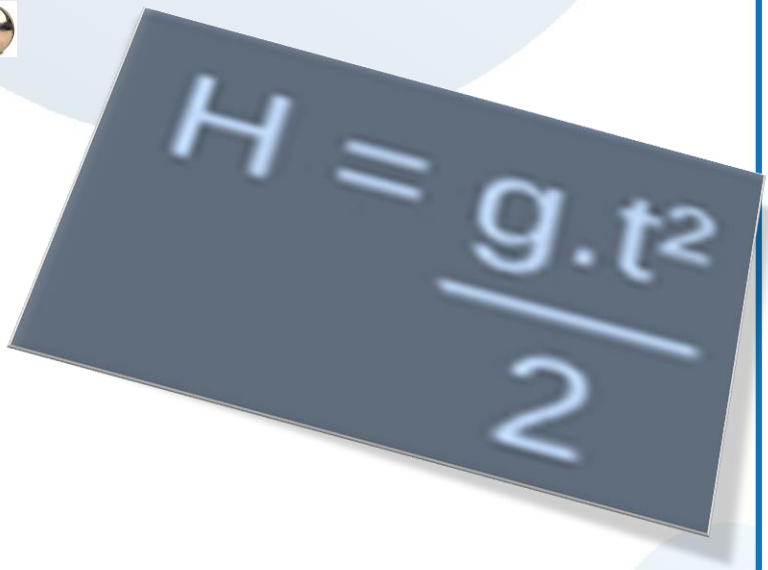
Modelagem Matemática: Uma possibilidade para explorar atividades relacionando Matemática e Física

Autores

Márcia Jussara Hepp Rehfeldt
Rosilene Inês König
Silvana Emer
Mara Oliveira de Azevedo
Vanessa Brandão de Vargas
Italo Gabriel Neide
Willian Henrique Locatelli
Maicon Hennig
Paulo Roberto Giovanella



Apresentação

Caro (a) professor (a),

As atividades apresentadas neste material, em forma de sequência didática, foram elaboradas na pesquisa “Despertando a vocação científica e criatividade por meio de Modelagem Matemática em alunos do Ensino Médio, no interior do Rio Grande do Sul”, Univates, Lajeado – RS. O objetivo foi analisar a viabilidade do ensino interdisciplinar de Matemática e Física por meio de práticas de Modelagem Matemática. Quanto à sequência didática, o intuito é ilustrar o uso da Modelagem Matemática (MM) como metodologia para o ensino do conceito de função e de queda livre, realizar experimentos para coleta de dados, objetivar a modelação e possibilitar ao estudante entender que a Física e a Matemática desvendam fenômenos naturais da vida real.

Embasado em trabalhos anteriores, como os de Rehfeldt *et al*. (2019); Rehfeldt *et al*. (2018); Neide *et al*. (2018); Pisching *et al*. (2017); Rehfeldt, Puhl e Neide (2017); Rehfeldt; Dente e Neide (2017); Heinen *et al.* (2016) e Neide *et al.* (2013), este produto educacional busca potencializar metodologias ativas, multidisciplinaridade, autonomia e a investigação por parte dos alunos. Portanto, a partir desses enfoques, surge a necessidade de desenvolver uma docência que vá além do campo das ideias da Matemática, isto é, que propicie um ambiente de aprendizagem em que os alunos possam manipular, experimentar e vivenciar, mesmo de forma simplificada, situações do mundo real. Com isso, espera-se despertar o gosto pela ciência e pela investigação, características essenciais à formação do estudante pesquisador.

Contextualizando

O presente produto educacional, derivado da pesquisa contém sugestões de atividades que possibilitam diversificar a forma de atuação dos professores, utilizando a Modelagem Matemática como metodologia de ensino. Este foi desenvolvido com alunos do 1º ano do Ensino Médio. Os aportes teóricos estão embasados em diversos autores que estudam a Modelagem Matemática: Biembengut e Hein (2009); Almeida, Silva e Vertuan (2013); Barbosa (2004); Caldeira (2009); Bassanezi (2014); Meyer, Caldeira e Malheiros (2017); entre outros.

De acordo com Barbosa (2001, p. 31), a MM propõe um “ambiente de aprendizagem, no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade”, o que possibilita a construção, a manipulação e a disseminação do conhecimento matemático (BARBOSA, 2007; ROSA; OREY, 2007). Assim, as atividades sugeridas auxiliam na compreensão do fenômeno e na busca de solução, usufruindo, para isso, os conhecimentos da Física e da Matemática em suas discussões e tomadas de decisões.

Portanto, a interligação dos saberes permite a leitura do fenômeno e, por meio de suas representações e argumentações embasadas na Ciência, desvendam o caminho da relação entre o fenômeno real e o respectivo modelo matemático. Essa forma de ensinar propicia o desenvolvimento de habilidades importantes do fazer Ciência, despertando a curiosidade, a crítica e o interesse do aluno. Para Almeida e Dias (2004, p. 2), “a exploração, no ensino, de situações da vida real, em que a Matemática se aplica, torna-a mais dinâmica e interessante e proporciona maior eficiência no processo de ensino e aprendizagem”.

A organização do ambiente de MM e as etapas

A organização do ambiente de aprendizagem, os papéis do professor e do aluno, bem como os procedimentos, são aspectos relevantes ao se aplicar a MM. Quanto à participação discente, Barbosa (2004) propõe diferentes possibilidades de organizar o ambiente de Modelagem Matemática em sala de aula, conforme as responsabilidades de atuação do docente e do estudante, classificando-as em três casos, expostas no Quadro 1:

Quadro 1: Os casos de modelagem

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração do problema	Professor	professor	professor/ alunos
Coleta de dados	Professor	professor/ alunos	professor/ alunos
Resolução	professor/ alunos	professor/ alunos	professor/ alunos

Fonte: Barbosa (2004)

Nas atividades propostas neste produto educacional, optamos pelo caso 2, em que os alunos, a partir de uma situação-problema apresentada pelo professor, buscaram informações, testaram hipóteses, coletaram dados, criaram um modelo e discutiram a validade dos resultados encontrados (BARBOSA, 2004). De acordo com Barbosa (2004), com relação à atuação do professor no caso 2, o seu papel é mediar, ou seja, observar e acompanhar os grupos de estudantes, provocando questionamentos que os conduzam a formular, apropriar-se de novos conceitos, refletir, dar significado às ideias matemáticas e relacioná-las aos conceitos estudados.

Além da participação dos alunos, é importante ter clareza sobre os procedimentos para a realização da prática em MM. Para isso, autores, como Bassanezi (2014) e Biembengut (2009), são nossas referências, pois a forma de

pensar a MM vem ao encontro dos objetivos a que nos propomos, ou seja, um método de ensino não só de Matemática, mas também de outros componentes curriculares. A modelagem na educação proposta por Biembengut (2009) é baseada na concepção de Bassanezi (2002) e sugere as seguintes etapas: Interação, Matematização e Modelo Matemático. Neste sentido, seguimos as etapas propostas por Biembengut e Hein (2009), descritas a seguir:

Etapa 1 – Interação com o problema: É a etapa inicial do contato com a situação-problema e envolve a obtenção de informações, compreensão e familiarização com o tema em questão.

Etapa 2 – Matematização: Com os dados obtidos na fase de interação, ocorrem a estruturação da situação e a transformação da linguagem natural para a linguagem matemática. É a etapa de identificação de um modelo. Bassanezi (2014, p. 19) afirma que,

> quando se procura refletir uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender ou de agir sobre ela, o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o Modelo,

que pode ser “um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou equações algébricas, ou gráfico, ou representação, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução” (BIEMBENGUT; HEIN, 2009, p. 14).

