UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI – UNIVATES PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

O ESTUDO DOS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR MEIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

STUDY GRAPHICS OF SENO AND COSENE FUNCTIONS THROUGH GEOGEBRA SOFTWARE

Gilberto Augusto Araújo Muniz[1], Márcia Jussara Hepp Rehfeldt[2]

[1] Mestre em Ensino de Ciências Exatas – UNIVATES

gilberto.muniz@universo.univates.br

[2] Drª. em Informática na Educação – UNIVATES - mrehfeld@univates.br

Finalidade

Este produto educacional descreve um conjunto de atividades que têm a finalidade contribuir com o processo de aprendizagem sobre o comportamento dos gráficos das funções seno e cosseno, por meio da utilização de recursos do *software* GeoGebra. As atividades propostas são destinadas a estudantes tanto do Ensino Médio quanto do Superior.

Contextualização

Este produto educacional emerge como parte da prática utilizada na intervenção pedagógica realizada para a dissertação de Mestrado, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade do Vale do Taquari (Univates). Participaram da intervenção estudantes do primeiro semestre do curso superior em Engenharia Civil da Faculdade de Tecnologia de Valença, localizada, na cidade de Valença/BA. Esta prática justifica-se, pois, parte dos estudantes que ingressam no ensino superior, em especial, os de exatas, trazem dúvidas e questionamentos que comprometem, em alguns casos, a compressão dos conteúdos abordados nos componentes curriculares iniciais do curso, a exemplo de Cálculo Diferencial e Integral I, Geometria Analítica, Física I e Álgebra Linear.

Diante deste contexto, os componentes curriculares já mencionados configuram-se como uma barreira a ser trasposta inicialmente pelos estudantes que ingressam, em especial, nos cursos na área de Ciências Exatas, pois estes servem como base para muitas áreas de aplicação. A compreensão dos conteúdos estudados em Cálculo Diferencial e Integral I, Geometria Analítica, Física I e Álgebra Linear servem como ferramentas iniciais utilizadas em diversas áreas durante todo o curso de engenharia civil.

As dificuldades estão diretamente relacionadas aos baixos rendimentos dos estudantes dos componentes curriculares citados e as altas taxas de evasão no curso. Sendo assim, buscar alternativas metodológicas que favoreçam a aprendizagem dos conteúdos considerados conhecimentos prévios e utilizando recursos tecnológicos que possibilitem a exploração dos conceitos e conteúdos proporcionando o incentivo e o fortalecimento da produção intelectual/científica aplicada diretamente à prática em sala de aula de ensino de matemática pode modificar o contexto exposto.

A intenção deste produto é apresentar uma proposta pedagógica baseada em atividades que contribuam e favoreçam a compreensão do estudante sobre o comportamento gráfico das funções seno e cosseno utilizando os recursos tecnológicos presentes no *software* GeoGebra.

Para tanto, buscamos aporte teórico em Borba (2001), precursor na utilização de tecnologia em sala de aula e suas contribuições, em Gravina (1999), que possibilitou diversos olhares sobre vários *softwares* de matemática e suas diferentes abordagens, bem como em Moreira (1999, 2011) que possibilitou uma visão mais abrangente sobre aspectos relacionados diretamente à aprendizagem e à construção do conhecimento. Ainda nos apoiamos em Fiorentini (2006), que fala sobre os recursos teóricos e metodológicos utilizados na pesquisa em educação matemática, entre outros que colaboraram com a construção da proposta metodológica utilizada na intervenção pedagógica.

Escolhemos o *software* GeoGebra por três motivos: a) por ser um *software* que dispõe de recursos em diversas áreas da matemática de forma integrada; b) possibilita sua utilização em várias áreas como: geometria, geometria analítica, cálculo,

estatística entre outras, foi desenvolvido sob a GNU[1], ou seja, é um *software* gratuito bem como as aplicações desenvolvidas a partir dele, c) possui múltiplas plataformas de utilização (*desktop, on-line* e apps[2]) que favorecem a sua utilização em diversos contextos educacionais.

Sendo assim, as atividades desenvolvidas neste trabalho seguem de acordo com a ordem apresentada a seguir:

1) Verificação dos conhecimentos prévios dos alunos por meio da aplicação de um questionário inicial com questões sobre relações trigonométricas no triângulo retângulo, círculo trigonométrico, domínio, período e imagem das funções seno e cosseno, bem como seu crescimento e decrescimento;

2) Aulas autoexplicativas como base em sequências de atividades entregues impressas a cada estudante ou em duplas, explorando o comportamento gráfico das funções seno e cosseno baseando-se na alteração de coeficientes de forma autodirigida;

3) Realização de atividades que exploram o comportamento gráfico das funções seno e cosseno utilizando o *software* GeoGebra de forma gradativa baseadas na relação entre a modificação dos parâmetros e sua relação com o comportamento gráfico da função;

4) As atividades da seção “Para Experimentar” foram elaboradas com o objetivo de validar os conceitos e conteúdos estudados, sem a utilização do *software*;

5) Verificação do grau de satisfação dos estudantes, sugestões e alterações em relação às atividades desenvolvidas pelos estudantes.

[1] GNU *General Public License*.
[2] Para ser utilizados off-line em computador ou notebook, utilizado direto da internet sem a necessidade de instalação e utilizado em equipamentos mobile (smartphone ou tablete)

Objetivo

Apresentar uma proposta de atividades que possa contribuir com o ensino das funções seno e cosseno.

Detalhamento

O estudo foi desenvolvido no primeiro semestre de 2019, com sete estudantes ingressantes, no curso de Bacharelado em Engenharia Civil, da Faculdade de Tecnologia de Valença, em Valença/BA.

As atividades deste trabalho foram realizadas com a utilização do material didático, utilizando o *software* GeoGebra como apoio tecnológico, durante as atividades realizadas no laboratório de informática.

Na sequência de atividades contidas nesta proposta, as aulas foram divididas em seis encontros. Cada um dos encontros corresponde a 2 aulas de 50 minutos cada (1h e 40min). No Quadro 1 são apresentados os conteúdos, recursos, objetivos e as atividades desenvolvidas.

Quadro 1 – Atividades realizadas durante a intervenção pedagógica

Encontro	Atividade desenvolvida	Recursos	Objetivos
No 1º encontro	• Apresentação da Proposta pedagógica, seu objetivo e finalidade bem como os materiais utilizados. • Questionário inicial destinado a coletar informações sobre os conhecimentos prévios (Apêndice A).	Data *show* *Mouse point* Material didático sobre os conteúdos iniciais.	• Entender a função da intervenção pedagógica e conhecer os materiais que serão utilizados. Identificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o triângulo retângulo e seus elementos, as relações trigonométricas seno e cosseno, a localização dos ângulos, catetos oposto, adjacente e hipotenusa, o círculo trigonométrico, a

			localização dos valores dos senos e cossenos e quadrantes no círculo. Identificar se os estudantes conseguem encontrar os valores do conjunto imagem, período e crescimento e decrescimento das funções seno e cosseno apresentadas. Listar as dificuldades relacionadas a estes conteúdos.
Duração: 1:40 (Uma hora e quarenta minutos)			
No 2º encontro	As atividades realizadas pelos estudantes neste encontro baseiam-se no estudo das características da função seno e o comportamento do gráfico, em específico, da variação do conjunto imagem, utilizando as funcionalidades e recursos do *software* GeoGebra (Apêndice B).	*Data show* *Mouse point* Material didático sobre os conteúdos e orientados com os objetivos do encontro.	Verificar se os estudantes identificam o domínio, período e imagem da função seno relacionados à forma geral $f(x) = Asen(x)\ e\ g(x) = Acos(x)$ usando variações a partir das atividades propostas.
Duração: 1:40 (Uma hora e quarenta minutos)			
No 3º encontro	As atividades realizadas pelos estudantes neste encontro baseiam-se no estudo das características da função seno e o comportamento do gráfico em específico da variação do conjunto imagem, utilizando as funcionalidades e recursos do *software* GeoGebra (Apêndice C).	*Data show* *Mouse point* Material didático sobre os conteúdos e orientados com os objetivos do encontro.	Verificar se os estudantes identificam o domínio, período e imagem da função seno relacionados à forma geral $f(x) = Asen(x) + B\ e\ g(x) = Acos(x) + B$ usando variações a partir das atividades propostas.

Duração: 1:40 (Uma hora e quarenta minutos)			
No 4º encontro	As atividades realizadas pelos estudantes neste encontro baseiam-se no estudo das características das funções seno e cosseno e o comportamento do gráfico em específico da variação do conjunto imagem, período, pontos de máximo e mínimo utilizando as funcionalidades e recursos do *software* GeoGebra (Apêndice D).	*Data show* *Mouse point* Material didático sobre os conteúdos e orientados com os objetivos do encontro.	Verificar se os estudantes identificam a partir das atividades desenvolvidas o domínio, período e imagem, pontos de máximo e mínimo das funções seno e cosseno relacionados às variações dos coeficientes na geral $f(x) = Asen(Cx) \pm B$ $e\ f(x) = Acos(Cx) \pm B$.
Duração: Duração: 1:40 (Uma hora e quarenta minutos)			
No 5º encontro	As atividades realizadas pelos estudantes neste encontro baseiam-se no estudo das características das funções seno e cosseno e o comportamento do gráfico em específico da variação do crescimento e decrescimento utilizando os recursos do *software* GeoGebra (Apêndice E).	*Data show* *Mouse point* Material didático sobre os conteúdos e orientados com os objetivos do encontro.	Verificar se os estudantes identificam o domínio, período e imagem, crescimento e decrescimento das funções seno e cosseno relacionados às variações dos coeficientes na forma geral $f(x) = Asen(Cx + D) \pm B$ $f(x) =$ $e\ Acos(Cx + D) \pm B$.
Duração: 1:40 (Uma hora e quarenta minutos)			
No 6º encontro	As atividades realizadas pelos estudantes neste encontro refletem as impressões, avaliações e sugestões sobre o *software* GeoGebra, as atividades realizadas utilizando o *software*, em relação à importância dos conteúdos abordados, avaliam as	*Data show* *Mouse point* Material didático voltado para o objetivo do encontro.	Identificar as impressões dos estudantes sobre as atividades realizadas, a forma como o *software* foi utilizado, a importância do conteúdo abordado e suas contribuições e

	atividades, críticas, sugestões e modificações na proposta (Apêndice F).		melhorias para a proposta.
Duração: 1:40 (Uma hora e quarenta minutos)			

Fonte: Dos Autores, 2019.

Descrevemos todos os passos e etapas que desenvolvemos durante a intervenção pedagógica. Como a pesquisa foi realizada durante o primeiro semestre 2019 em uma das turmas do primeiro autor deste produto educacional, e a proposta de participação apresentada desde o início do semestre, não houve a necessidade de um evento para a apresentação, apenas a leitura, com explicações sobre a postura do professor pesquisador durante a intervenção pedagógica.

