UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

Modelagem Matemática para o estudo de análise combinatória

Mathematical modeling for the combinatory analysis study

Sandra Maria Filardo[1], Maria Madalena Dullius[2]

[1] Mestranda em Ensino de Ciências Exatas-Univates - sandra.cardoso@universo.univates.br

[2] Dra. em Ensino de Ciências- Universidade de Burgos - madalena@univates.br

Finalidade: O presente produto educacional propõe uma sequência didática para o uso da Modelagem Matemática como metodologia para o estudo de Análise Combinatória aos alunos do 2º ano do Ensino Médio. As atividades apresentadas envolvem situações-problema referentes ao Princípio Fundamental da Contagem pelo processo de indução e não aplicações de fórmulas.

Contextualização

Este produto educacional é um recorte da dissertação de Mestrado, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade do Vale do Taquari-Univates, intitulada " Modelagem Matemática como metodologia para o estudo de Análise Combinatória". A intervenção pedagógica que deu origem a esse produto educacional foi realizada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, com faixa etária de 16 e 17 anos. Sendo a Análise Combinatória um conteúdo específico do 2 ano do Ensino Médio, os alunos não possuíam conhecimentos prévios sobre o conteúdo em questão.

As sugestões de atividades deste produto educacional, tendo como metodologia a Modelagem Matemática como ferramenta de indução ao estudo de Análise Combinatória, buscam direcionar papéis que muitas vezes não são vistos durante o ano letivo: o professor como mediador de conhecimentos e o aluno sendo protagonista do seu aprendizado. Nesse viés, partindo de situações reais, do cotidiano do aluno, é possível destacar os pré-requisitos com relação a educação da Matemática básica estudada pelos alunos durante seus anos de estudos anteriores. Para o referencial teórico, buscou-se autores da Modelagem Matemática desde a implementação da mesma no Brasil até os autores da nova geração como Silva e Vertuan.

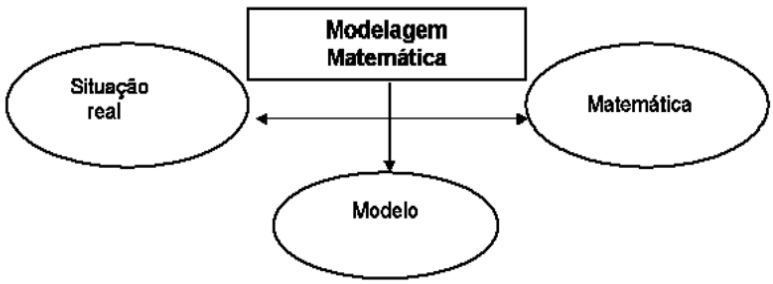
Segundo Biembengut e Hein (2000, p. 7), " A modelagem Matemática, arte de expressar por intermédio de linguagens matemáticas situações-problema de nosso meio, tem estado presente desde os tempos mais primitivos. Isto é, a modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos. Trazer para a sala de aula, situações reais, do cotidiano do aluno, faz da Matemática uma disciplina real, manipulável e construída através das pesquisas, questionamentos, testagens de forma natural, diante dos olhos de cada aluno.

Aquela pergunta que sempre são indagadas em sala de aula: Onde uso esse conteúdo professora, somente em sala de aula? Esse tipo de questionamento deve ser sanado quando começarmos a trazer o concreto, o dia-a-dia antecedendo o conteúdo que será abordado, mostrando à eles que sim, a Matemática está presente em seu dia-a-dia, principalmente aquelas às quais eles trabalharam tantas vezes no formato de exercícios com repetição sem significado algum, porém, ao elencá-las em sua vivência, elas terão e farão todo sentido.

Segundo Biembengut e Hein (2000), a Modelagem Matemática nos proporciona um conjunto de etapas que, se bem direcionadas proporcionará um Modelo Matemático e foram

essas etapas que nortearam a presente intervenção de acordo com o esquema localizado na Figura 1 -" Em primeiro lugar, precisamos considerar a Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino, pois modelar é dar formas, assim como as crianças criam formas, figuras as quais estão no seu cotidiano com uma massinha de modelar, usando sua imaginação e criatividade, a Modelagem Matemática vem nesse viés. Modelar a Matemática é trazer em uma situação-problema do cotidiano do aluno, algo palpável, real e não abstrato para dentro do contexto de sala de aula". Hoje, mais do que nunca, percebemos o quanto a Matemática necessita ser reestruturada em seu currículo, nós professores devemos deixar a decoreba de fórmulas para trás e nos atentar aos pré-requisitos trazidos pelos alunos através das suas vivências. Segundo Biembengut e Hein (2000, p. 11)" ... Muitas situações do mundo real podem apresentar problemas que requeiram soluções e decisões. Alguns desses problemas contêm fatos matemáticos relativamente simples, envolvendo uma matemática elementar." Seguindo a mesma linha de raciocínio, Biembengut e Hein (2000, p. 13) afirmam que: "Genericamente, pode-se dizer que a matemática e a realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir.

Figura 1 - Esquema do processo da Modelagem Matemática



Fonte: Biembengut e Hein (2000, p. 13).

Para Biembengut e Hein (2000), Figura 2, após a escolha do tema, deve ser feito um estudo sobre o assunto de modo indireto, por meio de livros e revistas, entre outros, ou por meio de experiência de campo, dados experimentais obtidos com especialista da área. Em seguida, deve-se classificar as informações como relevantes ou não, levantar hipóteses, selecionar variáveis para a coleta e análise dos dados. Após todos esses processos de construção dos saberes matemáticos, todos irão retornar à questão que gerou todo esse processo, para que possam chegar a uma solução. A própria questão formulada pode se tornar um modelo, pois, para respondê-la, uma sequência didática irá acontecer e chegando nessa solução final, será o momento de avaliar e validar o modelo matemático.

Figura 2 - Desenvolvimento do conteúdo programático

Fonte: Biembengut e Hein (2000, p. 22).

De acordo com Barbosa (2001, p. 9), cada configuração curricular de Modelagem é vista em termos de casos, referindo-se às diferentes possibilidades de organização curricular da Modelagem classificadas em casos 1, 2 e 3:

1) Caso 1. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.

2) Caso 2. O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.

3) Caso 3. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

Neste produto educacional, foi aplicado o Caso 2, os alunos buscaram informações, testaram hipóteses, coletaram dados, criaram um modelo, discutiram e validaram os resultados encontrados a cerca de uma situação-problema, escolhido pela professora-pesquisadora, no qual o tema fazia parte da rotina/cotidiano do aluno ou afetava sua vida social. No caso 2 a professora-pesquisadora ocupou o papel de mediadora, e quem deteve o papel de protagonista de seu conhecimento foram os alunos. A professora observou, acompanhou os trabalhos desenvolvidos nos grupos, tirou dúvidas com relação a conteúdos matemáticos base (pré-requisitos), fez a reflexão dos dados encontrados, conduziu os alunos nas formulações das situações-problema, deu suporte aos mesmos para que pudessem se apropriar de novos conceitos matemáticos e conceitos que ficaram perdidos durante os dois anos letivos que foram sacrificados pela pandemia.

Neste produto educacional, buscou-se trazer a Matemática trabalhada em sala de aula com maior significado, pois, de acordo com os autores supramencionados “o que significa ir além das simples resoluções de questões matemáticas, muitas vezes sem significado para o aluno, e levá-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria da Matemática quanto da natureza do problema a ser modelado”, ou seja, a modelagem no ensino pode ser o caminho para novas descobertas, o despertar do aluno por interesse em tópicos matemáticos ainda desconhecidos por ele, porém, oportunizando-se a estudar e pesquisar situações-problema

desenvolvendo seu senso crítico.