Etapa 3 – O Modelo Matemático: É a etapa de validação. Nela, verifica-se se a representação ou o modelo construído responde satisfatoriamente ao problema proposto e, caso não seja confiável, alunos e professores deverão retornar à segunda etapa em busca de uma melhor adequação do modelo construído ao problema sugerido.

Conhecidas as etapas, passamos às ações a serem desenvolvidas em cada aula, como se estruturam; enfim, os encontros, temas e ações. O tempo pode ser ajustado conforme a necessidade do professor diante da realidade que se apresenta. Para melhor visualização na relação entre as ações e etapas, apresentamos os Quadros 2 e 3. No 2, a primeira atividade: Queda e repique de

uma bola que relaciona a altura da queda e do retorno após o repique em diferentes alturas de abandono.

Atividade 1

Quadro 2 – Queda e repique de uma bola.

Etapas	Passos	Ações
Interação	1	Introdução e explanação sobre a metodologia utilizada.
	2	Abandono de quatro distintas bolas: duas de ping pong (uma oficial e uma réplica), uma de borracha e outra de tênis em altura aleatória e observação dos distintos repiques.
	3	Situação-problema: “Como a altura em que foi abandonada uma bola se relaciona com o seu ‘repique’”?
	4	Discussões e diálogo inicial da intervenção.
	5	Divisão da turma em grupos.
Matematização	6	Distribuição do roteiro (APÊNDICE A) e material para cada grupo.
	7	Organização da tabela com as grandezas altura do abandono e altura do repique.
	8	Preparo do local e realização do experimento.
	9	Coleta de dados.
	10	Representação gráfica.
	11	Observação da correlação dos pontos e identificação do modelo matemático.
	12	Aproximação de um modelo linear com identificação dos coeficientes.
Modelo Matemático	13	Apresentação do modelo matemático oriundo de cada tipo de bola.
	14	Validação do modelo matemático construído. Nesta etapa, verifica-se a confiabilidade do modelo e, caso não seja satisfatório, volta-se à etapa anterior.
	15	Conclusões e observações finais.

Fonte: Dos autores, 2020

No Quadro 3, a segunda atividade: Queda livre de um corpo que relaciona a altura e o respectivo tempo de queda. Propõem-se diferentes alturas de largada da bola.

Atividade 2

Quadro 3: Queda livre de um corpo.

Etapas	Passos	Ações
Interação	1	Problematização inicial.
	2	Introdução do tema por meio da visualização do vídeo sobre queda livre de um corpo.
	3	Discussão e problematização dos alunos sobre o tempo de chegada de um objeto ao solo.
	4	Formação de grupos e simulação em sala de aula.
	5	Construção da tabela para registro dos dados.
	6	Distribuição do roteiro (APÊNDICE B) e materiais.
Matematização	7	Realização do experimento e coleta de dados.
	8	Comparação dos tempos cronometrados em cada grupo.
	9	Registro no quadro e cálculo da média dos resultados obtidos em cada altura.
	10	Representação gráfica.
	11	Discussão, a partir dos dados coletados, sobre o tipo de função.
	12	Identificação do tipo de curva (por meio do *software Excel*).
	13	Análise dos coeficientes da parábola (por meio do *software* Geogebra).
	14	Cálculo do valor do coeficiente de a, relacionando-o com a gravidade.
Modelo Matemático	15	Apresentação do modelo matemático de cada tipo de bola.
	16	Validação do modelo matemático construído. Nesta etapa, verifica-se a confiabilidade do modelo e, caso não seja satisfatório, volta-se à etapa anterior.
	17	Conclusões e observações finais.
	18	Fechamento e utilização do *software Phet.*

Fonte: Dos autores, 2020

Com o intuito de incentivar a renovação no ensino da Matemática e da Física, por meio da Modelagem Matemática, apresentamos a sequência didática. Assim, o professor (a) poderá conhecer e vislumbrar a possibilidade de aplicação em sua escola.

Sequência didática em atividades de Modelagem Matemática

Atividade 1: Queda e repique da bola

PRIMEIRO ENCONTRO – APRESENTAÇÃO E PROBLEMATIZAÇÃO INICIAL

Etapa Interação: Apresentação do projeto e Introdução à temática.

Objetivo: Introdução da temática "queda e repique da bola", despertando a curiosidade dos alunos na relação entre a altura de abandono e a altura do repique de quatro bolas de materiais diferentes.

Recursos: Quatro distintas bolas: duas de ping pong (uma oficial e uma réplica), uma de borracha e outra de tênis.

Tempo Estimado da aula: Quarenta minutos.

Passos:

1) Introdução e explanação sobre a metodologia utilizada.
2) Abandono de quatro distintas bolas: duas de ping pong (oficial e réplica), uma de borracha e outra de tênis, em altura aleatória e observação dos distintos repiques.
3) Situação-problema: "Como a altura em que foi abandonada uma bola se relaciona com o seu 'repique'"?
4) Discussões e diálogo inicial da intervenção.
5) Divisão da turma em grupos.

Desenvolvimento:

Abandono de uma mesma altura das quatro bolas de diferentes materiais para que os alunos observem os repiques e comparem as suas alturas.

Problematização

Como a altura em que foi abandonada uma bola se relaciona com o seu repique?

A partir dessa problematização inicial, dar continuidade ao diálogo, promovendo discussões e levantamento de hipóteses.

Professor (a),

Instigue o aluno a pensar.

Deixe cair as distintas bolas na sala de aula e pergunte:
O que aconteceu?
Elas quicam de forma igual? E se eu largar mais alto?
Vai quicar bastante ou só um pouco?
Faz diferença o material da bolinha e a altura em que ela é solta?

Ao final, organizar os grupos de trabalho (sugerem-se quatro integrantes por grupo).

SEGUNDO ENCONTRO: REALIZAÇÃO DA PRÁTICA, COLETA DE DADOS.

Etapa Matematização: Prática**,** realização das aferições

Objetivo: Verificar a relação entre a altura do abandono da bola e seu respectivo repique.

Recursos: Quatro distintas bolas: duas de ping pong (uma oficial e uma réplica), uma de borracha e outra de tênis, trenas.

Tempo Estimado da aula: Oitenta minutos.

Passos:

6) Distribuição do roteiro e material para cada grupo.
7) Organização da tabela com as grandezas altura do abandono e altura do repique.
8) Preparo do local e realização do experimento.
9) Coleta de dados.

Desenvolvimento:

Disponibilizados os materiais trenas e quatro bolas: ping pong (uma oficial e uma réplica), uma de borracha e outra de tênis, cada grupo escolhe o local para a realização das aferições, uma bola e trena. Além disso, organizar uma tabela para registro dos dados das respectivas alturas (abandono e repique).

A atividade consiste em definir alturas de largada, deixar cair a bola e mensurar o respectivo repique. Esses dados coletados devem ser registrados numa tabela para observar as possíveis relações existentes entre a altura com que a bola foi abandonada e o repique. As alturas e a quantidade de vezes, bem como a estratégia utilizada, ficam a critério de cada grupo.

Professor (a),

Aqui é importante a sua intervenção caso os alunos optem por definir menos que três alturas distintas para o abandono da bola. Cumpre salientar a necessidade de várias mensurações para a obtenção de resultados confiáveis. Podemos encontrar semelhanças e algumas diferenças com relação ao número de vezes que os dados foram coletados e à forma como foram encontrados os modelos matemáticos. Cabe a você incentivar os estudantes na busca de vários conjuntos de dados com o intuito de conseguir um modelo mais próximo à realidade.

De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2013), em práticas de Modelagem Matemática, cabe aos alunos a coleta e análise de dados. No entanto, os professores devem lhes conferir confiança.

Na Figura 1, estão ilustradas algumas estratégias idealizadas e utilizadas pelos alunos na realização da prática.