Em seguida, deu-se início a resolução das primeiras atividades (Apêndice A). O objetivo destas atividades iniciais foi conhecer quais conceitos, fórmulas, definições e elementos os estudantes traziam do ensino médio sobre o triângulo retângulo e seus elementos, as relações trigonométricas seno e cosseno, a localização dos ângulos, catetos oposto, adjacente e hipotenusa, o círculo trigonométrico, a localização dos valores dos senos e cossenos e quadrantes no círculo, a identificação dos valores do conjunto imagem, período e crescimento e decrescimento das funções seno e cosseno apresentadas, bem como as dificuldades relacionadas a estes conteúdos listados. Isso foi relevante para que o professor tenha documentado quais conhecimentos prévios os estudantes possuíam ao iniciarem as atividades.

Iniciamos o segundo encontro exibindo e lendo as informações contidas nos *slides* com os objetivos, recursos disponíveis e os conteúdos abordados durante este encontro e, em seguida, os estudantes começaram a realizar a sequência de atividades que teve como objetivo o estudo de conceitos: domínio, período e imagem utilizando as características das funções seno relacionadas à forma geral $f(x) = Asen(x)$. Os conceitos foram sendo explorados pelos estudantes através de uma sequência de atividades (Apêndice B), baseada em elementos explicitados durante o enunciado de cada atividade. Os estudantes utilizaram o *software* GeoGebra, em seguida, registraram no material, suas observações por comparação, intuição ou percepção baseadas em conhecimentos prévios e nas respostas gráficas entregues

pelo *software.* Durante a realização das atividades os estudantes puderam realizar consultas a materiais externos, bem como aos colegas.

O terceiro encontro começou com a exibição de *slides* dos objetivos e conteúdos abordados que exploraram as características da função cosseno relacionadas à forma geral $f(x) = Acos(x) \pm B$ (Apêndice C), em especial, a translação relacionada à modificação do coeficiente B, à identificação do domínio e imagem, bem como à relação entre os pontos de máximo e mínimos e à imagem nas funções utilizadas nas atividades.

O quarto encontro também teve início com a exibição dos *slides* apresentando os objetivos e conteúdos abordados neste encontro. A atividade inicial apresentou o recurso do *software* GeoGebra que permite a utilização de parâmetros modificáveis facilmente pelo usuário. As atividades a seguir foram baseadas nas funções $f(x) = sen(x)\ e\ g(x) = Asen(Cx) + B$ e foi explorada a modificação do coeficiente A e as suas implicações quando comparados os comportamentos dos gráficos das funções em si. Em seguida, estudamos as alterações, quando simultaneamente os coeficientes A e C foram alterados e as implicações que estas alterações causaram no comportamento dos gráficos destas funções. As respostas referentes às atividades foram devidamente registradas pelos estudantes no questionário (Apêndice D).

Já no quinto encontro (Apêndice E), iniciamos a aula exibindo em *slides,* os objetivos, conteúdos e agradecimentos. A atividade inicial, realizada pelos estudantes, explorou a comparação entre as funções $f(x) = cos(x)\ e\ g(x) = Asen(Cx + D) + B$ com os valores dos parâmetros incialmente A=1, B=0, C=1 e D=0 assim determinados. Nesta atividade, os estudantes exploraram quais alterações ocorrem com o gráfico de uma das curvas quando os parâmetros são alterados em relação a outra. Estas alterações foram potencializadas pelo movimento produzido pelo recurso do *software* que gera animações, a partir de um comando simples.

Estas atividades finais tiveram como foco explorar a capacidade de argumentação do estudante ao explicar o que ocorreu com o comportamento de cada função, segundo a percepção das animações, os conhecimentos prévios e todas as atividades já exploradas anteriormente.

O último encontro foi reservado para os participantes responderem um questionário (Apêndice F) com as suas impressões sobre o *software*, sua a utilização nas atividades, funcionalidades, materiais em relação aos conteúdos abordados e sua importância, a abordagem utilizando sequências de atividades, bem como deixar sugestões, críticas e melhorias sobre a prática ou/e o material utilizado.

Esse questionário (Apêndice F) teve como objetivo secundário perceber possíveis falhas, sugestões de alterações e indicações sobre o produto educacional desenvolvido a partir da pesquisa.

Dentro deste contexto, necessitamos relatar que, durante o terceiro e quarto encontros, estávamos muito apreensivos, nervosos, preocupados e confusos, não conseguíamos aproveitar o momento, sempre medíamos as palavras, sem saber como mediar sem interferir, mas sempre atentos e prontos para colaborar no momento em que uma dupla ou o trio solicitava.

À medida que as atividades avançavam, as dúvidas, em alguns momentos, foram sobre o conteúdo, o *software* ou de interpretação, mas, aos poucos, a angústia foi passando e a normalidade voltou. Por isso remetemo-nos ao mestre D'Ambrosio (2004, p. 84) que afirma que "ninguém poderá sem um bom professor sem dedicação, preocupação com o próximo e sem amor num sentido amplo. O professor passa próximo àquilo que ninguém pode tirar de alguém, que é o conhecimento".

Mesmo durante este turbilhão de emoções, corroboramos com D'Ambrosio (2004, p. 94) quando afirma que "o professor está permanentemente num processo de busca de aquisição de novos conhecimentos e de entender e conhecer os alunos. Portanto, as figuras de professor e do pesquisador são indissolúveis".

Desta forma, a postura de observação participante favoreceu a coleta de dados e o clima durante a intervenção pedagógica, pois buscamos ao máximo não interferir nas respostas diretamente, mas, ao mesmo tempo, incentivamos a releitura, a interação com *software*, a discussão com os colegas e a observação de todos os detalhes. A seguir apresentamos os resultados obtidos.

Resultados obtidos

Ao concluir este trabalho, percebemos que um logo caminho ainda há de ser trilhado para que a utilização de tecnologias em sala de aula em diferentes contextos educacionais esteja consolidada, não como algo diferente ou inovador, e sim como indissociável. Consideramos a proposta apresentada como uma opção alternativa à exposição tradicional de conteúdos e resolução de exercícios, pois a sua aplicação demostrou-se promissora obtendo resultados relevantes.

A utilização do *software* GeoGebra como apoio na resolução de atividades que estimulam a percepção visual dos estudantes sobre as características gráficas do comportamento das funções exploradas foi relevante. Seu ambiente gráfico e e as ferramentas permitem que a alteração de parâmetros e sua visualização instantânea agucem no estudante a analisar o porquê e o que causou a mudança.

Além de perceberem como as alterações modificavam o comportamento da função, a utilização do *software,* as atividades e o ambiente do laboratório aumentaram a predisposição dos alunos em realizar e concluir as atividades, bem como a frequência e desempenho.

Ressaltamos, ainda, que a evolução gradativa de respostas assertivas e durante a intervenção, bem como o desempenho dos estudantes devem ser levadas em consideração durante a composição da avaliação de desempenho, bem como as atividades que compõem a seção “Para Experimentar”.

Em especial, esta seção permitiu que verificássemos se os estudantes, após algumas atividades realizadas anteriormente, seriam capazes de escrever a expressão analítica da função, sem o auxílio do *software,* baseando-se nos conhecimentos prévios já abordados e explorados. Analisando o desempenho dos estudantes utilizando as ferramentas, critérios e o processo de avaliação, percebemos o crescimento no desempenho das duplas e do grupo baseando-se no acompanhamento realizado através do questionário (Apêndice H) e número de acertos verificados na correção das atividades.

Notamos, ainda, que os estudantes avaliaram as atividades como interessantes e diferentes das normalmente realizadas e informaram que continuariam utilizando o

software em outros componentes curriculares, como ambiente virtual potencialmente facilitador.

Por fim, foi possível refletir sobre a importância da participação e postura do professor pesquisador, bem como a coragem em propor uma abordagem alternativa, apoiando-se no uso de tecnologia para o estudo do comportamento gráfico das funções seno e cosseno.

Referências

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1998.

FIORENTINI, Dario. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GRAVINA, Maria A.; SANTAROSA, Lucila M. C.A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **Informática na educação: teoria e prática**, Porto Alegre, v.1, n.2, p. 73-88, abr. 1999. Disponível em: < https://lume.ufrgs.br/handle/10183/20962>. Acesso em: 29 set. 2018.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias da aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

_____, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

APÊNDICE A

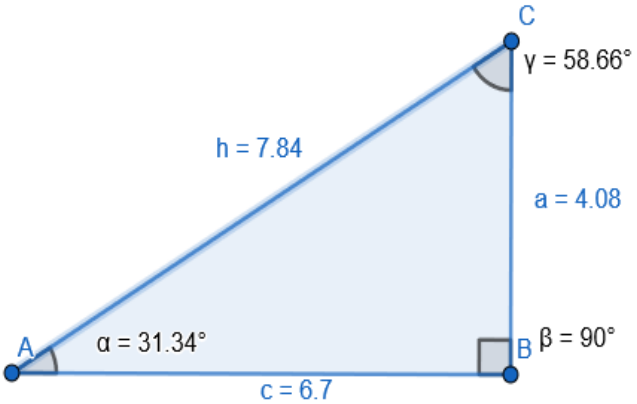
Nome:_____

1 - Para começar a conversa:

a) Você já estudou trigonometria em séries anteriores?
( ) Sim, qual?_____ ( ) Não
b) Você sabe identificar se um triângulo é retângulo?
( ) Sim, por qual característica?_____ ( ) Não
c) Você conhece alguma relação trigonométrica no triângulo retângulo?
( ) Sim, qual relação trigonométrica?_____ ( ) Não
d) Você consegue identificar um cateto adjacente em um triângulo retângulo?
e) ( ) Sim ( ) Não
f) Você consegue identificar um cateto oposto em um triângulo retângulo?
( ) Sim ( ) Não
g) E a hipotenusa, consegue identificá-la em um triângulo retângulo?
( ) Sim ( ) Não

2 – Vamos à prática: Identifique os elementos no triângulo retângulo a seguir.

Figura – 1: Triângulo retângulo A



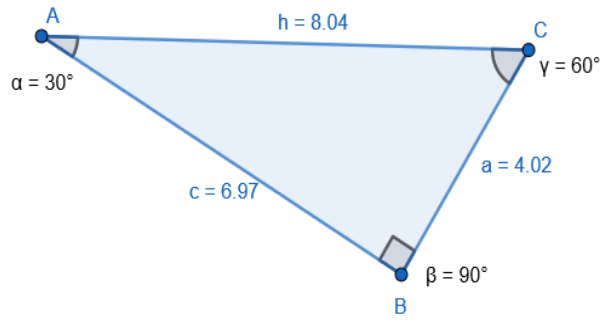
Os segmentos AB = c, AC = h e CB = a tem suas medidas em centímetros representadas na Figura 1.