Corroboram com essa dialética Jacobini e Wodewotzki (2006) ao mencionar que a aplicabilidade da modelagem em sala de aula pelo professor, demonstra que o mesmo tem a intenção de ensinar matemática, porém, ao explorar as aplicações matemáticas no dia-a-dia, a construção de modelos e o relacionamento entre a matemática utilizada na modelagem e o conteúdo programático, o professor oferece ao aluno a oportunidade de conviver com conteúdos vivos, práticos, úteis e com bastante significado, dando vida a uma Matemática abstrata. Araújo (2009) nos faz refletir sobre a perspectiva sócio-crítica com relação a Modelagem, pois a mesma tem um grande impacto na comunidade de modelagem Matemática e na educação Matemática, influenciando não apenas práticas educacionais como também o desenvolvimento de pesquisas, rompendo barreiras físicas, emocionais e sociais.

Objetivo

Descrever a prática pedagógica por meio de sequência de atividades com a finalidade de verificar as potencialidades da Modelagem Matemática no estudo de Análise Combinatória.

Detalhamento

As ações que propomos neste produto educacional foram desenvolvidas no primeiro semestre de 2022, em uma turma de aproximadamente 30 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual, localizada em Guarantã do Norte- MT. Estas decorreram durante 6 encontros, desses encontros 5 foram em sala de aula, localizada na escola aqui referida, totalizando 13 horas-aula e 1 encontro ocorreu na Agência do DETRAN e Casa de Placas,

ambos localizados na cidade em que reside a pesquisa. A princípio foi realizada uma sondagem para verificação dos pré-requisitos com relação à Matemática básica da turma e representam a proposta de intervenção pedagógica ocorrida de acordo com uma pesquisa desenvolvida no Mestrado de Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari (UNIVATES) e encontra-se na íntegra na dissertação da autora disponível na página do curso PPGCE. A pesquisa foi de caráter qualitativo e estudo de caso 2 de *Barbosa.* Os resultados da pesquisa foram coletados através de gravações de áudio, diário de bordo, materiais impressos e materiais produzidos pelos alunos.

Nos Quadros 1, 2 e 3 apresentamos um breve relato das atividades que foram desenvolvidas durante esta intervenção.

Quadro 1 - Interação

Encontros	Atividades	Objetivos	Duração
1ª Encontro: Interação- Escolha do tema e familiarização.	Apresentação inicial, diálogo, apresentação do projeto, elucidações sobre o termo de Livre e Esclarecido, organização dos grupos de trabalhos (GT1 ao GT6).	-Realizar o diagnóstico com relação ao tema de acordo com a vivência de cada um; - Incentivar a pesquisa; - Promover a habilidade de trabalhar em grupos, ou seja, trabalhar o convívio social.	3 horas-aula
2º Encontro: Interação- A pesquisa exploratória.	- Apresentações sobre a pesquisa de campo realizada por cada GT. na aula anterior e como tarefa de casa. -Organização com relação ao questionário e representante de cada GTs para a entrevista	-Incentivar a pesquisa; -Trabalhar o convívio social (respeitar a opinião alheia). - No momento das apresentações de cada GT, estarão trabalhando a oratória.	2 horas-aula

(Continua...)

(Conclusão)

Encontros	Atividades	Objetivos	Duração
	com um profissional do DETRAN no período vespertino.		
3º Encontro: Interação: Pesquisa *in locu*.	Pesquisa de campo-visita ao DETRAN, entrevista com o profissional, conhecer os departamentos e suas funcionalidades e visita a Casa de Placas.	-Promover a habilidade em formular questões; -Incentivar a pesquisa; -Trabalhar a oratória; -Prepará-los para serem protagonistas do seu aprendizado.	1 hora-aula

Fonte: Das autoras (2022).

Quadro 2 - Matematização

Encontros	Atividades	Objetivos	Duração
4º Encontro: Matematização - Propondo resposta.	Reunião dos GTs para discutir sobre a pesquisa de campo realizada no encontro anterior. Apresentação por GTs sobre as respostas dos questionários realizados por cada grupo durante a entrevista. Intervenção com três diferentes situações-problema.	- Apropriar-se de diferentes estratégias para a resolução das situações-problema; - Perceber e interpretar os diferentes dados numéricos inseridos no contexto do problema, levá-lo para o seu cotidiano e tentar chegar a uma solução.	3 horas-aula
5º Encontro: Matematização - Propondo questões.	Elaboração de situações-problema para verificar o Modelo encontrado. Debate reflexivo.	Identificar um modelo matemático a partir da relação da coleta de dados com as situações-problemas resolvidas no encontro anterior e as formuladas pelo aluno.	2 horas-aula

Fonte: Das autoras (2022).

Quadro 3 - Validação

Encontros	Atividades	Objetivos	Duração
6º Encontro: Validação	-Solucionar as situações-problema formulada por cada GT, apresentar as respostas encontradas. - Solucionar a situação-problema elencada pela professora-pesquisadora para reforçar a verificação quanto ao modelo encontrado e validá-lo.	Analisar o Modelo até então encontrado pela turma, reforçar a verificação quanto a sua validade e caso a turma entre num consenso, o mesmo será validado.	3 horas-aula

Fonte: Das autoras (2022).

Em seguida, apresentamos um detalhamento dos três primeiros encontros que seguiram a primeira etapa da Modelagem de acordo com Biembengut e Hein (2000): a Interação.

Primeiro encontro - Interação

No primeiro encontro, com a finalidade de esclarecer como seria o funcionamento da proposta de intervenção, fazendo uso da Modelagem Matemática como metodologia de trabalho, esclareceu-se os objetivos, como seria o desenvolvimento dessa pesquisa científica e sua importância para a educação. Sobre o termo de Livre e Esclarecido, foi explicado a sua importância para os alunos, para os pais, a escola e a professora-pesquisadora.

Logo em seguida, a turma foi dividida em 6 grupos contendo 5 integrantes cada. A técnica utilizada foi por afinidade. Após a organização da sala, foi entregue o diário de bordo em conjunto com explicação sobre a importância dele nesta pesquisa. Cada aluno colocou seu nome, o número do grupo a qual pertencia e escreveu um texto falando um pouco das suas vivências (onde, com quem mora, se mora na zona rural ou urbana…). Em seguida foram

introduzidas as etapas de Biembengut e Hein (2000), com relação à Modelagem.

Na sequência, serão descritas as atividades introduzidas de acordo com as etapas de Biembengut e Hein (2000), com relação à Modelagem, as pesquisas realizadas pela turma e a prática pedagógica realizada nesses 6 encontros totalizando 14 horas-aula.

Interação - Exposição e familiarização com o tema

Esta etapa vem com o objetivo de conhecer o tema proposto, conversar sobre ele, recolher os pré-requisitos (o que o aluno viu sobre o tema no dia-a-dia), se familiarizar com ele. Na sequência, foi entregue 3 questões que seriam utilizadas como atividades exploratórias, para que mais tarde fossem elencadas na coleta e análise de dados.

