



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Resolvendo integrais utilizando a calculadora HP 50G

**Márcia Jussara Hepp Rehfeldt, Ieda Maria Giongo, Marli Teresinha Quartieri,
Karina Corbellini Brito de Azambuja, Cristiane Antonia Hauschild, Lucas Favaretto**

Contextualização

Esta produção técnica foi desenvolvida por bolsistas de Iniciação Científica e professores do Centro Universitário UNIVATES com o objetivo de auxiliar alunos dos cursos relacionados ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas na resolução de integrais. De acordo com cerca de 40 engenheiros do Vale do Taquari, questionados, em 2014, sobre como resolvem as situações matemáticas do cotidiano, observou-se que os mesmos fazem poucos cálculos manualmente. A tecnologia é uma grande aliada dos engenheiros, pois a utilizam como forma de agilizar e obter precisão no cálculo. Rehfeldt et al (2014, p. 6) comentam que “segundo os profissionais entrevistados, o uso de tabelas, *softwares* e planilhas têm contribuído na atuação profissional, pois agiliza e facilita o trabalho, confirmam uma hipótese de cálculo e oportunizam ao cliente a visualização do projeto”.

A calculadora HP 50G, de acordo com Scucuglia (2006, p. 19), é uma excelente aliada, visto que ela dispõe

de diversas potencialidades, algumas particulares, dependendo da marca e/ou modelo. Além das funções de uma Calculadora Científica, ela permite trabalhar temas diversos como gráficos e tabelas de funções (de uma ou duas variáveis reais, paramétricas), matrizes, matemática financeira, estatística, geometria (dinâmica e analítica), física, etc. E, embora não disponha de todas as potencialidades de um microcomputador, a Calculadora Gráfica pode ser concebida como um “mini computador” voltado para estudos em matemática e ciências, sendo ainda de fácil transporte.



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Ponderando isso e levando em conta que o cálculo de integrais complexas deixa os alunos temerosos nas disciplinas de Cálculo, o tutorial apresentado objetiva auxiliar, professores e alunos na resolução de integrais, utilizando a calculadora HP 50G. O material já foi avaliado por alunos na disciplina de Cálculo II, por professores e monitores que atuam na área da Matemática. Ainda cabe mencionar que as calculadoras utilizadas durante os estudos foram obtidas com recursos da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS), por meio de projeto aprovado no Edital FAPERGS 01/2013.

Objetivo

Mostrar possibilidades de uso da calculadora HP 50G na resolução de integrais.

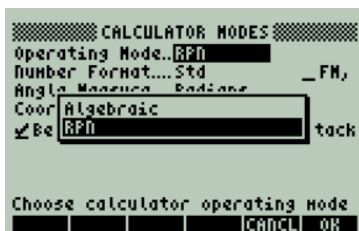
Detalhamento das Atividades

Neste tópico serão apresentados alguns exemplos de integrais e o modo de resolução das funções utilizando a calculadora gráfica HP 50G.

Descrição do modo de operação da calculadora HP 50G

A calculadora HP 50G calcula derivadas e integrais se estiver no modo exato. Para tanto, é necessário programá-la conforme os passos a seguir:

1) O modo deve estar em Notação Polonesa Inversa (ou *RPN* na sigla em inglês, de *Reverse Polish Notation*). Para verificar em que modo está a calculadora basta clicar em “MODE” e ver o que está escrito em *Operating Mode*. Se o modo for “Algebraic” basta apertar “F2” selecionar RPN e clicar “F6”.



2) Após alterar o modo para RPN entre no menu Sistema computadorizado de álgebra (ou CAS na sigla em inglês, de *Computer Algebra System*) pressionando [F3].

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

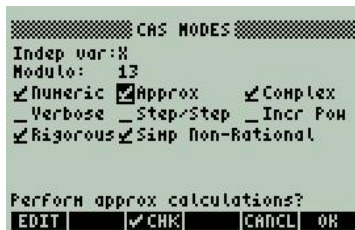


Aparecerá o *Display* abaixo



3) Certifique-se que na primeira linha a variável independente é "X"

4) Desmarque todas as "Checkbox" (opções assinaladas), indo sobre elas e apertando [F3].



