

CONTRIBUIÇÕES DO TEOREMA DE TALES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NO CENÁRIO DAS PESQUISAS DO PROFMAT

Wagner Marcelo Pommer¹

Resumo: O presente trabalho objetivou inventariar as dissertações brasileiras de Mestrado Profissional em Matemática que tiveram como foco temático o Teorema de Tales. A metodologia escolhida foi o Estado do Conhecimento da Pesquisa, conforme Fiorentini e Lorenzato (2007). O corpus da pesquisa se situou no repositório das dissertações profissionais do PROFMAT, em que foram encontradas dez dissertações, no período de 2011 a 2020. Quanto ao ‘segmento de ensino’ encontramos 50% das monografias voltadas ao Ensino Fundamental, 30% para o Ensino Médio e 10% para a Educação de Jovens e Adultos. No quesito ‘Qual o sujeito de pesquisa?’ encontramos que 45,83% das monografias realizaram um discurso descrevendo o ‘conhecimento matemático’ do ponto de vista axiomático, 41,67% organizaram um produto educacional, 8,33% se focaram na análise de livros didáticos e 4,17% desenvolvem algum tipo de atividade com alunos. Na categoria ‘Os Principais referenciais teóricos’ constatamos que 36,84% mencionavam os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997;1998) e a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), e outros 31,57% fizeram relação com a História da Matemática. Na categoria ‘Os Principais referenciais metodológicos’ destaca-se que 50% não fizeram menção, 20% envolveram atividades matemáticas, 10% pesquisa qualitativa, 10% pesquisa bibliográfica e 10% questionário aplicado a professores. Quanto ao modo ‘Como é abordado o Teorema de Tales?’ levantamos que 15% enfatizaram o tema do ponto de vista axiomático por meio de demonstrações e uso de formalismo matemático, 35% utilizaram exercícios matemáticos para ilustrar o tema, 25% expuseram exercícios de aplicação de modo contextualizado, 5% revelaram preocupação em problematizar o assunto e 20% fizeram referência ao uso da História da Matemática.

Palavras-chave: teorema de tales; estado do conhecimento; PROFMAT.

THALES’ THEOREM CONTRIBUTIONS TO THE TEACHING OF MATHEMATICS IN THE PROFMAT’S RESEARCH REPOSITORY

Abstract: The present work aimed to map Brazilian Master’s Dissertations in Professional Mathematics which focused on the Tales’ Theorem. The methodology chosen was the state of research knowledge, according to Fiorentini and Lorenzato (2007). The research corpus stood in the

1 Doutor em Educação pela Universidade São Paulo, São Paulo Brasil. E-mail: wagner.pommer@unifesp.br

professional dissertation repository of PROFMAT, in which ten dissertations were found, from 2011 to 2020. As for the 'teaching segment' we found 50% of Elementary School monographs, 30% for High School and 10% for youth and adult education. In terms of 'Which is the subject research?' we found that 45.83% of monographs gave a discourse describing 'the mathematical knowledge' from the axiomatic point of view, 41.67% organized an educational product, 8.33% focused on analysis of textbooks and 4.17% develop some kind of activity with students. In the category 'The main theoretical references' we found that 36.84% mentioned the National Curriculum Parameters (Brazil, 1997; 1998) and the Common National Curriculum Base (Brazil, 2018), and other 31.57% was related to the History of Mathematics. In the category 'The main methodological references' is noteworthy that 50% do not made mention, 20% involved mathematical activities, 10% qualitative research, 10% bibliographic research and 10% questionnaire applied to teachers. As for 'How is Tales' theorem addressed?' we raised that 15% emphasized the theme from the axiomatic point of view through demonstrations and use of mathematical formalism, 35% used mathematical exercises to illustrate the theme, 25% exposed exercises of Application in a contextualized manner, 5% revealed concern to problematize the subject and 20% mentioned the use of History of Mathematics.

Keywords: thales theorem; the state of knowledge; PROFMAT.

1 INTRODUÇÃO

Historicamente, a Matemática foi desenvolvida por meio de atividades práticas relacionadas aos afazeres cotidianos, conforme relato de D'Ambrósio (1996). Nesse sentido, o referido pesquisador apontava que a Geometria euclidiana emergiu da necessidade de uma medição dos espaços no mundo em que o homem vivia.

Ademais, Lorenzato (1995) acrescenta que a Geometria é um componente essencial do ensino de Matemática. Para o referido autor "[...] sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida" (LORENZATO, 1995, p. 5).

