

# **O ESTUDO DA GEOMETRIA ESPACIAL POR MEIO DA CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS COM MATERIAIS ALTERNATIVOS**

Janio Benevides de Souza Nascimento  
Márcia Jussara Hepp Rehfeldt  
Marli Teresinha Quartieri

e-mail: souaquelegenio@hotmail.com  
e-mail: mreinfeld@univates.br  
e-mail: mtquartieri@univates.br

## **Contextualização**

A prática pedagógica foi desenvolvida com uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de Roraima compreendida por 15 alunos, na faixa etária entre 16 e 17 anos. De maneira geral, conforme análises das respostas dos alunos ao questionário que tratava de situações socioeconômicas, notei que um dos fatores que pode estar interferindo no rendimento escolar de muitos alunos é o exercício laboral destes, pois como moram no extremo oeste da cidade de Boa Vista e trabalham no centro da capital, longe da residência, o tempo gasto na volta do trabalho para a casa afeta a pontualidade na entrada na escola, e, por conseguinte, na aprendizagem. Mesmo assim, lutam e empenham-se para alcançar seus objetivos por meio dos estudos.

Assim, trabalhar e estudar para esses alunos tornam-se tarefas difíceis, pois estudar é algo que requer dedicação e empenho. No trabalho não é diferente, e raramente encontram-se supervisores/chefes que auxiliam seus empregados nesse quesito: liberar mais cedo para que não atrasem a chegada à escola. Como professor de Matemática do Ensino Médio, minhas inquietações iniciaram diante das dificuldades de aprendizagem dos alunos com os quais desenvolvo minha prática docente, pois acredito que a realidade destes pode estar interferindo no rendimento escolar dos mesmos.

Diante deste contexto, acredito que o trabalho com a construção dos sólidos geométricos pode auxiliar em cálculos como volumes e superfícies que os cercam. E que, além dos alunos conhecerem os poliedros, figuras espaciais totalmente novas para eles, poderão também associar a geometria plana àquela, pois é impossível dissociar a primeira da segunda. Ademais, estarão trabalhando com as faces

(planos), as arestas (retas) e os vértices (pontos). Além disso, os alunos ao manusearem os instrumentos: compasso, régua, transferidor, esquadros, entre outros, na construção dos sólidos, poderão compreender de forma mais eficiente os itens relacionados anteriormente.

É importante proporcionar discussão em relação à utilização dos sólidos encontrados no cotidiano confrontada com os conhecimentos prévios dos alunos, conhecimentos esses adquiridos ao longo da vida. Segundo Ausubel (2003, p. 3), esses conhecimentos podem ser denominados como aprendizagem significativa e esta “envolve uma interação seletiva entre o novo material de aprendizagem e as ideias preexistentes na estrutura cognitiva” do aluno. Ou seja, em outras palavras, no processo de aprendizagem significativa a nova informação interage com a estrutura do conhecimento já existente na memória do aluno.

Com isso, esta prática pedagógica buscou uma estratégia de ensino que despertasse nos alunos o interesse pela Matemática, em especial a Geometria Espacial. O intuito foi que eles pudessem notar sua presença em muitos contextos, mesmo nas coisas mais simples. É isso que justificou essa prática.

## **Objetivos**

O objetivo geral deste trabalho foi analisar a ocorrência de aprendizagem significativa em cálculos de superfícies e volumes a partir da construção de sólidos geométricos com canudinhos de refrigerante e linha, jujubas (goma de mascar) e palito (palito de dente), cartolina, papel-cartão.

Este objetivo geral se desenvolveu por meio dos seguintes objetivos específicos:

1. Verificar os conhecimentos prévios dos alunos em relação à geometria e aos instrumentos de desenho: compasso, régua, transferidor, esquadros e o manuseio destes na construção dos sólidos.

