

Proposta de atividade para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral com uso *software Winplot* para os conteúdos: gráficos de equações e área de uma região em coordenadas polares

Egídio Rodrigues Martins

e-mail: egidio.martins@ifnmg.edu.br

Márcia Jussara Hepp Rehfeldt

e-mail: mreinfeld@univates.br

Silvana Neumann Martins

e-mail: smartins@univates.br

Contextualização

Sendo parte integrante da pesquisa de mestrado intitulada ***O uso dos Softwares Winplot e Winmat na Formação do Professor de Matemática*** a referida proposta foi desenvolvida com professores do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais - IFNMG – Campus Januária que atuam nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Cálculo Numérico, Geometria Analítica e Fundamentos da Matemática Elementar.

Tal proposta teve como ponto de partida, informações obtidas na apreciação do projeto do Curso de Licenciatura, onde foram analisadas as disciplinas contidas no Plano do Curso de Licenciatura em Matemática, com suas respectivas ementas. Nessa fase, as potencialidades do *software Winplot* foram relacionadas com os conteúdos das disciplinas do Curso de Matemática.

Dessa forma, verificou-se quais disciplinas e ementas os conteúdos se faziam presentes, visando, assim, apresentar uma proposta de trabalho que tornasse plausível a implementação e o uso do *software Winplot*. Tal exame no projeto de curso teve uma considerável relevância, uma vez que, para lançar a proposta de trabalho nesse aspecto, são necessárias algumas informações, tanto no que se refere aos conteúdos presentes nas disciplinas do curso, como às funcionalidades dos programas matemáticos que se planeja usar.

Com a apreciação do projeto do Curso, ficou evidente que a disciplina de Cálculo possui uma boa potencialidade de uso do *software* recomendado,

conforme apresentação de suas ementas. Uma vez atendido esse propósito, foi possível definir quais as diretrizes, para o conteúdo escolhido.

Sendo assim, buscou-se levantar alguns apontamentos sobre a temática Informática e Educação, que segundo Borba e Penteado (2008), tem sido, nas últimas três décadas, tema de muitas discussões no Brasil e, há algum tempo, em demais lugares no mundo. Os mesmos autores enfocam alguns discursos iniciais sobre essa temática, na qual se referiam à informática como algo que oferecia perigo ao aprendizado do aluno, já que o computador realizaria inúmeras funções com apenas um toque do estudante, o que o tornaria, nesses moldes, um mero repetidor de tarefas.

Os avanços tecnológicos têm apresentando um progresso significativo em vários segmentos. Pode-se perceber que muitas tarefas que eram feitas com recursos manuais cederam espaço a mecanismos, máquinas e *softwares*. Inúmeros procedimentos são operacionalizados com maior precisão, com redução de tempo e custo. Segundo Papert (1994), houve um progresso expressivo em setores como economia, medicina, astronomia, informática, indústrias e muito outros. Contudo, nessa evolução, a educação não tem seguido o mesmo ritmo.

Contraponto essa ideia, Valente (1999), menciona que a utilização de computadores na educação é tão remota quanto o advento comercial dos mesmos, afirma também que, nesse período, era dada uma maior ênfase ao armazenamento de dados em uma certa sequência e a transmissão dos mesmos aos alunos. Continuando, ele afirma que o uso dos computadores na educação se diferencia da forma como foi anteriormente citado, atuando o professor de forma mais abrangente, atraente e desafiadora e não sendo meramente transmissor de informações para o discente.

À luz de algumas reflexões como as anteriores, buscou-se junto aos professores do curso de Licenciatura em Matemática do IFNMG – Campus Januária, a construção de proposta para uso das tecnologias na formação do professor de matemática.