Da Costa (2020) indica que na aprendizagem da Geometria devem ser estimuladas situações em que os sujeitos possam desenvolver compreensão do mundo, de modo que o ato de pensar geometricamente deve ser um dos focos de produção de significação. O autor acrescenta que a Geometria, como uma forma de atividade humana, envolve o estudo de percepções sobre o mundo real, que representa uma contribuição singular e essencial para o ensino de Matemática.

Com relação à Geometria na escolaridade básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) ressaltavam a importância deste tema no segmento do Ensino Fundamental, pois permite se aprimorar a percepção do mundo em que vivemos. Mais particularmente, o referido documento apontava que o ensino da Geometria deve proporcionar ao educando o desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas ao pensamento geométrico. Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais sintetizaram que a Geometria constitui uma "[...] parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite

compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1997, p. 39).

Autores como Leivas (2002) e Lorenzato (2010) mencionam que alguns professores não detêm os conhecimentos geométricos e pedagógicos necessários para a realização de práticas pedagógicas com relação à Geometria.

O conhecimento de geometria de um estudante, que conclui o Ensino Fundamental de um modo geral é irregular e limitado. Por sua vez o professor desconhece, muitas e na maioria das vezes, conteúdos e técnicas que lhe permita proporcionar aos alunos redescobrir os conceitos geométricos (LEIVAS, 2002, p. 43).

Na Geometria, o teorema de Tales é um tema essencial para o ensino devido ao seu aspecto integrador, conforme aponta os estudos de Tinoco (1996) e Costa e Allevato (2012). Esses pesquisadores destacam que o teorema de Tales representa uma aplicação do princípio de proporcionalidade direta, uma ideia fundamental da Matemática. Salientamos que tal ideia foi apresentada e desenvolvida na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

Em vista desses pressupostos o presente trabalho teve como objetivo inventariar as dissertações brasileiras de Mestrado Profissional em Matemática que tiveram como foco temático o Teorema de Tales.

2 O TEOREMA DE TALES

A Geometria representa um assunto de destaque nos documentos curriculares prescritos Brasileiros. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (Matemática), conforme exposto em Brasil (1997), encontramos menção ao Teorema de Tales no estudo do eixo ‘Espaço e Forma’, porém sem maiores esclarecimentos. O Teorema de Tales nos diz que um feixe de retas paralelas determina em duas retas transversais segmentos diretamente proporcionais.

Mais atualmente, na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) não há menção explícita ao Teorema de Tales. No referido documento, encontramos na Unidade Temática Geometria, com relação ao 9º ano do Ensino Fundamental, o Objeto de Conhecimento “Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais” (BRASIL, 2018, p. 318). Esta menção está relacionada à habilidade matemática específica “(EF09MA14): Resolver e elaborar problemas de aplicação [...] das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes” (BRASIL, 2018, p. 319). A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) afirma que o referido teorema de Tales se refere, em essência, a aplicação da proporcionalidade direta entre grandezas especificamente na área da Geometria. A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) coloca a proporcionalidade com uma das cinco ideias fundamentais da Matemática (aproximação, equivalência, interdependência, ordem e proporcionalidade). Podemos acrescentar que o teorema de Tales se apresenta como

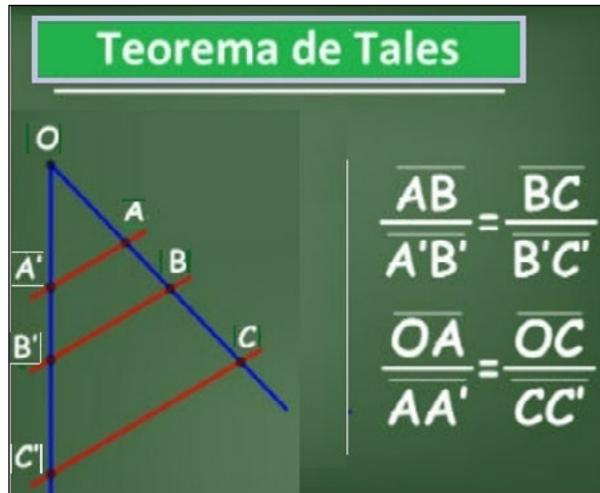
um contexto propício para explorar a necessária inter-relação entre a Aritmética, a Geometria e a Álgebra, um princípio almejado nos documentos curriculares, como na atual BNCC (Brasil, 2018).