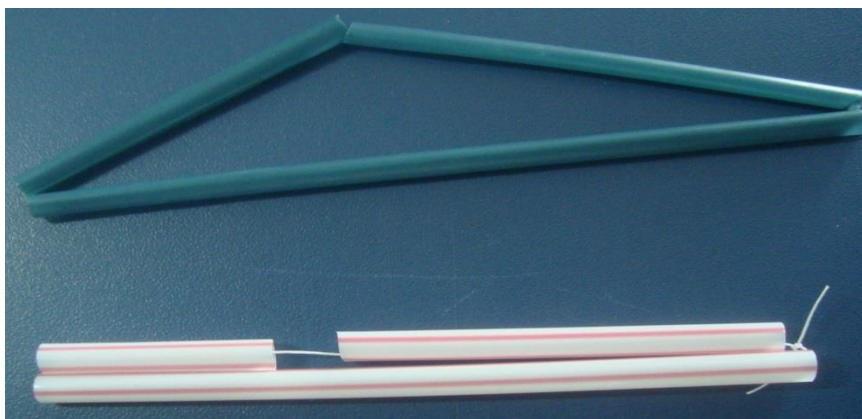
2. Construir sólidos geométricos com canudinhos e linha, jujubas (goma de mascar) e palitos pontiagudos (palito de dente), cartolina, papel-cartão e calcular superfície e volume.
3. Avaliar se a estratégia de ensino por meio da construção de sólidos favorece a aprendizagem significativa da Relação de Euler e o cálculo de superfície e volume.
4. Aplicar o conhecimento obtido com a construção dos sólidos na confecção de caixas para decorações e/ou embalagens para presentes.

### Detalhamento das Atividades

As atividades desenvolvidas com os alunos foram:

1. Construção do triângulo com canudo de refrigerante e linhas (Figura 1). Foram utilizadas tesoura e régua na construção do triângulo. Foi pedido que cada aluno cortasse o canudo em três partes de tamanhos quaisquer, e em seguida, passasse a linha por dentro dos três pedaços de canudos, e que amarrasse as pontas, formando assim o triângulo. Em seguida, defini as medidas, para que após passar a linha por dentro dos pedaços dos canudos, não fosse possível formar o triângulo. O objetivo dessas construções foi a verificação da desigualdade triangular  $a < b + c$ .

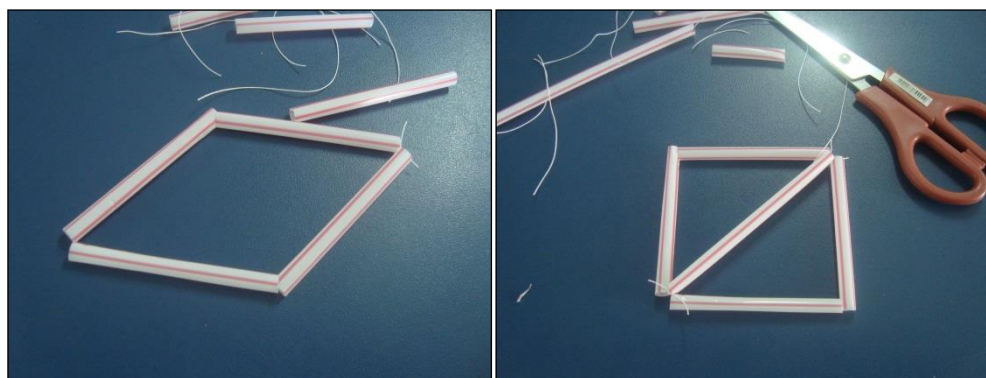
Figura 1 - Comparação das duas construções.



Fonte: Autor da pesquisa, 2013

2. Construção do quadrado também com canudo de refrigerante e linha (Figura 2). Foram utilizadas tesoura e régua na construção do quadrado. Foi pedido que cada aluno cortasse o canudo em 4 partes, e em seguida, passasse a linha por dentro dos 4 pedaços, e que amarrasse as pontas, formando assim o quadrado. Alguns alunos não souberam manusear a régua na medida e divisão do canudo em 4 partes iguais. Pelo fato de se trabalhar com canudos, a construção não ficou perfeita, pois na verdade foram construídos losangos em virtude dos ângulos não ficarem iguais. Em seguida foi sugerido acrescentar a diagonal para que os ângulos permanecessem iguais. Isto é, ângulos retos. O objetivo dessa construção foi a verificação da condição de existência do quadrado, pois este deve possuir lados iguais e ângulos iguais.

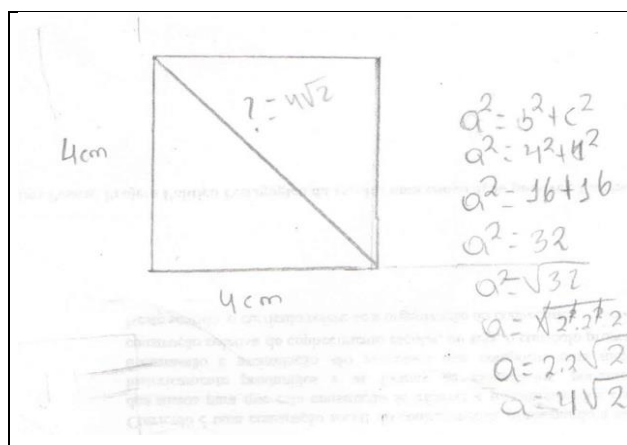
Figura 2 - Quadrilátero sem e com a diagonal:



Fonte: Autor da pesquisa, 2013.