Objetivos

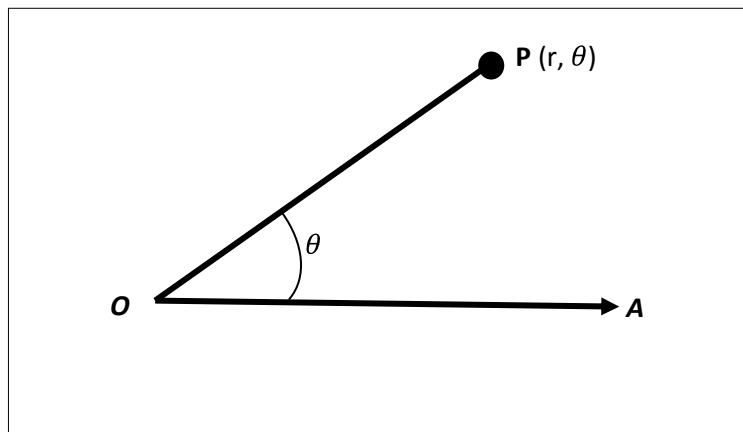
A proposta que segue foi elaborada com o objetivo de apresentar aos professores que fizeram parte da pesquisa, possibilidades de uso do *software Winplot* na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, especificamente no conteúdo de gráficos de equação e área de uma região em coordenadas polares; Fundamentos da Matemática no estudo de funções trigonométricas.

Detalhamento

Segundo Leithold (1994), a forma mais comum de se localizar um ponto no plano é dada por suas coordenadas cartesianas retangulares. O sistema de coordenadas polares também é um sistema que indica a posição de um ponto em um plano. O uso das coordenadas polares é importante, pois torna curvas com equações mais simples quando esse sistema é usado.

O autor supracitado descreve que, no sistema cartesiano, as coordenadas são números chamadas de abscissa e de ordenada e são as medidas das distâncias orientadas a dois eixos fixos. No sistema polar, as coordenadas consistem em uma distância orientada e na medida de um ângulo relativo a um ponto fixo e a um semieixo. O Ponto fixo é chamado de **polo** (ou origem), sendo designado pela letra **O**. O semieixo fixo é chamado de **eixo polar** (ou reta polar) e designa-se OA. O semieixo é, normalmente, colocado na horizontal, orientando para a direita e se entende indefinidamente, conforme pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 - Coordenadas polares



Fonte: Leithould (1994) – Adaptado pelo autor

Seja P um ponto no plano, distinto de O . Seja θ a medida em radianos do ângulo AOP , positiva quando considerada no sentido anti-horário e negativa quando orientada no sentido horário, tendo como lado inicial OA e como lado final OP . Então, se r for a distância não orientada de O a P (isto é, $r = |\overline{OP}|$), o conjunto de coordenadas polares de P será dado por r e θ , e escrevemos essas coordenadas como (r, θ) .

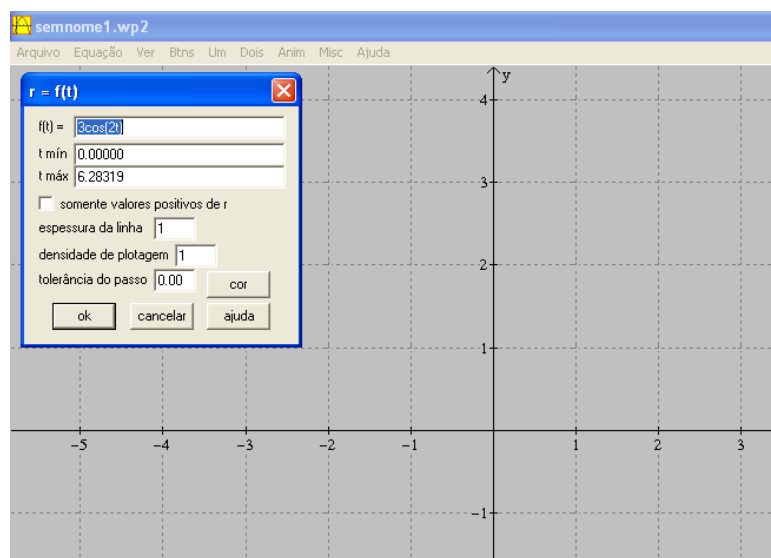
Apresenta-se, a seguir, uma breve descrição do uso *software Winplot*, com ênfase em informações de como utilizá-lo no esboço de gráficos em equações e cálculos de áreas em coordenadas polares. Justifica-se essa ênfase pelo fato de ter sido um dos objetivos principais do presente trabalho, ou seja, propor alguns exercícios de cálculo em que o uso de *software* favorece a sua execução.