Do ponto de vista histórico, Boyer (1974) nos relata que Tales de Mileto viveu na Antiga Grécia por volta de 624 a.C a 546 a.C. De ascendência fenícia, nasceu em Mileto, antiga colônia grega, na Ásia Menor, que fica na região da atual Turquia. Tales foi um filósofo, matemático, engenheiro, astrônomo e homem de negócios da Grécia Antiga, conforme aponta Boyer (1974), sendo atualmente considerado um dos sete sábios da Grécia Antiga.

Pimentel (2014) destaca que Tales de Mileto, após anos de estudo no Egito, trouxe para a Antiga Grécia alguns conhecimentos geométricos. Com base neles, há relatos históricos que Tales foi o primeiro a deduzir a propriedade das semelhanças de triângulo e, através dela, mensurou a altura de famosa Pirâmide de Quéops, por meio de sua sombra.

Bongiovanni (2007) aponta que o primeiro livro didático que atribuiu o nome teorema de Tales ao ‘Teorema dos Segmentos Proporcionais’ foi o livro francês ‘Éléments de Géométrie’, de Rouche e Comberousse (1883). Atualmente, é comum em livros didáticos brasileiros haver menção histórica sobre Tales, cujo enunciado é: um feixe de retas paralelas e duas transversais determinam segmentos proporcionais (ver Figura 01).

Figura 01: O Teorema de Tales



Fonte: Os autores.

A seguir, passamos a descrever a metodologia empregada neste texto.

3 A METODOLOGIA

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2007), as pesquisas do tipo Estado da Arte ou Estado do Conhecimento procuram inventariar, sistematizar e avaliar a produção científica em certa área de conhecimento de modo a identificar tendências no cenário que se deseja estudar.

Em vista do objetivo de inventariar as dissertações brasileiras de Mestrado Profissional em Matemática que tiveram como foco temático o Teorema de Tales, para a efetivação da pesquisa empírica situamos a coleta de dados no Catálogo do site do PROFMAT, disponível no endereço eletrônico <<http://www.profmat-sbm.org.br>>, no período de 2011-2020. Este repositório congrega as monografias realizadas no âmbito das oitenta e uma Universidades, Institutos e demais instituições de ensino superior associadas ao mestrado Profissional de Matemática em Rede.

O PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) é um programa de pesquisa do tipo *stricto sensu* oferecido de forma semipresencial e que visa:

[...] proporcionar formação matemática aprofundada e relevante para a docência na Educação Básica, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática (SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2017, p. 3).

O ‘trabalho de conclusão final’ das pesquisas do PROFMAT deve versar em torno de “[...] temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica, que produzam impacto na sala de aula” (SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2017, p. 17).

No referido catálogo utilizamos o termo ‘Tales de Mileto’ no quesito busca simples, não tendo surgido resultados. Para a busca utilizando o termo ‘Tales’ obtivemos dez monografias. Para inventariar as dissertações brasileiras do PROFMAT que tiveram como foco temático o Teorema de Tales fizemos a leitura de todos os resumos disponibilizados na referida plataforma de pesquisa. Nesse *locus* o texto completo em PDF também estava disponível. Para o refinamento dos textos encontrados, se seguiu a leitura flutuante em busca dos dados relevantes. Conforme destaca Ferreira (2002), por leitura flutuante entendemos um primeiro contato com os documentos onde se busca levantar os pontos-chave da pesquisa em face dos objetivos. Tal levantamento se encontra caracterizado no Quadro 1.

Quadro 1: As dissertações do tipo profissional do PROFMAT analisadas entre 2011 e 2020

Nr	Autor	Título	Ano
01	Edmilson Corrêa de Oliveira	Teorema de Tales e semelhança nos livros do PNLD de 2015 - Ensino Médio.	2019
02	Jonathan de Aquino da Silva	Teorema de Tales: uma abordagem usando anamorfismos.	2018
03	Rogério Maurício Fernandes Pessanha	Teorema de Tales e semelhança de triângulos na educação de jovens e adultos: uma aprendizagem significativa.	2017
04	Leonardo dos Santos Ferreira	Como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano.	2017
05	Venício do Nascimento Silva	Teorema de Tales e suas aplicações.	2015
06	Paulo Fernando Silva dos Reis	O Teorema de Tales por meio de atividades investigativas.	2014
07	Erickson Nunes Martins	Uma abordagem construtivista do Teorema de Tales sob a perspectiva da teoria de Van Hiele.	2014
08	Adão Regis Pereira	Teorema de Tales: análise de sua apresentação nos livros didáticos e proposição de atividades.	2014
09	Nilberti Assis Duarte de Almeida	Uma análise da apresentação do Teorema de Tales em livros didáticos do nono ano do ensino fundamental.	2013
10	Weidson do Amaral Luna	Uma construção da Geometria Analítica a partir dos teoremas de Tales e de Pitágoras.	2013

Fonte: Os autores.