Figura 1: Registro de diferentes estratégias na realização dessa prática

Fonte: Dos autores, com base nos grupos 1, 2 e 3 (2019)

Nas gravuras, observa-se que os alunos pensaram diferentes estratégias para aferição do retorno da bolinha. O grupo 1 fez uso da régua; por sua vez, o grupo 2 esteve atento à medida alcançada no retorno; já o grupo 3 filmou com o celular e depois visualizou em câmera lenta.

Professor (a),

Aqui sua orientação é importante.

Este é um momento em que questionamentos pontuais auxiliam os alunos a encontrarem e compreenderem a relação que existe entre as grandezas e, consequentemente, compreendam a função correspondente e seu modelo.

Possíveis questionamentos: Observe os dados do eixo x: qual a diferença entre eles? E no eixo Y? O que vocês observam?

A partir dessas e outras questões, os alunos são levados a perceber que há uma proporção entre essas grandezas (que pode ser aproximada) e, com isso, identificar o modelo algébrico.

TERCEIRO ENCONTRO: REPRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS.

Etapa Matematização: Análise dos dados e representações, construção do modelo matemático.

Objetivo: Identificar as grandezas (altura com que a bola foi abandonada e o respectivo repique) e a relação existente, representando graficamente.

Recursos: Régua, papel, lápis e/ou *softwares,* como: *Excel,* Geogebra*, Grapher - Equation Plotter & Solver.*

Tempo Estimado da aula: Oitenta minutos.

Passos:

10) Representação gráfica.

11) Observação da correlação dos pontos e identificação do modelo matemático.

12) Aproximação de um modelo linear com identificação dos coeficientes.

Desenvolvimento:

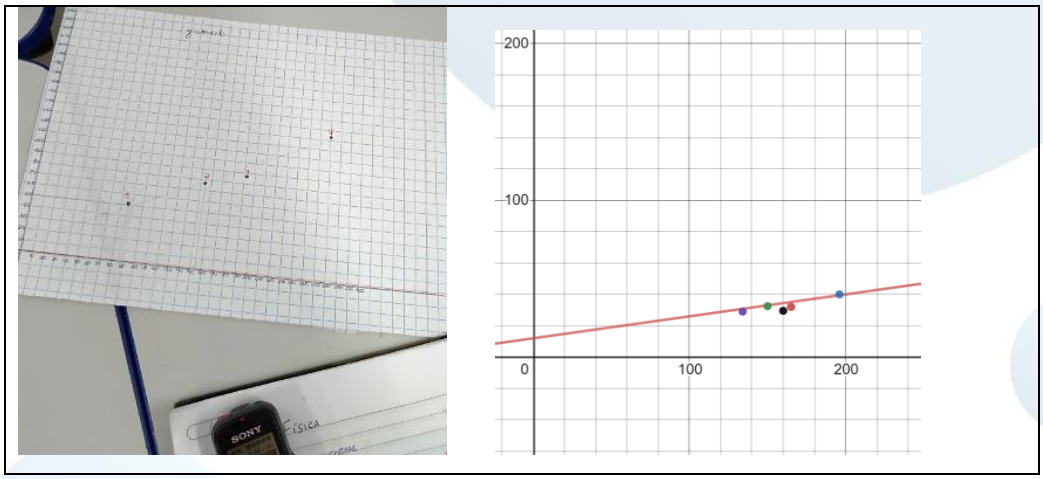
Com os dados obtidos, inserir no sistema cartesiano, unir os pontos e analisar o gráfico com a finalidade de identificar a função correspondente.

De acordo com Barbosa (2009), o papel do professor é mediar, ou seja, observar e acompanhar os grupos, provocando questionamentos que conduzem o aluno a formular, apropriar-se de novos conceitos, refletir, dar significado às ideias matemáticas e relacioná-las aos conceitos estudados.

Após esses questionamentos, com os dados coletados e a marcação destes no sistema cartesiano, o grupo de alunos passa a supor modelos, discutir, trocar ideias até chegar à relação numérica entre as variáveis. Para facilitar essa identificação, é interessante propor o uso de *softwares*, como por exemplo, o *Excel*, e fazer o ajuste de curva. Também com o auxílio de *softwares*, pode-se encontrar o modelo algébrico.

Com o intuito de ilustrar esta etapa, seguem imagens e relatos de uma das aplicações realizadas em uma escola, numa turma de 1º ano do Ensino Médio. Na Figura 2, imagens de representações gráficas dos modelos obtidos na prática pelo grupo 1, que utilizou a bolinha de ping pong em seu experimento.

Figura 2: Representação gráfica no papel e no *software* obtida pelo grupo 1



Fonte: Dos autores, com base na prática dos alunos do 1º ano do Ensino Médio (2019)

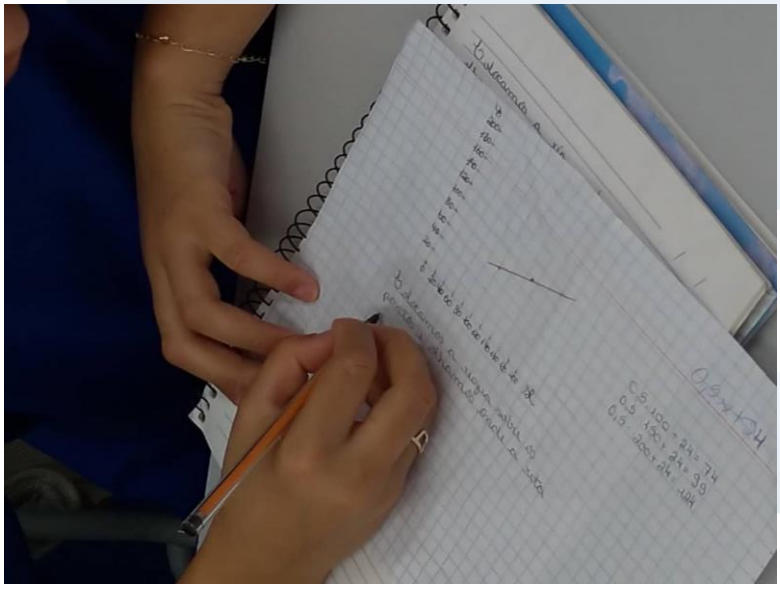
A partir dessa representação gráfica, cada grupo inicia a construção do modelo matemático algébrico referente ao seu experimento.

Professor (a),

Aqui, as trocas entre os alunos, observação de suas deduções e hipóteses são muito importantes. É nesta fase que percebemos se há compreensão, por parte deles, sobre os conceitos estudados, a relação entre as grandezas em que eles assentam o novo conhecimento e os caminhos que utilizam para a construção de um modelo matemático que expresse a realidade.

Na Figura 3, o relato da análise da representação gráfica e dedução do seu modelo matemático algébrico descrito pelo grupo de alunos.

Figura 3: Imagem e descrições do grupo 1 sobre a metodologia usada para encontrar o modelo matemático

Grupo - Tipo de bola usada	**Imagem e descrição da estratégia usada**
G1 - bola de Ping Pong - Oficial.	 *Fizemos com 3 medidas diferentes: 100, 150 e 200 centímetros. Colocamos a reta sobre os pontos e olhamos onde a reta iria chegar. Então, ela chegou no número 24 e o 0,5 achamos atrás de várias tentativas*

	pelo aplicativo Grapher. A fórmula é y=0,5x+24 e usamos a bola de Ping-Pong".

Fonte: Dos autores, com base na prática do grupo 1 (2019)

QUARTO ENCONTRO: APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Etapa Modelo Matemático: Apresentações dos resultados obtidos em cada grupo.

Objetivo: Socializar os resultados obtidos e comparar resultados.

Tempo Estimado da aula: Oitenta minutos.

Passos:

13) Apresentação do modelo matemático de cada tipo de bola.