Quadro 4 - Atividades Exploratórias

01- Quais são as possíveis combinações realizadas por você durante o seu dia-a-dia? Cite um exemplo e o número de combinações.
02- Ao observar o ambiente escolar, dê três exemplos de combinações que poderiam ser realizadas.
03- Após o diálogo com seu grupo, cite duas possíveis combinações vivenciadas por toda a sociedade no dia-a-dia. No que essas combinações contribuíram na vida social de cada indivíduo? Caso não existissem essas combinações mencionadas pelo grupo, o que refletiria para a sociedade?

Fonte: Das autoras (2022).

Após responderem as questões, cada grupo debateu entre si e com os restantes grupos da sala sobre suas respostas. Logo em seguida, cada grupo de organizou com relação a pesquisa de campo que iriam fazer sobre o tema proposto: A troca das placas de carro pelos atuais Padrão Mercosul.

Duração: 3 horas-aula

Segundo encontro: Interação - Resultado da Pesquisa exploratória, discussões sobre o material coletado por cada grupo e elaboração de questões

Neste encontro ocorreu trazendo como pauta o resultado da pesquisa exploratória realizada durante a semana e os resultados registrados no diário de bordo. A priori os alunos se organizaram de acordo com seus grupos para trocarem informações e debater sobre o que cada um pesquisou e de que forma essa pesquisa irá colaborar com o projeto de intervenção.

Logo após, cada grupo ficou responsável por indicar um membro para estar realizando a pesquisa de campo no DETRAN e Casa de Placas, localizados na cidade onde residem. Cada grupo preparou seu banco de questões.

Duração: 2 horas-aula

Terceiro encontro: Interação - Pesquisa exploratória: entrevista

O terceiro encontro realizou-se dia 26/04/2022 das 16:00 às 17:00 no estabelecimento do Detran e Casa de Placas, ambos localizados na cidade pertencente ao trabalho de pesquisa.

Durante a entrevista, cada aluno representando um GT da turma do 2º Ano teve a oportunidade de ouvir as respostas sobre as dúvidas que ainda permaneciam, mesmo durante a pesquisa de campo que haviam feito anteriormente e as questões apresentadas foram:

a) Porque mudaram as placas e porque retiraram o nome das cidades nelas?

b) Como identificar o local do carro sem o nome da cidade na placa?

c) Como são feitas as combinações dos números nas placas?

d) Quais são as principais críticas (pontos positivos e negativos) na mudança das placas?

e) Tem alguma possibilidade de falsificação ou clonagem?

f) Poderia nos informar algumas leis de trânsito que nós, alunos do ensino médio, que logo estaremos aptos para tirar carteira devemos saber e refletir, além das informações sobre as novas placas do modelo Mercosul?

g) O que acontece quando um menor de idade é pego em uma blitz dirigindo ou pilotando uma moto?

h) Qual foi o custo dessa mudança de placa para a população?

i) Existe algum prazo para todos os veículos com placas antigas trocar para a nova?

j) Com as novas placas diminuiu o número de roubos de veículos?

k) As novas placas interferiram no setor da economia?

Nesse momento da intervenção, os alunos vão se apropriando do tema estudado, pois, ao se envolver na prática, com uma pesquisa de campo, eles conseguem enxergar um leque de possibilidades dentro da Matemática como um todo.

Nessa etapa os alunos passaram a conectar a relação da pesquisa em si com o estudo dentro da Matemática realizada em sala de aula. Essa construção da problematização foi se formando a cada encontro e a cada pesquisa realizada. Na primeira pesquisa que realizaram foi algo sobre questões relacionadas com o dia-a-dia do indivíduo, pois se tratava dos porquês que ecoavam sobre todas as questões burocráticas do tema em estudo e, percebe-se isso nas questões que cada GT elencou para questionar o profissional da área.

Em seguida, seguem as estratégias adotadas para o desenvolvimento do quarto e quinto encontro que seguiram a segunda etapa da Modelagem de acordo com Biembengut e Hein (2000): a Matematização.

Quarto encontro: Matematização

Nesta etapa da Modelagem, muitos dados já foram coletados e muitas informações já fazem parte do aprendizado que cada aluno construiu, devido a isso, os alunos foram incentivados a construírem uma tabela, contendo algumas informações coletadas na pesquisa de campo realizada durante os encontros anteriores. Com base nessa tabela, os estudantes foram indagados sobre as diferentes opções para a combinação das placas de automóveis de acordo com o padrão Mercosul, qual foi a mudança ocorrida nas placas e as diferenças com relação a estados e municípios.

De acordo com as tabelas construídas por cada aluno, foi possível destacar a importância da Análise Combinatória para solucionar o problema de combinações entre letras e números, no caso das placas de automóveis, como também envolvendo outras questões do cotidiano sem o uso de fórmulas, apenas por induções realizadas pela professora-pesquisadora, fazendo com que eles refletissem em qual caminho eles iriam percorrer para chegar a um resultado plausível.

Para estratégias de diferentes contagens a professora-pesquisadora aplicou uma intervenção através da análise de quatro diferentes situações-problema, os quais necessitou o uso da Análise Combinatória, porém despindo-se do uso de fórmulas para solucioná-los.

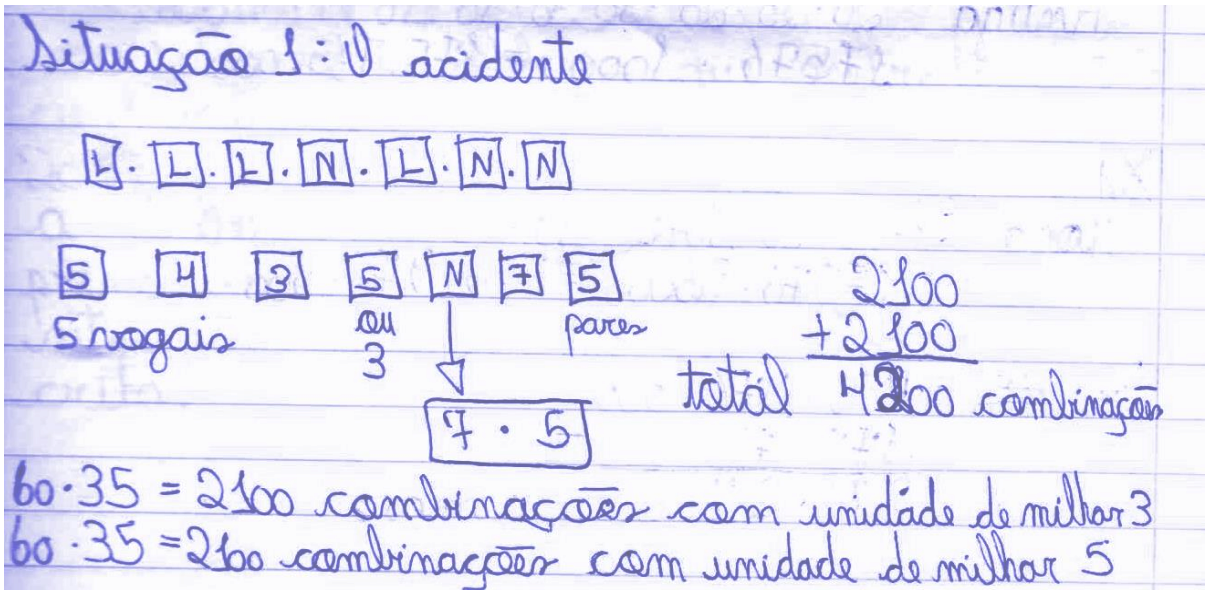
Diante do exposto, foi apresentado ao GTs a primeira situação-problema, tendo como tema “ o acidente”, onde possibilitou uma discussão sobre as possibilidades de resolver essa

questão, sem aplicar fórmulas, apenas por deduções. Segue abaixo a situação-problema exposta:

Situação 1: O acidente

"Um acidente entre um carro e uma motocicleta no centro de uma cidade, ao Norte de Mato Grosso deixou uma pessoa ferida. Embora a placa do carro não tenha sido anotada, testemunhas disseram que a mesma era antiga, pois possuía três vogais distintas. Outra testemunha contou que o número formado na placa era par, que o algarismo formado pela unidade de milhar era 3 ou 5, e o da dezena era 7. Sabendo que a placa possui três letras e quatro algarismos distintos, quantas placas podem ser obtidas satisfazendo as condições observadas pelas testemunhas do fatídico acidente?"