5) Então, pressione "OK" 2 vezes, para confirmar a operação



Após configurar a calculadora, podemos resolver os cálculos de derivadas e integrais. Alguns desses exercícios, juntamente com a solução estão explicitados a seguir.

Cálculo de Integrais

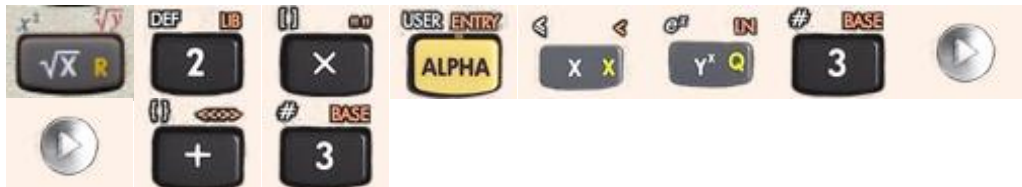
Questão 1: Calcular a integral de $\int \sqrt{2x^3 + \frac{3}{5}x^4} dx$.

1) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois [O] para selecionar a função Editor de Equação (ou EQW na sigla em inglês, de *equation writer*).



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

2) Pressione [RAIZ QUADRADA], [2], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [3], [SETA PARA DIREITA 2x], [MULTIPLICAÇÃO], [3].



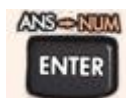
3) Pressione [DIVISÃO], [5], [SETA PARA DIREITA], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [4].



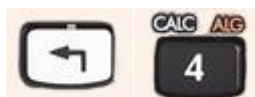
4) A função deverá ficar assim:



5) Pressione [ENTER].



6) Agora pressione [SHIFT ESQUERDO]; [4] para entrar em “CALC”.



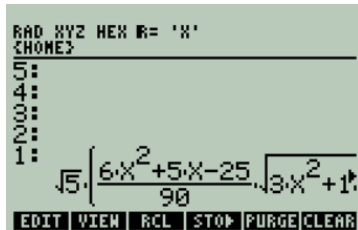
7) Procure o comando integração simbólica

(INTVX) e aperte “OK”.



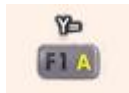
8) A resposta será:

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**



Observação: a flecha para a direita ao lado do resultado indica que o resultado não está sendo completamente mostrado na tela.

9) Para simplificar, pressione editar (EDIT).



10) Com toda a função selecionada, pressione "SIMP".



11) A resposta simplificada será:



Questão 2: Integrar a função $\int x^4 e^{x^3+5x^2+4x} dx$.

1) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois "EQW" para entrar no editor de equações.



2) Pressione [ALPHA], [X], [ELEVADO], [4], [DIREITA], [MULTIPLICAÇÃO], [SHIFT ESQUERDO], [ELEVADO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [4], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X].

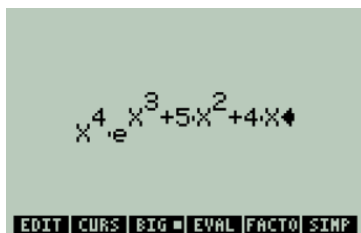
**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**



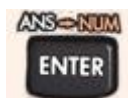
3) Pressione [3], [DIREITA], [SOMA], [5], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [2], [DIREITA 2x], [SOMA], [4], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X].



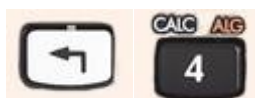
4) A função deverá ficar assim:



5) Pressione [ENTER].



6) Agora pressione [SHIFT ESQUERDO]; [4] para entrar em “CALC”.

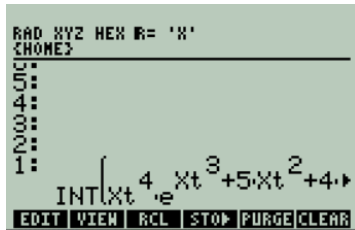


7) Procure o comando **INTVX** e aperte “OK”.