Os recursos apresentados também poderão auxiliar o professor de Cálculo no preparo de apresentações em *slides* que utiliza nas aulas, na organização de listas de atividades ou no preparo de questões de avaliações que necessitem do uso de um gráfico das referidas funções. Observa-se que haverá alguns desafios caso os docentes optem por essas atividades, em especial, com uso somente de um editor de texto. Sendo assim, propõe-se, a seguir, a realização com o auxílio do *software Winplot*.

Construindo gráfico de equações em coordenadas polares com uso do *Winplot*

Para construir gráfico de equações em coordenadas polares, abra o *software Winplot* no menu **janela**, escolha a opção **2-dim** ou pressione F2. Em seguida, no menu **equação**, escolha a opção **5 Polar** ou acione F5. Será apresentada a opção para inserir a equação polar $r = f(t)$, conforme a Figura 2.

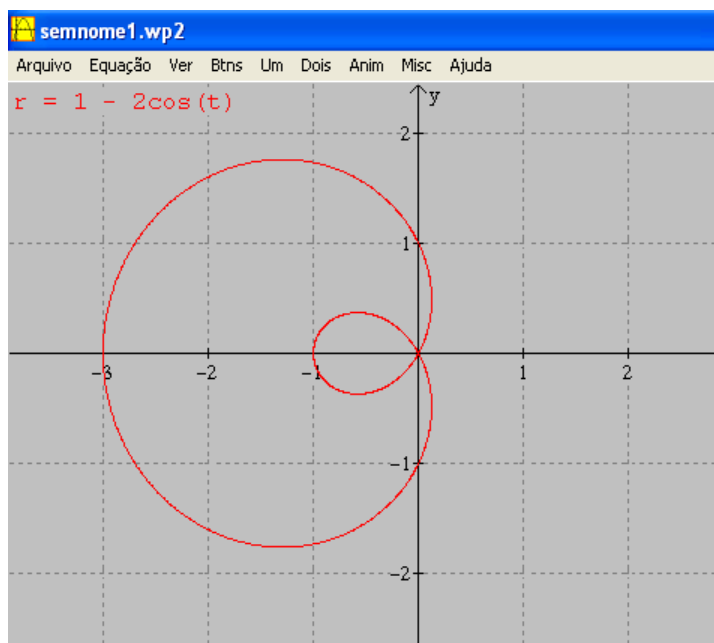
Figura 2 - Construindo gráficos em coordenadas polares com uso do Winplot



Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, insira a equação $r = 1 - 2\cos(t)$, pressionando ok. O esboço do gráfico se trata de uma curva chamada *limaçon*, como é ilustrada na Figura 3.

Figura 3 - Gráfico da equação $r = 1 - 2\cos(t)$



Fonte: Dados da pesquisa

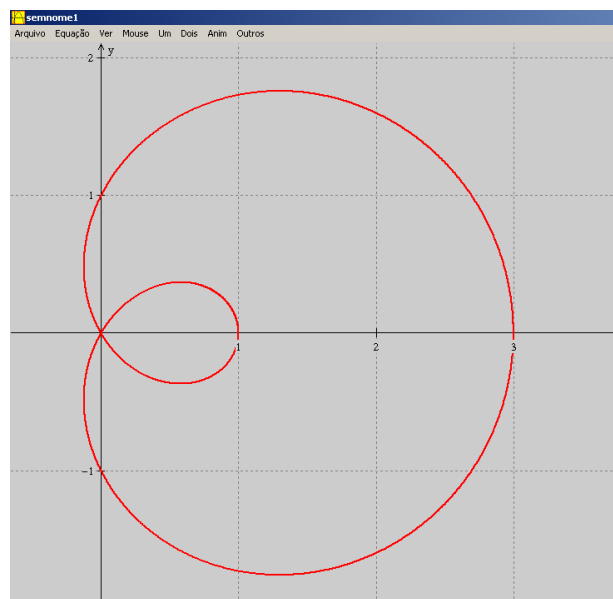
De acordo com Leithold (1994), o gráfico de uma equação da forma $r = a \pm b \cdot \cos(t)$ ou $r = a \pm b \cdot \sin(t)$ é uma *limaçon*. Existem quatro tipos de limaçon e cada um depende da razão $\frac{a}{b}$ onde a e b são positivos. Dada a equação

$$r = a + b \cdot \cos(t) \quad a > 0 \text{ e } b > 0, \text{ temos:}$$

- $0 < \frac{a}{b} < 1$, **Limaçon com um laço** (Figura 4).
- $\frac{a}{b} = 1$, **Cardióide** (Figura 5).
- $1 < \frac{a}{b} < 2$, **Limaçon com um dente** (Figura 6).
- $2 \leq \frac{a}{b}$, **Limaçon Convexa** (Figura 7).