Figura 3 - Resolução apresentada pelo Grupo de trabalho 01, Aluno (A09)



Fonte: Os estudantes (2022).

A primeira atividade foi construída em conjunto com todos os alunos, onde cada grupo enriquecia com sua interpretação. De início, eles optaram por desenhar a placa do carro para ficar mais evidente a localização das letras e algarismos. A dúvida que eles tiveram a princípio foi sobre o numeral, se seria utilizado de zero a nove, ou excluíam o zero. Nesse debate, eles entraram em um consenso que realmente nas placas de carro teriam a possibilidade de aparecer o zero na quarta posição da placa, desta forma, o número de algarismos seriam 10.

Após chegarem em uma solução que satisfazia as condições imposta pela primeira situação-problema, a professora-pesquisadora entregou para cada equipe a situação-problema número dois, que dizia assim:

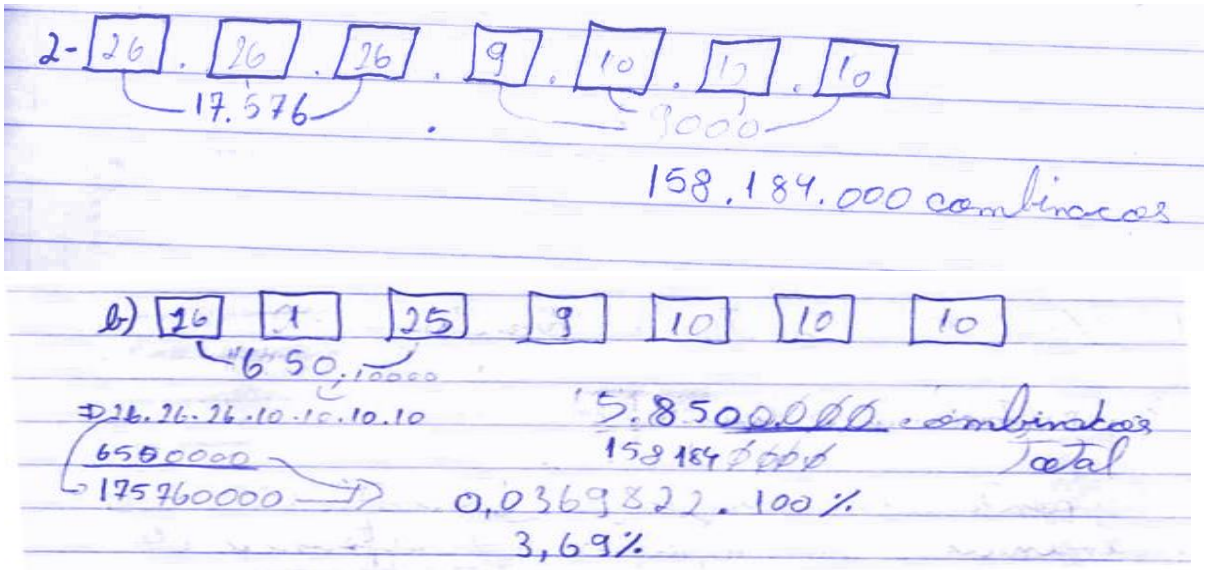
Situação 2: Questão de Vestibular aplicada no ano de 2015

(FUVEST- SP) As atuais placas de licenciamento de automóveis constam de 7 símbolos, sendo três letras, dentre as 26 do alfabeto, seguidas de quatro algarismos.

a) Quantas placas distintas podemos ter sem o algarismo zero na primeira posição reservada aos algarismos?

b) No conjunto de todas as placas distintas possíveis, qual a porcentagem daquelas que têm as duas primeiras letras iguais?”

Figura 4 - Resolução apresentada pelo Grupo de trabalho 01, Aluna (A18)



Fonte: Os estudantes (2022).

A situação-problema número dois trouxe a probabilidade e porcentagem dentro da Análise Combinatória, instigando a turma do 2º Ano a pensar fora da caixinha, ou seja, pensar que além das combinações, poderíamos apresentar a probabilidade e o percentual de um certo evento, ainda sem resquícios de fórmulas, apenas usando a pesquisa de campo realizada anteriormente, sendo esta um processo da Modelagem, como ferramenta para a aprendizagem.

Percebeu-se que o caminho para solucionar as situações-problema ficou mais claro. Porém, o aluno A02 indagou a professora-pesquisadora:

– "*Prof. você me dá autonomia para eu solucionar do meu jeito ou tenho que fazer da mesma forma que você apresentou*?" A professora-pesquisadora disse que sim, eles têm autonomia para buscar soluções e estratégias que facilitem a resolução da situação-problema. E o aluno A02, questionou novamente:

– "*Quer dizer que podemos encontrar o nosso caminho, resolver da maneira que acharmos melhor*?" A professora-pesquisadora disse que sim. O mesmo então complementou com um largo sorriso:

– "*Eu nunca havia imaginado a Matemática como uma disciplina que pudesse fugir um pouco das fórmulas e trabalhar usando a nossa criatividade, dando a nossa opinião e essa opinião ser ouvida e aceita pelos colegas*".

Ao finalizarem a situação-problema dois, a professora- pesquisadora apresentou a situação-problema três, que assim dizia:

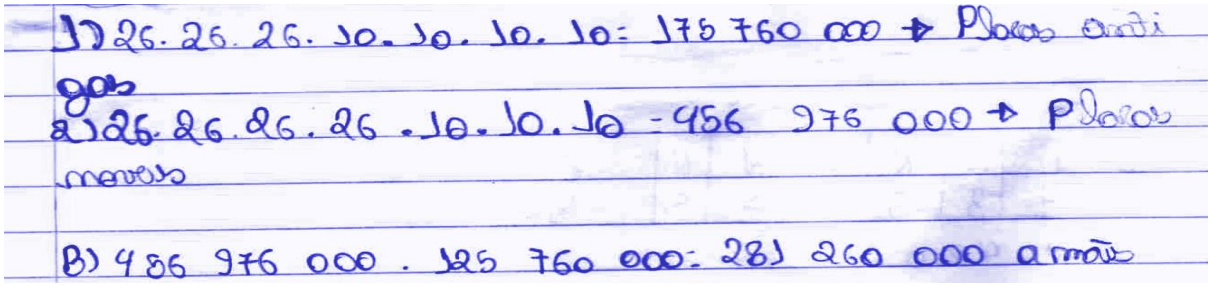
Situação 3: Placas Antigas x Placas Padrão Mercosul

As placas de automóveis eram todas formadas por três letras (inclusive K, Y e W) e quatro algarismos. Hoje em dia, as placas dos carros estão sendo trocadas pelas do padrão Mercosul e passarão a ter quatro letras e três algarismos.

a) Quantas placas de cada tipo podem formar?

b) Com o novo modelo de placa, poderemos emplacar quantos carros a mais, sem repetir a placa?

