

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Abordando Geometria por meio da investigação matemática

Fernanda Eloisa Schmitt¹, Marli Teresinha Quartieri², Ieda Maria Giongo³

¹ Mestranda em Ensino de Ciências Exatas – Centro Universitário UNIVATES
Av. Alberto Talini, 171 – Lajeado – RS - Brasil

^{2,3} Professoras do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – Centro Universitário
UNIVATES
Av. Alberto Talini, 171 – Lajeado – RS - Brasil

Contextualização

As atividades aqui descritas foram desenvolvidas, com alunos do 5º e o 9º anos, totalizando oitenta estudantes, em duas escolas parceiras do Observatório da Educação da Univates. Tal pesquisa conta com apoio da CAPES e é intitulada “Estratégias metodológicas visando à inovação e reorganização curricular no campo da Educação Matemática no Ensino Fundamental”. Como ações desta pesquisa destacam-se o estudo e problematização de três tendências da Educação Matemática: etnomatemática, investigação matemática, modelagem matemática. Três bolsistas do Mestrado em Ensino de Ciências Exatas, desenvolveram sua intervenção pedagógica utilizando tais tendências.

Este material é oriundo do uso da investigação matemática nas aulas de Matemática e é parte integrante da dissertação de Mestrado, de uma das bolsistas, que é primeira autora desta produção técnica. Constatam cinco atividades que abordam diferentes noções sobre o conteúdo de geometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Entende-se por investigação matemática, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), atividades que instigam o aluno à descoberta de novos saberes, por meio de problemas abertos, que propiciem o levantamento de conjecturas possíveis de serem testadas e matematicamente registradas. Para esses autores:

CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO

[...] uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática exista uma relação estreita entre problemas e investigação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 16).

Por ter esta característica, este tipo de atividade deve ser disponibilizado, procurando desenvolver a habilidade e a capacidade dos alunos para solucionarem dilemas e formularem conjecturas a respeito dos problemas apresentados. Nesta mesma perspectiva, Goldenberg (1999, p. 37, grifo do autor) comenta que

[...] se um dos objetivos da educação matemática é fazer com que os alunos aprendam como é que as pessoas descobrem factos e métodos, deveriam também, durante uma parte significativa do tempo de aprendizagem, dedicar-se a essa mesma atividade: *descobrir* os factos.

Neste sentido, não se pode explicar técnicas e fazer com que os alunos se limitem a executá-las. “O objetivo propriamente dito é que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz, e para isso tem que fazer investigação” (Ibidem, p. 37). Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 10) aludem que investigar em Matemática conduz à formulação de conjecturas, hipóteses, as quais necessitam ser repetidamente testadas e provadas. Uma investigação matemática envolve “conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo conjectura-teste-demonstração”. Os autores também delimitam uma investigação matemática em quatro momentos principais, pontuando que cada uma dessas passagens, pode incluir diversas atividades como indicado no Quadro 1.

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação

| | |
|-------------------------------------|---|
| Exploração e formulação de questões | <ul style="list-style-type: none">• Reconhecer uma situação problema• Explorar a situação problemática• Formular questões |
| Conjecturas | <ul style="list-style-type: none">• Organizar dados• Formular conjecturas (e fazer |

CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO

| | |
|--------------------------|---|
| | afirmações sobre uma conjectura) |
| Testes e reformulação | <ul style="list-style-type: none"> • Realizar testes • Refinar uma conjectura • Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio |
| Justificação e avaliação | |

Fonte: (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 21)

A exploração da tarefa, profere Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 30), leva tempo e é uma etapa decisiva para a formulação das conjecturas, sendo que o “trabalho em grupo potencializa o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa”. As conjecturas surgem de diferentes formas, podendo ser por observação ou manipulação dos dados, sendo que o aluno tende a não verbalizar a formulação das conjecturas. “É somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 33).

Objetivo

Objetivou-se divulgar e destacar a tendência investigação matemática como uma proposta diferenciada para trabalhar geometria. Além disso, pretendeu-se verificar sua potencialidade no desenvolvimento da cooperação no trabalho em grupo, bem como incentivo a escrita nas aulas de matemática.

Detalhamento

A intervenção pedagógica é composta de cinco atividades de investigação matemática com foco em geometria. As tarefas devem ser realizadas em grupos, numa tentativa de proporcionar momentos de socialização de aprendizagem e troca de saberes. Os alunos ao explorarem as atividades, devem seguir as orientações dos enunciados e formular suas próprias conclusões. Cada grupo deverá formular, em cada atividade, conjecturas relatando as mesmas por escrito. Após estas serão testadas e se preciso

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

reformuladas. Por fim, os alunos deverão escrever e argumentar suas hipóteses, para posteriormente socializar suas descobertas aos demais colegas.