14) Validação do modelo matemático construído. Nesta etapa, verifica-se a confiabilidade do modelo e, caso não seja satisfatório, volta-se à etapa anterior.

15) Conclusões e observações finais.

Desenvolvimento:

Cada grupo relata sua prática, as grandezas identificadas, as estratégias de obtenção e aferição de coleta de dados e explica como construiu o seu modelo matemático.

Professor (a),

Nesta etapa, ocorre a interação com o grande grupo, momento em que surgem críticas e questionamentos. Por exemplo, a confiabilidade da medição pode ser discutida, e um modelo, supostamente válido, colocado em dúvida. Logo, este, muitas vezes, necessita ser revisto por alguns grupos, que, inclusive, precisam refazer seu experimento.

Sob essa perspectiva crítica, Skovsmose (1994) e Borba e Skovsmose (2001) abordam a "ideologia da certeza", ou seja, o entendimento de que o uso da Matemática lembra certeza, precisão e verdade. E, nesse sentido, a modelagem pode contribuir para questionar essa ideologia, lançando um olhar crítico sobre as aplicações da Matemática, sua veracidade e confiabilidade (BARBOSA, 2004).

Os critérios usados nesta construção e a forma como são usados oportunizam discussões e fazem emergir um pensar crítico sobre o papel dos modelos matemáticos no âmbito social (BARBOSA; SANTOS, 2007).

Para exemplificar, seguem, no Quadro 4, relatos dos grupos em suas apresentações finais numa prática realizada numa escola pelos pesquisadores. Já no Quadro 5, expõem-se os modelos construídos por cada grupo com os diferentes tipos de bola.

Quadro 4: Descrições por grupo da metodologia usada para encontrar o modelo matemático

Grupo - Tipo de bola usada	**Descrição da estratégia usada**
G1 - bola de Ping Pong - Oficial.	*"Fizemos com 3 medidas diferentes: 100, 150 e 200 centímetros. Colocamos a reta sobre os pontos e olhamos onde a reta iria chegar, então ela chegou no número 24, e o 0,5 achamos atrás de várias tentativas pelo aplicativo Grapher. A fórmula é y=0,5x+24 e usamos a bola de Ping-Pong."*

<table>
<tr><td>G2 - bola de Ping Pong - Réplica.</td><td>“Pegamos a trena e a colocamos na parede e medimos cinco medidas diferentes. A primeira medida foi 1,65, e o pique da bolinha de Ping-Pong foi de 32 centímetros, a segunda medida foi de 1,96, e o pique da bolinha de Ping-Pong foi de 40 centímetros, e a terceira medida foi de 1,50, e o pique da bolinha foi de 32,5 centímetros, a quarta medida foi de 1,34, e o pique da bolinha foi de 29 centímetros, e a quinta foi de 1,60, e o pique da bolinha foi de 29,5 centímetros. Depois disso, nós fizemos um gráfico das medidas e chegamos a uma conclusão. Nós apoiamos a régua na reta, e ela chegou até o 12, depois usamos o aplicativo e chegamos ao 0,14.”</td></tr>
<tr><td>G3 - bola de Borracha.</td><td>“Nós encontramos a solução da fórmula y=0,54x+16. Usando uma bolinha de borracha! Nós tiramos 3 medidas diferentes e fizemos uma tabela:
<table>
<tr><td>Altura (x)</td><td>1,57</td><td>1,86</td><td>2,10</td></tr>
<tr><td>Volta (y)</td><td>1,00</td><td>1,16</td><td>1,27</td></tr>
</table>
Depois passamos para o plano cartesiano, formamos uma reta de 10 em 10 milímetros. Passando a régua sobre a reta que já tínhamos, encontramos, aproximadamente, que a reta se encontrava no 16. A partir daí, fomos jogando números somados a 16 e encontramos a função de y, que encaixou corretamente ao aplicativo que usamos para corrigir. Para chegar à resolução final, tivemos muita dificuldade, mas, ao mesmo tempo, nos desafiou muito, o que com certeza nos valorizou, pois agora temos uma ideia de como encontrar a solução. Todos ajudamos de uma maneira e no final juntamos todas as informações. Uns ajudaram mais nas medidas, e outros na formulação da fórmula”.</td></tr>
<tr><td>G4 - bola de Tênis.</td><td>“Fizemos uma média entre os pontos 1, 2, 3 e 4 e percebemos que a mesma formaria uma reta. Para fazermos essa reta, usamos uma régua e observamos que o início da reta era aproximadamente 10. Sendo assim, percebemos que a lei seria x+10. Para descobrirmos o restante da lei, usamos o aplicativo Grapher e testamos vários números. Os números que mais se aproximavam da nossa reta foram o 0,4 e o 0,5, mas não era exatamente o que queríamos, então achamos o 0,45, que era entre o 0,4 e o 0,5”.</td></tr>
</table>

Fonte: Dos autores, com base nas escritas dos grupos, 2020

Quadro 5: Modelos matemáticos encontrados com o *Grapher Free*

Grupo	Tipo de bola usada	Modelo matemático encontrado
1	PING PONG (oficial)	y=0,5x + 24
2	PING PONG (réplica)	y=0,14x + 12
3	BORRACHA	y=0,54x + 16
4	TÊNIS	y=0,45x + 10

Fonte: Dos autores, com base nos grupos da turma do 1º ano do Ensino Médio, 2020

Ao finalizar as apresentações, é importante proporcionar um momento de discussão com o grande grupo avaliando a metodologia e resultados obtidos. Caso surgirem ideias de novas situações-problema, o professor pode fomentar uma nova prática.

Atividade 2: Queda livre

PRIMEIRO ENCONTRO – APRESENTAÇÃO E PROBLEMATIZAÇÃO INICIAL

Etapa Interação: Apresentação do projeto e introdução à temática.

Objetivo: Introduzir a temática “queda livre de um corpo”, despertando curiosidade, e averiguar o conhecimento que os estudantes têm sobre o assunto.

Recursos: Projetor multimídia, computador,

Tempo Estimado da aula: Quarenta minutos.

Desenvolvimento:

Passos:

1) Problematização inicial.
2) Introdução do tema por meio da visualização do vídeo sobre queda livre de um corpo.
3) Discussão e problematização dos alunos sobre o tempo de chegada de um objeto ao solo.
4) Formação de grupos e simulação em sala de aula.
5) Construção da tabela para registro dos dados.
6) Distribuição do roteiro e materiais.

Problematização 1

Pegue um objeto pesado e outro leve: Qual dos dois chegará primeiro ao chão?

Introdução do vídeo

Professor (a),

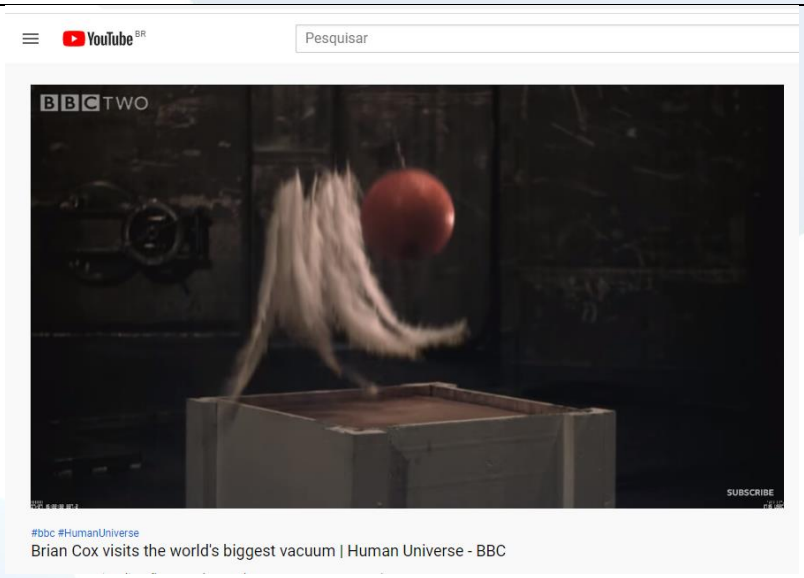
Fale um pouco sobre o vídeo aguçando a curiosidade dos alunos.