Figura 5 - Resolução apresentada pelo Grupo de trabalho 02, Aluno (A13)



Fonte: Os estudantes (2022).

Para solucionar essa situação-problema os grupos não apresentaram muitas dúvidas, pois a ideia de como a Análise Combinatória se desenharia estava ficando cada vez mais clara e, permitia o uso da linguagem Matemática de acordo com os pré-requisitos apresentados por cada grupo. Os GTs 01, 02, 03 e 04 resolveram por multiplicação de "caixinhas", onde cada caixa continha o total de letras e algarismos que poderiam ser multiplicados para encontrar a solução que a atividade pedia. O GT05 optou por montar as caixinhas para em seguida solucionar através da potenciação, chegando no mesmo resultado que os colegas dos GTs anteriores e, apenas o GT06 optou por trabalhar com a potenciação sem fazer as caixinhas, pois para eles, a caixinha já se encontrava desenhada na mente e agora estava mais fácil de resolver a situação-problema proposta.

Diante das resoluções das atividades apresentadas pelos GTs, fazendo uso de multiplicação por caixinhas, além do GT05 que optou por trabalhar potenciação, a professora-pesquisadora apresentou aos grupos uma atividade que vem a ser uma questão de concurso para vestibular, apresentada logo abaixo:

Situação 4: A importância da potência na Análise Combinatória

A partir de janeiro de 2016, novas placas para veículos devem seguir o modelo do Mercosul. Apresentando um total de sete caracteres, trarão em posições aleatórias quatro letras e três números, como no exemplo hipotético abaixo:

O número total de possibilidades dessas novas placas, caso seja fixado como padrão, para o estado, é o seguinte: primeiro duas letras, seguidas por três números, os quais são

seguidos por mais duas letras, é:

Considere que o alfabeto tem 26 letras.

Alternativas

a) $26^2 + 10^3 + 26^2$
b) $(26^4).(10^3)$
c) $(26^3).(10^4)$
d) $(26^2).(30).(26^2)$

Para a resolução dessa situação-problema, os GTs afirmaram estarem cientes da resposta, pois, através das atividades anteriores, ao se depararem com uma atividade com potenciação, automaticamente eles já conseguiam fazer a leitura matemática da questão. Como são quatro caixas com letras e três caixas com algarismos, a resposta correta seria a letra B, porém, em nenhum momento foi se expressado alguma fórmula de permutações, apenas deduções que os levavam a satisfazerem um Modelo Matemático.

Quinto encontro: Avaliação

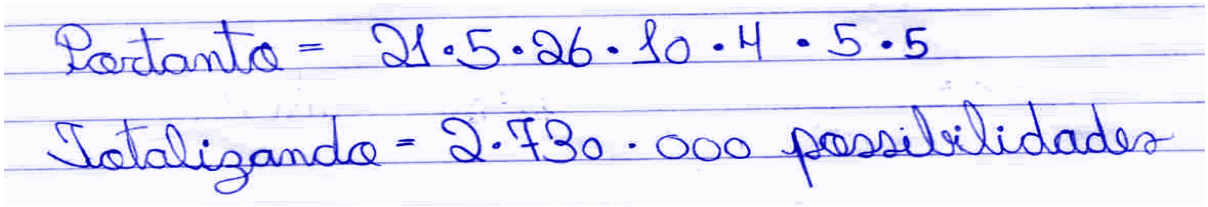
Para o processo de avaliação nós adotamos os aspectos subjetivos e objetivos através da produção de um trabalho acerca da Modelagem Matemática que apresentou o seguinte contexto:... "Formulem e busquem a solução de uma situação-problema que retrata a troca de placas de carros ocorridas entre 2016 e 2017 pelas atuais Mercosul, utilizando a Análise Combinatória em situações cotidianas." Ao dar o comando com relação a atividade avaliativa, a professora-pesquisadora teve a oportunidade de observar o comportamento de cada grupo de trabalho, pois através da Modelagem Matemática é possível trabalhar a interdisciplinaridade, a transversalidade, o convívio em sociedade através dos trabalhos em grupo, o respeito às

diferenças e o refletir, ponderar e agir em situações cotidianas.

a) *Questão apresentada pelo GT01: Um grupo de alunos curiosos gostariam de saber quantas possibilidades de placas Mercosul seriam possíveis formar, sendo a primeira posição uma consoante, a segunda posição uma vogal, a terceira posição pode ser qualquer letra do alfabeto, a quarta posição qualquer algarismo, na quinta posição deve ser uma vogal diferente da segunda posição, o sexto dígito deve ser um número ímpar e pra terminar, o sétimo deve ser um número par.*

Para a resolução da questão (FIGURA 6), o grupo trabalhou com as posições que se encontram em cada letra ou algarismo na placa de um veículo, ficando mais claro as "posições" elencadas na questão da situação-problema. Para a posição ocupada pela primeira letra, o grupo apresentou as vinte e seis letras do alfabeto retirando as vogais, totalizando vinte e uma letras. Para a ocupar a segunda posição, deveria ser uma vogal e o total de vogais são cinco, para a terceira posição pode apresentar qualquer letra do alfabeto, ou seja, vinte e seis. Seguindo para a quarta posição, qualquer algarismo, onde o total seriam dez (0 a 9). Para a quinta posição deveria ser uma vogal diferente da segunda posição, ou seja, só poderia usar as quatro vogais restantes. A sexta posição seria um número ímpar, sendo no total cinco algarismos e, por fim a sétima posição, seria um número par (0, 2, 4, 6 e 8).

Figura 6 - Resolução da situação-problema desenvolvida pelo GT01

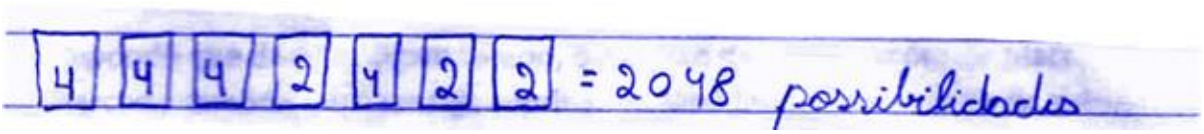


Fonte: Os estudantes (2022).

b) *Questão formulada pelo GT02: Quantas opções de placas podemos ter com as iniciais dos nomes de quatro integrantes do Grupo nº 02, sendo eles: (B, K, V e M), levando em consideração que podemos utilizar números maiores ou iguais a 8.* ***Obs: Com repetição***.