Atividade 1:

Nesta atividade pretende-se trabalhar a relação da área de figuras planas com seu formato, evidenciando que figuras que possuem o mesmo valor para o perímetro podem ter valores diferentes de áreas. Objetiva-se ainda com essa atividade que o aluno descubra qual é a figura plana que tem maior área, com a mesma medida de contorno.

Investigando área e perímetro

Um pedreiro quer construir uma casa e tem material suficiente para construir as paredes do contorno da casa. Descubra qual deverá ser o formato da casa para que a mesma tenha a maior área possível.

Material necessário: barbante, papel quadriculado.

Procedimento: corte um pedaço de barbante com 32 unidades de comprimento. Com a ajuda do barbante, desenhe no papel quadriculado:

- 1 quadrado
- 2 retângulos com formatos diferentes
- 1 círculo
- 1 triângulo
- 1 figura diferente das anteriores

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Calcule a área de cada figura construída, contando o número de quadradinhos inseridos em cada figura. O número de quadradinhos de cada figura equivale ao valor da área. Complete a tabela:

| Figura | Área |
|-----------------|-------------|
| Quadrado | |
| Retângulo 1 | |
| Retângulo 2 | |
| Triângulo | |
| Círculo | |
| Figura qualquer | |

Responda:

- Que figura tem a maior área?
- Que figura tem a menor área?
- Qual o retângulo que tem a maior área?
- Observando as figuras e suas áreas, que outras conclusões você pode tirar em relação ao formato da figura necessário para se obter a maior área?
- Que figura você escolheria para a base de sua casa? Por quê?

Fonte: Adaptado de ZASLAVSK, Claudia. Pessoas que vivem em casas redondas. Arithmetic teacher, 1989.

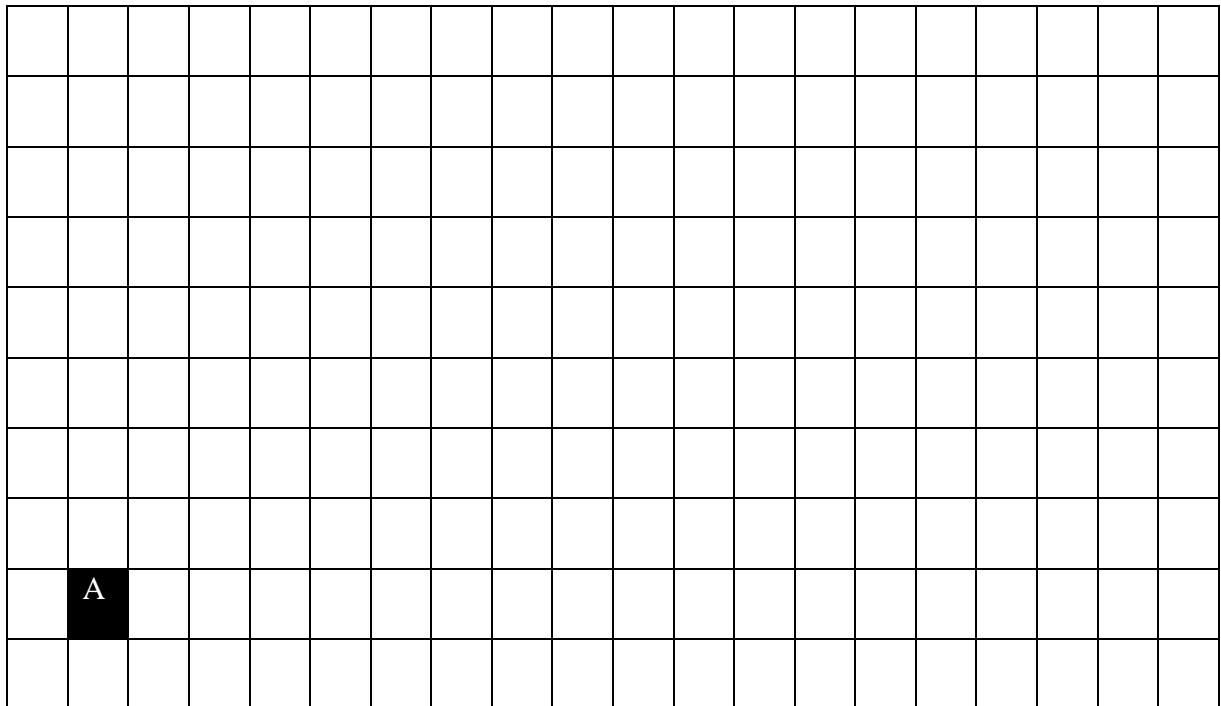
Atividade 2:

O objetivo desta situação é investigar a relação que existe entre perímetro e área ao se modificar a medida dos lados do quadrado.