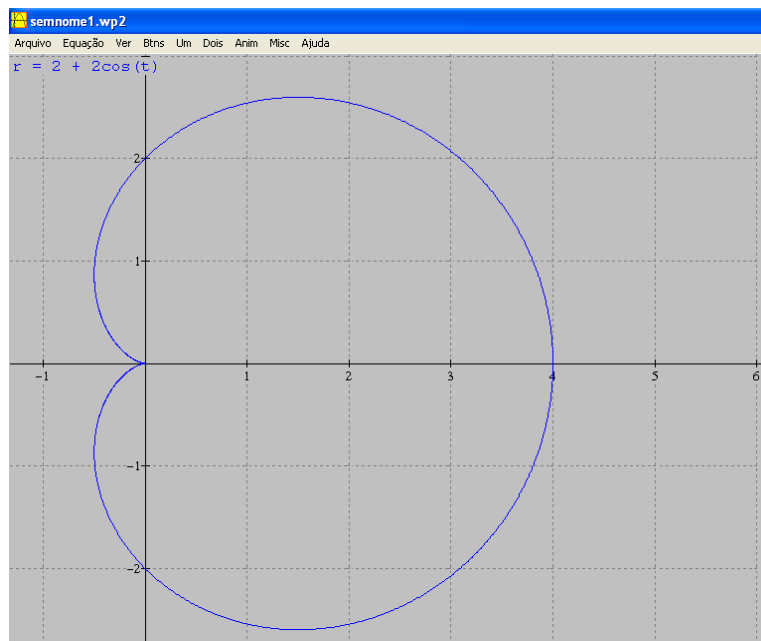
O mesmo procedimento se usa para construir os exemplos supracitados. Recordando o procedimento: no menu **janela**, escolha a opção **2-dim** ou pressione F2. Em seguida, no menu **equação**, escolha a opção **5 Polar** ou acione F5, insira as seguintes equações polares: para a) $r = 1 + 2\cos(t)$, para b) $r = 2 + 2\cos(t)$; para c, $r = 3 + 2\cos(t)$; para d, $2 - \sin(t)$. Os gráficos dessas equações estão ilustrados nas figuras 4, 5, 6 e 7.

Figura 4 - Gráfico da equação $r = 1 + 2\cos(t)$ – *limaçon com um laço*



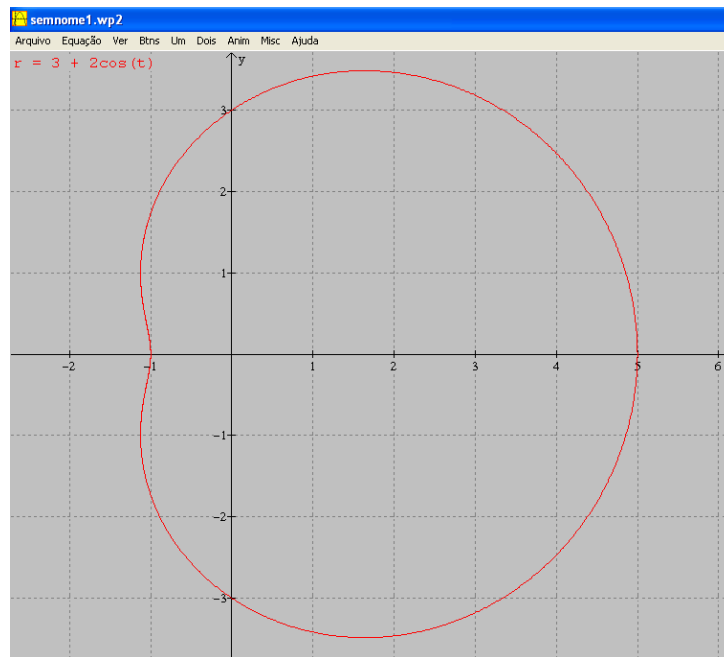
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 5 - Gráfico da equação $r = 2 + 2\cos(t)$ – *Cardióide*