O vídeo “Brian Cox visita o maior vácuo do mundo” busca atrair a atenção do aluno para o fenômeno físico da queda livre de um corpo e suas implicações com o meio.

Se não houvesse gravidade, como aconteceria a queda de objetos?

Brian Cox visita o maior vácuo do mundo” (Figura 4), disponível em https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs. Ele expõe a gravidade com queda livre de bola-de-boliche e uma grande quantidade de penas em câmara gigante de vácuo na Terra.

Figura 4: Brian Cox visita o maior vácuo do mundo



Fonte: Universo Humano, BBC (2020)

Finda a exposição, é iniciado o debate, mediado pelo professor, a fim de ouvir os relatos das experiências de vida relacionadas ao vídeo. Essa nova discussão sobre o tema pode ser entendida como a primeira etapa da modelagem, que é a familiarização com o tema (BIEMBENGUT, 2007).

Professor (a),

Partindo do contexto das discussões, é dada a continuidade aos questionamentos conduzindo os alunos à problematização dos tempos de chegada de um objeto ao solo.

Problematização 2

E agora, qual a sua opinião? Qual dos dois chegará primeiro ao chão?

Para Bassanezi (2014), a Modelagem Matemática consiste em transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções serão interpretadas por meio da linguagem usual.

Nesse seguimento, formam-se os grupos (máximo com quatro integrantes), e ocorrem a distribuição do material e o roteiro do experimento.

SEGUNDO ENCONTRO – REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO

Etapa Matematização: Realização do experimento.

Objetivo: Realizar o experimento e coletar dados para modelação da “queda livre de um corpo”.

Recursos: Bolinha, cronômetro, trena, calculadora.

Tempo Estimado da aula: Oitenta minutos.

Passos:

7) Realização do experimento e coleta de dados.

8) Comparação dos tempos cronometrados em cada grupo.
9) Registro no quadro e cálculo da média dos resultados obtidos em cada altura.

Desenvolvimento:

Orientação 1: Distribuição do roteiro do experimento com explicação dos passos para realização da prática.

Orientação 2: Realização de uma simulação na sala de aula (1,0m; 1,5m; 2,0m) para testar e treinar o uso do cronômetro.

Professor (a),

Essa simulação é importante para amenizar erros de aferição.

Cabe ressaltar que, nas atividades realizadas pelo grupo de pesquisa, ocorreram erros de calibragem e manuseio do cronômetro. Portanto, é relevante que se meça três vezes cada altura determinada e também se faça um treinamento prévio do uso do cronômetro para que se tenha a menor margem de erro. possível.

Terminadas as orientações e realizada a simulação, passa-se para o momento da prática. Para isso, é necessário construir, para fins de registro, um quadro (Figura 5) com a exposição dos valores obtidos no experimento.

Figura 5: Construção do quadro para registro dos dados.

Construir o quadro seguinte na folha de bloco:

Altura (m)	Tempo 1	Tempo 2	Tempo 3	Média
1,0				
1,5				
2,0				
2,5				
3,0				
3,5				
4,0				
4,5				
5,0				

Fonte: Dos autores, 2020

Em seguida, é realizada a demarcação das alturas e execução da prática.

Professor (a),

A atividade consiste em abandonar uma bolinha de aço a partir de uma determinada altura e medir o tempo em que ela se desloca até o chão. Para isso, os alunos são convidados a realizar o experimento, abandonando a bolinha de alturas entre um a cinco metros com, no mínimo, cinquenta centímetros de intervalo entre cada altura.

Para fins de ilustração, segue a Figura 6, que retrata o momento do abandono da bolinha de aço por um dos alunos enquanto os demais, por grupo, cronometram o tempo de queda.

Figura 6: Prática sobre queda livre

Altura (m)
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1

Fonte: Dos autores (2018), com base em práticas realizadas em escolas parceiras

Orientação 3:

1. Posicionar o corpo esférico (bolinha de aço) na posição um metro.

2. Acionar o cronômetro, realizando as mensurações do tempo em todos os deslocamentos previstos nas alturas determinadas.

3. Registrar no quadro os deslocamentos e tempo de queda obtidos em cada altura demarcada.

4. Cálculo das médias dos tempos obtidos em cada altura.

5. Após a coleta desses dados, observar a possível relação entre o tempo de queda da bolinha de aço e a altura em que foi abandonada.

Ao final, acontece a comparação dos dados obtidos entre os grupos. Este momento serve para discussões e questionar a precisão na mensuração dos dados obtidos.

Professor (a),

Neste momento, podem surgir erros de aferição, detectados pela discrepância dos valores em uma mesma queda.
Para isso, é importante questionar e buscar a possível causa, bem como descartar valores muito divergentes, juntamente com os alunos.

Professor (a),
Nessa perspectiva, as ideias matemáticas que foram construídas pelo aluno no decorrer das atividades de modelagem propostas nesta pesquisa, os questionamentos, os dados não exatos, as aproximações, as validações ou não contribuem para a formação de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

Borba e Skovsmose (2001) discutem a relação dos modelos matemáticos com a sociedade. Esses autores abordam a “ideologia da certeza”, ou seja, o entendimento de que o uso da Matemática lembra certeza, precisão e verdade. E, neste sentido, a modelagem pode contribuir para questionar essa ideologia, colocando um olhar crítico sobre as aplicações da Matemática, sua veracidade e confiabilidade (BARBOSA, 2004).

TERCEIRO ENCONTRO: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA, IDENTIFICAÇÃO DA CURVA E CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Etapa Matematização: Análise, validação dos dados, representação gráfica e construção do modelo matemático.

Objetivos:

- Comparar medidas e identificar o padrão que se estabeleceu. Perceber mensurações fora do padrão.

- Representar graficamente os dados obtidos. Identificar o tipo de gráfico resultante.

- Criar o modelo matemático.

Recursos: Tabela de dados, *softwares Excel* ou Geogebra.

Tempo Estimado da aula: Oitenta minutos.