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Relação entre área e perímetro

Utilize a grade a seguir para representar o que se pede e responda às questões, considerando o lado do quadrado A (quadrado escuro) igual a uma unidade:



- Duplicando-se a medida de cada lado do quadrado “A”, duplica-se o perímetro?
- Duplicando-se a medida de cada lado do quadrado “A”, duplica-se a área?
- O que acontece com o perímetro e com a área do quadrado ao triplicarem-se as medidas dos lados?
- O que acontece com o perímetro e com a área ao multiplicarmos por quatro as medidas dos lados do quadrado “A”?
- E ao dividirmos pela metade a medida de seus lados, qual será a área do novo quadrado?
- O que se pode concluir destas atividades?

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Fonte: Adaptado de KNIJNIK, Gelsa; BASSO, Marcus Vinicius e KLÜSENER, Renita. Aprendendo e ensinando matemática com o Geoplano. UNIJUÍ, 1996.

Atividade 3:

Com esta atividade objetiva-se que o aluno explore algumas propriedades relacionadas aos triângulos, em particular a condição de existência de triângulos e a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Estudando triângulos:

1) Corte canudinhos de acordo com as medidas de cada item e com auxílio de um fio, construa triângulos:

- a) canudinhos medindo 8 cm, 9 cm e 5 cm.
- b) canudinhos medindo 9 cm, 3 cm e 7 cm.
- c) canudinhos medindo 15,4 cm, 12,3 cm e 9,1 cm.
- d) canudinhos medindo 2 cm, 5 cm e 3 cm.
- e) canudinhos medindo 6 cm, 6 cm e 7 cm.
- f) canudinhos medindo 4 cm, 4 cm e 4 cm.
- g) canudinhos medindo 10 cm, 6 cm e 2 cm.
- h) canudinhos medindo 10 cm, 6 cm e 4 cm.

2) Quando acontece a possibilidade de construir um triângulo?

Quando não é possível?

3) Desenhe os triângulos construídos na questão 1 em uma folha quadriculada.

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

a) Com a ajuda de um transferidor medir os ângulos internos dos triângulos desenhados. Que conjecturas podem ser realizadas sobre estas medidas?

b) Estime a área de cada triângulo desenhado. Existe uma maneira mais fácil de calcular a área de triângulos? Descreva uma forma.

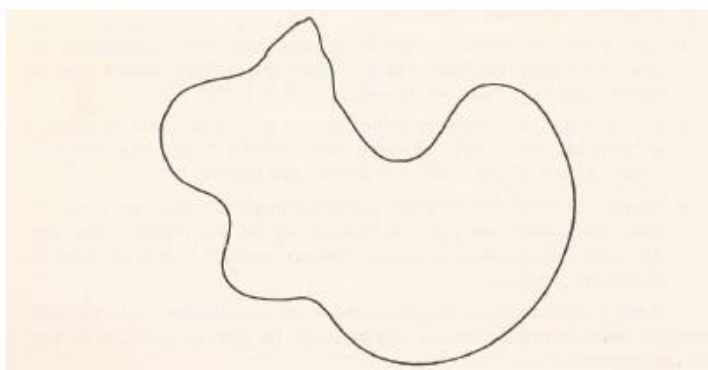
Fonte: DULLIUS, Maria M.; QUARTIERI, Marli T. Trabalhando geometria espacial com os softwares Poly e Wingeometric. Disponível em: http://www.univates.br/ppgece/media/pdf/Trabalhando_Geometria_espacial_com_softwares_poly_e_wingeometric.pdf> Acesso em: 28 jul 2013.

Atividade 4:

Nesta atividade o aluno deve criar suas próprias estratégias para calcular a área de uma figura não regular.

Calculando a área e perímetro

Determine a área e o perímetro de um município cuja planta tem o formato da figura que segue e que foi obtida por meio de um levantamento topográfico.



Crie estratégias diferentes para determinar a área e o perímetro desta região.

Fonte: adaptado de TROTTA, Fernando; IMENES, Luiz Márcio Pereira e JAKUBOVIC, José. Matemática aplicada. São Paulo. Ed. Moderna, 1979.

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Atividade 5:

O intuito é descobrir o cálculo do volume de um cubo, bem como desenvolver estratégias para responder questões que envolvem a percepção espacial.

Cubos e cubinhos

1) Pense e responda:

a) Ao construirmos um cubo de aresta “3 cubinhos”, quantos “cubinhos” serão necessários?

b) Quantos “cubinhos” serão necessários para construir um cubo de aresta “4 cubinhos”?

c) E de “5 cubinhos”?

2) Imagine agora que, depois de construído o cubo de aresta 3 com os cubinhos, decidiu-se pintá-lo exteriormente de vermelho.

a) Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada?

b) E com duas faces pintadas?

c) E com três faces pintadas?

d) E com nenhuma?