3. Cálculo da diagonal do quadrado (Figura 3). Para esta atividade foram utilizados esquadros e régua. Esta atividade foi realizada em duas partes: na primeira, o quadrado tinha o lado medindo um valor inteiro, na segunda, o quadrado tinha o lado medindo um valor irracional como  $\sqrt{2}$ . O objetivo dessa atividade era que aprendessem a manusear o par de esquadros e a régua, e que percebessem a relação  $d = l\sqrt{2}$ .

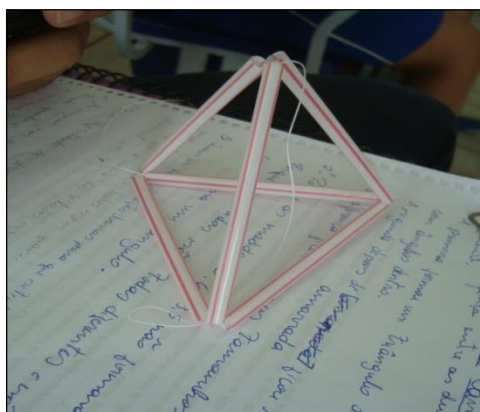
Figura 3: Cálculo da diagonal do quadrado



Fonte: Autor da pesquisa, 2013.

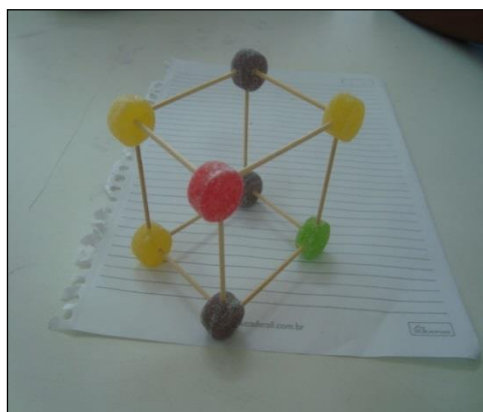
5. A segunda parte da prática pedagógica foi a construção de sólidos geométricos (Figuras 4, 5 e 6).

Figura 4 - Tetraedro construído por um dos alunos.



Fonte: Autor da pesquisa, 2013

Figura 5 - Hexaedro feito com jujubas.



Fonte: Autor da pesquisa, 2013.

Figura 61 - Prisma de base hexagonal.



Fonte: Autor da pesquisa, 2013.

A construção deu início com canudos e linhas, em seguida, com jujubas e palitos de dentes, e encerrada com cartolina e papel-cartão. Foram quatro os objetivos dessas construções, em especial as feitas com cartolinas e papel-cartão:

a) cálculo de superfícies planas como as da forma de triângulos equiláteros e isósceles, e quadriláteras retangulares com as duas dimensões iguais ( $S= l^2$ ) ou diferentes ( $S= a.b$ );

b) cálculo do volume de sólidos cujos ângulos internos são retangulares, e suas dimensões sejam iguais  $V= l^3$  ou diferentes  $V= a.b.c$ ;

c) E também a construção de caixas de presentes ou objetos de decoração para comercialização;

d) comprovação da Relação de Euler.

A seguir têm-se algumas atividades apresentadas aos alunos, atividades que foram resolvidas em dois momentos: em sala de aula, e como tarefa para casa. E também as construções feitas por eles. Essas construções deram início com canudos e linhas, passando por jujubas e palitos de dentes, e encerrando com papel-cartão.