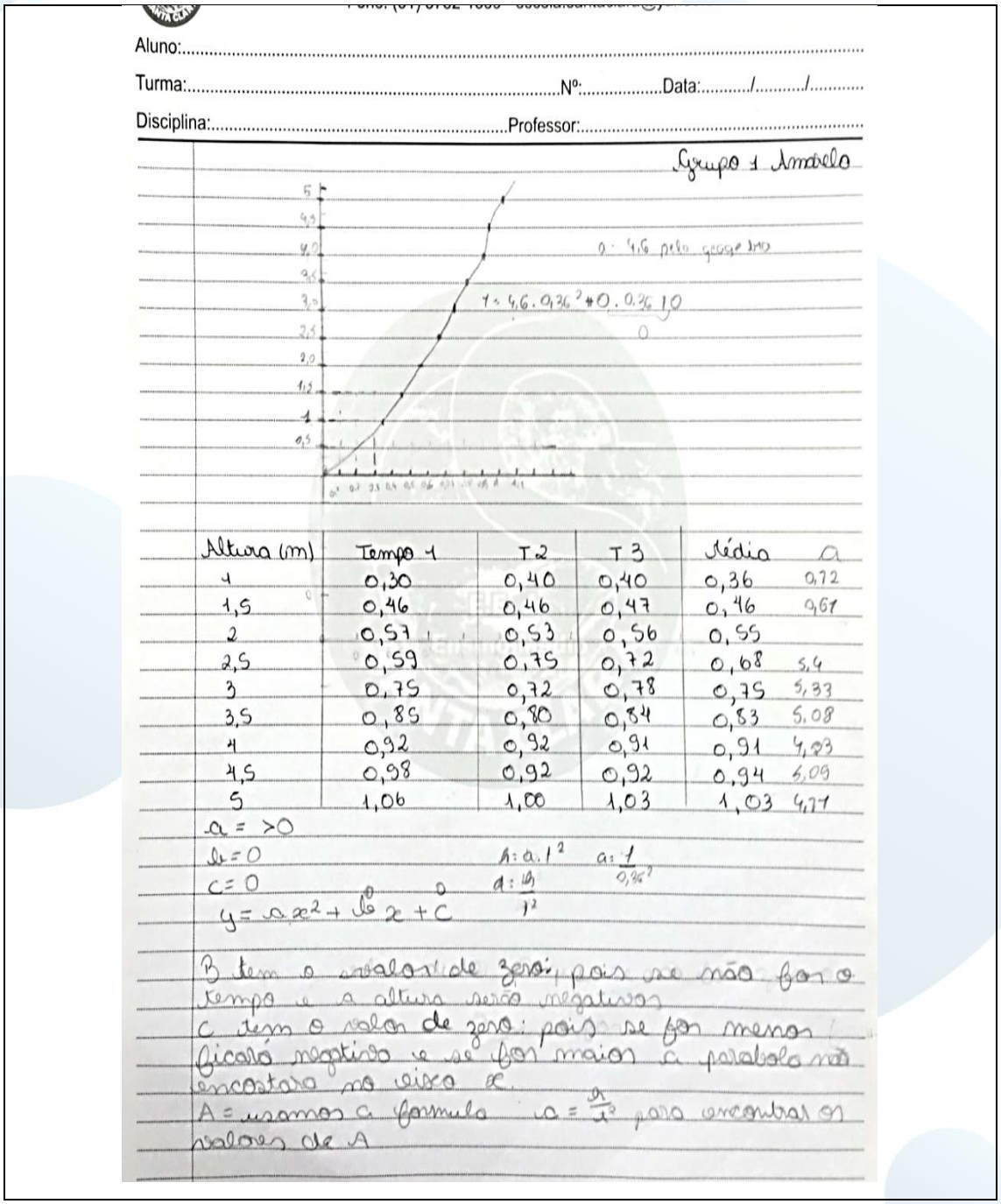
Passos:

10) Representação gráfica.
11) Discussão, a partir dos dados coletados, sobre o tipo de função.
12) Identificação do tipo de curva (*Excel*).
13) Análise dos coeficientes da parábola (Geogebra).
14) Cálculo do valor do coeficiente de a, relacionando-o com a gravidade.
15) Construção do modelo matemático.

Desenvolvimento:

Marcação, no Sistema Cartesiano, dos pontos obtidos nos dados coletados do experimento. Identificação do tipo de traçado do gráfico e observação de um padrão. Para ilustrar essa atividade, seguem, na Figura 7, o registro dos dados e a sua representação gráfica.

Figura 7: Registro dos dados e representação gráfica referente à queda da bolinha de aço



Aluno:.....

Turma:.....Nº:.....Data:...../...../.....

Disciplina:.....Professor:.....

Grupo 1 Amarelo

Altura (m)	Tempo 1	T 2	T 3	Média	a
1	0,30	0,40	0,40	0,36	0,72
1,5	0,46	0,46	0,47	0,46	0,67
2	0,57	0,53	0,56	0,55	
2,5	0,59	0,75	0,72	0,68	5,4
3	0,75	0,72	0,78	0,75	5,33
3,5	0,85	0,80	0,84	0,83	5,08
4	0,92	0,92	0,91	0,91	4,83
4,5	0,98	0,92	0,92	0,94	5,09
5	1,06	1,00	1,03	1,03	4,77

a = >0

b = 0

c = 0

$y = ax^2 + bx + c$

$A = a.t^2$ $a = \frac{1}{0,36^2}$

$a = \frac{A}{t^2}$

B tem o valor de zero; pois se não for o tempo e a altura serão negativos

C tem o valor de zero: pois se for menor ficará negativo e se for maior a parabola não encostara no eixo x.

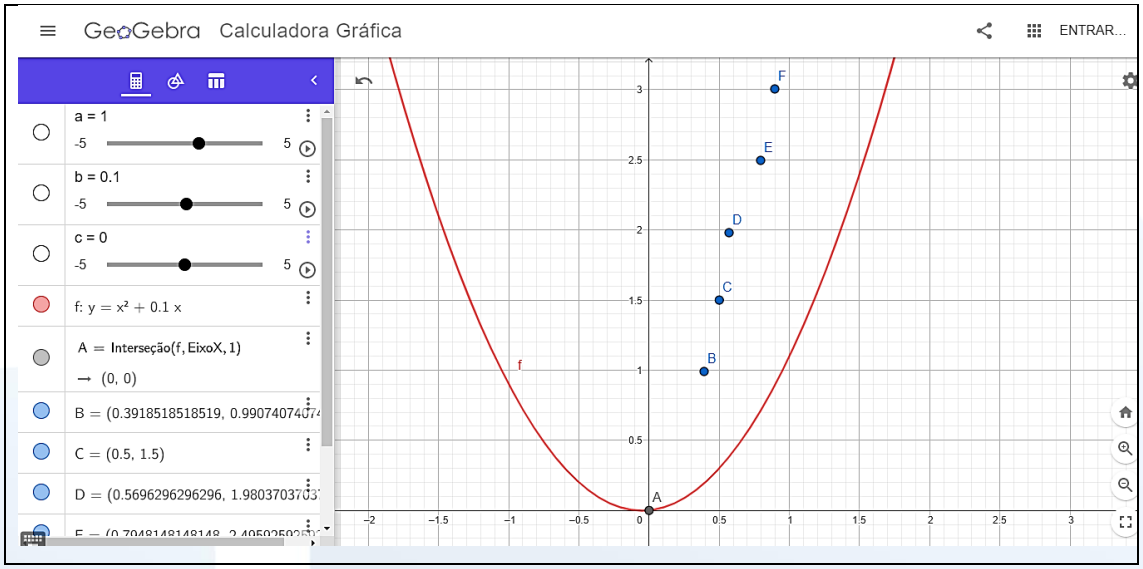
A = usamos a formula $a = \frac{A}{t^2}$ para encontrar os valores de A

Fonte: Dos autores (2019), com base na atividade realizada por um dos grupos

Marcação dos pontos nos *sotwares Excel* buscando um ajuste de curva e semelhança com uma parábola.

Partindo da ideia de parábola, inserir os coeficientes da função de 2º grau "$y=ax^2+bx+c$" no Geogebra e usar o controle deslizante[1]. Na Figura 8, consta um exemplo dessa atividade:

Figura 8: Comparação e ajuste manual da função de segundo grau e dados obtidos no experimento, utilizando o controle deslizante



Fonte: Dos autores, 2020

Exploração, no GeoGebra, utilizando o controle deslizante para pensar em valores de "b" e "c" que podem definir o modelo matemático algébrico correspondente ao obtido na representação gráfica.

Questionamentos:

Qual o valor de cada incógnita? (a, b e c?). Por quê? Como você descobriu?

.