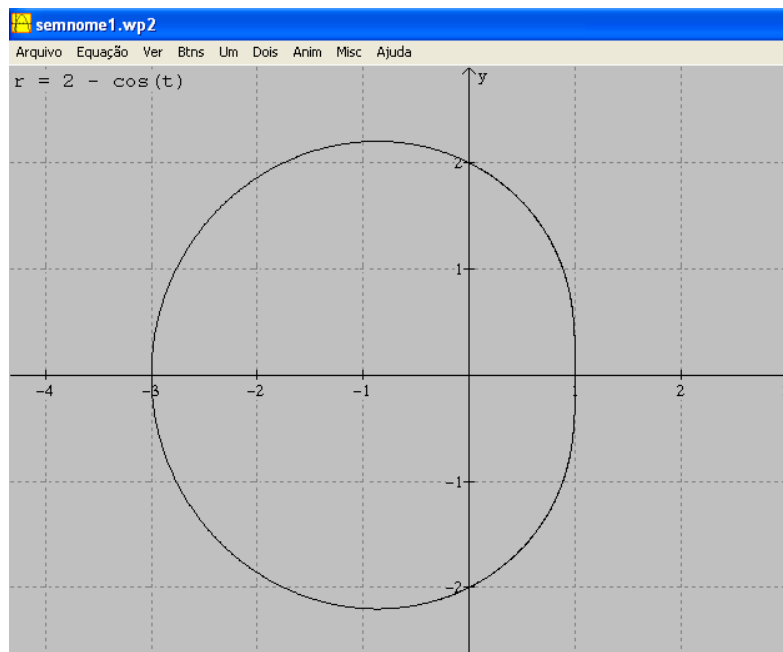
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 6 - Gráfico da equação $r = 3 + 2\cos(t)$ – limaçon com um dente



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 7 - Gráfico da equação $r = 2 - \cos(t)$



Fonte: Dados da pesquisa

Área de uma região em Coordenadas Polares

Pode-se com o uso do *Winplot* também calcular de forma prática e rápida as áreas das regiões limitadas pelos gráficos das equações ilustradas nas figuras apresentadas anteriormente.

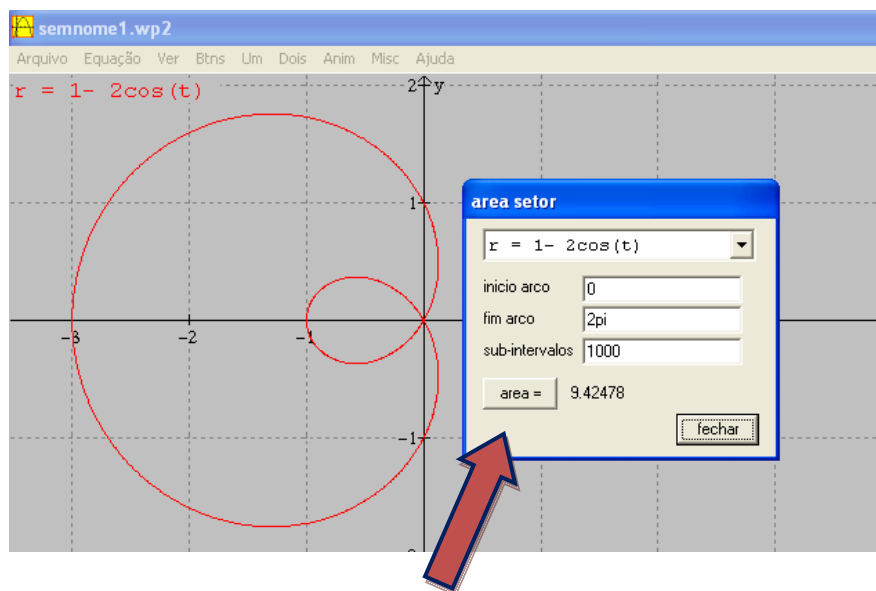
Com a equação polar devidamente inserida, como já mostrado nos exemplos anteriores, clique no menu **Um**, em seguida, **a opção Medida** e, logo após, **Área do setor**. Abrirá uma janela na qual já aparece a equação. Use o intervalo no qual o gráfico esteja inserido. Posteriormente, clique em **área**.