As atividades apresentadas para serem feitas em sala de aula foram:

## **1. Cálculo do volume e da superfície de sólidos em sala de aula.**

Essa atividade foi desenvolvida de várias formas. O objetivo era que eles pudessem perceber o quanto o cálculo de volumes e de superfícies dos/de sólidos estão presentes no nosso dia a dia, das mais diversas maneiras. Foram apresentadas 9 questões. A seguir são apresentadas cada uma delas e um breve detalhamento de como foram resolvidas em sala de aula/na sala de aula:

**a. Cálculo da quantidade de madeira para construção de uma caixa cúbica de 10 cm de aresta.** Bem, como eles recém terminaram de construir alguns sólidos, inclusive o cubo, e por ainda estarem com o cálculo de volumes em mente, todos apresentaram uma resposta que julgavam ser a correta. Afinal, eles calcularam o volume rapidamente sem medo de errarem. Foi então que com uma breve intervenção, puderam entender que a resposta fora equivocada, que na verdade,

deveriam calcular a superfície, foi quando associaram a atividade à planificação do cubo. A partir de então, puderam diferenciar superfícies de volume.

- b. **Cálculo da quantidade de madeira para construção de uma caixa cúbica de 10 cm de aresta, sem tampa.** Essa atividade foi melhor compreendida, pois era praticamente igual à anterior. Mas, embora pedisse para calcular a superfície, queria desafiá-los à percepção da possível “diferença” do volume entre as duas caixas, a da questão (a) e a questão (b). Todos disseram que o volume da questão anterior era maior. Mas, com uma breve explicação, perceberam que os volumes das duas caixas são iguais.
- c. **Quantas viagens são necessárias para transportar  $435 \text{ cm}^3$  de areia numa caixa cúbica de 5 cm de aresta?** Aos poucos, o grau de dificuldade das atividades foi aumentando. O objetivo desta, era a comparação e divisão de um volume maior por outro menor. Apenas 3 alunos entenderam a lógica do problema. Foi então que intervi e com algumas explicações, eles entenderam o passo a passo para se chegar à solução. Polya (2006) afirma que quando o professor auxilia o aluno a resolver o problema que é apresentado estará ajudando a desenvolver no educando a capacidade de resolver futuros problemas ou situações-problemas por si próprios.
- d. **Calcular quanto mede a área total de um cubo sabendo que seu volume é de  $3375 \text{ cm}^3$ .** Essa atividade teve como objetivo a “desorganização de ideias” ou fórmulas, pois até então, eles sabiam calcular o volume a partir das arestas, mas, o encontrar a superfície a partir do volume, foi algo estranho. A princípio, apresentaram o que jugavam ser a resposta, mas, perceberam que o enunciado não pedia o que encontraram, (aresta), mas a superfície. Mas, como já sabiam o valor da aresta, rapidamente definiram a superfície.
- e. **Calcular a área e o volume de um paralelepípedo que possui as 3 dimensões diferentes.** Como não foram informadas as dimensões, deixei a critério deles as medidas, o que gerou dúvidas em todos. Notei também ainda que alguns não sabiam o que era um paralelepípedo. O objetivo desta era a percepção planificada do paralelepípedo com as 3 dimensões diferentes. Entretanto, nenhum aluno conseguiu visualizar as 3 dimensões ao ponto de virem que as 6 faces geram 3 pares de faces iguais, mas diferentes entre si. Para esta questão tive que intervir,

expondo o resultado no quadro. Eles confessaram que nunca tinham visto tal desafio. Sugeri que ao depararem com uma situação como esta, primeiramente desenhassem a planificação do sólido, a fim de perceberem os 3 pares de faces iguais e paralelas, bem como a igualdade entre cada par de faces.

- f. Cálculo do volume, da superfície, da quantidade de ladrilhos e da vazão a 50ℓ/min de uma piscina cujas dimensões são 2m, 8m e 15m.** Os alunos, até então, não tinham deparado com questão cujo enunciado pedisse tantas respostas. Mas, aos poucos eles foram “destrinchando” o problema, e de imediato, já apresentaram o volume em litros, a partir da relação  $1\text{m}^3=1000\ell$ , pois ainda estava na memória o produto das 3 dimensões. De acordo com Moreira e Masini (1982), essa é uma situação prática de aprendizagem, cuja dificuldade, está na aparente contradição entre os conceitos novos e as ideias pré-estabelecidas na estrutura cognitiva do aluno, pois diante desta dificuldade, o aluno poderá relacioná-la a conhecimentos anteriores. A parte que mais tiveram dificuldade foi o cálculo da vazão, mas, vi a necessidade de intervir a fim de que entendessem o problema.

Quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido. Se, por outro lado, todos os erros forem tratados da mesma maneira, assinalando-se os erros e explicando-se novamente, poderá ser útil para alguns alunos, se a explicação for suficiente para esclarecer algum tipo particular de dúvida, mas é bem provável que outros continuarão sem compreender e sem condições de reverter a situação (BRASIL, 1997, p. 41).