Para sintetizar e analisar tais produções foi elaborada uma categorização, expressa no Quadro 02.

Quadro 02: As categorias de análise

Item	Categorias
(A)	Qual o objetivo da monografia?
(B)	Qual o segmento escolar a que se dirige?
(C)	Qual o sujeito de pesquisa?
(D)	Apresenta referenciais teóricos? Se sim, qual (quais)?
(E)	Apresenta referenciais metodológicos? Se sim, qual (quais)?
(F)	Como é abordado o Teorema de Tales?

Fonte: Os autores.

A seguir, passamos a tecer um breve sumário sobre os principais pontos de destaque das dez monografias inventariadas anteriormente.

4 DESCRIÇÃO DOS TRABALHOS

Iniciamos a descrição das dez monografias com a dissertação de Edmilson Corrêa de Oliveira. O trabalho de Oliveira (2019) destacou que o Teorema de Tales se enquadra no tema da proporcionalidade entre segmentos (implícita ou explicitamente) de retas paralelas, havendo conexões com os temas homotetia, semelhança e razões trigonométricas. Nos seis livros didáticos que a dissertação se propôs a analisar, o autor considerou que houve uma diversidade no modo de introduzir e desenvolver o tema, sendo que a maioria o fez em associação com o trabalho do tópico semelhança de triângulos.

Oliveira (2019) agrupou os enunciados do teorema de Tales que os livros didáticos averiguados fizeram em duas formas equivalentes:

Formato 1: Se duas retas são transversais a um feixe de paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

Formato 2: Se um feixe de retas paralelas produz, sobre duas retas transversais quaisquer, segmentos homólogos, então as medidas desses segmentos são proporcionais (OLIVEIRA, 2019, p. 43).

O autor pontuou que dos “[...] seis livros analisados, quatro trazem contextos históricos” (OLIVEIRA, 2019, p. 39), sendo que dois deles o fazem no início da seção de Teorema de Tales, um deles ao final da seção de Teorema de Tales e outro no início da seção de semelhança de triângulos. Oliveira (2019) observa que, nesses livros, “[...] a História da Matemática está sendo utilizada para ressaltar onde se usam estes conhecimentos, mas não para ressaltar como eles foram utilizados” (p. 39). Por último, o autor observa que o problema histórico poderia ser uma boa forma de introduzir o teorema de Tales de forma problematizadora, algo não realizado pelos seis livros didáticos analisados.

Agora, passamos a considerar a monografia de Jonathan de Aquino da Silva. Silva (2018), aplicou uma situação didática com alunos do 3º ano do Ensino Médio. Inicialmente, foi explicado aos alunos o que representa a Anamorfose e a relação com o teorema de Tales.

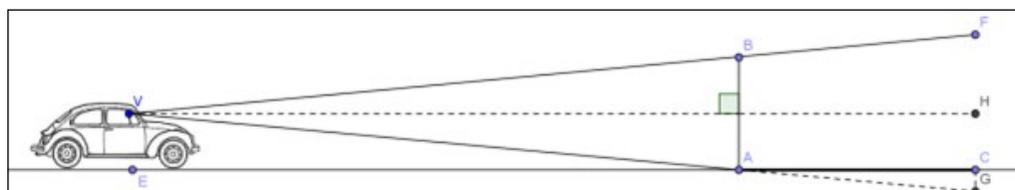
O termo anamorfose [...] (do grego anamorfosis - reformação, retorno à forma, reiteração da forma), [...] é utilizado em várias áreas do conhecimento - matemática, óptica (com aplicações nas artes visuais), biologia e geologia, com diferentes concepções. Assim sendo, o conceito de anamorfose difere de área para área (COELHO; LIMA; VIEIRA, 2018, p. 18 *apud* SILVA, 2018, p. 14).