Resolvendo analogicamente a área da região da equação polar $r = 1 - 2\cos(t)$,

$$A = 2 \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos(x) + (\cos(x))^2\right)^{1/2} dx, \text{ temos como resultado } 3\pi \text{ u.a, valor que}$$

corresponde ao encontrado usando o *Winplot*, conforme ilustra a figura 08.

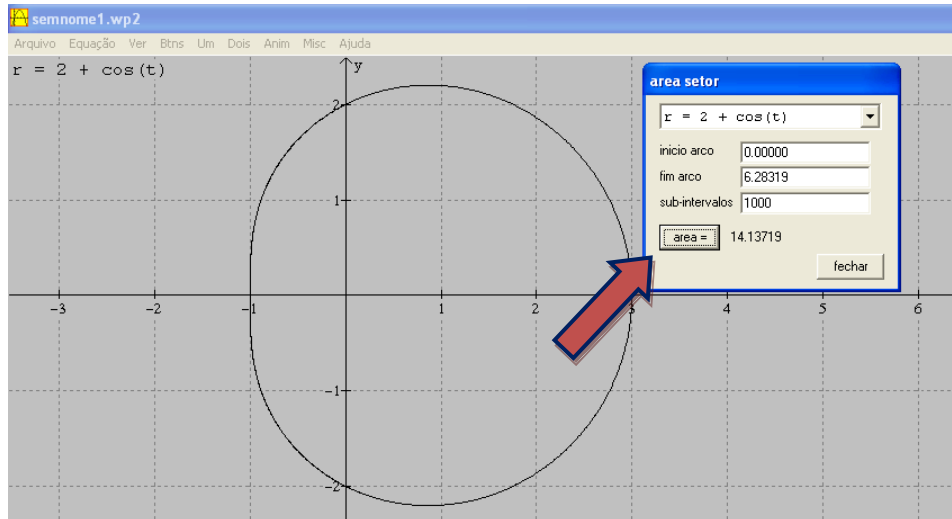
Figura 08 - Área da região da equação polar $r = 1 - 2\cos(t)$.



Fonte: Dados da pesquisa

Resolvendo analiticamente a área da região da equação polar $r = 2 + \cos(t)$, temos: $A = \int_0^{\pi} (4 + 2\cos(x) + (\cos(x))^2)^1 dx$. Obtivemos como resultado $\frac{9\pi}{2}$, valor correspondente ao encontrado com uso do *Winplot*, conforme a figura 09.

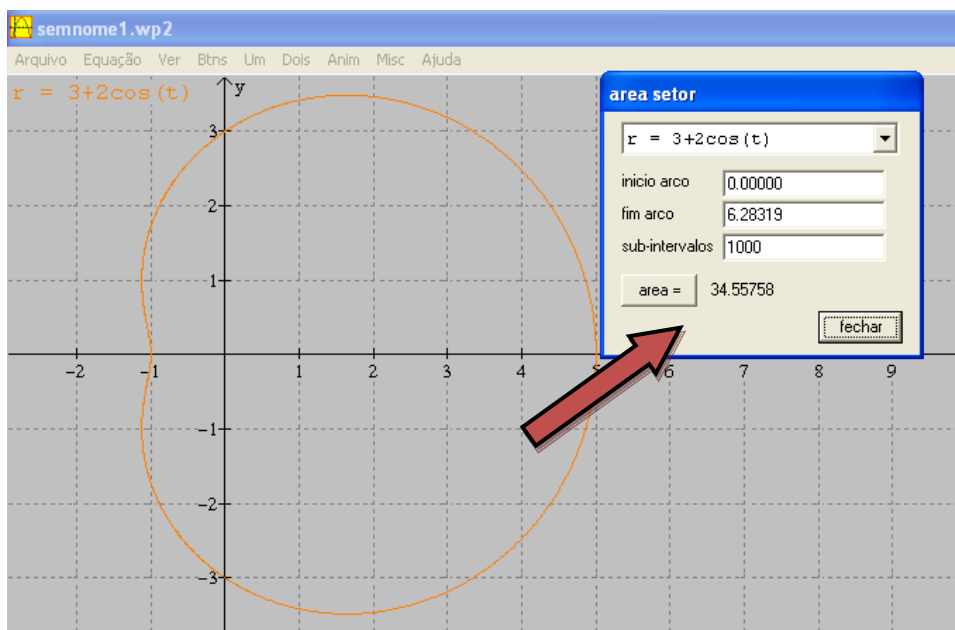
Figura 09 - Área da região da equação polar $r = 2 + \cos(t)$