Já a quantidade de ladrilhos, aos poucos, e com intervenção do professor, os alunos chegaram ao resultado esperado. Eles ainda perceberam quem em determinadas situações, devem arredondar o resultado para cima (em especial a quantidade de ladrilhos, pois ao calcularem, encontraram um número decimal, e pela lógica viram que não existe a venda certos objetos de forma fracionada).

- g. Construção de uma caixa sem tampa com uma folha de papel sulfite para obter o maior volume possível.** Todos acharam estranho esse enunciado. Como resolver tal desafio? Mas, com a seguinte dica dada: “Usem a imaginação”, aos poucos as caixas foram aparecendo. Claro, cada uma com dimensões diferentes. Alguns conseguiram o maior volume, outros, não. Mas, o fato de construir algo sem que tivessem as medidas definidas, causou-lhes estranheza e ao mesmo tempo, viram que eram capazes de, “do nada” criar algo.



- h. Construção de um prisma de base triangular e cálculo da superfície total e do volume.** A propósito, não defini as dimensões do prisma, o que causou novamente inquietação em todos. Pouco a pouco, as planificações foram surgindo. Essa palavra “prisma” era nova para eles. Após algumas definições, entenderam como deveriam proceder para construir o tal prisma.
- i. Construção de um prisma de base quadrangular, o cálculo da sua superfície e do seu volume.** Esse problema apresentei-lhes enquanto mostrava uma caixa de suco, cuja base era quadrangular, para que tivessem um pouco de contato com o que seria um prisma de base quadrangular. Ao distribuir o material (cartolina, régua, esquadros, tesoura e cola) todos entraram em ação. Uns de forma mais prática, outros de forma mais cuidadosa e com receio. Algo que notei também foi o companheirismo entre eles, pois os que terminaram primeiro foram ajudando os demais.

[...] a interação entre alunos desempenha papel fundamental na formação das capacidades cognitivas e afetivas. Em geral, explora-se mais o aspecto afetivo dessas interações e menos sua potencialidade em termos de construção de conhecimento (BRASIL, 1997, p. 31).

Vi que a apresentação resolução dessas atividades fora sintetizada de forma satisfatória pelos alunos, e a partir de então, poderia apresentar novas atividades com um pouco mais de complexidade, é o caso das questões apresentadas para serem resolvidas em casa.

## **2. Atividades apresentadas para fazerem em casa.**

Essa atividade fora passada com a finalidade de verificar o nível de segurança e confiança dos alunos em resolver sozinhos sem a presença do professor. Ao conversar com eles, percebi que os fatores segurança e confiança estavam em falta com eles, pois poucos obtiveram êxito nas soluções dos problemas, e alguns sequer conseguiram começar.

- a. Calcular o volume do prisma de base triangular cujas arestas da base medem 4 cm e altura mede 8 cm;**

- b. Calcular área total do prisma de base quadrada cujas arestas da base medem 3 cm e a altura, 12 cm;**
- c. Calcular a capacidade do galpão de dimensões 10 m x 6 m x 5 m e telhado com 10 m x 5 m x 5 m;**
- d. De um bloco cúbico de madeira de aresta 3 cm, recorta-se um sólido na forma de H de 1 cm de aresta. Calcular o volume do sólido H após recortado;**
- e. Construir um prisma hexagonal e calcular sua superfície total e volume, sabendo que a aresta da base mede 6 cm e a altura do prisma mede de 15 cm.**

Pude, com essas questões, perceber insegurança dos alunos em tomar iniciativa, pois quando fui ao quadro resolver cada questão, entendiam perfeitamente. Creio que os fatores como imaginação e segurança precisam ser trabalhados com os alunos para que ao virem os objetos que os cercam, possam associar com a geometria espacial, ou ainda, que a imaginação possa se despertar ao depararem com os enunciados e exercícios propostos. Claro, alguns alunos começaram a resolver, mas, por estarem sós, a dúvida era frequente, ao ponto de desistirem. Enquanto que outros, em pequeno número, foram mais longe na solução das atividades. Dante (2005) sugere que problemas expostos em sala de aula sejam comparados com as situações cotidianas e expõe sobre a oportunidade do aluno ao este deparar com conceitos matemáticos no seu dia a dia, pois estes favorecem o desenvolvimento de uma atitude positiva (do aluno) em relação à matemática. Dante (2005, p. 13) ainda complementa: “Não basta saber fazer mecanicamente as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. É preciso saber como e quando usá-las convenientemente na resolução de situações-problema”.