Fonte: Dos Autores, 2019.

a) Qual o valor do ângulo (Grau) α:_____
b) Qual o valor do cateto oposto ao ângulo (Grau) α:_____
c) Qual o valor do ângulo (Grau) α:_____
d) Qual o valor do cosseno do ângulo α:_____
e) Qual o valor do seno do ângulo α:_____

3 – Vamos à prática: Identifique os elementos no triângulo retângulo a seguir.

Figura – 2: Triângulo retângulo B



Os segmentos AB = c, AC = h e CB = a tem suas medidas em centímetros representadas na Figura 2.

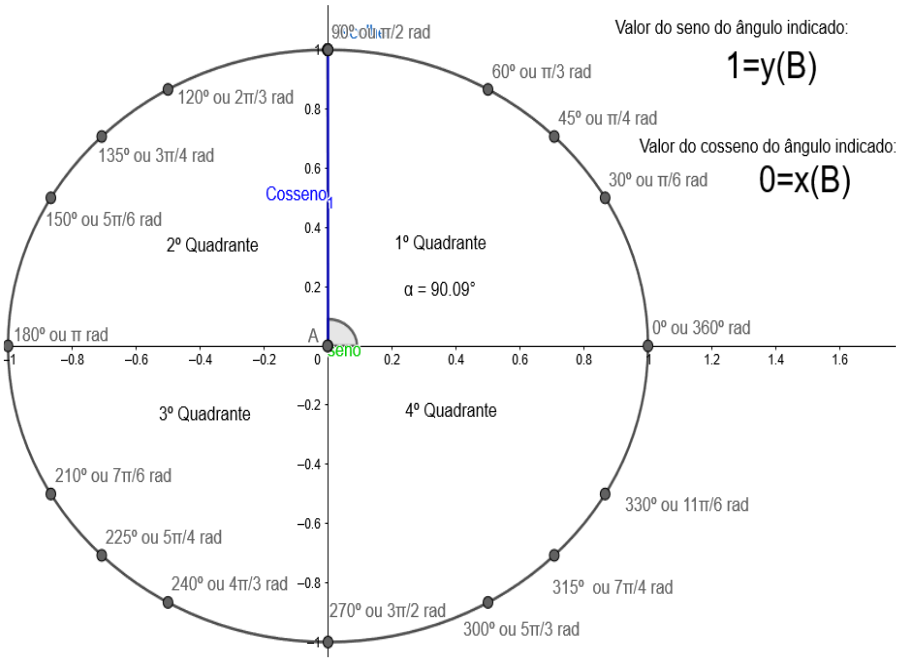
Fonte: Dos Autores, 2019.

a) Qual o valor do ângulo (Grau) γ:_____
b) Qual o valor do cateto oposto ao ângulo (Grau) γ:_____
c) Qual o valor do ângulo (Grau) γ:_____
d) Qual o valor do cosseno do ângulo γ:_____
e) Qual o valor do seno do ângulo γ:_____

EM RELAÇÃO AO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

O círculo trigonométrico possui centro coincidente com a origem (0,0) do sistema de coordenadas cartesiana com raio 1. É dividido em quatro quadrantes com 90º cada e sentido anti-horário de contagem dos arcos. Como podemos ver na Figura 3.

Figura 3 – Círculo Trigonométrico.



Fonte: Dos Autores, 2019.

Agora responda:

4 – Os ângulos do 1 º quadrante estão entre:

(a) $0° \; e \; 90° \;\; ou \; 0 \; e \; \frac{\pi}{2} rad$
(b) $90° \; e \; 180° \;\; ou \; \frac{\pi}{2} \; e \; \pi \; rad$
(c) $180° \; e \; 270° \;\; ou \; \pi \; e \; \frac{3\pi}{2} rad$
(d) $270° \; e \; 360° \;\; ou \; \frac{3\pi}{2} \; e \; 2\pi \; rad$
(e) $0° \; e \; 360° \;\; ou \; 0 \; e \; 2\pi \; rad$

5- Os ângulos do 3 º quadrante estão entre:

(a) $0° \; e \; 90° \;\; ou \; 0 \; e \; \frac{\pi}{2} rad$
(b) $90° \; e \; 180° \;\; ou \; \frac{\pi}{2} \; e \; \pi \; rad$
(c) $180° \; e \; 270° \;\; ou \; \pi \; e \; \frac{3\pi}{2} rad$
(d) $270° \; e \; 360° \;\; ou \; \frac{3\pi}{2} \; e \; 2\pi \; rad$
(e) $0° \; e \; 360° \;\; ou \; 0 \; e \; 2\pi \; rad$

6 – Usando sua calculadora, você pode completar o quadro 1 a seguir:

Quadro 1: Valores do seno, cosseno e quadrante de alguns ângulos.

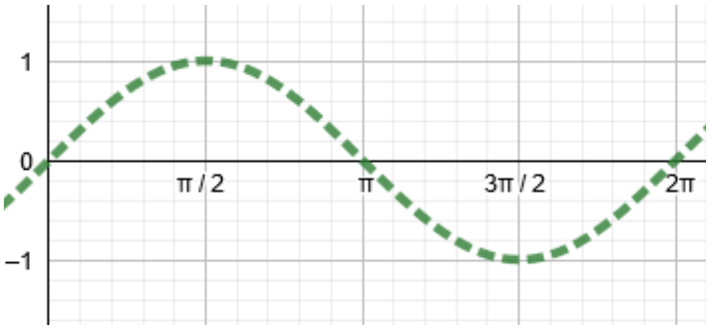
Ângulo	35º	135º						
Seno								
Cosseno								
Quadrante								

Fonte: Dos Autores, 2019.

EM RELAÇÃO AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO

4 - Em relação ao gráfico da função $f(x) = sen(x)$ representada na Figura 4 responda.

Figura 4: Senoide.

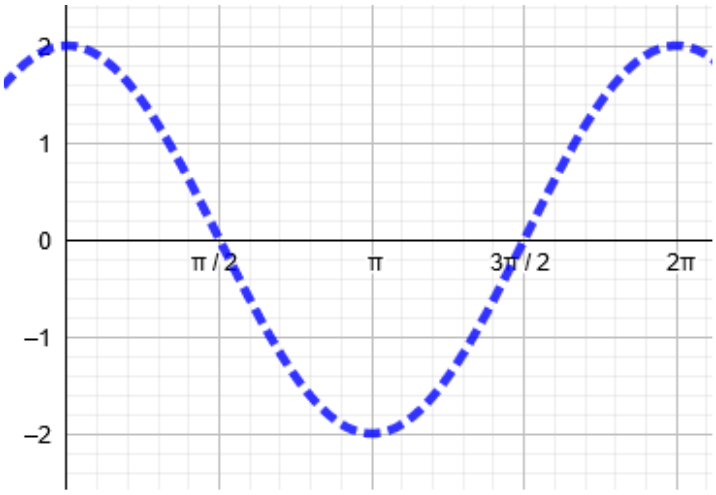


Fonte: Dos Autores, 2019.

a) A **função seno** é **crescente** em quais quadrantes?
   (a) 1 º e 2 º quadrantes
   (b) 2 º e 3 º quadrantes
   (c) 1 º e 3 º quadrantes
   (d) 3 º e 4 º quadrantes
   (e) 1 º e 4 º quadrantes
b) A **função seno** é **decrescente** em quais quadrantes?
   (a) 1º e 2º quadrantes
   (b) 2º e 3º quadrantes
   (c) 1º e 3º quadrantes
   (d) 3º e 4º quadrantes
   (e) 1º e 4º quadrantes
c) O **Conjunto Imagem** dessa função está definido entre:
   (a) [-1,0]
   (b) [0,1]
   (c) [-1,1]
   (d) [-1,2]
   (e) [-2,1]
d) Qual o **período** dessa função.
   (a) De 0º a 45º
   (b) De 0º a 90º
   (c) De 0º a 180º
   (d) De 0º a 270º
   (e) De 0º a 360º

5- Em relação ao gráfico da função $f(x) = 2cos(x)$ representada na Figura 5 responda.

Figura 5: Cossenoide.



Fonte: Dos Autores, 2019.

a) A **função cosseno** é **crescente** em quais quadrantes?

(a) 1 º e 2 º quadrantes
(b) 2 º e 3 º quadrantes
(c) 1 º e 3 º quadrantes
(d) 3 º e 4 º quadrantes
(e) 1 º e 4 º quadrantes

b) A **função cosseno** é **decrescente** em quais quadrantes?

(a) 1 º e 2 º quadrantes
(b) 2 º e 3 º quadrantes
(c) 1 º e 3 º quadrantes
(d) 3 º e 4 º quadrantes
(e) 1 º e 4 º quadrantes

c) O **Conjunto Imagem** dessa função está definido entre:
(a) [-2,0]
(b) [0,1]
(c) [-2,2]
(d) [-1,3]
(e) [0,2]

d) Qual o **período** dessa função.
(a) De 0º a 45º
(b) De 0º a 90º
(c) De 0º a 180º

(d) De 0º a 270º
(e) De 0º a 360º

APÊNDICE B

Nome:_____

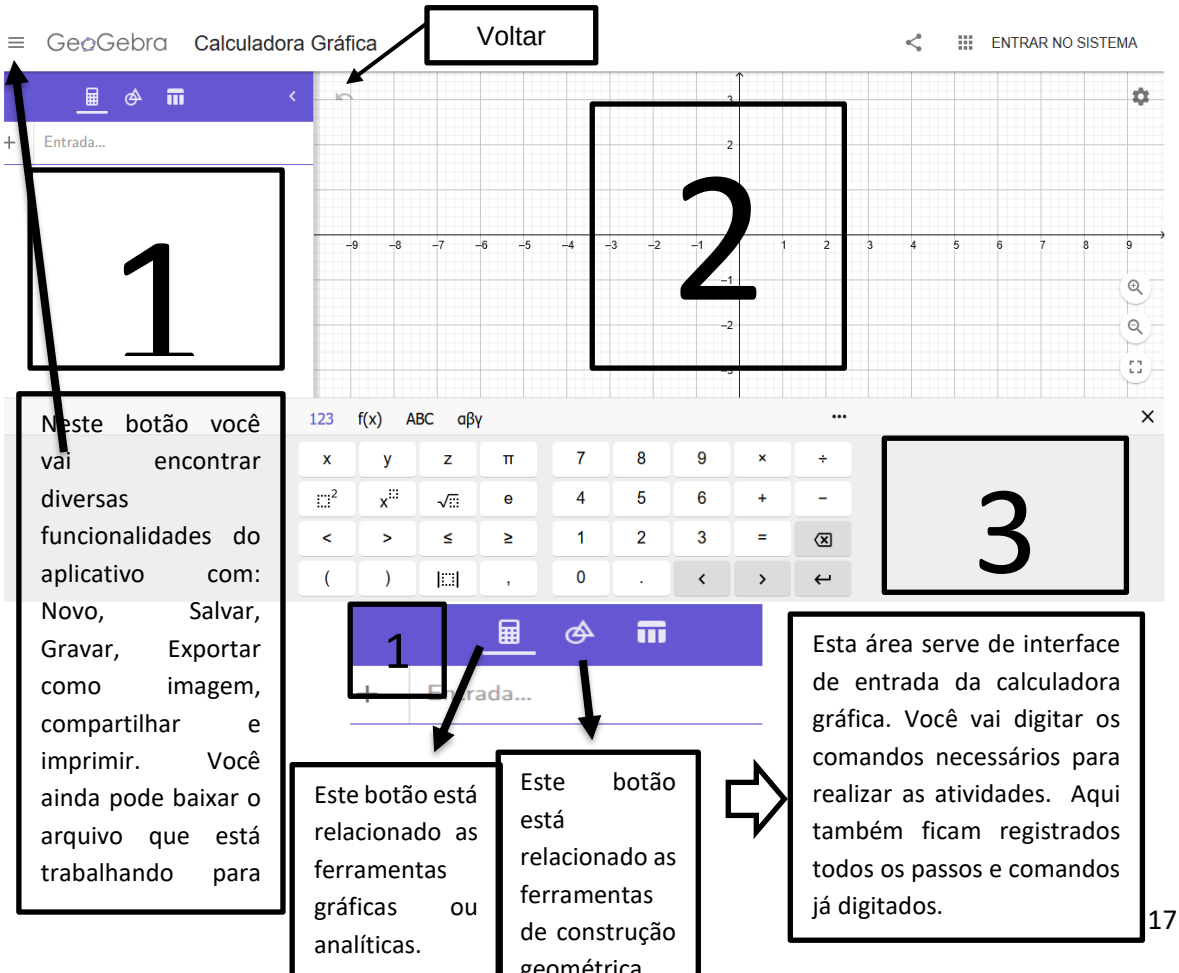
Atividades do 2º Encontro: Função seno e cosseno: explorando a amplitude, ponto de máximo e mínimo por meio do *software* GeoGebra 1ª parte