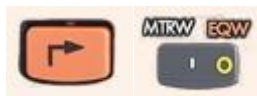
8) A resposta será:

CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO

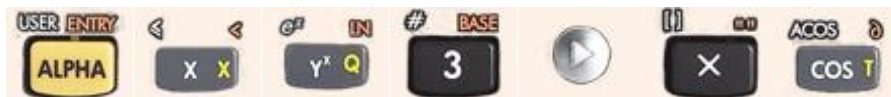


Questão 3: Integrar a função $\int x^3 \cos 2x^2 dx$.

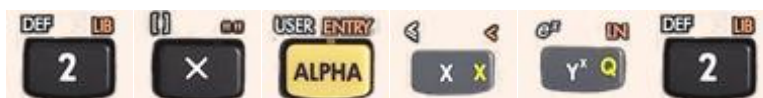
1) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois "EQW" para entrar no editor de equações.



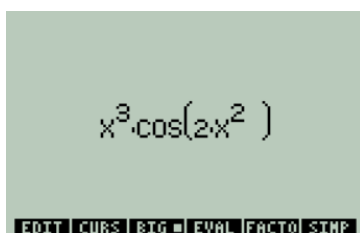
2) Pressione [ALPHA], [X], [ELEVADO], [3], [DIREITA], [MULTIPLICAÇÃO], [COS].



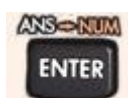
3) Pressione [2], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [2].



4) A função deverá ficar assim:



5) Pressione [ENTER].



6) Agora pressione [SHIFT ESQUERDO]; [4] para entrar em "CALC".



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

7) Procure o comando **INTVX** e aperte “OK”.



8) O resultado será:



Observação: A flecha para a direita ao lado do resultado indica que o resultado não está sendo completamente mostrado na tela.

Questão 4: Integrar a função $\int \frac{3x^2+5x+3}{e^{2x}} dx$.

1) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois "EQW" para entrar no editor de equações.



2) Pressione [3], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [2], [DIREITA 2x], [SOMA], [5], [ALPHA], [X].

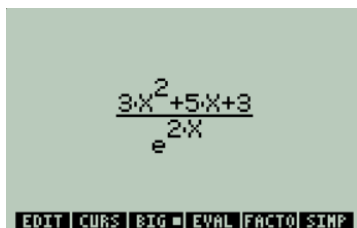


3) Pressione [SOMA], [3], [DIREITA 2x], [DIVIDIDO], [SHIFT ESQUERDO], [e], [2], [X], [ALPHA], [X].

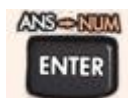
CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO



4) A função deverá ficar assim:



5) Pressione [ENTER].



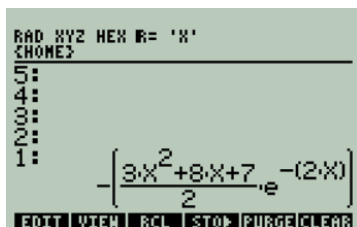
6) Agora pressione [SHIFT ESQUERDO]; [4] para entrar em “CALC”.



7) Procure o comando **INTVX** e aperte “OK”.



8) O resultado será:



Questão 5: Integrar a função em relação a x e y: $\int \frac{2}{3} x^3 y e^{x^2+y^2}$.

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Iremos, inicialmente, integrar em relação à x e depois em relação à y.

Para integrar em relação à x: $\int \frac{2}{3} x^3 y e^{x^2+y^2} dx$:

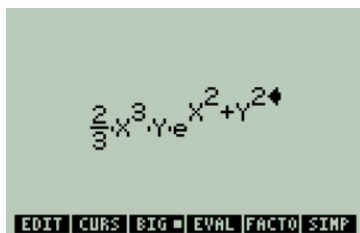
- 1) Pressione [SHIFT DIREITO], [EQW], [2], [DIVIDIDO], [3], [DIREITA], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [3], [DIREITA].



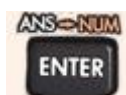
- 2) Pressione [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [Y], [SHIFT ESQUERDO], [e], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [2], [DIREITA], [SOMA], [ALPHA], [Y], [ELEVADO], [2].



- 3) A função deverá ficar assim:



- 4) Pressione [ENTER].