## **Resultados Obtidos**

Ao ensinar geometria espacial de forma significativa acredito que se deveria levar em consideração as motivações dos alunos para aprenderem. Vale também destacar que para o aluno elaborar e reelaborar suas ideias de forma significativa é imprescindível que haja elo entre o conhecimento e o cotidiano para que possam

entender e solucionar cada situação-problema. Entendo que a pesquisa obteve êxito quanto à perspectiva de criar um espaço para que os alunos pudessem desenvolver os objetivos propostos desta pesquisa, a ponto de verificar indícios de aprendizagem significativa.

A partir dessa prática pedagógica percebi que o desenvolvimento do conteúdo produziu resultados positivos, despertando o interesse dos alunos nas atividades propostas. Ademais, não fora em vão o esforço de apresentar uma aula diferente, pois os alunos se sentiram importantes no desenvolvimento da proposta. Eles afirmaram que ainda não haviam se deparado com essa forma de aprender geometria espacial, e sequer sabiam que existia relação entre o cotidiano deles e a geometria espacial, mas, todos afirmaram que o desenvolvimento deste projeto, bem como a maneira prática de estudar geometria plana e espacial, despertou o gostar de Matemática.

A satisfação deles, certamente me fez sentir satisfação também. E pelo poucos anos de magistério, raramente, sendo eu professor, pouco dedicara o meu tempo para apresentar uma aula prática. Neste caso, as aulas práticas duraram quase seis meses, e o que predominou foi a comprovação, a comparação entre o que eles viam nos livros e a prática desenvolvida com eles, bem como a demonstração das fórmulas. Os alunos não tinham conhecimento que por trás daquelas palavras contidas nos livros de matemática existia tanta beleza de forma prática, bastava o professor querer fazer diferente.

Em relação aos objetivos propostos, esta investigação obteve êxito. Percebi que ocorreu a construção do conhecimento acerca da geometria espacial e sua relação com o cotidiano por meio da confecção de sólidos com materiais alternativos. Tais conhecimentos começaram a ser verificados a partir da tarefa mais simples que tratava do conhecimento e manuseio dos instrumentos de desenho, na construção de polígonos regulares, passando aos mais complexos como a construção de sólidos geométricos, cálculos dos volumes e planificações destes.

Os alunos afirmaram que a estratégia utilizada pôde despertar o interesse por algo que até então mal entendiam, ou sequer sabiam que existia uma aplicação

prática para o conteúdo em questão, pois cada aula, para eles, foi uma nova descoberta, uma descoberta que poderá ser útil, basta desejar por em prática, basta ter iniciativa para transformar o conhecimento em algo concreto. Vi também que o objetivo de construir objetos de decoração ou caixas de presentes foi alcançado por eles.

Com isto, ao terminar este estudo percebi como professor, que construir é mais interessante, do que apenas ler, interpretar e calcular. Presenciei o interesse e o entusiasmo em cada aluno, quando era anunciado que naquele dia, naquela tarde, teríamos uma aula diferente. Eles aguardavam cada aula prática. Nestas aulas que, pela primeira vez, presenciei algo real e prático, pois até então só estudara também. Sabia que era possível construir, mas nunca construía, nunca pusera em prática desde que começara a lecionar Matemática. Ao longo desses quase cinco meses, acompanhei cada passo dos alunos, cada medo de errar, e ainda, cada alegria em acertar.

E mais, acredito que este trabalho poderá contribuir com as discussões que vêm sendo realizadas no mundo acadêmico sobre o ensino da geometria. Enfim, penso que o professor deva estimular descobertas e a busca de respostas alternativas para resolver problemas semelhantes. Assim, espero que esta pesquisa venha a colaborar com os estudos já desenvolvidos e contribuir no comportamento dos aspectos social, cognitivo e físico dos alunos. Percebi também que ocorreu a construção do conhecimento com essa estratégia adotada, e durante a prática pedagógica esta constituiu-se como ferramenta metodológica eficiente para o ensino de geometria espacial. No entanto, penso que no decorrer do desenvolvimento de novas pesquisas, poderão surgir novas descobertas e novas formas de pensar sobre o tema.

## Referências Bibliográficas

AUSUBEL, David Paul. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura; Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: apresentação dos temas transversais, ética / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem Significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.