Fonte: Dados da pesquisa

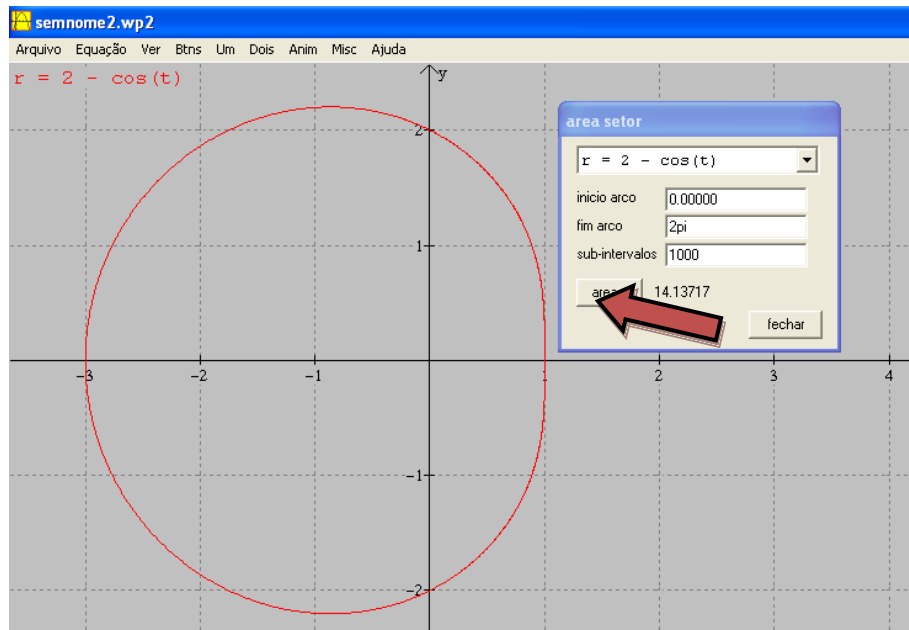
Usando o mesmo procedimento, é possível calcular a área das regiões das demais equações, de acordo com as figuras 10 e 11.

Figura 10 - Área da região da equação $r = 3 + 2\cos(t)$



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 11 - Área da região da equação $r = 2 - \cos(t)$



Fonte: Dados da pesquisa

As questões a seguir são atividades com o propósito de fazer a resolução usando o *Software Winplot* com base nos procedimentos já aplicados anteriormente.

1º) Faça o esboço do gráfico das equações:

- a) $r = 4 - 2\cos(t)$
- b) $r = 3 + 3\sin(t)$
- c) $r = 3 + 4\cos(t)$
- d) $r = 2 - 3\sin(t)$

2º) Encontre a área da região limitada pelos gráficos das equações construídas na questão anterior

3º) Com uso do *Winplot*, construa o gráfico das seguintes equações polares:

a) $r = 4 \cos(2t)$

b) $r = 4 \cos(3t)$

c) $r = 3 \sin(5t)$

d) $r = 3 \sin(6t)$

4º) Com base na questão número 3, relacionando os gráficos das equações dados na forma: $r = a \cdot \cos n(t)$ ou $r = a \cdot \sin n(t)$.

a) Como são chamados esses gráficos?

b) O que é possível observar com relação à variável **a**?

c) O que se pode concluir relacionado **n** às pétalas?

Resultados obtidos

Com o propósito de fazer uma análise da viabilidade de uso, as propostas anteriormente desenvolvidas foram apresentadas a seis professores do Curso de Matemática do IFNMG Campus Januária para que pudessem fazer uma avaliação de forma crítica quanto à possibilidade de uso do material produzido. Todos aceitaram, sendo quatro integrais e dois parciais. Por motivo de sigilo, as denominações dos professores serão denominados por (P₁, P₂, P₃, P₄... P₉).

Sobre a possibilidade de uso do material na referida disciplina, todos afirmaram que sim, ou seja, que o proposto condizia com os temas da disciplina, de acordo com P₁, P₂, P₃, P₄ e P₉.