Silva (2018) buscou nas artes a ideia que os anamorfismos podem situar um observador a se colocar sob um determinado ponto de vista, sendo que a ampliação (ou redução) no sentido horizontal das imagens pode ser diferente da ampliação (ou redução) em sentido vertical. Assim, o “[...] Teorema de Tales está inserido na ideia de construção dos anamorfismos oblíquos, [em que] a profundidade dada às figuras pode ser criada por meio de semelhanças” (SILVA, 2018, p. 12). O autor (2018) relata que pinturas na rua eram praticadas desde os primórdios do Império

Romano. Em específico, Silva (2018) fez uso dos anamorfismos originados pela leitura da palavra PARE por motoristas, em sintonia com o código de trânsito brasileiro. Na pesquisa, o autor apresenta uma foto da palavra 'PARE' e propõe a seguinte questão: Por qual motivo as letras e símbolos da palavra 'PARE' estão desproporcionais e alongados verticalmente?

Para um motorista que trafega a certa velocidade, sua atenção está voltada para frente, mas a palavra 'PARE' está situada em um plano horizontal, perpendicular a direção vertical da visualização do motorista. Assim, Silva (2018) apresenta uma série de desenhos em que aplica o Teorema de Tales, e assim indica como é possível se determinar a distância mínima que o motorista deve estar para que seja possível ler a palavra 'PARE' sem deformações.

Figura 02: Esquema de visualização do motorista para poder 'enxergar' a palavra 'PARE'



Fonte: Silva (2018, p. 19).

A seguir, Silva (2018) realizou um trabalho com outras palavras e se procedeu a medições e desenhos para aplicar o conceito de anamorfismo para registrar as palavras sem deformações, por alongamento vertical, com a aplicação do Teorema de Tales.

Ao que segue, descrevemos a dissertação de Rogério Maurício Fernandes Pessanha. O autor realizou um estudo com a Educação de Jovens e Adultos, em um contexto de produção de significados em três fases: aplicação de Pré-teste, intervenção educativa e Pós-teste. O Pré-Teste constou de uma atividade com oito questões matemáticas (exercícios de aplicação dos conceitos e respectivos cálculos algébricos). A referida lista de exercícios foi composta por 4 questões envolvendo a aplicação do 'teorema de Tales' e 4 questões envolvendo 'Semelhança de Triângulos'. A análise do autor revelou um baixo percentual de acertos por parte dos alunos da Educação de Jovens e Adultos.

A segunda etapa, a intervenção pedagógica, constou de duas situações problema (ver Protocolo 01).

Protocolo 01: As duas situações problema da intervenção pedagógica de Pessanha (2017).

<p>Dona Maria é uma doceira de mão cheia. Trabalha fazendo doces e tortas há mais de vinte anos e recebe encomendas para vários eventos, como aniversários, casamentos, batizados, enfim, todo tipo de festa. Certo dia, dona Maria recebeu uma encomenda de um bolo para dez pessoas. Juntou todos os ingredientes, misturou, levou ao forno e, após algumas horas, o bolo estava pronto. O bolo fez tanto sucesso que sua freguesa voltou e encomendou outro bolo, igual, mas para 30 pessoas, com a recomendação de que ficasse com o mesmo sabor e textura do primeiro. O que dona Maria deve fazer para conseguir atender sua freguesa? (PESSANHA, 2017, p. 54-55).</p>	<p>Pedro e Marcos trabalham com construção civil. Fazem todo tipo de trabalho nesta área, como parte hidráulica, instalações elétricas, pintura, alvenaria, reboco de paredes, entre outros. Estavam trabalhando na construção de dois muros laterais de uma casa e estavam na etapa de reboco. O primeiro muro tinha 2 metros de altura e 5 metros de comprimento, ou seja, 10 metros quadrados. Fizeram uma argamassa com cimento, areia, argila e água, rebocaram todo o muro e, para surpresa deles, a quantidade de argamassa que fizeram foi na medida exata. Quando passaram para o outro muro, que tinha também 2 metros de altura, mas 7,5 metros de comprimento, ou seja, 15 metros quadrados, tiveram a ideia de fazer a argamassa, com as mesmas características da primeira, também na medida exata. Como eles irão conseguir isto? (PESSANHA, 2017, p. 55).</p>
--	---

Fonte: Pessanha (2017).

Esta etapa de intervenção pedagógica revelou que as respostas dos alunos frente:

[...] às situações problema apresentadas deixaram evidente a existência do subsunçor proporcionalidade na estrutura cognitiva dos alunos, fator essencial para a eficácia das sequências didáticas aplicadas. Percebeu-se então, que os alunos possuíam a noção de proporcionalidade, sabendo aplicá-la em situações de seu dia-a-dia, não relacionadas à matemática (PESSANHA, 2017, p. 71).