- 5) Agora pressione [SHIFT ESQUERDO]; [4] para entrar em “CALC”.

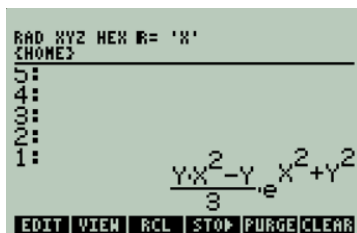


- 6) Procure o comando **INTVX** e aperte “OK”.

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**



7) O resultado será:



Para integrar em relação à y: $\int \frac{2}{3} x^3 y e^{x^2+y^2} dy$:

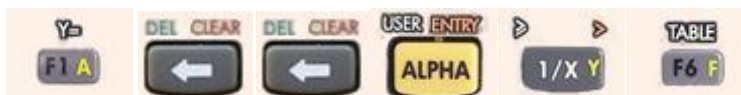
1) Pressione [MODE] e depois pressione [F3] para selecionar o menu "CAS".



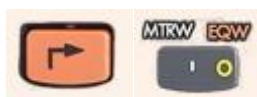
2) Aparecerá o Display abaixo.



3) Devemos alterar a Indep. Var (Variável Independente) para y. Para isso pressione [F1], clique em "DEL" duas vezes, pressione [ALPHA], [Y], clique em [F6] para confirmar. Após estes passos podemos inserir a função que será integrada em relação à y.



4) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois "EQW" para entrar no editor de equações.



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

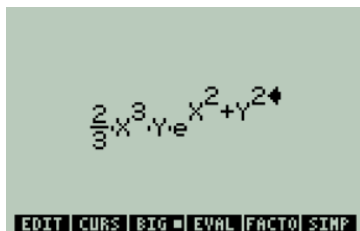
5) Pressione [2], [DIVIDIDO], [3], [DIREITA], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [3], [DIREITA].



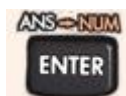
6) Pressione [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [Y], [SHIFT ESQUERDO], [e], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [2], [DIREITA], [SOMA], [ALPHA], [Y], [ELEVADO], [2].



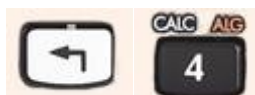
7) A função deverá ficar assim:



8) Pressione [ENTER].



9) Agora pressione [SHIFT ESQUERDO]; [4] para entrar em “CALC”.



10) Procure o comando **INTVX** e aperte “OK”.

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**



11) O resultado será:

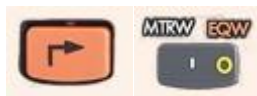


Questão 6: Integrar a função em relação a x e y: $\int \text{sen}(2x + y^3)^3$.

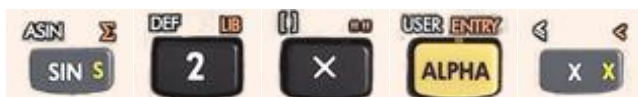
Para integrar em relação à x a variável independente deve ser x. Para mudar a variável independente novamente para x siga os passos da questão anterior e altere de y para x.

Para integrar em relação a x: $\int \text{sen}(2x + y^3)^3 dx$.

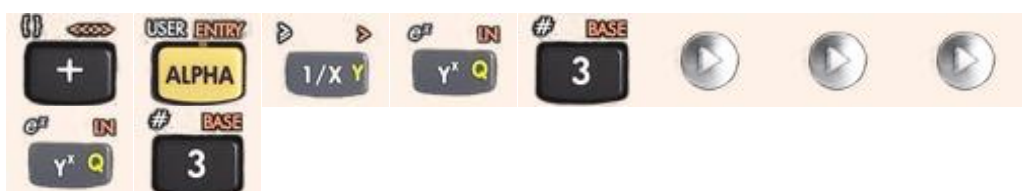
1) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois "EQW" para entrar no editor de equações.



2) Pressione [SENO], [2], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X].