Sim! Muito bom material para acompanhar a disciplina. Poderia ser aplicado no decorrer do curso, juntamente com as definições, teoremas e exercícios (P₁).

Sim, acredito que seja possível usar (P₂).

Sim, pois o material apresenta passo a passo de como construir gráficos em coordenadas polares com uso do *Winplot* e calcular suas

áreas. Além disso, traz alguns exercícios de fixação que podem ser resolvidos com base nos procedimentos (P₃).

Possui possibilidade de uso (P₄).

Evidente que sim!!! Até acho que entre os materiais mostrados, esse seja o de maior valor, talvez pelo fato que o conteúdo de Cálculo seja a espinha dorsal de um Curso de Licenciatura em Matemática de boa qualidade. E este material transmite de forma clara e objetiva todas as vertentes de um curso de Cálculo bem feito (P₉).

Com base nas descrições acima, pode-se observar uma real possibilidade e potencialidade de uso do *software Winplot* na disciplina Cálculo Diferencial e Integral no conteúdo de coordenadas polares. Referente a possibilidade de construção do conhecimento, todos os participantes afirmaram acreditar que a proposta poderia sim contribuir com o aprendizado dos alunos, conforme as descrições de P₁, P₂, P₃, P₄ e P₉.

Certamente o material contribui com a aprendizagem do aluno, ainda mais com conteúdo em que a construção de gráficos é complicada (P₁).

Sim, principalmente pelo uso do computador e da possibilidade de modificar as figuras e visualizar as diferentes possibilidades de reconstrução (P₂).

Sim, ao construir gráficos e calcular áreas com o uso *Winplot*, o acadêmico desenvolve a habilidade de visualização e pode comparar e conferir os resultados das resoluções já resolvidas manualmente (P₃).

O material produzido irá auxiliar no processo de ensino aprendizagem e compreensão, principalmente em se tratando da parte gráfica (P₄).

Com toda certeza!!! E acho que nós professores de Cálculo, devemos fazer uso deste material em nossas aulas, ensinando os acadêmicos dos cursos de licenciaturas. Isso vai facilitar e muito a aprendizagem dos nossos alunos, além de inseri-los em um contexto de utilização do *software Winplot* que só vem para somar em sua aprendizagem (P₉).

A proposta mostrou ser pertinente, pois, de acordo com as declarações dos professores, a construção de gráficos, principalmente dessa magnitude, geralmente, apresenta muitas dificuldades quando realizada manualmente. Dessa forma, o uso do *software Winplot* pode auxiliar a construção do conhecimento, haja vista que a parte do trabalho mais exaustiva de construção

e reconstrução dos gráficos ficaria a cargo do programa, cabendo ao aluno a reflexão do comportamento do gráfico das coordenadas polares e chegar às possíveis conclusões.

Tais observações corroboram com as avaliações gerais descritas pelos docentes no último quesito desta análise que, no geral, foram muito positivas, sem restrições ou ponderações. Seguem as descrições de P₁, P₂, P₃, P₄ e P₉.

É um ótimo material para ser utilizado no desenvolver do conteúdo, concomitante a definições, teoremas e exercícios. Firma os conceitos e proporciona a construção de gráficos, que apresentam certa complexidade quando feitos à mão livre (P₁).

Ótimo. As instruções são claras e a sugestão de atividade é bem aplicada a disciplina (P₂).

O material está excelente, pois é claro e objetivo o que facilita a utilização do mesmo (P₃).

Material de boa qualidade (P₄).

É de grande importância sua utilização no que se diz a formação de um profissional de docência, ainda mais em uma época em que a tecnologia se faz presente em nosso cotidiano. Portanto vejo este material ensinando a trabalhar com o *Winplot* como uma excelente ferramenta de ensino e de trabalho (P₉).

Sugerem-se novas análises com outros docentes, bem como a aplicação em sala de aula para obter novas informações acerca deste material.

Referências

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e educação matemática**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

LEITHOUD, Louis: **O Cálculo com Geometria Analítica**, trad. Cyro de Carvalho Patarra. 3ª Ed. São Paulo : Harbra, 1994.

PAPERT, Seymour. **A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática**; trad. Sandra Costa – Porto Alegre: Arte Médicas, 1994.

VALENTE, José Armando (Org). **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999.