Para a resolução (FIGURA 7), o grupo apresentou como base o desenho da placa em formato de caixas e nela, foi inserido o total dos valores que cada letra ou algarismo poderiam aparecer. Como o grupo apresentava quatro letras diferentes e apenas poderiam utilizar os algarismos 8 e 9, todos com repetição, a resolução e o total de placas obtidas pelo GT02 foi a seguinte:

Figura 7 - Resolução da situação-problema desenvolvida pelo GT01

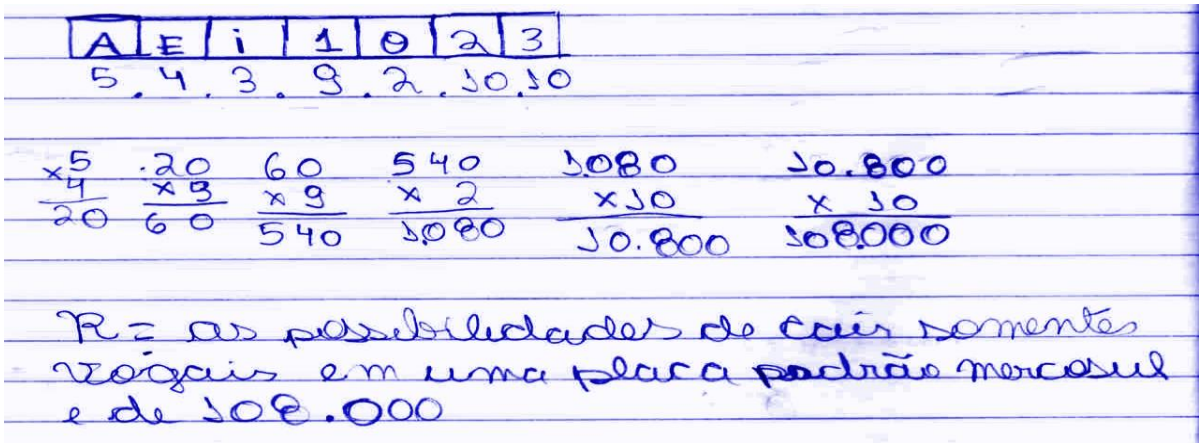


Fonte: Os estudantes (2022).

c) *Questão formulada pelo GT03: Quais são as possibilidades de ter somente vogais distintas em placas padrão Mercosul?*

De acordo com o grupo, para a resolução da questão (FIGURA 8), seria necessário utilizar na primeira posição as cinco vogais (a, e, i, o, u), porém, de acordo que ia mudando para a próxima posição de onde ficam as letras, deveria subtrair uma vogal da anterior, sendo na segunda posição quatro vogais, na terceira, três vogais e na quinta posição que localizam letras, ficariam duas. Para as posições dos algarismos, o grupo trabalhou de forma equivocada, pois na situação-problema não citou qualquer mudança no total dos mesmos. Dessa forma, deveriam ter trabalhado com os dez algarismos e não nove, como mostra na Figura 8.

Figura 8 - Resolução da situação-problema desenvolvida pelo GT03



Fonte: Os estudantes (2022).

Figura 9 - Resolução da situação-problema desenvolvida pelo GT06

Fonte: Os estudantes (2022).

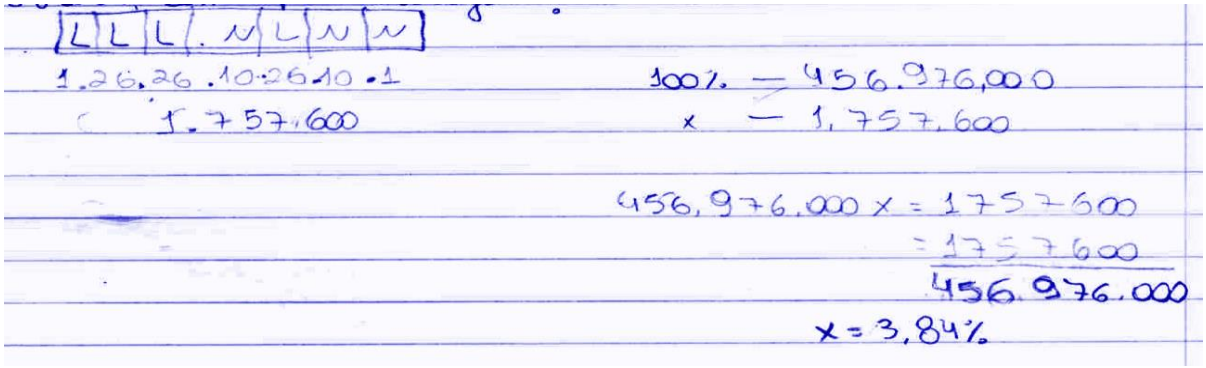
O GT03 acreditava que o algarismo zero não estaria contemplado na quarta posição e, devido a isso, eles trabalharam com o algarismo nove. Acontecer do grupo que formulou a questão apresentar erros ou equívocos durante a resolução é normal e promove um debate na sala sobre as possibilidades encontradas pelos demais grupos e pelo GT03, sendo enriquecedor o momento de aprendizagem.

d) *Questão formulada pelo GT04: Em uma cidade, no interior de Mato Grosso do Sul, um carro atravessou o sinal em alta velocidade. Testemunhas disseram que se tratava de um carro com a placa no padrão Mercosul, pois não havia o nome da cidade na mesma, porém conseguiram identificar a primeira letra da placa sendo*

J e o último número sendo 5. De acordo com essas descrições, quantas placas poderão ser obtidas? E qual seria esse valor em porcentagem?

Ao desenvolver a situação-problema, o GT 04 analisou da seguinte forma: ao desenhar a placa do carro contendo as posições para serem completadas com o total de letras e algarismos, o grupo chegou em um consenso que a primeira posição seria apenas uma letra (J), a segunda posição seriam as vinte e seis, pois nada se refere a essa posição na situação-problema. Com relação a terceira, quarta, quinta e sexta posição, o grupo elencou os valores em vinte e seis letras, dez algarismos, vinte e seis letras, dez algarismos respectivamente. Apenas a sétima posição ficou contendo apenas um algarismo destinado ao número cinco, de acordo com a Figura 10, abaixo:

Figura 10 - Resolução da situação-problema desenvolvida pelo GT04



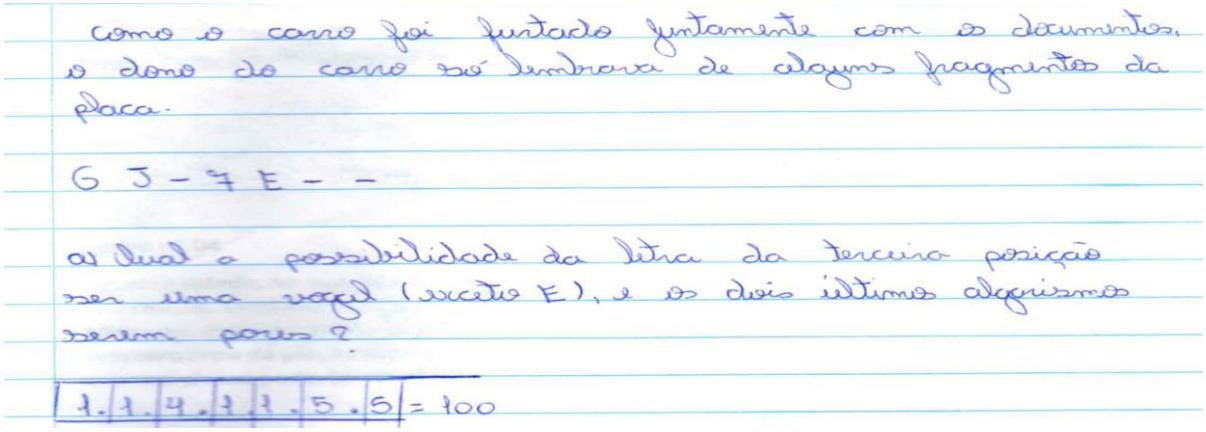
Fonte: Os estudantes (2022).

e) *Questão formulada pelo GT05: Em uma cidade, no norte do país, foi roubado um veículo que já possuía a nova placa no padrão Mercosul. Como o carro foi furtado juntamente com os documentos, o dono do veículo lembrava apenas de fragmentos da placa, sendo: a primeira posição contendo a letra G, a segunda contendo a letra J, a quarta posição contendo o numeral 7 e a quinta contendo a letra E. De acordo*

com os fragmentos da placa, qual a possibilidade da letra da terceira posição ser uma vogal (exceto a vogal E), e os dois últimos algarismos serem pares?