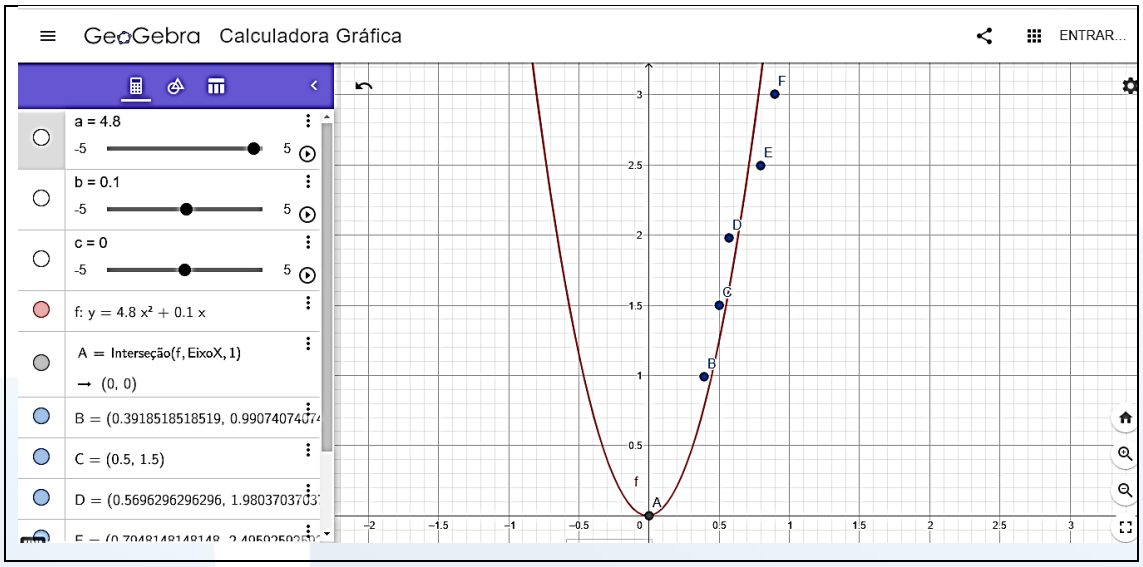
Professor (a),

Neste momento, é importante estar atento e observar, fazendo questionamentos que conduzam ao foco, ou seja, obter um modelo algébrico com maior precisão para um corpo em queda livre.

[1] Um controle deslizante é uma interface gráfica que permite ajustar o parâmetro em um intervalo que contém valores pré-definidos quando o usuário move determinado marcador. Nesta proposta foi usado para variar os parâmetros a, b e c na função do segundo grau.

Ao deslizar em direção ao número cinco no coeficiente “a”, a curva se aproxima dos pontos coletados no experimento (Figura 9). Com isso, os alunos encontrarão um valor próximo de cinco para o coeficiente “a”. A imagem a seguir mostra essa aproximação:

Figura 9: Deslizamento do coeficiente “a” e a aproximação da curva aos pontos coletados do experimento e marcados no Geogebra



Fonte: Dos autores, 2020

Com essa aproximação, é possível deduzir a função de 2º grau, ou seja, o modelo matemático algébrico para um corpo em queda livre.

Professor (a),

Este é o momento de retomar a problematização inicial e relacionar o coeficiente a encontrado com a gravidade.

Comparar o valor de “a” no gráfico e relacionar com o da gravidade. Calcular o médio de “a”, usando a tabela.

QUARTO ENCONTRO – APRESENTAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Etapa Modelo Matemático: Apresentação e validação do modelo matemático.

Objetivos:

- Validar o modelo matemático obtido na prática.

- Reconhecer a interligação dos saberes.

Recursos: Computador, projetor multimídia, *software Phet*.

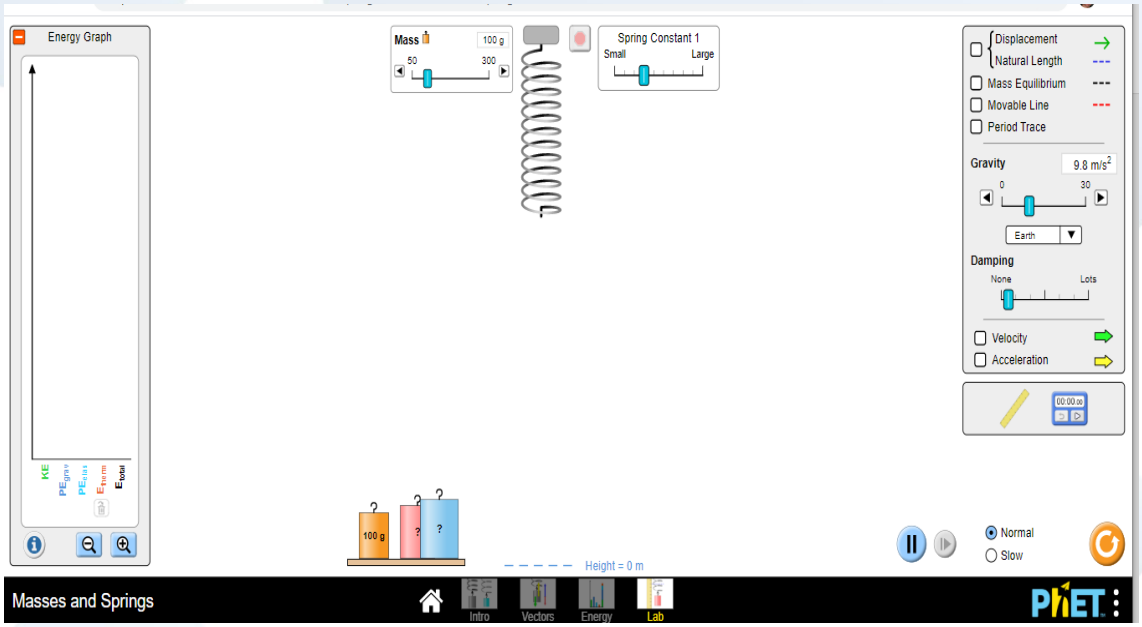
Tempo Estimado da aula: Quarenta minutos.

Desenvolvimento:

Apresentação e discussão dos modelos matemáticos, estabelecendo relação entre o modelo obtido e a fórmula da Física para um corpo em queda livre: $H = g.\frac{t^2}{2}$

Simular situações no *Phet*, identificando a gravidade em cada planeta, disponível em https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_pt_BR.html

Figura 10: Simulador *Phet*



Fonte: Dos autores, 2020, com base no *software Phet*

O simulador foi utilizado para ressaltar as acelerações da gravidade em distintos planetas, já que a prática foi desenvolvida no planeta Terra. O intuito foi

aguçar a curiosidade dos alunos e problematizar estas grandezas físicas em diferentes contextos. Para tal, o aluno seleciona um peso disponível (aqui visíveis nas cores laranja, rosa e azul) e pendura ele na mola. A seguir, escolhe um planeta para simular a aceleração de gravidade e vai observando as distintas deformações da mola. Desta forma o aluno investiga também como se dá a queda livre em distintos planetas.

Considerações finais

Ao finalizar essa sequência de atividades, com base em nossas experiências, podemos inferir que a Modelagem Matemática contempla um dos aspectos mais relevantes ao ato de ensinar, ou seja, propicia um ambiente de aprendizagem em que o aluno aprende a buscar soluções para as mais diferentes situações. Segundo Bassanezi (2015), um dos autores que embasou este trabalho, a utilização da modelagem na Educação Matemática valoriza o “saber fazer” do estudante e desenvolve sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos em seus diferentes contextos de aplicações, a partir da realidade de seu ambiente, unindo teoria e prática.

Porém, a implantação da MM em sala de aula requer mudança dos papéis do aluno e do professor. Essa metodologia, que tem o primeiro como protagonista no processo de aprendizagem, exige do segundo uma reorganização, pois o planejamento das aulas é aberto; logo, ele tem que lidar com a imprevisibilidade, a não linearidade do currículo e o tempo. Além disso, acostumados a um ensino que se resume à reprodução e resolução de exercícios, muitos discentes impõem uma certa resistência inicial.