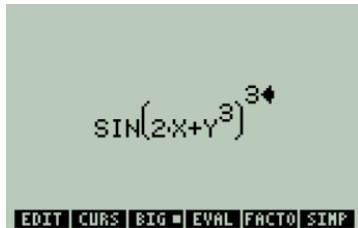


3) Pressione [SOMA], [ALPHA], [Y], [ELEVADO], [3], [DIREITA 3x], [ELEVADO], [3].

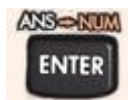


**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

4) A função deverá ficar assim:



5) Pressione [ENTER].



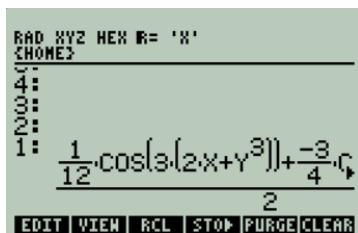
6) Agora pressione [SHIFT ESQUERDO]; [4] para entrar em "CALC".



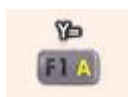
7) Procure o comando **INTVX** e aperte "OK".



8) O resultado será:



9) Para simplificar, pressione "EDIT".

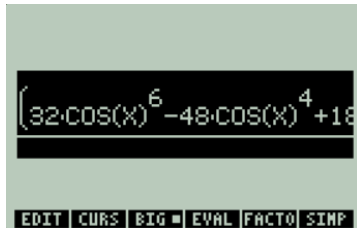


10) Com toda a função selecionada, pressione "SIMP".



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

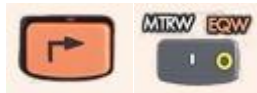
11) A resposta simplificada será:



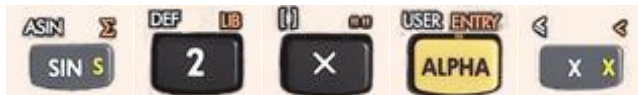
Para integrar em relação à y: $\int \text{sen}(2x + y^3)^3 dy$

Observação: A variável independente deve ser y.

1) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois "EQW" para entrar no editor de equações.



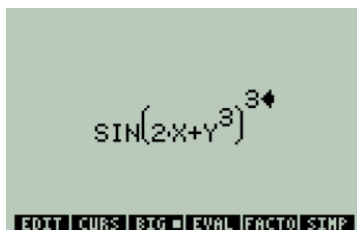
2) Pressione [SENO], [2], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X].



3) Pressione [SOMA], [ALPHA], [Y], [ELEVADO], [3], [DIREITA 3x], [ELEVADO], [3].



4) A função deverá ficar assim:



5) Pressione [ENTER].



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

6) Agora pressione [SHIFT ESQUERDO]; [4] para entrar em “CALC”.



7) Procure o comando **INTVX** e aperte “OK”.



8) O resultado será:



Observação: A flecha para a direita ao lado do resultado indica que o resultado não está sendo completamente mostrado na tela.

Questão 7: Calcular a integral definida da função

$$\int_0^5 \frac{2}{3} x^3 \cdot y \cdot e^{x^2+y^2} dx$$

1) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois [O] para selecionar a função "EQW".



2) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois [U] para inserir a integral.

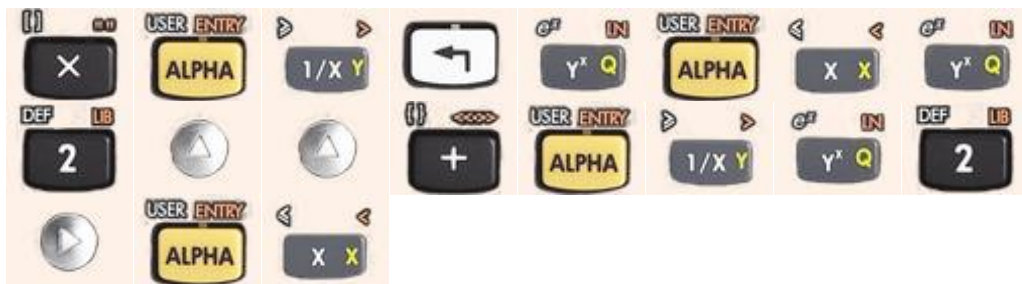


3) Pressione [0], [DIREITA], [5], [DIREITA], [2], [DIVIDIDO], [3], [CIMA 2x], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [3], [CIMA 2x].