Ao começar a discussão sobre a resolução da situação-problema construída pelo grupo, eles construíram as caixas, contendo as letras e algarismos que estavam elencados na atividade, para que logo após, pudessem discutir sobre as reais possibilidades a serem trabalhadas nas demais posições interrogada no final da situação-problema, como mostra a Figura 17. Ao mencionarem a quantidade de letras e algarismos nas caixas que continham lacunas, o grupo analisou da seguinte forma: a primeira, segunda, quarta e quinta posição deveriam ter a quantidade de uma letra e um algarismo, por se tratar de apresentar apenas uma unidade tanto para ambos os casos. Ao se tratar da terceira posição que seria a possibilidade de aparecer uma vogal exceto a letra E, então seriam cinco vogais menos uma, ficando nessa posição a quantia de quatro possibilidades. Com relação aos dois algarismos finais serem pares, o grupo apresentou a quantidade cinco para ambas posições, contando com os numerais zero, dois, quatro, seis e oito.

Figura 11 - Resolução da situação-problema desenvolvida pelo GT05


Como o carro foi furtado juntamente com os documentos, o dono do carro só lembrava de alguns fragmentos da placa.

G J - 7 E - -

a qual a possibilidade da letra da terceira posição ser uma vogal (exceto E), e os dois últimos algarismos serem pares?

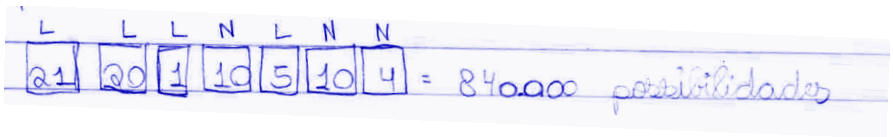
1 . 1 . 4 . 1 . 1 . 5 . 5 = 100

Fonte: Os estudantes (2022).

f) *Questão formulada pelo GT06: Encontre quantas possibilidades de placas no padrão Mercosul de acordo com as seguintes características: As duas primeiras letras são consoantes diferentes, a terceira é a letra G, a quarta letra é uma vogal e o último número é primo*.

Ao formularem a situação-problema, o grupo começou a trabalhar na resolução do mesmo, montando as caixas com as posições das letras e algarismos visualizados nas placas de veículos. Na primeira posição seriam as possibilidades para as consoantes, então seriam as vinte e seis letras menos as vogais, ficando vinte e uma possibilidades. Para a segunda posição permaneciam as consoantes, porém deveriam ser distintas, ficando apenas vinte possibilidades. Ao se referirem a terceira posição, poderiam apresentar apenas a letra G, ficando apenas uma possibilidade. Com relação aos algarismos que localizaram-se na quarta e sexta posição respectivamente, não foram mencionadas nenhuma imposição, devido a essa observação, o total de possibilidades para elas ficou dez cada. Quando o grupo menciona a quarta letra, o mesmo fala da quinta posição da placa, na qual seria uma vogal qualquer, ou seja, cinco possibilidades e para finalizar, a imposição para o último algarismo que seria um número primo, sendo eles 2,3,5 e 7, totalizando quatro possibilidades como mostra a Figura 12.

Figura 12 - Resolução da situação-problema desenvolvida pelo GT06



Fonte: Os estudantes (2022).

As formulações das questões foram enriquecedoras, pois em cada grupo, os integrantes apresentavam ideias diferentes trazendo para a discussão conteúdos matemáticos muitas vezes esquecidos ou deixados” pegando poeira” num canto qualquer, embora muitas vezes citados

pelos professores, porém não tão absolvidos pelo aluno. Entregar apenas uma questão por grupo trouxe à tona as relações interpessoais, o comprometimento e o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo.

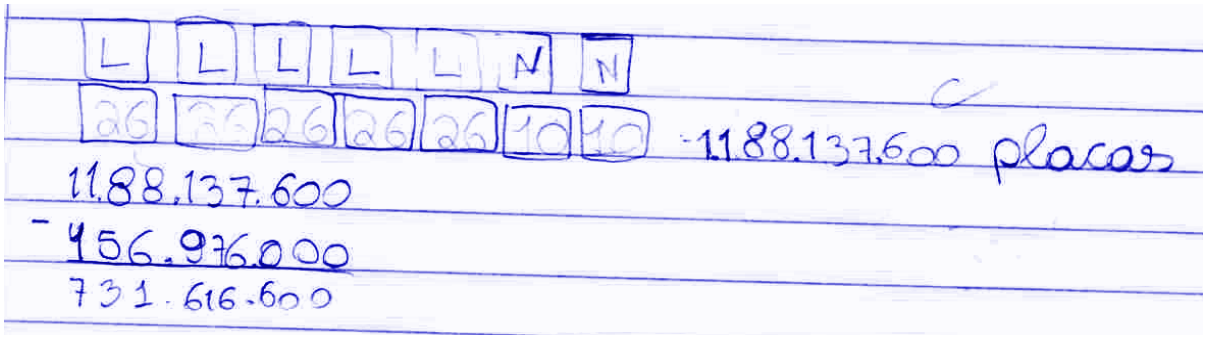
Sexto encontro: Interpretação do resultados e validação

Neste último encontro, a professora- pesquisadora entregou para cada grupo as situações-problema formuladas por eles para que pudessem entregar para cada grupo. O GT01 resolveu as situações-problema dos GTs 02,03,04,05 e 06, e o mesmo aconteceu com os GT02, GT03, GT04, GT05 e GT06. Foi estipulado um tempo adequado para essas resoluções e ao terminarem, cada grupo resolveu sua situação- problema no quadro, discutindo, trocando informações e validando a atividade. Foi possível perceber que os grupos de estudos estavam alinhados, todos colaborando e dando sugestões com relação a solução para cada atividade trazida ao quadro e apresentada à eles.

Para finalizar e validar o Modelo Matemático, foi aplicado aos alunos a seguinte situação-problema: Podemos observar que o Modelo Matemático desenvolvido e aperfeiçoado por vocês em cada situação-problema que abordou o conteúdo de Análise Combinatória, sem o uso de fórmulas foi pelo modo *Multiplicação de Caixinhas.* Então, utilizando o Modelo, solucione a seguinte situação-problema:

- Supondo que daqui a algum tempo, o número de combinações de placas no padrão Mercosul não consiga mais suprir as necessidades da demanda de placas de automóveis e decidem pela opção de atribuir uma letra a mais na quarta posição. Qual o total de placas teriam e quantas placas a mais teriam para suprir a demanda?

Figura 13 - Resolução da situação-problema desenvolvida pelo GT06



Fonte: Os estudantes (2022).

Resultados obtidos

Ao desenvolver essa sequência de atividades descrita nessa prática pedagógica, observou-se que ao introduzir discussões ou situações que reflete o cotidiano do aluno, os levam a um grau de aprendizado totalmente diferente dos encontrados em sala de aula durante aquelas aulas mecânicas, pois sua forma de pensar, questionar, raciocinar e solucionar situações-problema vão além daquela pergunta: - Que formula eu uso prof.?