Por fim, a etapa de pós-teste, que constou da reaplicação dos oito exercícios do pré-teste, aplicada algumas semanas após a intervenção pedagógica, indicou que houve uma melhora parcial dos resultados (mas que não foi quantificada na pesquisa).

Neste ponto, destacamos a dissertação de Leonardo dos Santos Ferreira. O texto de Ferreira (2017) se centralizou nas demonstrações matemáticas de três livros didáticos, não realizando comentários sobre exemplos, exercícios, explicações ou outros recursos para introduzir e abordar o tema. O autor destacou que as demonstrações apresentadas nos manuais didáticos foram incompletas, pois somente abordam o caso dos segmentos comensuráveis (medidas de números racionais), não incluindo o caso das medidas incomensuráveis (as que envolverem segmentos de medida expressos por números irracionais).

Ferreira (2017) culminou a monografia apresentando a demonstração matemática completa do Teorema de Tales com segmentos comensuráveis e incomensuráveis, reforçando a necessidade desta demonstração em livros do 9º ano, pois o autor utiliza como suporte a citação dos Parâmetros Curriculares Nacionais

com relação ao desenvolvimento de atividades de argumentação e raciocínio. Assim, o autor teve como hipótese que as demonstrações formais no Ensino Médio são uma forma de preparar o aluno para a argumentação e desenvolvimento de raciocínio.

Porém, a dissertação de Ferreira não considerou os estudos mais recentes no campo da Educação Matemática com relação ao tema de provas e demonstrações. Atualmente, este segmento de pesquisa considera que o desenvolvimento de raciocínio e argumentação não envolve e não deve necessariamente começar pelas demonstrações, conforme estudos de Balacheff (1987,1988). Assim, há um caminho mais conveniente de preparar os alunos para o raciocínio e argumentação, que consiste na exposição de exemplos, exploração de situações históricas, generalização de ideias e busca de provas pragmáticas, de modo a preparar um caminho que permita, ao final, um trabalho com as provas formais.

A quinta dissertação, de Venício do Nascimento Silva, situou um estudo das aplicações envolvendo o teorema de Tales. A monografia de Silva (2015) apresentou um subitem denominado 'Abordagem Histórica', em que desenvolve uma exposição da vida de Tales por meio do 'Sumário Eudemiano', escrito pelo grego Proclus (411-485 d.C.). "O Sumário eudemiano é um breve resumo do desenvolvimento da Geometria grega desde os primeiros tempos até a época de Euclides, e é ainda hoje o nosso principal registro histórico a respeito do início dessa ciência na Grécia" (SILVA, 2015, p. 3).

Ao que segue a um breve relato histórico, a dissertação de Silva (2015) inicia a prova axiomática do Teorema de Tales. Posteriormente, o autor associa o desenvolvimento matemático em R^2 e R^3 , por meio da apresentação da razão entre pirâmides semelhantes e, posteriormente, estendendo o estudo para sólidos em geral, de uma forma axiomática.

No que tange as alegadas aplicações intramatemáticas do teorema de Tales, no capítulo final da dissertação Silva (2015) há a exposição das relações seno, cosseno e tangente, no triângulo retângulo. Ao que segue, o autor expõe a demonstração da relação $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ e, por fim, apresenta a projeção estereográfica (que não consta da relação de conteúdos da escolaridade básica).

A sexta dissertação, desenvolvida por Paulo Fernando Silva dos Reis, desenvolveu o ensino de Geometria e do teorema de Tales por meio de cinco atividades investigativas, desenvolvidas em sala de aula do referido investigador. Na 1ª atividade Reis (2014) propôs a leitura de seis livros paradidáticos, que versavam sobre temas gerais, mas não sobre o Teorema de Tales!

Após a leitura dos seis livros paradidáticos Reis (2014) propôs que os alunos fizessem uma "[...] apresentação expositiva do que haviam entendido em cada um dos livros" (p. 39). O que acabou acontecendo foi "[...] uma mesa redonda, onde cada grupo explanaria o que entendeu sobre o assunto estudado. Os alunos também entregaram um resumo por escrito sobre os livros lidos" (REIS, 2014, p. 39).

Na 2ª atividade, denominada 'Medindo o Inacessível', Reis (2014) descreveu o processo de medir um poste da escola de modo similar à história contada sobre a

medição da pirâmide de Quéops, por Tales. Posteriormente, na 3ª atividade houve discussão e ampliação do processo para medir outros objetos, de modo especulativo e a aplicação de ‘problemas’ usuais sobre semelhança de triângulos e o teorema de Tales.