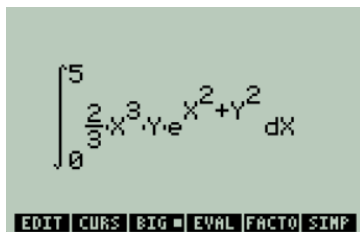
**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**



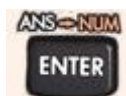
4) Pressione [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [Y], [SHIFT ESQUERDO], [e], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [2], [CIMA 2x], [SOMA], [ALPHA], [Y], [ELEVADO], [2], [DIREITA], [ALPHA], [X].



5) A função deverá ficar assim:



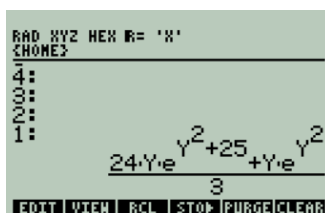
6) Pressione [ENTER].



7) Agora, você deve efetuar o comando EVAL para resolver a integral.



8) O resultado da integral será:

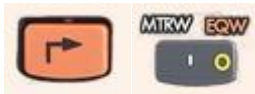


**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Questão 8: Determinar a integral definida

$$\int_0^2 x^3 \cdot \cos(2x^2) dx$$

1) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois [O] para selecionar a função "EQW".



2) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois [U] para inserir a integral.



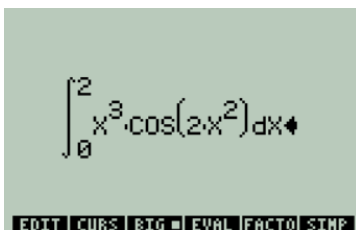
3) Pressione [0], [DIREITA], [2], [DIREITA], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [3], [CIMA 2x], [MULTIPLICAÇÃO], [COS].



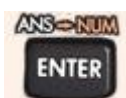
4) Pressione [2], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [2], [DIREITA], [ALPHA], [X]



5) A função deverá ficar assim:

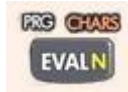


6) Pressione [ENTER].

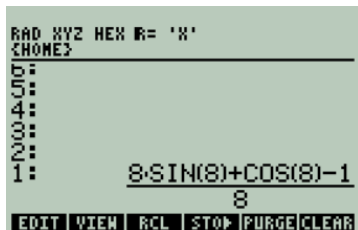


**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

7) Use o comando EVAL para resolver a integral.



8) O resultado da integral será:



Questão 9: Calcular a integral da função em $x = 2$:

$$\int \frac{2}{3} x^3 y e^{x^2+y^2} dx$$

1) Pressione [SHIFT DIREITO], [EQW], [2], [DIVIDIDO], [3], [DIREITA], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [3], [DIREITA].

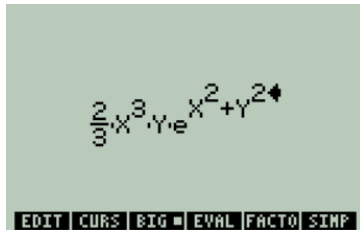


2) Pressione [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [Y], [SHIFT ESQUERDO], [e], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [2], [DIREITA], [SOMA], [ALPHA], [Y], [ELEVADO], [2].

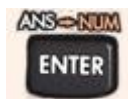


3) A função deverá ficar assim:

CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO



4) Pressione [ENTER].



5) Agora pressione [SHIFT ESQUERDO]; [4] para entrar em “CALC”.



6) Procure o comando **INTVX** e aperte “OK”.



7) O resultado será:



Agora devemos substituir o “x” pelo ponto específico dado, ou seja, devemos substituir o “x” por 2. Aperte F1 para editar a função e substitua todos os “x” por 2. Para substituir, aperte 5 vezes flecha para baixo, vá em cada “x” e pressione 2. Após fazer a substituição, selecione tudo clicando 5 vezes flecha para cima e clique em “EVAL”.