Cabe ressaltar que, no decorrer das atividades, as dificuldades emergiram tanto por parte dos professores quanto dos alunos. Estes, por serem as suas primeiras experiências com MM, mostraram-se apreensivos, mas motivados à nova metodologia de ensino. Na atividade de queda livre, foi necessário “ensaiar” o uso do cronômetro, tendo em vista as dificuldades dos grupos em manusear o instrumento. Para os docentes, a insegurança fez parte do processo. Contudo, tais dificuldades fazem parte do processo e podem ser contornadas seguindo

orientações de autores referência em MM e buscando informações com grupos de pesquisa. Nesta perspectiva, é importante dar continuidade à aplicação dessa metodologia, pois permite que o professor adquira sempre mais experiência e segurança.

No que se refere ao tempo, a aplicação da MM demanda, sim, que ele seja maior, pois implica criar hipóteses, pensar estratégias, testar, trocar ideias, discutir, experimentar, construir modelo matemático, apresentar e validar. Esse tempo que, num primeiro momento, pode passar uma sensação de “perdido”, é ganho em habilidades de futuros pesquisadores. Portanto, o tempo “perdido” é um tempo ganho, um tempo que forma, um tempo que transforma, um tempo que mostra ao professor que, apesar das inseguranças e medos iniciais, há o apoio dos que já estão realizando essa prática, dos trabalhos feitos, dos referenciais teóricos e, principalmente, dos grupos de pesquisa das universidades.

E, assim, o termo pesquisa passa a transitar nas aulas com naturalidade e propriedade pelos alunos e professores. Ademais, estes, ao incorporarem o novo perfil de pesquisadores não mais fornecem respostas prontas, nem ensinam puramente cálculos, mas interligam saberes e significação, realizando, dessa forma, a verdadeira “sina” do ensinar. Enfim, esperamos que, com as atividades aqui sugeridas, eles se sintam encorajados e seguros a incorporar essa abordagem pedagógica às suas práxis.

Referências

ALMEIDA, Lourdes M. W.; DIAS, Michele R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo: ano 17, n. 22, p. 19 – 35, 2004.

ALMEIDA, Lourdes M. W. de; SILVA, Karina P. da; VERTUAN, Rodolfo E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1. ed., 1ª reimpressão - São Paulo: Contexto, 2013.

BARBOSA, Jonei C. A “contextualização” e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 8., 2004, Recife. **Anais** [...] Recife, SBEM, 2004.1 CD-ROM.

BARBOSA, Jonei C. Integrando Modelagem Matemática nas Práticas Pedagógicas**. Educação Matemática em Revista**. São Paulo, ano 14, n. 26, p. 17-25, mar. 2009.

BARBOSA, Jonei C.. **Modelagem Matemática:** concepções e experiências de futuros professores. 2001. 268f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, Jonei C; SANTOS, Marluce A. Modelagem matemática, perspectivas e discussões. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. **Anais** [...] Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, Rodney C.. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, Rodney C.. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 4 ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BASSANEZI, Rodney C.. **Modelagem Matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2007.

BIEMBENGUT, Maria S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA** - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia. Florianópolis, Santa Catarina, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2009.

BORBA, Marcelo C.; SKOVSMOSE, Ole. A ideologia da certeza em educação matemática. *In*: SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001. cap. 5. p.127-148.

CALDEIRA, Ademir D. Modelagem matemática: Um outro olhar. **ALEXANDRIA**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia. Florianópolis, Santa Catarina, v.2, n. 2, p. 33-54, jul. 2009.

HEINEN, Camila A.; REHFELDT, Márcia J. H.; NEIDE, Italo G.; BÖCKEL, Wolmir J.; KONIG, Rosilene I. Atividades experimentais e modelagem matemática: uma prática realizada com alunos do ensino médio politécnico. **Caderno Pedagógico.** Lajeado, Rio Grande do Sul, v. 13, p. 139-155, 2016.

MEYER, João Frederico C. A.; CALDEIRA, Ademir D.; MALHEIROS, Ana Paula S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3. ed; reimp - Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

NEIDE, Italo G.; BÖCKEL, Wolmir J.; KÖNIG, Rosilene I.; HAEFLIGER, Camila; REHFELDT, Márcia J. H. Problematizando experiências de modelagem matemática desenvolvidas no ensino médio. **Dynamis**. Blumenau, Santa Catarina, v. 24, n. 1, p. 77-93, 2018.

NEIDE, Italo G.; REHFELDT, Márcia J. H.; DULLIUS, Maria M.; BÖCKEL, Wolmir J.; KOEFENDER, Silas E.; LOHMANN, Vinicius B. Problematizando modelagem matemática por meio de uma situação-problema identificada na prática laboral de um engenheiro civil. **Caderno Pedagógico**. Lajeado, Rio Grande do Sul, v. 10, p. 79-95, 2013.

PISCHING, Isabel; REHFELDT, Márcia J. H. ; BOCKEL, Wolmir J.; NEIDE, Italo G.; KONIG, Rosilene I.; HEINEN, Camila A.; BROILO, Ana P. Modelagem matemática: um olhar sobre os alunos e a professora envolvida a partir de uma prática de modelagem. *In*: Congresso Internacional de Ciência, Tecnologia e Conhecimento, 1, 2017, Lajeado. **Anais** [...] Congresso Internacional de Ciência, Tecnologia e Conhecimento. Lajeado: Univates, 2017. v. Único. p. 107-107.

REHFELDT, Márcia J. H.; NEIDE, Italo G.; BÖCKEL, Wolmir J.; AZAMBUJA, Karina. As Implicações de uma prática de modelagem matemática desenvolvida a partir da cobertura de uma casa. **Atos de pesquisa em educação. Blumenau, Santa Catarina,** v. 14, n. 1, p. 193-218, 2019.

REHFELDT, Márcia J. H.; NEIDE, Italo G.; BÖCKEL, Wolmir J.; BROILO, Ana P.; PISCHING, Isabel; HEINEN, Camila. A.; KONIG, Rosilene I. Modelagem

matemática no ensino médio: uma possibilidade de aprendizagem a partir de contas de água. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, São Paulo, v. 9, n. 1, p. 103-121, 2018.

REHFELDT, Márcia J. H.; PUHL, Neiva M.; NEIDE, Italo G. Modelagem matemática: descobrindo o volume em uma fôrma de bolo. **Kiri-Kerê**, Espírito Santo, n. 3, p. 19-33, 2017.

REHFELDT, Márcia J. H.; DENTE, Elise C.; NEIDE, Italo G.. Práticas de monitoramento cognitivo em atividades de modelagem matemática. **Kiri-Kerê,** Espírito Santo, n. 1, p. 120-125, 2017.

ROSA, Milton; OREY, Daniel C. A dimensão crítica da modelagem matemática: Ensinando para a eficiência sociocrítica. **Horizontes**, Bragança Paulista, SP, v. 25, n. 2, p. 197 - 206, jul - dez. 2007.

SKOVSMOSE, Ole. ***Towards a philosophy of critical mathematics education****. Dordrecht*: Kluwer Academic Publishers, 1994.

APÊNDICE A

Roteiro da Atividade 1

a) Escolher a bola a ser usada na atividade.

b) Definir no mínimo 3 alturas de abandono da bola.

c) Demarcar na parede essas medidas utilizando fita métrica ou trena que deverá ser fixada na parede.

d) Após abandono da bola em cada altura, medir o retorno da mesma após quicar no chão.

e) Registrar a altura e o repique respectivo a cada altura.

APÊNDICE B

Roteiro da atividade 2

a) Demarcar na parede as medidas 1m; 1,5m; 2m; 2,5m; 3m; 3,5m; 4m; 4,5m e 5m, utilizando fita métrica ou trena.

b) Após abandonar a bola em cada altura demarcada cronometrando o tempo de queda, respectivamente.

c) Repetir 3 vezes, ou seja, abandonar e cronometrar 3 vezes a queda em cada altura.

d) Registrar numa tabela a altura e os tempos.

e) Calcular a média dos tempos de cada altura.