3) Investigue o que aconteceria se pintássemos um cubo de aresta “4 cubinhos”.

a) Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada?

b) E com duas faces pintadas?

c) E com três faces pintadas?

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

- d) E com nenhuma?
- 4) E se pintássemos um cubo de aresta 5?
- a) Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada?
- b) E com duas faces pintadas?
- c) E com três faces pintadas?
- d) E com nenhuma?

5) Escreva que conclusões podem ser tiradas destas atividades. Para facilitar o trabalho organize numa tabela as suas descobertas sobre o número de cubinhos com 0, 1, 2, 3,... faces pintadas num cubo de $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$, $5 \times 5 \times 5$, $6 \times 6 \times 6$. Observe a tabela e escreva algumas conclusões gerais.

Fonte: adaptado de <http://pt.scribd.com/doc/97764348/lista-de-questoes-para-estudos-para-2a-avaliacao>

Com estas atividades pretende-se desenvolver habilidades de trabalho em grupo, de cooperação e da escrita matemática. Cabe salientar que a escrita das conjecturas e das conclusões será permanente durante a exploração das atividades.

Resultados obtidos

Como estas atividades foram realizadas em turmas de 5º e 9º anos, percebeu-se que existem algumas noções de conceitos e fórmulas que foram mais predominantes no 9º ano do que no 5º ano, tais como fórmulas da área e perímetro de figuras geométricas. Apesar de os alunos do 9º ano relatarem em utilizar fórmulas, eles demonstravam sabê-las. Estes também pensavam em estratégias ou fórmulas para tentar resolver as questões, tais como para calcular a área de quadrados e retângulos, e o volume dos cubos. Os alunos do 5º ano limitavam-se a contar quadradinhos e cubinhos, sendo que poucos tentavam alguma estratégia diferente.

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Em algumas atividades houve confusão entre as noções de perímetro e área de figuras geométricas planas. Alguns alunos confundiam esses conceitos. Além disso, percebeu-se ideias errôneas com relação à definição de triângulos, mais fortemente no 5º ano, em que eles diziam que apenas figuras com três lados semelhantes caracterizavam-se como triângulos.

Uma semelhança entre as duas turmas envolveu a escrita, ou a falta dela, pois em ambas as turmas os alunos pouco escreviam sobre suas conjecturas e resultados alcançados, limitando-se ao mínimo possível para expressar uma resposta. Apesar disso, observou-se que esta tendência possibilitou estimular nos alunos a cultura da escrita em matemática, um fator pouco convencional e ao qual os alunos não estão acostumados. Enfim, escrever nas aulas de matemática é um desafio para os alunos que, muitas vezes, não conseguem expressar, através da escrita, suas ideias e pensamentos.

Um fator positivo do uso desta metodologia é o trabalho em grupos. Em ambas as turmas os alunos cooperavam com os demais colegas e se ajudavam mutuamente. Segundo relatos dos estudantes, as atividades investigativas foram mais produtivas, justamente por serem realizadas em pequenos grupos, visto que, assim, tinham a oportunidade de debater e pôr à prova suas conjecturas.

Assim pode-se inferir que a realização de atividades investigativas pode possibilitar o desenvolvimento do espírito investigativo do aluno e, conseqüentemente, de sua aprendizagem em relação à matemática. Com estas atividades o aluno tem a oportunidade de levantar estratégias, estabelecer relações e tomar decisões através de resultados obtidos, estabelecendo relações e significando relações matemáticas. Utilizar a tendência de investigação matemática, na prática pedagógica, pode ser um potencial, pois disponibiliza ambiente de interação e troca, favorecendo maior interesse e entusiasmo aos alunos pela atividade matemática.

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Referências

DULLIUS, Maria M.; QUARTIERI, Marli T. **Trabalhando geometria espacial com os softwares Poly e Wingeometric. Disponível em:**
<http://www.univates.br/ppgece/media/pdf/Trabalhando_Geometria_espacial_com_softwares_poly_e_wingeometric.pdf> **Acesso em: 28 jul 2013.**

GOLDENBERG, E. P. Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In p. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, L. Brulheira (Eds.), **Investigações matemáticas na aula e no currículo.** Lisboa: APM e Projecto MPT.1999. pp. 35-49.

KNIJNIK, Gelsa; BASSO, Marcus Vinicius; KLÜSENER, Renita. **Aprendendo e ensinando matemática com o Geoplano.** UNIJUÍ, 1996.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

TROTTA, Fernando; IMENES, Luiz M. P.; JAKUBOVIC, José. **Matemática aplicada.** São Paulo: Ed. Moderna, 1979.

ZASLAVSK, Claudia. **Pessoas que vivem em casas redondas.** Arithmetic teacher, 1989.