Na 4ª atividade, Reis (2014) apresentou aos alunos o enunciado do Teorema de Tales e algumas questões para leitura, discussão em grupos e posterior sessão de debates. Por última, na 5ª atividade ocorreu uma etapa de aplicação do Teorema de Tales a exercícios usuais. Nesta última etapa não foi realizada nenhuma estatística para averiguar os resultados dos alunos.

A sétima dissertação, de Erickson Nunes Martins, teve como proposta a aplicação de uma abordagem do teorema de Tales utilizando como suporte a teoria de Van Hiele. A proposta de Van Hiele “[...] tem como fundamento a teoria de que o desenvolvimento mental está ligado às mudanças cognitivas dos alunos e às experiências educacionais” (MARTINS, 2014, p. 21).

A teoria de Val Hiele consta de cinco níveis, a saber:

Nível (1) em que os alunos reconhecem ou reproduzem as figuras pela sua forma, ou seja, as figuras são interpretadas de forma única e os alunos julgam apenas a sua aparência.

No Nível (2) seguinte, os alunos conseguem perceber as características e algumas propriedades da figura geométrica, e estará transcendendo outros dois.

Níveis (3 e 4) a partir do momento em que as propriedades das figuras são ordenadas de forma lógica e as definições são construídas e concatenadas com base na percepção do necessário e do suficiente, respectivamente.

Nível (5) quando o aluno alcança a capacidade de determinar e desenvolver sistemas baseados em axiomas distintos do usual (geometria euclidiana). É neste nível que as geometrias não euclidianas são compreendidas (MARTINS, 2014, p. 25).

Por meio da análise da teoria de Van Hiele, Martins (2014) inferiu indícios que “[...] a compreensão de definições formais fornecidas por livros se desenvolve apenas no Nível 3, e proporcionar tais definições aos alunos diretamente nos níveis inferiores está fadado ao fracasso” (p. 24).

Inspirado aos moldes da teoria de Van Hiele, a pesquisa de Martins (2014) planejou a aplicação de uma atividade onde constou de:

[...] uma aula de história da matemática e apresentado, ao final, um vídeo sobre a façanha de Tales ao medir a altura da pirâmide Quéops. Após a introdução da História da Matemática como argumento motivador, foram propostas atividades, presentes de diferentes maneiras no cotidiano do aluno, que pudessem caracterizar o Teorema de Tales e, assim, justificar a importância da utilização da Teoria de Van Hiele para a compreensão do Teorema de Tales e como metodologia para o ensino de Matemática, sobretudo Geometria (MARTINS, 2014, p. 47).

Martins (2014) declarou que a pesquisa permitiu perceber:

[...] como os alunos se comportaram ao aprender e compreender o teorema de Tales, e a evolução didática adquirida por parte dos alunos, que mudaram a maneira de pensar, estudar e passaram a se posicionar de maneira mais crítica com relação a cada assunto discutido em sala de aula, seja qual fosse o tema (p. 68).

A seguir, a oitava dissertação de Adão Regis Pereira, se propôs a realizar uma breve análise da apresentação do teorema de Tales em seis livros didáticos das séries finais do Ensino Médio e, a seguir, propor algumas atividades de ensino.

Na Geometria analisamos como os conteúdos são trabalhados, quais os recursos utilizados, e como a validação das propriedades é indicada. Com relação às metodologias, observamos como são abordados os conteúdos da obra, como se desenvolve a argumentação, quais os recursos didáticos utilizados e os tipos de atividades apresentadas. No tópico contextualização, identificamos como ela é apresentada na coleção, e como é tratada a história da Matemática (PEREIRA, 2014, p. 16).

Pereira (2014) realizou a análise de cada um dos seis livros nos quesitos apontados acima, e efetivou as comparações entre as seis obras. Na introdução dos capítulos, o autor verificou que o conteúdo é explanado de forma direta (pela enunciação do teorema de Tales) ou explicada através de exemplos. No quesito História da Matemática, Pereira (2014) informa que ela foi inserida de modo informativo (pelo relato de alguns fatos) ou contextualizado (quando o autor descreve e analisa fatos históricos).

Em continuação, quanto às demonstrações, o autor identificou dois casos: “[...] tipo 1, para o caso em que supõe todos os segmentos comensuráveis, de acordo com (BONGIOVANNI, 2007), que é a prova incompleta dos pitagóricos; e o tipo 2, para o caso em que utiliza-se semelhança de triângulos” (PEREIRA, 2014, p. 20).

