8 \text{ gramas/cm}^3$$

$$\frac{M3}{V3} = \frac{24\text{gramas}}{3\text{cm}^3} = 8 \text{ gramas/cm}^3$$

Portanto, ao variar o volume V do bloco, sua massa M também varia, mas o quociente entre M e V permanece constante (igual a 8 gramas/cm<sup>3</sup>). Podemos escrever:  $\frac{M}{V} = K$  onde K é a constante de proporcionalidade entre M e V. Assim, quando duas grandezas são diretamente proporcionais, o quociente entre elas permanece constante e este quociente é denominado de *constante de proporcionalidade* entre as grandezas.

### **Proporção inversa**

Consideremos duas grandezas, X e Y tais que:

- duplicando X – Y fica dividido por 2
- triplicando X – Y fica dividido por 3
- quadruplicando X – Y fica dividido por 4.

Quando isso ocorre, dizemos que “Y é inversamente proporcional a X” e  $y = \frac{k}{x}$ . Neste caso, a constante de proporcionalidade será dada por  $k = y \cdot x$

### Tarefas<sup>1</sup>

1) Quando uma pessoa compra um tecido (de largura constante), ela paga um preço P que depende do comprimento L adquirido. Suponha que 1 m de tecido custasse R\$50,00.

a) Completar a tabela deste exercício com os valores de P correspondentes aos de L indicados.

L(m)	P(R\$)
1	50
2	
3	
4	

b) Ao duplicar o valor de L, o valor de P duplicou?

c) E ao triplicar o valor de L?

d) Então, que tipo de relação existe entre P e L?

2) Com relação à tabela do exercício anterior:

a) Dividir cada valor de P pelo correspondente valor de L. O quociente  $\frac{P}{L}$  varia ou é constante?

b) Qual o valor da constante de proporcionalidade K entre P e L?

c) Como podemos expressar matematicamente a relação entre P e L?

3) Como você sabe, o volume V de um balão de borracha é tanto maior quanto maior for seu raio R. Medindo os valores V e R para diversos balões, encontramos que:

- quando R=10 cm, temos V= 4,2 litros
- quando R= 20 cm, temos V= 33,4 litros
- quando R= 30 cm, temos V= 113 litros.

a) Se o raio de um balão é duplicado, o seu volume duplica?

b) E se o raio for triplicado, o volume triplica?

c) Podemos dizer que V e R são diretamente proporcionais?

<sup>1</sup> Alguns exercícios foram selecionados a partir das obras citadas nas referências bibliográficas que constam ao final da produção.

4) Uma pessoa verifica que entre duas grandezas X e Y existe a seguinte relação matemática:  
 $Y = 4X$ .

- a) Podemos dizer que Y é diretamente proporcional a X?
- b) Se o valor de X passar de  $X=2$  para  $X=10$ , por qual fator será multiplicado o valor de Y?
- c) Qual o valor da constante de proporcionalidade entre Y e X?
- d) Qual é a forma do gráfico  $Y \times X$ ?
- e) Qual é o valor da inclinação deste gráfico?

5) Observando a tabela abaixo, responder:

X	Y
1	30
2	15
3	10
4	
5	

- a) Quando o valor de X é duplicado, por quanto fica dividido o valor de Y?
- b) E quando o valor de X é triplicado, o que acontece com o valor de Y?
- c) Então que tipo de relação existe entre Y e X?
- d) Construir o gráfico  $Y \times X$ , usando os valores da tabela anterior.
- f) Como se denomina a curva que você obteve?

6) Sabe-se que entre duas grandezas X e Y existe a seguinte relação matemática:  $Y = \frac{144}{X^2}$ .

a) Considerando a relação, completar a tabela abaixo:

X	Y
2	
4	
6	
8	

- b) Quando o valor de X é duplicado, por quanto fica dividido o valor de Y?
- c) E quando o valor de X é triplicado, o que acontece com o valor de Y?
- d) Que tipo de relação existe entre Y e X?
- e) Se construíssemos o gráfico  $Y \times X$ , obteríamos uma hipérbole?

7) A tabela abaixo apresenta distâncias percorridas por um automóvel e o consumo de gasolina

correspondente a cada distância.