Ao trabalhar situações problema nos grupos, no início os mesmos apresentaram muitas dificuldades em interpretar os problemas relacionando com a Análise Combinatória, ficando cada vez mais evidente que, os alunos que participaram efetivamente da pesquisa de campo in loco mostrou melhor desenvoltura na interpretação das situações-problema, bem como a resolução dos mesmos. E foi nesse momento que o trabalho em grupo pode mostrar a sua real eficácia, onde os colegas que sentiam-se mais aptos a solucionar os problemas se mostraram empáticos com o restante do grupo, deixando o grupo cada vez mais uniforme no quesito interpretação e realização das atividades.

O papel do professor é de mediador de conhecimentos, orientando os alunos ao caminho a percorrer e para isso, o mesmo deve estar preparado, com os devidos embasamentos teóricos , aos conceitos que aos poucos serão encontrados durante a prática pedagógica, lembrando que a Modelagem é um processo ao qual, o professor não terá total controle, pois a Modelagem será construída em conjunto, pois só se aprende modelar, modelando, porém, para que essa prática possa ter os objetivos alcançados, é importante entendê-la, conhecê-la e depois colocá-la em prática.

O primeiro encontro teve o formato de roda de conversa, no início, como uma conversa informal, a professora- pesquisadora iniciou um debate sobre a importância da Matemática no cotidiano até chegarem nos tipos de combinações realizadas por cada um no seu dia-a-dia. No instante que começou as discussões sobre o assunto, percebeu-se que a Modelagem já havia se inserido naquele contexto de sala de aula.

Após todas as reflexões, apresentação do tema e o conteúdo que estariam pesquisando, de acordo com o caso 2 de Barbosa, a turma foi dividida em seis grupos contendo cinco integrantes em cada. Com o tema em mãos, foi realizado um estudo, por meio de livros, artigos e revistas de forma indireta, de todas as informações que puderam obter naquele momento sobre o tema a ser pesquisado. Cada um fazendo suas anotações no caderno de campo que havia sido entregue pela professora, pois, no próximo encontro todos estariam apresentando o resultado da pesquisa.

Dando continuidade a pesquisa exploratória, os grupos apresentaram o resultado da pesquisa de campo, dando abertura para novas inquietações com relação a burocracias e principalmente o impacto econômico devido a troca de placas. Então, para sanar dúvidas que ainda permaneciam na turma, cada grupo preparou as questões para que um aluno,

representando seu grupo, realizasse uma entrevista com um profissional do DETRAN no período vespertino. A visita dos alunos ao DETRAN e Casa de Placas trouxe para a pesquisa algo palpável, principalmente por se tratar de três gerações de emplacamentos no Brasil, os quais eles puderam visualizar e complementar a pesquisa. Os mesmos puderam observar as posições das letras e algarismos em relação a ordem e quantidade de cada posição, já mencionando as combinações que poderiam fazer.

Com relação a pesquisa in loco, cada integrante do grupo apresentou o resultado da entrevista e como foi a visita na Casa de Placas. Ao se colocarem à frente da pesquisa, os alunos desenvolvem sua autonomia e seu ponto crítico, pois naquele momento, a professora era apenas uma mediadora no processo de aprendizado. A partir dos dados coletados através da pesquisa exploratória e pesquisa de campo os alunos fizeram a tabulação, destacando a importância da Análise Combinatória para se ter combinações perfeitas sem e com repetições de letras e algarismos.

A questão que norteou essa dissertação foi a seguinte: Como a Modelagem Matemática potencializa o ensino da Análise Combinatória? A resposta para essa questão foi se lapidando em cada encontro e a turma do 2º ano foi unânime em sua resposta, afirmando que a Modelagem não só potencializa o ensino da Análise Combinatória como também em outros conteúdos, por exemplo num trabalho interdisciplinar. Porém, ao avaliar todo o processo, a professora-pesquisadora verificou que através da inserção da Modelagem como metodologia de ensino, foi possibilitado aos alunos a capacidade de trabalhar em grupo, de verificar e comprovar o quanto a Matemática está dentro do seu dia-a-dia, saber realizar uma pesquisa, capacidade para enfrentar, interpretar e solucionar problemas, sendo participativo, assíduo e comprometido com a pesquisa e estudos, sabendo questionar e argumentar, ter raciocínio

lógico, obter dados, apresentar discussão e decisão sobre a natureza do problema a ser modelado.

É comum na idade em que se encontram os alunos de Ensino Médio, terem dificuldade de adaptação a um novo ambiente, principalmente em sala de aula, se sentindo deslocados e não pertencentes àquele local. Através da pesquisa houve uma ruptura nesse cenário, pois, mesmo os grupos fechados por afinidade ou coleguismo, aos poucos, em cada encontro o diálogo entre eles foi se destacando, pois tiveram essa abertura nas rodas de conversa e apresentações dos resultados das pesquisas e de trabalhos construídos por cada grupo. Algumas divergências de opinião se instalaram durante os encontros, porém os grupos encontraram um caminho para que ocorresse um consenso nas decisões, um meio termo para que todos os integrantes interagissem e fizessem parte do processo de pesquisa e tomada de decisões.

Para finalizar, podemos dizer que levar a Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino, proporciona para uma sala de aula, indiferente da idade ou turma, uma maior interação entre todos (professor- aluno, aluno-aluno, professor-alunos, alunos-alunos), pois muitas vezes, cada um fica em sua redoma, sem invadir o espaço do outro. A Modelagem traz toda essa mudança de postura, pois para modelar, precisa em primeiro lugar que o professor saia da sua zona de conforto, se desacomode, busque novos conhecimentos, reaja e supere suas inseguranças, pois muitas vezes, o medo de mudar, os colocam sempre no mesmo lugar. Que possam encontrar nesse produto educacional, uma motivação para buscar o novo e proporcionar um ensino de Análise Combinatória de acordo com as vivências dos seus alunos. Mostrar a eles, que antes de se chegar a fórmulas tem-se discussões, troca de conhecimentos, erros e acertos, estratégias para a construção do saber, e para essa construção precisa transformar o ambiente em que se ensina.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes de A.; SILVA, Karina P. da; VERTUAN, Rodolfo E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo, SP, 2020.

ARAÚJO, Jussara de L. **Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática:** a perspectiva da educação matemática crítica. Departamento de Matemática e Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, [*s.l.*], 2009.

BARBOSA, Jonei C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. *In*: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24. 2001, Caxambu. **Anais** [...]. Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR - BNCC. Documento homologado pela Portaria n° 1.570. Publicada no D.O.U. de 21/12/2017, Seção 1. p. 146. Brasília, 2017.

BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2000.

KLUBER, Tiago E.; BURAK, Dionísio. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educ. Mat. Pesqu.**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008.

OLIVEIRA, Aldeni M. de; STROHSCHOEN, Andreia A. G. Diário de bordo: uma ferramenta para o registro da alfabetização científica. **Produto educacional**, Lajeado: PPGECE, 2015. Disponível em: https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/2015/aldeni_melo_de_oliveira.pdf. Acesso em: 03 jan. 2022.

PONTES, Helaine M. de S.; BURAK, Dionísio. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. *In*: XI ENEM. **Nepso e Modelagem Matemática:** uma proposta de ensino transdisciplinar, Curitiba, 18 a 21 jul. 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/427_49_ID.pdf. Acesso em: 03 abr. 2022.

YIN, Roberto K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Porto Alegre: Penso, 2016.

UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – MESTRADO

ZIEGLER, Janaina de R. **Modelagem Matemática e o esporte:** uma proposta de ensino e aprendizagem com alunos do 6º ano do ensino fundamental de duas escolas. 2015. 128 f. Dissertação (Mestre em Ensino de Ciências Exatas) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2015.