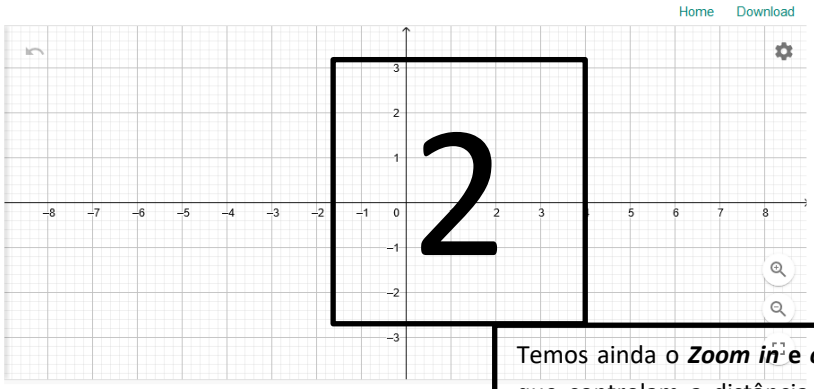
Orientação:

Caso o computador/dispositivo que está utilizando no momento não possua o *Software* GeoGebra você pode baixá-lo em https://www.SoftwareGeoGebra.org/download e instalá-lo, se preferir pode utilizá-lo *on-line* no endereço https://www.geogebra.org/graphing (via navegador) ou instalar as *versões Graphing Calc* para androide (Google Play) ou IOS (Apple Store) em seu *smartphone* ou *tablet.*

Vamos começar! Devemos explorar visualmente e nos familiarizar com o *layout* do *Software* GeoGebra que tem a aparência *on-line* representada na Figura 1.

Figura 1 – Interface gráfica do *Software* Geogebra *on-line*.

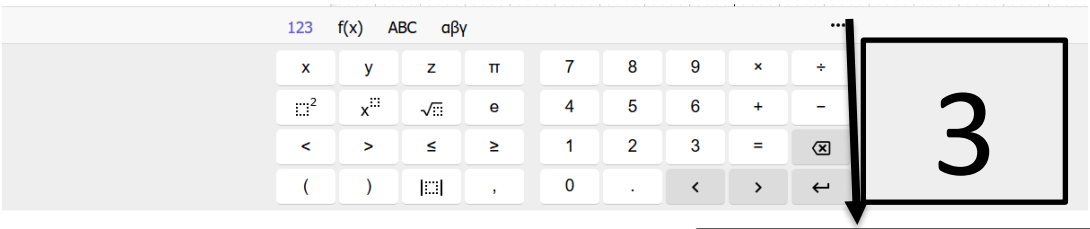




Esta área serve como **interface** de saída gráfica. Aqui você vai visualizar os comandos.

Atenção para 4 botões. O 1º, no canto superior de **configurações** permite que altere, por exemplo, a malha utilizada entre outras configurações.

Temos ainda o ***Zoom in*** e ***out*** que controlam a distância de visualização. Também tem o botão de **tela cheia** que expande para toda a tela o ambiente do aplicativo.



São apresentadas diversas funcionalidades relacionas a expressões mais utilizadas como: **potência, raiz, pi,** entre outras.

Clicando nesses três pontos, mais opções irão aparecer relacionadas a diversas áreas da **matemática** que ao serem selecionadas estarão disponíveis para uso, bem como um auxílio sobre as funções.

Fonte: Dos Autores, usando o *Software* GeoGebra em https://www.geogebra.org/graphing.

Agora que vimos onde estão localizadas algumas ferramentas do *software* GeoGebra *on-line*, vamos iniciar nossa primeira atividade do estudo do comportamento do gráfico das funções seno e cosseno.

Atenção: Todas as atividades têm como referência o comportamento dos gráficos das funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ tendo, respectivamente, as formas algébricas $f(x) = Asen(x)$ e $g(x) = Acos(x)$, sendo A o coeficiente estudado nas atividades.

Atividade 01 - Utilizando a interface de entrada, digite as seguintes funções, uma de cada vez, na ordem indicada$f(x) = sen(x); g(x) = 2sen(x) e\ h(x) = 3sen(x)$, utilizando o mesmo plano cartesiano (mesma tela). Três gráficos aparecerão na janela gráfica. Com base nestes gráficos, responda as perguntas indicadas, sabendo que a função seno tem forma algébrica indicada como: $f(x) = Asen(x)$.

a) Encontre o valor dos coeficientes **A** em cada uma das funções e complete o quadro 1.
Quadro1: Valores dos coeficientes das funções indicadas.

Função Seno	Valor do coeficiente **A** em cada uma das funções indicadas **é igual a**
$f(x) = sen(x)$	
$g(x) = 2sen(x)$	
$h(x) = 3sen(x)$	

Fonte: Dos Autores, 2019.

b) Qual a principal alteração percebida no comportamento deles gerados pelo software, além da cor de cada um deles:
b.1) O comportamento do gráfico repete-se várias vezes à direita e à esquerda da origem (0,0)?
( ) Sim ( ) Não
b.2) Com relação ao eixo x, todos os gráficos se comportam da mesma forma?
( ) Sim ( ) Não
b.3) Baseando-se nestas informações, podemos intuir que existe um padrão de repetição no comportamento destes gráficos.
( ) Sim , explique_____
_____
( ) Não, explique_____
_____

c) Observando os valores do coeficiente A em cada uma das funções você percebeu se houve modificação no:
No **domínio** de cada uma das funções $f(x), g(x)\ e\ h(x)$?

( ) Sim ou ( ) Não, explique.

_____

No **período** de cada uma das funções $f(x), g(x)\ e\ h(x)$?
( ) Sim ou ( ) Não, explique.

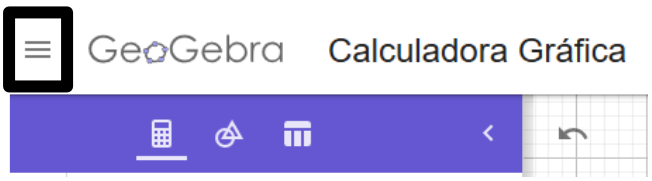
_____

Na **imagem** de cada uma das funções $f(x), g(x)\ e\ h(x)$?
( ) Sim ou ( ) Não, explique.

_____

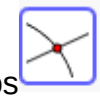
Com o objetivo de proteger as atividades já desenvolvidas contra problemas como falta de energia ou falha de conexão, indicamos que você salve as atividades sempre que indicado ou quando sinta a necessidade. Para isso, você deve recorrer ao procedimento a seguir.

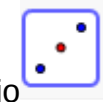
Figura 2 – Salvar as atividades realizadas.



Fonte: Dos Autores, usando o *software* GeoGebra em https://www.geogebra.org/graphing/, 2019.

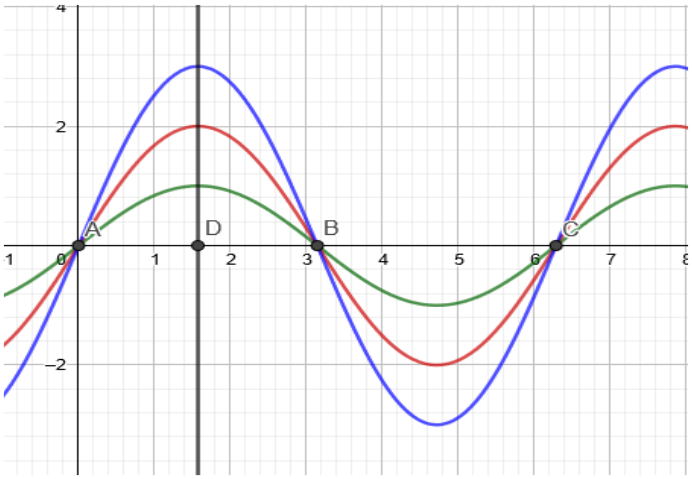
Para salvar, leve o cursor ao **menu principal**, escolha **gravar** e **salve** o arquivo em seu computador em uma pasta pré-escolhida como indicado na Figura 2. Note que os arquivos são identificados pela extensão do GeoGebra (.ggb). Em seguida, **volte no menu principal** e peça um **novo arquivo**.

Atividade 2 - Utilizando o botão interseção de dois objetos  marque os seguintes pontos A=(0,0), B=(3,14;0) e C=(6,28;0) sob o eixo x.

Encontre o **ponto médio** entre os pontos A e B do eixo x utilizando o botão ponto médio  , em seguida, utilizando o botão reta perpendicular , trace uma **reta perpendicular** que passe pelo ponto médio entre A e B e eixo x.

A Figura 3 pode ajudar a compreender o que foi solicitado. Agora você deve realizar os próximos passos e analisar os gráficos encontrados. Não esqueça de responder aos questionamentos!

Figura 3 – Reta perpendicular ao ponto médio entre A e B e o eixo x



Fonte: Dos Autores, usando o software GeoGebra em https://www.geogebra.org/graphing

2019.

a) É possível marcarmos um **ponto de interseção** entre a reta perpendicular entre A e B e o ponto mais alto em cada uma destas funções dentro deste intervalo?
   ( ) Sim
   ( ) Não
b) Se é possível, marque os três pontos e escreva as coordenadas dos mesmos no quadro 2:
   Quadro 2 Coordenadas dos pontos de interseção.