Distância percorrida d (km)	Consumo de gasolina V (litros)
20	2,5
40	5
60	7,5
80	10

- Usando os valores, construir o gráfico  $d \times V$ .
- Que tipo de relação existe entre  $d$  e  $V$ ?
- Calcular a inclinação do gráfico.
- Interpretar o significado dessa inclinação.

8) Assinalar, entre as afirmações seguintes, aquelas que correspondem a uma relação de proporção direta entre as grandezas  $Y$  e  $X$ .

- Multiplicando  $X$  por um fator,  $Y$  fica multiplicado por este mesmo fator.
- O produto  $X \cdot Y$  permanece constante.
- O gráfico  $Y \times X$  é uma reta passando pela origem.
- À medida que  $X$  cresce,  $Y$  diminui.
- O quociente  $\frac{Y}{X}$  permanece constante.

9) Considerar o comprimento  $C$  de uma circunferência de raio  $r$ .

- Que tipo de relação existe entre  $C$  e  $r$ ?
- Como seria o gráfico  $C \times r$ ?
- Qual o valor da inclinação desse gráfico?

10) Duas grandezas,  $X$  e  $Y$ , variam de tal modo que o seu produto permanece constante. Assinalar, entre as opções abaixo, aquela que descreve corretamente a relação entre estas duas grandezas:

- $Y$  é diretamente proporcional a  $X$ .
- $Y$  varia linearmente com  $X$ .
- $Y$  é proporcional ao quadrado de  $X$ .
- $Y$  é inversamente proporcional a  $X$ .
- $Y$  é inversamente proporcional ao quadrado de  $X$ .

11) Em cada uma das tabelas abaixo, descrever que tipo de relação existe entre  $X$  e  $Y$ :

X	2	3	4	12
---	---	---	---	----

Y	36	24	18	6
---	----	----	----	---

X	0	3	6	9
Y	0	1	2	3

X	3	2	1,5	0,5
Y	36	24	18	6

12) Considerar a função  $f$  que relaciona o comprimento  $y$ , em cm, e a altura  $x$ , em cm, de um retângulo de área 12 centímetros quadrados.

a) Justificar que se trata de uma função de proporcionalidade inversa.

b) Completar a seguinte tabela:

x	1	2	3	4	5	6	8	10	12
y									

13) No dia do aniversário de Raul, os seus amigos compraram um presente, sem saber ainda qual o número dos que queriam participar. A tabela a seguir relaciona esse número ( $n$ ) com a quantia que cabe a cada um ( $q$ ).

n	2	3	5	10	12
q	1800				

a) Completar a tabela.

b) Haverá proporcionalidade inversa entre os valores de  $n$  e  $q$ ? Se sim, o que representa a constante?

c) Escrever uma expressão analítica que dê o valor de  $q$  em função de  $n$ .

14) Uma costureira comprou 12 metros de renda. Ela quer cortar essa quantidade de renda em pedaços iguais. Completar com o número correspondente ao que foi dado na tabela:

Número de pedaços iguais		4		12		24
Comprimento de cada pedaço (m)	6		1,5		0,8	

a) Quais as grandezas envolvidas nessa situação?

b) Se a costureira triplicar o número de pedaços, o que acontecerá com o comprimento de cada um deles?

c) Se a costureira dividir por 2 o número de pedaços, o que acontecerá com o comprimento de cada um deles?

d) Qual é o resultado da multiplicação do número  $P$  de pedaços em que o comprimento total foi dividido pelo comprimento  $L$  de cada um deles?

15) Abandonando um corpo de uma certa altura, obtivemos os seguintes dados para as distâncias percorridas após 1s, 2s e 3s de queda:

- em um tempo  $t=1s$  percorreu a distância  $d = 5m$
- em um tempo  $t= 2 s$  percorreu uma distância  $d = 20m$
- em um tempo  $3 s$  percorreu uma distância  $d = 45 m$

Podemos dizer que a distância percorrida  $d$  é diretamente proporcional ao tempo de queda  $t$ ? Justificar a resposta

16) Numa experiência de laboratório foi obtida a tabela abaixo:

X	2	4	6	8	10
Y	5	2,5	1,67	1,25	1

Analisando esta tabela você pode concluir que:

- X é proporcional a Y.
- a razão  $\frac{X}{Y}$  é constante.
- $Y=2,5X$ .
- Y é inversamente proporcional a X.
- Y é inversamente proporcional a  $X^2$

17) Uma pessoa, recolhendo a água que jorra de uma mangueira, obtém os seguintes dados:

- em 5 s recolhe 15 litros;
- em 10 s recolhe 30 litros;
- em 30 s recolhe 90 litros, etc.