O resultado será:

CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO

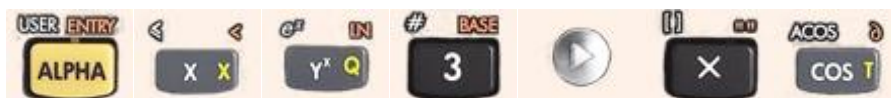


Questão 10: Calcular a integral da função $\int x^3 \cos 2x^2 dx$ para $x=3$.

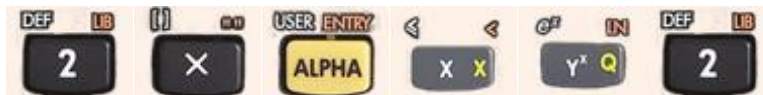
1) Pressione [SHIFT DIREITO] e depois "EQW" para entrar no editor de equações.



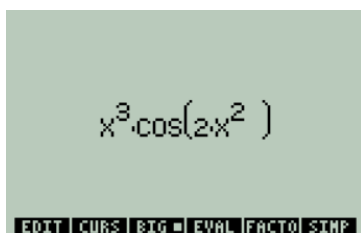
2) Pressione [ALPHA], [X], [ELEVADO], [3], [DIREITA], [MULTIPLICAÇÃO], [COS].



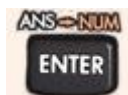
3) Pressione [2], [MULTIPLICAÇÃO], [ALPHA], [X], [ELEVADO], [2].



4) A função deverá ficar assim:



5) Pressione [ENTER].



6) Agora pressione [SHIFT ESQUERDO]; [4] para entrar em "CALC".



7) Procure o comando **INTVX** e aperte "OK".

**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**



8) O resultado será:



Observação: A flecha para a direita ao lado do resultado indica que o resultado não está sendo completamente mostrado na tela.

9) Para simplificar, pressione “EDIT”.



10) Com toda a função selecionada, pressione "SIMP".



Agora devemos substituir o “x” pelo ponto específico dado, ou seja, substituir o “x” por 3. Para fazer a substituição aperte flecha para baixo 4 vezes e vá em cada “x” e clique no número 3, após substituir todos os “x” aperte 6 vezes flecha para cima e clique em “EVAL”.



O resultado será:





**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

Resultados obtidos

A exploração das integrais por meio da calculadora gerou curiosidade e interesse dos alunos na disciplina de Cálculo II. Enquanto a professora desenvolveu os cálculos na sala de aula, manualmente, os alunos os desenvolveram por meio da calculadora HP 50G, sendo os resultados comparados e confirmados. De certa forma isso motivou os alunos na resolução de questões mais complexas. Os resultados obtidos, a partir dos questionários respondidos pelos alunos da referida disciplina, após o desenvolvimento das atividades, revelam que esse recurso pode auxiliar na resolução de integrais complexas e reduzir o tempo para obtenção de respostas. No entanto, esses alunos também mencionaram que é necessário continuar realizando os exercícios de forma manual, pois estes auxiliam no desenvolvimento do raciocínio matemático.

Os alunos ainda mencionaram que o tutorial proposto contém a sequência das teclas que devem ser inseridas e isso é relevante para aprender a manusear a calculadora, obtendo assim as respostas.

Por fim, concordamos com Gonçalves e Reis (2011) quando estes afirmam que é relevante a presença de ferramentas computacionais nas aulas de matemática. No entanto os autores salientam que não se devem abandonar outros recursos educacionais, uma vez que a ferramenta computacional sozinha não produz conhecimento.

Referências bibliográficas

GONÇALVES, Daniele Cristina; REIS, Frederico da Silva. **Aplicações das derivadas no cálculo I:** uma atividade investigativa aplicada à engenharia de produção utilizando o geogebra. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011.

REHFELDT, Márcia Jussara Hepp *et al.* *As formas de vida e os jogos de linguagem encontrados nas práticas profissionais e as implicações para o ensino de engenharia no Centro Universitário Univates*, 2014. In: Congresso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, 2014, Buenos Aires. Anais do Congresso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, 2014.



**CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS –
MESTRADO**

SCUCUGLIA, Ricardo. *A investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UEP, Rio Claro, 2006.