Para a função	Coordenadas do ponto de interseção (x, y)
f(x)=sen(x)	(,)
g(x)=2sen(x)	(,)
h(x)=3sen(x)	(,)

   Fonte: Dos Autores, 2018.
c) Podemos afirmar que este ponto é o **ponto de máximo** que existe dentro do intervalo entre os pontos A e B para cada uma das funções?
   ( ) Sim
   ( ) Não
d) Usando as informações do quadro 2, complete o quadro 3.
   Quadro 3: Valores dos coeficientes e coordenadas dos pontos de interseção.

Para a função	Valor do coeficiente **A** na forma genérica f(x)=Asen(x)	Coordenadas do ponto de interseção (x, y)
f(x)=sen(x)		(,)
g(x)=2sen(x)		(,)
h(x)=3sen(x)		(,)

Fonte: Dos Autores, 2019.

e) Explique a relação entre o valor do coeficiente **A** na forma f(x)=Asen(x) e o valor de cada coordenada **y** em cada um dos **pontos de interseção** encontrados para cada **uma das funções**.
Quando a função foi f(x)=sen(x), o valor de A=____ e a coordenada **y** do ponto de interseção é _____
Quando a função foi f(x)=2sen(x), o valor de A=____ e a coordenada **y** do ponto de interseção é _____
Quando a função foi f(x)=3sen(x), o valor de A=____ e a coordenada **y** do ponto de interseção é _____

f) De forma geral, você concorda com a afirmação a seguir?
As coordenadas do **ponto de máximo** de uma função seno estão relacionadas ao coeficiente **A** na forma genérica da função f(x)=Asen(x).
Concordo plenamente, explique:
_____
_____
Concordo parcialmente, explique:
_____
_____
Discordo, explique:
_____
_____

g) Seguindo um raciocínio análogo, você pode encontrar o **ponto de mínimo** de cada uma das funções utilizando o coeficiente **A** na forma genérica da função f(x)=Asen(x).?
( ) Sim, explique_____
_____
( ) Não, explique_____
_____

h) Agora, observe os gráficos das funções e complete o Quadro 4 que indicará as coordenadas de **ponto de mínimo** de cada uma das funções no intervalo de B a C, baseando-se na Figura 3.

Quadro 4: Coordenadas do ponto de mínimo das funções $f(x), g(x) e\ h(x)$.

Para a função	Valor do coeficiente **A** na forma genérica f(x)=Asen(x)	Coordenadas do ponto de mínimo (x, y)
f(x)=sen(x)		(,)
g(x)=2sen(x)		(,)
h(x)=3sen(x)		(,)

Fonte: Dos Autores, 2019.

i) Ao completar a tabela, você percebeu que as coordenadas do **ponto de mínimo** apresentam o sinal?

( ) Igual ao de A, explique:_____

_____

( ) Contrário ao de A, explique:_____

_____

Ponto de Virada

Será que essa característica estudada até agora é exclusiva do comportamento da função seno? Ou esse comportamento em relação à amplitude também acontece com a função cosseno?

Atenção: Não esqueça de salvar as atividades realizadas!

Atividade 03 – Votando na interface de entrada de funções, digite as seguintes funções, uma de cada vez, na mesma ordem indicada$f(x) = 2cos(x)\ e\ g(x) = -2cos(x)$, utilizando o mesmo plano cartesiano (mesma tela). Dois gráficos apareceram na janela gráfica. Com base nestes gráficos, responda as perguntas indicadas, sabendo que a função cosseno tem a forma algébrica indicada como: f$(x) = Acos(x)$. Observe atentamente todos os gráficos na janela gráfica do software e, em seguida, responda aos questionamentos.

a) Encontre o valor do coeficiente **A** em cada uma das funções e complete o quadro 5.

Quadro 5: Valores dos coeficientes das funções

Função Cosseno	Valor do coeficiente **A** em cada uma das funções indicadas **é?**
$f(x) = 2cos(x)$	
$g(x) = -2cos(x)$	

Fonte: Autores, 2019.

b) Sobre a função cosseno, qual o valor da imagem quando as funções têm os seguintes ângulos (complete o quadro 6)?

Quadro 6: Valores das imagens das funções no intervalo [0,360º] ou [0, ≅6,28].

Ângulo (º)	Ângulo($\mathcal{R}$)	$f(x) = 2cos(x)$	$g(x) = -2cos(x)$
0	0		
90	≅1,57		
180	≅3.14		
270	≅4,71		
360	≅6,28		

Fonte: Dos Autores, 2019.

c) Podemos afirmar que as funções $f(x) = 2cos(x)\ e\ g(x) = -2cos(x)$ são funções simétricas em relação ao eixo x. Qual argumento que você usaria para sustentar essa afirmação?

_____

_____

Para Experimentar:

Se quisermos que uma função cosseno tenha amplitude de 0,25, qual deve ser a expressão analítica digitada na interface de entrada de funções no *software* GeoGebra?

_____

Em seguida, se quisermos desenhar uma função simétrica em relação ao eixo x, qual deve ser a alteração feita na expressão analítica inicial para desenhar a função simétrica?

_____

Agora complete o quadro 7 com as coordenadas dos pontos de **máximo e mínimo de cada uma das funções,** dentro do intervalo [0,360º] ou [0, ≅6,28].

Quadro 7: Coordenadas dos pontos de máximo e mínimos no intervalo [0,360º] ou [0, ≅6,28].

Função	Ponto de Máximo (x,y)	Ponto de Mínimo (x,y)
1ª função		
2º função (simétrica em relação ao eixo x)		

Fonte: Dos Autores, 2019.

Terminou por hoje!

Chegamos ao final das atividades do 3º encontro: **Funções seno e cosseno: explorando a amplitude, ponto de máximo e mínimo, por meio do *software* GeoGebra 1ª parte**.

Esperamos que você tenha gostado das atividades! Elas têm como objetivo explorar o papel do coeficiente A no comportamento dos gráficos das funções seno$f(x) = Asen(x)$ e cosseno $g(x) = Acos(x)$, os pontos de máximo e mínimo, com o auxílio do s*oftware* GeoGebra.

Aguardamos todos vocês no nosso próximo encontro sobre: **Funções seno e cosseno: explorando o deslocamento dos valores da imagem e período por meio do *software* GeoGebra 2ª parte.**

ATÉ A PRÓXIMA!!!

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

APÊNDICE C

Nome: _____

Atividades do 3º Encontro: Funções seno e cosseno: explorando o deslocamento dos valores da imagem e período por meio do *software* GeoGebra 2ª parte.

Como já sabemos onde estão localizadas algumas ferramentas do software GeoGebra *on-line,* vamos iniciar nossa primeira atividade do estudo do comportamento do gráfico da função cosseno.

Atenção: Todas as atividades têm como referência o comportamento dos gráficos das funções nas formas algébricas $f(x) = Asen(x) + B$ e $g(x) = Acos(x) + B$.

Atividade 01 - Utilizando a **interface de entrada de funções,** digite as seguintes funções, uma de cada vez na mesma ordem indicada$f(x) = cos(x) + 1; g(x) = cos(x)$ e $h(x) = cos(x) - 1$ utilizando o mesmo plano cartesiano. Três gráficos apareceram na janela gráfica. Com base nestes gráficos responda as perguntas indicadas sabendo que a função cosseno tem a forma algébrica indicada como: $f(x) = Acos(x) \pm B$.

a) Identifique quais são os valores dos coeficientes **A** e **B** em cada uma das funções, complete o quadro1.
Quadro 1: Valores dos coeficientes A e B nas funções indicadas.

Função Cosseno	Valor do coeficiente **A** em cada uma das funções indicadas	Valor do coeficiente **B** em cada uma das funções indicadas
$f(x) = cos(x) + 1$		
$g(x) = cos(x)$		
$h(x) = cos(x) - 1$		

Fonte: Dos Autores, 2019.

b) Qual dos dois coeficientes (A ou B) sofreu alteração em relação à função $g(x) = cos(x)$?
( ) A ( ) B

c) Qual a principal alteração percebida no comportamento dos gráficos gerados pelo *software*, além da cor de cada um deles:

c.1) O comportamento dos gráficos repete-se várias vezes à direita e à esquerda da origem (0,0)?
( ) Sim ( ) Não
c.2) Em relação ao eixo x, todos os gráficos se comportam da mesma forma?
( ) Sim ( ) Não

d) Sendo assim, o que podemos afirmar sobre o domínio de todas estas funções?
( ) As funções possuem diferentes domínios e estão representados em seus gráficos. .
( ) As funções possuem o mesmo domínio e estão representados em seus gráficos.
( ) As funções não têm o domínio representado em seus gráficos.
( ) As funções têm o domínio representado, mas não consigo identifica-lo.

e) Qual **o eixo** que representa o **conjunto imagem** de uma função?
( ) eixo x ( ) eixo y

f) Você percebeu alguma alteração com o **conjunto imagem** da função cosseno quando o coeficiente B foi alterado na função $f(x) = cos(x) + 1$ tendo como referência o gráfico da função $g(x) = cos(x)$? Pode explicar o que aconteceu?

_____
_____

g) Já em relação à função $h(x) = \cos(x) - 1$, você pode explicar o que aconteceu com o **conjunto imagem** dessa função, tendo como referência o gráfico da função $g(x) = cos(x)$?

_____
_____

h) Coloque V para verdadeiro e F para falso em cada uma das afirmações.
( ) De acordo com o gráfico a função $h(x) = \cos(x) - 1$ tem Im=[-2,0]
( ) De acordo com o gráfico a função $g(x) = \cos(x)$ tem Im=[-2,1]
( ) De acordo com o gráfico a função $f(x) = \cos(x) + 1$ tem Im=[-2,2]
( ) De acordo com o gráfico a função $h(x) = \cos(x) - 1$ tem Im=[-1,1]
( ) De acordo com o gráfico a função $f(x) = \cos(x) + 1$ tem Im=[0,3]
( ) De acordo com o gráfico a função $g(x) = \cos(x)$ tem Im=[-1,1]

i) Você pode completar as lacunas utilizando os conceitos (domínio, imagem, período e frequência) observando os gráficos das funções e, em seguida, marcar, com um “x’, a alternativa que corresponde às suas escolhas:

Podemos afirmar que o conjunto _____ é o mesmo para todas as funções $(f(x) = \cos(x) + 1, g(x) = \cos(x)\ e\ h(x) = \cos(x) - 1)$ e que o _____ também não foi alterado, pois todas as curvas terminam seu primeiro ciclo no mesmo ponto (verifique!). Outra constatação é que a _____ não foi alterada, pois existe apenas uma curva descrita entre 0°

e 360º. Já o conjunto _____ foi alterado, pois os gráficos das funções $f(x) = \cos(x) + 1$ e $h(x) = \cos(x) - 1$ deslocaram-se verticalmente em relação ao gráfico da função $g(x) = \cos(x)$.