- Podemos dizer que há uma proporção direta entre o volume recolhido e o tempo empregado na operação?
- Qual é o valor da constante de proporcionalidade entre estas grandezas?
- Designando o volume recolhido por  $V$  e o tempo correspondente por  $t$ , como podemos expressar a relação entre estas grandezas?

18. Uma floricultura deseja padronizar o serviço de preparo das flores que comercializa. Ela dispõe dos seguintes dados: Para enfeitar uma orquídea são necessários 30 minutos enquanto para enfeitar uma bromélia são necessários 20 minutos. Se o lucro da bromélia é R\$ 10,00 reais, qual deveria ser o lucro da orquídea para ela seja tão rentável quanto a bromélia?

	Tempo	Lucro
Orquídea		

Bromélia		
----------	--	--

19. Uma indústria de laticínios produz creme de leite e iogurte. Para produzir 1 Kg de creme de leite são necessários 5 litros de leite e traz um lucro de R\$ 2,00. Para produzir 1Kg de iogurte são necessários 10 litros de leite. Qual deveria ser o lucro do iogurte para ele seja tão rentável quanto o creme de leite?

	Leite	Lucro
Creme de Leite		
Iogurte		

20. Uma companhia de transportes dispõe de caminhões do tipo A com capacidade para transportar 5.000 kg e caminhões do tipo B com 10.000 kg de capacidade. O custo por hora dos caminhões do primeiro tipo é R\$ 200,00, do segundo é R\$ 300,00. Quantos caminhões de cada tipo devem ser usados para transportar uma carga de 80.000 kg para que o custo seja mínimo?

21. O quadro abaixo traz o número de pessoas que cada tipo de casa padronizada por uma prefeitura consegue abrigar, bem como o respectivo custo da construção.

Tipo de casa	A	B	C
Nº. de pessoas que abriga			
Custo de construção (em UPC)			

Qual o tipo de casa mais barata? Justificar a resposta.

22. Uma cabeleireira trabalha nos seguintes serviços representados no quadro a seguir:

	Corte	Unhas	Penteados	Depilação	Maquiagem	Pintura
Tempo médio de trabalho (Min)	20	25	45	45	25	22
Lucro						

Sabendo que a última linha representa o lucro de cada tipo de serviço, ordene os serviços do mais para o menos lucrativo.

## Resultados

A construção da proporcionalidade inicia na Escola Básica, apoiada em contextos que envolvem grandezas proporcionais vivenciados pelos alunos. Os professores precisam estar conscientes de que seus alunos não percebem, *a priori*, tais relações nos contextos trabalhados na escola. No entanto, os discentes precisam perceber essas relações de proporcionalidade ou de não



proporcionalidade e com isso tornarem-se mais hábeis em lidar com esses conceitos matemáticos.

As atividades acima propostas foram disponibilizadas para o grupo de professores participantes da oficina. Os docentes que as incorporaram em suas práticas pedagógicas avaliaram que elas foram produtivas para que os estudantes compreendessem as diferenças entre proporcionalidade direta e inversa.

### **Referências Bibliográficas**

DOCMATH – A NOVA FACE DA MATEMÁTICA. *Proporcionalidade inversa*. Disponível em <http://www.docmath.net/docmath/>. Acesso em julho de 2011.

MÁXIMO, Antônio; ALVARENGA, Beatriz. *Curso de Física 1*. São Paulo: Scipione, 1997.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. *Estudos complementares II Proporcionalidade e juros. Matemática oficina 3*. Brasília, 2009. Disponível em [www.projovemurbano.gov.br](http://www.projovemurbano.gov.br). Acesso em julho de 2011.

PAULA, Mariucha Baptista. *Proporcionalidade: uma análise do caderno do professor – 7º ano (antiga 6ª série) – da proposta implementada pela Secretaria de Educação do estado de São Paulo no ano de 2008*. Dissertação. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: Universidade Católica de São Paulo, 2010. Disponível em [www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/mariucha\\_paula.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/mariucha_paula.pdf). Acesso de junho de 2011.