(a) Domínio, imagem, período e frequência.
(b) Imagem, período, domínio e frequência.
(c) Domínio, período, frequência e imagem.
(d) Imagem, domínio, frequência e período.
(e) Domínio, frequência, período e imagem.

Observação: Com o objetivo de proteger as atividades já desenvolvidas contra problemas como falta de energia ou falha de conexão, indicamos que você salve as atividades sempre que indicado ou quando sinta a necessidade. Para isso, você deve recorrer ao procedimento a seguir.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Tomarmos como base o primeiro ciclo ou primeira volta da função $g(x) = sen(x)$ como referência.

Atividade 02 – Na **interface de entrada de funções,** digite $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right); g(x) = sen(x)\ e\ h(x) = sen(2x)$ na mesma ordem indicada, pois utilizaremos o mesmo plano cartesiano. Três gráficos apareceram na janela. Com base nestes gráficos, responda as perguntas indicadas sabendo que a função seno tem a forma algébrica indicada como: $Asen(Cx) \pm B$.

d) Observando as funções $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right); g(x) = sen(x)\ e\ h(x) = sen(2x)$ preencha o quadro 2 com os valores dos coeficientes **A, B e C** de cada uma das funções indicadas.
Quadro 2: Valores dos coeficientes A, B e C das funções indicadas.

Função Seno	Valor do coeficiente **A** em cada uma das funções indicadas **é?**	Valor do coeficiente **B** em cada uma das funções indicadas **é?**	Valor do coeficiente **C** em cada uma das funções indicadas **é?**
$f(x) = Asen(Cx) \pm B$	A	B	C
$f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$			
$g(x) = sen(x)$			

$h(x) = sen(2x)$			

Fonte: Dos Autores, 2019.

a) Com relação ao **conjunto imagem** das funções $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right); g(x) = sen(x)\ e\ h(x) = sen(2x)$, podemos afirmar que **as funções possuem o mesmo conjunto imagem**. Existe nos gráficos dessas funções representados pelo ***software*** GeoGebra algo que justifique essa afirmação? Caso exista pode explicar?

_____

_____

b) Qual ou quais coeficientes tiveram seus valores alterados nesse quadro quando comparamos as funções $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right); g(x) = sen(x)\ e\ h(x) = sen(2x)$?

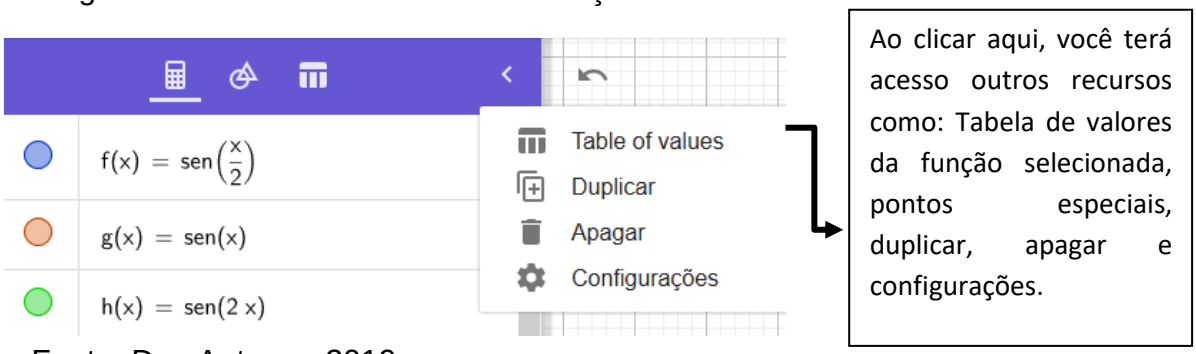
( ) A;
( ) B;
( ) C;
( ) A e B;
( ) A e C;

c) O único coeficiente que foi modificado nas três funções influenciou o comportamento de cada um dos gráficos das funções alterando a seguinte característica relacionada:

(a) Ao conjunto Domínio das funções.
(b) Ao período das funções.
(c) Aos valores da amplitude de cada uma das funções.
(d) Ao intervalo de valores do conjunto Imagem das funções.
(e) Ao intervalo de valores da relação entre o período e amplitude de cada uma das funções.

Vamos comparar os gráficos das funções $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)\ e\ g(x) = sen(x)$ e analisar seu comportamento em relação ao eixo x. Para tanto, iremos usar um dos recursos do software GeoGebra. No canto superior esquerdo da janela do *software* on-line, temos a **interface de entrada de funções,** como podemos perceber na Figura 3, que, no lado direito de cada uma das funções, existe um botão com **três pontos na vertical**.

Figura 3 – Interface de entrada de funções.



Fonte: Dos Autores, 2019.

Em seguida, no menu que apareceu, escolha a opção **pontos especiais**. Para as funções $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$ e $g(x) = sen(x)$. Agora responda aos questionamentos a seguir.

d) Podemos afirmar que na função $g(x) = sen(x)$ a coordenada x do ponto de **máximo** pertence ao?
(a) Intervalo entre (0 e 1) do domínio.
(b) Intervalo entre (1 e 2) do domínio.
(c) Intervalo entre (2 e 3) do domínio.
(d) Intervalo entre (3 e 4) do domínio.
(e) Intervalo entre (5 e 6) do domínio.

e) Podemos afirmar que na função $g(x) = sen(x)$ a coordenada x do ponto de **mínimo** pertence ao?
(a) Intervalo entre (0 e 1) do domínio.
(b) Intervalo entre (2 e 3) do domínio.
(c) Intervalo entre (3 e 4) do domínio.
(d) Intervalo entre (4 e 5) do domínio.
(e) Intervalo entre (5 e 6) do domínio.

f) Podemos afirmar que na função $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$ a coordenada x do ponto de **máximo** pertence ao?
(a) Intervalo entre (0 e 2) do domínio.
(b) Intervalo entre (2 e 4) do domínio.
(c) Intervalo entre (4 e 6) do domínio.
(d) Intervalo entre (6 e 8) do domínio.
(e) Intervalo entre (8 e 10) do domínio.

g) Podemos afirmar que na função $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$ a coordenada x do ponto de **mínimo** pertence ao?
(a) Intervalo entre (0 e 2) do domínio.
(b) Intervalo entre (2 e 4) do domínio.
(c) Intervalo entre (4 e 6) do domínio.

(d) Intervalo entre (6 e 8) do domínio.
(e) Intervalo entre (8 e 10) do domínio.

h) Agora preencha as lacunas no texto com as coordenadas dos pontos de máximo e mínimo de cada uma das funções.
A função $g(x) = sen(x)$ possui um ponto de máximo de coordenadas (__,__) em sua primeira volta na circunferência e um ponto de mínimo de coordenadas (__,__). E na função $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$ possui um ponto de máximo de coordenadas (__,__) em sua primeira volta na circunferência e um ponto de mínimo de coordenadas (__,__).

Atividade 03 – Ainda utilizando funções $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$; $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = sen(2x)$ que estão na janela gráfica. Você pode responder as perguntas se comparamos apenas $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = sen(2x)$.

a) Podemos afirmar que, na função $h(x) = sen(2x)$, a coordenada x do ponto de **máximo** pertence ao?
(a) Intervalo entre (0 e 2) do domínio.
(b) Intervalo entre (2 e 4) do domínio.
(c) Intervalo entre (4 e 6) do domínio.
(d) Intervalo entre (6 e 8) do domínio.
(e) Intervalo entre (8 e 10) do domínio.

b) Podemos afirmar que na função $h(x) = sen(2x)$ a coordenada x do ponto de **mínimo** pertence ao?
(a) Intervalo entre (0 e 2) do domínio.
(b) Intervalo entre (2 e 4) do domínio.
(c) Intervalo entre (4 e 6) do domínio.
(d) Intervalo entre (6 e 8) do domínio.
(e) Intervalo entre (8 e 10) do domínio.

c) Agora, preencha as lacunas no texto com as coordenadas dos pontos de máximo e mínimo de cada uma das funções.
A função $g(x) = sen(x)$ possui um ponto de máximo de coordenadas (__,__) em sua primeira volta na circunferência e um ponto de mínimo de coordenadas (__,__). E na função $h(x) = sen(2x)$ possui um ponto de máximo de coordenadas (__,__) em sua primeira volta na circunferência e um ponto de mínimo de coordenadas (__,__).

d) Para sintetizar, você pode identificar qual dos coeficientes influenciou diretamente na mudança do comportamento dos gráficos das funções

$f(x)$ e $h(x)$ em relação a função $g(x) = sen(x)$. Assinalando apenas uma das alternativas a seguir.
(a) Coeficiente A.
(b) Coeficiente B.
(c) Coeficiente C.
(d) Coeficientes A e B.
(e) Coeficientes B e C.

e) Você poderia explicar de que forma a alteração do coeficiente em relação à função padrão ($g(x) = sen(x)$) alterou o comportamento das funções $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$ e $h(x) = sen(2x)$?

_____
_____
_____

Para experimentar:

i) Se quisermos que uma função cosseno tenha amplitude 4, período 720º (4π) e esteja deslocada verticalmente 3 no sentido positivo em relação ao eixo x, qual deve ser a expressão analítica digitada na interface de entrada de funções no software GeoGebra para que a função com estas características seja representada graficamente?

_____

ii) Se tomarmos como base a expressão $f(x) = Acos(Cx) \pm B$. Responda:

a) Qual o valor do coeficiente **A** e qual a influência dele no gráfico apresentado?
A=____,_____
_____

b) Qual o valor do coeficiente **B** e qual a influência dele no gráfico apresentado?
B=____,_____
_____

c) Qual o valor do coeficiente **C** e qual a influência dele no gráfico apresentado?
C=____,_____
_____

iii) Se quisermos que uma função seno tenha amplitude 1, período 180º (π), qual deve ser a expressão analítica digitada na interface de entrada de funções no *software* GeoGebra para que a função com estas características seja representada graficamente?

a) Qual o valor do coeficiente **A** e qual a influência dele no gráfico apresentado?

A=____,_____

_____

b) Qual o valor do coeficiente **B** e qual a influência dele no gráfico apresentado?

B=____,_____

_____

c) Qual o valor do coeficiente **C** e qual a influência dele no gráfico apresentado?

C=____,_____

_____

Terminou por hoje!

Chegamos ao final das atividades do 3º encontro: **Funções seno e cosseno: explorando o deslocamento dos valores da imagem e período por meio do *software* GeoGebra.**

Esperamos que vocês tenham gostado das atividades que tinham como objetivo explorar o papel e a influência dos coeficientes A, B e C no comportamento dos gráficos das funções seno $f(x) = Asen(Cx) \pm B$ e cosseno $g(x) = Acos(Cx) \pm B$ com o auxílio do s*oftware* GeoGebra.

Aguardamos todos vocês no nosso próximo encontro sobre: **Funções seno e cosseno: explorando mais de suas características por meio do *software* GeoGebra 3ª parte.**

ATÉ A PRÓXIMA!!!

APÊNDICE D

Nome: _____

Atividades do 4º Encontro: Funções seno e cosseno: explorando mais de suas características por meio do *software* GeoGebra 3ª parte.

Vamos começar nossas atividades deste encontro usando algumas ferramentas do software GeoGebra *on-line.* Vamos iniciar nossa primeira atividade desse encontro do estudo do comportamento do gráfico da função cosseno.

Atenção: Todas as atividades têm como referência o comportamento dos gráficos das funções nas formas algébricas $f(x) = Asen(Cx) \pm B$ e $g(x) = Acos(Cx) \pm B$.

Iremos apresentar mais um dos recursos do software GeoGebra: o **controle deslizante** que permite definirmos um intervalo de valores associado a uma variável pré-estabelecida. Na **interface de entrada de funções,** digite A=1. Em seguida, pressione a tecla *enter*, digite B=0 e novamente aperte *enter*, depois digite C=1 e *enter*. A Figura 2 representa possivelmente a interface de entrada nesse momento.

Figura 2 – Interface de entrada após a definição de A, B e C.

Este botão deve estar selecionado para que o controle deslizante esteja disponível dentro da janela gráfica para alteração.

Fonte: Dos Autores, 2019.

Note que o *software* GeoGebra criou um intervalo de [-5,5] para cada um dos coeficientes, mas os valores inicialmente digitados já estão configurados. Agora iremos selecionar o **botão** indicado para que o **controle deslizante** possa aparecer na janela gráfica. Agora podemos iniciar as atividades!

Atividade 01 – Digite na **interface de entrada de funções** as seguintes funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = Asen(Cx) + B$. Em seguida responda:

a) Quantas funções estão representadas na janela gráfica do *software* GeoGebra?

_____

b) Você pode explicar o que aconteceu, com detalhes, com os gráficos?

_____

_____

Atividade 02 – O que acontecerá com o comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$ se alteramos o valor do coeficiente A de 1 para 3 em $g(x)$ usando o **controle deslizante**.

a) Explique, o que irá ocorre com essa alteração na função $g(x)$ em relação a $f(x)$?

_____

_____

b) Sua resposta baseou-se em que argumento(s) ou elemento(s)?

_____

_____

c) Agora que você pensou e escreveu, faça a alteração e verifique o que acontece. Pode explicar qual ou quais alteração(ões) foi(ram) causada(s) no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$?

_____

_____

d) Ambas as funções são **crescentes** em:
(a) 1º e 2º quadrantes
(b) 2º e 3º quadrantes
(c) 3º e 4º quadrantes
(d) 2º e 4º quadrantes
(e) 1º e 4º quadrantes

e) Ambas as funções são **decrescentes** em:
(a) 1º e 2º quadrantes
(b) 2º e 3º quadrantes
(c) 3º e 4º quadrantes
(d) 2º e 4º quadrantes
(e) 1º e 4º quadrantes

f) Qual o intervalo que **representa o conjunto imagem** da função g(x)?
(a) [0,1]
(b) [-1,1]
(c) [-2,2]
(d) [-1,2]

(e) [-3,3]

g) **O período** (1ª volta) da função g(x) **está compreendido entre**?

(a) Entre 0º e 45º ou $\frac{\pi}{4}\ rad$

(b) Entre 0º e 90º ou $\frac{\pi}{2}\ rad$

(c) Entre 0º e 180º ou $\pi\ rad$

(d) Entre 0º e 270º ou $\frac{3\pi}{2}\ rad$

(e) Entre 0º e 360º ou $2\pi\ rad$

Para iniciar a próxima atividade você deve:

- Sempre alterar os coeficientes na função $g(x)$;
- Voltar e desfazer as alterações feitas nos coeficientes mantendo A = 1, B= 0 e C=1;
- Comparar sempre função $g(x)$ em relação a $f(x)$, ou seja, $f(x)$ (padrão).

Atividade 03 – O que acontecerá com o comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$ se alteramos o valor do coeficiente A de 1 para 2 e o C de 1 para $\frac{1}{2}$ (0,5) em $g(x)$ usando o **controle deslizante**.

a) Explique, o que irá ocorre com essa alteração na função $g(x)$ em relação a $f(x)$?

_____

_____

b) Sua resposta baseou-se em que argumento(s) ou elemento(s)?

_____

_____

c) Agora que você pensou e escreveu faça a alteração e verifique o que acontece. Pode explicar qual ou quais alterações foram causadas no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$?

_____

_____

d) O gráfico da função g(x) é **crescente** em:

(a) 1º e 2º quadrantes

(b) 2º e 3º quadrantes

(c) 3º e 4º quadrantes

(d) 2º e 4º quadrantes

(e) 1º e 4º quadrantes

e) O gráfico da função g(x) é **decrescente** em:

(a) 1º e 2º quadrantes

(b) 2º e 3º quadrantes

(c) 3º e 4º quadrantes
(d) 2º e 4º quadrantes
(e) 1º e 4º quadrantes
f) Qual o **intervalo que representa o conjunto imagem** da função g(x)?
(a) [0,1]
(b) [-1,1]
(c) [-2,2]
(d) [-1,2]
(e) [-3,3]
g) **O período** (1ª volta) da função g(x) **está compreendido entre**?
(a) Entre 0º e 90º ou $\frac{\pi}{2}\ rad$
(b) Entre 0º e 180º ou $\pi\ rad$
(c) Entre 0º e 360º ou $2\pi\ rad$
(d) Entre 0º e 720º ou $4\pi\ rad$
(e) Entre 0º e 1440º ou $8\pi\ rad$

Para experimentar:

i) Construa a expressão analítica da função com as características indicadas. Uma função cosseno que tenha amplitude 2, período 45º ($\frac{\pi}{4}\ rad$) e iniciando na origem (0,0) em relação ao eixo x. Qual deve ser a expressão analítica digitada na interface de entrada no *software* GeoGebra para que a função com estas características seja representada na janela gráfica?

_____

ii) Se tomarmos como base a expressão $f(x) = Acos(Cx) \pm B$. Responda:

a) Qual o valor do coeficiente **A** e qual a influência dele no gráfico apresentado?
A=____,_____
_____
b) Qual o valor do coeficiente **B** e qual a influência dele no gráfico apresentado?
B=____,_____
_____
c) Qual o valor do coeficiente **C** e qual a influência dele no gráfico apresentado?
C=____,_____
_____

iii) Se quisermos que uma função seno tenha amplitude 5 (diferença entre o ponto de máximo e o de mínimo), período 720º ($4\pi\, rad$). Qual deve ser a expressão analítica digitada na interface de entrada de funções no *software* GeoGebra para que a função com estas características seja representada graficamente?

a) Qual o valor do coeficiente **A** e qual a influência dele no gráfico apresentado?

A=____,_____
_____

b) Qual o valor do coeficiente **B** e qual a influência dele no gráfico apresentado?

B=____,_____
_____

c) Qual o valor do coeficiente **C** e qual a influência dele no gráfico apresentado?

C=____,_____
_____

Terminou por hoje!

Chegamos ao final das atividades do 4º encontro: **Funções seno e cosseno: explorando mais de suas características por meio do *software* GeoGebra 3ª parte.**

Esperamos que você tenha gostado das atividades que tinham como objetivo explorar o papel e a influência dos coeficientes A, B e C no comportamento dos gráficos das funções seno $f(x) = Asen(Cx) \pm B$ e cosseno $g(x) = Acos(Cx) \pm B$ com o auxílio do s*oftware* GeoGebra.

Aguardamos todos vocês no nosso próximo encontro sobre: **Funções seno e cosseno: explorando mais de suas características por meio do *software* GeoGebra 4ª parte.**

ATÉ A PRÓXIMA!!!

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

APÊNDICE E

Nome: _____

Atividades do 5º Encontro: Funções seno e cosseno: explorando mais de suas características por meio do *software* GeoGebra 4ª parte.

Abra o *software* GeoGebra *on-line* e vamos iniciar nossa primeira atividade desse encontro do estudo do comportamento do gráfico da função cosseno.

Atenção: Todas as atividades tem como referência o comportamento dos gráficos das funções nas formas algébricas $f(x) = Asen(Cx \pm D) \pm B \ e \ g(x) = Acos(Cx \pm D) \pm B$.

Iremos utilizar o **controle deslizante,** que permite definirmos um intervalo de valores associado a uma variável pré-estabelecida. Na **interface de entrada de funções**, digite A=1, em seguida, pressione a tecla *enter*, digite B=0 e novamente a tecla *enter*, altere C=1 e confirme no *enter*. Por final, digite D=0.

O *software* GeoGebra criou um intervalo de [-5,5] para cada um dos coeficientes, mas os valores inicialmente digitados já estão configurados. Agora iremos selecionar o **botão** indicado para que o **controle deslizante** possa ser visualizado na janela gráfica. Vamos iniciar as atividades!

Atividade 01 – Digite na **interface de entrada de funções** as seguintes funções $f(x) = cos(x)$ e $g(x) = Asen(Cx + D) + B$. Agora confira em os coeficientes da função g(x) são A=1, B=0, C=1 e D=0. Caso algum deles não esteja incialmente com estes valores, altere! Considerando os gráficos das funções $f(x) \ e \ g(x)$ na janela gráfica responda:

a) O **conjunto domínio** das funções $f(x) \ e \ g(x)$ são:
(a) Iguais à $\mathbb{R}$.
(b) Iguais à $\mathbb{Q}$.
(c) D_f é $\mathbb{R} \ e \ D_g$ é $\mathbb{Q}$.
(d) D_f é $\mathbb{Q} \ e \ D_g$ é $\mathbb{R}$.
(e) Iguais à $\mathbb{C}$.
b) O intervalo que representa o **conjunto imagem** das funções $f(x) \ e \ g(x)$ é?
(a) [-1,0]
(b) [-1.1]
(c) [0.1]
(d) [-2.2]
(e) [-1.2]
c) Qual o **período** das funções $f(x) \ e \ g(x)$?

(a) Entre 0º e 45º ou $\frac{\pi}{4}\ rad$
(b) Entre 0º e 90º ou $\frac{\pi}{2}\ rad$
(c) Entre 0º e 180º ou $\pi\ rad$
(d) Entre 0º e 270º ou $\frac{3\pi}{2}\ rad$
(e) Entre 0º e 360º ou $2\pi\ rad$

d) As funções $f(x)\ e\ g(x)$ (seno e cosseno) são **crescentes** em?
(a) 1º quadrante
(b) 2º quadrante
(c) 3º quadrante
(d) 4º quadrante
(e) 1º e 4º quadrantes

e) As funções $f(x)\ e\ g(x)$ (seno e cosseno) são **decrescentes** em:
(a) 1º quadrante
(b) 2º quadrante
(c) 3º quadrante
(d) 4º quadrante
(e) 1º e 4º quadrantes

Atividade 02 – Para realizar essa atividade, você deve fazer a seguinte alteração na função $g(x)$ na interface de entrada do *software* GeoGebra: modifique o coeficiente D, altere seu valor de 0 para 1,7 ou $\frac{\pi}{2}$. Se preferir, use o **controle deslizante**.

a) Explique o que ocorreu com essa alteração na função $g(x)$ em relação a $f(x)$?

_____
_____

b) Sua resposta baseou-se em que argumento(s) ou elemento(s)?

_____
_____

c) Qual ou quais alterações causaram a mudança no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$?

_____
_____

d) Você pode explicar o porquê desse fenômeno?

_____
_____

e) Em relação ao **comportamento do gráfico** da função $g(x)$. Você encontrou alguma semelhança com outra função já representada em atividade anterior? ( ) Sim ou ( ) Não, explique:

_____

_____

f) Qual a principal modificação causada pela alteração do valor do coeficiente apresentada no comportamento do gráfico da função $g(x)$?

_____

_____

Para iniciar a próxima atividade você deve:

- Alterar os coeficientes da função $g(x)$ para os seguintes valores iniciais de A = 1, B= 0, C=1 e D=0;
- Comprar sempre função $g(x)$ em relação a $f(x)$, ou seja, $f(x)$ (padrão).

Atividade 03 – O que acontecerá com o comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$ se alteramos o valor do coeficiente A de 1 para 2 e o C de 1 para $\frac{1}{2}$ (0,5) em $g(x)$ usando o **controle deslizante**.

a) Explique o que irá ocorrer com essa alteração na função $g(x)$ em relação a $f(x)$?

_____

_____

b) Sua resposta baseou-se em que argumento ou elementos?

_____

_____

c) Agora que você pensou e escreveu, faça a alteração e verifique o que acontece. Pode explicar qual ou quais alterações foram causadas no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$?

_____

_____

d) O gráfico da função g(x) é **crescente** em:

(a) 1º e 2º quadrantes
(b) 2º e 3º quadrantes
(c) 3º e 4º quadrantes
(d) 2º e 4º quadrantes
(e) 1º e 4º quadrantes

e) O gráfico da função g(x) é **decrescente** em:
(a) 1º e 2º quadrantes
(b) 2º e 3º quadrantes
(c) 3º e 4º quadrantes
(d) 2º e 4º quadrantes
(e) 1º e 4º quadrantes

f) Qual o **intervalo que representa o conjunto imagem** da função g(x)?
(a) [0,1]
(b) [-1,1]
(c) [-2,2]
(d) [-1,2]
(e) [-3,3]

g) **O período** (1ª volta) da função g(x) **está compreendido entre**?
(a) Entre 0º e 90º ou $\frac{\pi}{2}\ rad$
(b) Entre 0º e 180º ou $\pi\ rad$
(c) Entre 0º e 360º ou $2\pi\ rad$
(d) Entre 0º e 720º ou $4\pi\ rad$
(e) Entre 0º e 1440º ou $8\pi\ rad$

Para experimentar:

Para iniciar a próxima atividade você deve:

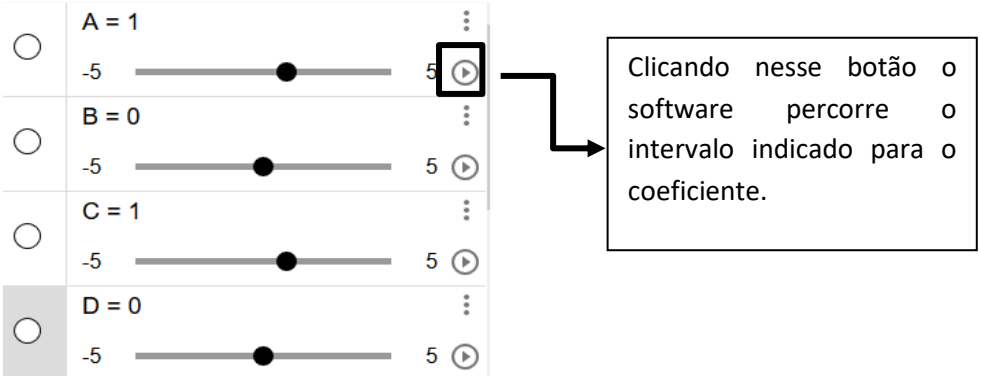
- Alterar os coeficientes na função $g(x) = Acos(Cx + D) + B$ para

A = 1, B= 0, C=1 e D=0;

- Altere a função $f(x) = cos(x)$, $f(x)$ é o comportamento padrão.

Um outro recurso do software GeoGebra é o **botão de animação** que permite criar animações utilizando parâmetros como referência. Este recurso está ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Botão animação.



Fonte: Dos Autores, 2019.

Vamos aproveitar e **utilizar o botão de animação** em nossa próxima atividade.

Para iniciarmos, certifique-se que a função $f(x) = \cos(x)$ é a função padrão e $g(x) = A\cos(Cx + D) + B$ está com os valores de A=1, B=0, C=1 e D=0.

i) Aperte o botão animação ao lado do coeficiente A, como ilustrado na Figura 2 e perceba quais as mudanças e implicações no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$.

Agora responda:

a) Qual a principal influência percebida quando **alteramos o coeficiente A** no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$? (explique como se fosse para um colega entender)

_____

_____

Pare a animação e volte o coeficiente A para o valor 1

Para iniciarmos, certifique-se que a função $f(x) = \cos(x)$ é a função padrão e $g(x) = A\cos(Cx + D) + B$ está com os valores de A=1, B=0, C=1 e D=0.

ii) Aperte o botão animação ao lado do **coeficiente B** com ilustrado na Figura 2 e perceba quais as mudanças e implicações no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$.

Agora responda:

a) Qual a principal influência percebida quando **alteramos o coeficiente B** no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$? (explique como se fosse para um colega entender)

_____

_____

Pare a animação e volte o coeficiente B para o valor 0

Para iniciarmos certifique-se que a função $f(x) = \cos(x)$ é a função padrão e $g(x) = A\cos(Cx + D) + B$ está com os valores de A=1, B=0, C=1 e D=0.

iii) Aperte o botão animação ao lado do **coeficiente C** com ilustrado na Figura 2 e perceba quais as mudanças e implicações no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$.

Agora responda:

a) Qual a principal influência percebida quando **alteramos o coeficiente C** no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$? (explique como se fosse para um colega entender)

_____

_____

Pare a animação e volte o coeficiente C para o valor 1

Para iniciarmos certifique-se que a função $f(x) = \cos(x)$ é a função padrão e $g(x) = A\cos(Cx + D) + B$ está com os valores de A=1, B=0, C=1 e D=0.

iii) Aperte o botão animação ao lado do **coeficiente D** com ilustrado na Figura 2 e perceba quais as mudanças e implicações no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$.

Agora responda:

a) Qual a principal influência percebida quando **alteramos o coeficiente D** no comportamento da função $g(x)$ em relação a $f(x)$? (explique como se fosse para um colega entender)

_____

_____

Terminamos, ufa!

Chegamos ao final das atividades do 5º encontro: **Funções seno e cosseno: explorando mais de suas características por meio do *software* GeoGebra 4ª parte.**

Obrigado!!!

UNIVATES

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

APÊNDICE F

Nome:_____

FORMULÁRIO DE AVALIAÇÃO

1. Com relação ao GeoGebra

1.1 Você já conhecia o *software* GeoGebra?

( ) Sim ( ) Não

1.2 Você já havia utilizado o GeoGebra para estudar funções?

_____

1.3 Você já havia utilizado o GeoGebra para realizar atividades propostas com estas?

( ) Sim, que tipo de atividade? _____

_____

( ) Não

1.4 As atividades exploratórias utilizando o *software* GeoGebra de alguma forma favoreceram a compressão do conteúdo? Explicar a resposta.

_____

_____

1.5 Como você classificaria sua experiência em utilizar o GeoGebra na resolução das atividades deste curso?

_____

_____

1.6 Após utilizar o *software* GeoGebra, qual característica você classificaria como mais importante na sua utilização durante a resolução das atividades? Por quê?

_____

_____

1.7 Você conseguiria citar algumas funcionalidades na utilização do *software* em outras disciplinas? Quais?

_____

_____

1.8 Você pretende continuar utilizando o *software* GeoGebra para estudar matemática?

( ) Sim ( ) Não

Justifique sua resposta: _____

_____

2. **Com relação aos conteúdos seno e cosseno e à abordagem metodológica**

2.1 Com relação à importância do conteúdo abordado durante as atividades, você classificaria como:

( ) Muito importante
( ) Importante
( ) Pouco importante
( ) Pouquíssimo importante
( ) Sem importância

2.2 Em sua opinião, as atividades propostas ajudaram você a compreender quais as relações entre os coeficientes das funções seno e cosseno? Escolha apenas uma opção!

( ) sim
( ) não
( ) não faz diferença
( ) outro opinião. Qual? _____

Justificar a resposta escolhida:

_____
_____
_____
_____

2.3 A resolução das sequências didáticas[3] auxiliou você a compreender o **comportamento** do gráfico das funções seno e cosseno? Escolha apenas uma opção!

( ) sim
( ) não
( ) não faz diferença
( ) outro opinião. Qual? _____

Justificar a resposta escolhida:

_____
_____
_____
_____
_____

2.4 A abordagem com as sequências didáticas[4] realizadas aliadas à utilização das ferramentas, botões e recursos do *software* GeoGebra favoreceram a **compreensão do comportamento** das funções seno e cosseno? ( ) Sim ( ) Não
Explique_____
_____

3. Quanto às suas impressões

[3] O termo sequências didáticas foi substituído por sequências de atividades.
[4] O termo sequências didáticas foi substituído por sequências de atividades.

3.1 Em sua visão, você acredita que essa prática pode auxiliar o estudante nas questões de aprendizagem vivenciadas atualmente nas salas de aula? Quais as vantagens/benefícios que você observou?

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

3.3 Em relação ao apresentado nesta prática, dê sua opinião sobre o desenvolvimento dela. Quais sugestões você daria para melhorar esta prática, ou seja, o que você entende que poderia ser melhorado?

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

3.4 Você gostaria de expressar algo que não foi perguntado acerca da prática? Fique livre para expressar-se.

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

APÊNDICE G

Quadro de acompanhamento de desempenho individual

Código do estudante	Data __/__	Chegada (Horário)	Qual o nível de participação e interação com o colega durante a realização das atividades do encontro? (Marque com um X)					Em relação às dúvidas (Qual a natureza da dúvida?)	Qual o nível de interesse em realizar as atividades hoje? (Marque com um X)				
			1º	2 º	3 º	4 º	5 º		1 º	2 º	3 º	4 º	5 º
A1													
B2													
C3													
D4													
E5													
F6													
G7													

Fonte: Dos Autores, 2019.