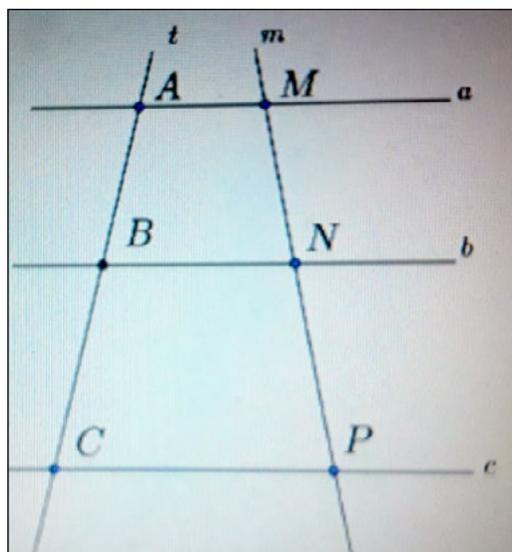
Quanto à parte da monografia que se preocupa em desenvolver algumas atividades de ensino, Pereira (2014) apresenta como destaque o uso do GEOGEBRA. Por meio desse software o autor utilizou a ferramenta de medir segmentos para realizar a verificação experimental de duas situações prototípicas desenhadas através do próprio GEOGEBRA (de modo análogo ao que se apresentou na Figura 01 deste texto e no caso de um triângulo qualquer), a introdução do conceito de restrição orçamentária (expressa pela razão entre o preço e a quantidade dois produtos) e contextualizações denominadas ‘Meia tesoura inglesa’ e ‘Estrutura de paredes e encaixes’.

A nona dissertação, de Nilberti Assis Duarte de Almeida, inicialmente se voltou para a análise de três livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental. O item investigado nas coleções foi a apresentação do teorema de Pitágoras. O autor fez a busca individualizada em cada coleção, mas não realizou a comparação entre elas.

Almeida (2013) aproveitou os levantamentos das demonstrações do teorema de Pitágoras para “[...] enunciar o teorema da seguinte maneira: Um feixe de

paralelas determina em duas transversais segmentos proporcionais” (p. 16), cuja figura está indicada abaixo.

Figura 03: Ilustração relativa ao enunciado do teorema de Tales.



Fonte: Almeida (2013, p. 25).

Ainda, o autor realizou uma pesquisa com licenciandos de um curso de Matemática e professores da escolaridade básica sobre a presença de demonstrações de Geometria nos Ensinos Fundamental e Médio. O recurso utilizado foi um questionário “[...] versando perguntas sobre a formação acadêmica dos professores e alunos e as demonstrações na Educação” (ALMEIDA, 2013, p. 43).

Almeida (2013) concluiu que:

[...] os professores ficaram divididos com relação à 1ª pergunta: “Quando aluno, você aprendeu a demonstrar alguns resultados? Em que série(s)?”. 75% dos professores consideraram importante saber demonstrar teoremas e quase todos consideram importante que os alunos do 9º ano saibam demonstrar resultados matemáticos. Quando a mesma pergunta é feita com relação aos alunos do Ensino Médio, 90% dos professores indicaram ser importante que esses alunos tenham contato com demonstração. Com relação à 5ª pergunta, 85% dos professores responderam que as demonstrações são importantes para a formação do pensamento lógico matemático dos estudantes. Vale ressaltar também que tanto os professores, quanto os alunos, num grande percentual, responderam que é importante saber demonstrar algum resultado matemático (p. 48).

A décima e última dissertação analisada foi elaborada por Weidson do Amaral Luna, que propôs a apresentação a Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras. O autor relatou um breve contato através de uma experiência no 3º ano do Ensino Médio, por meio de três aulas expositivas em que foram

apresentadas e relacionadas fórmulas da Geometria Analítica com o Teorema de Tales ou de Pitágoras.

5 SÍNTESE DOS RESULTADOS

No Quadro 03 passamos a descrever os resultados da Categoria A.

Quadro 03: Qual o objetivo geral ou questão principal da monografia?

Item	Autor	Descrição
01	Edmilson Corrêa de Oliveira	Quais as estratégias didáticas são usadas no ensino de Teorema de Tales e semelhança nos livros do Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio de 2015? (OLIVEIRA, 2019, p. 11).
02	Jonathan de Aquino da Silva	O objetivo foi “[...] demonstrar e retomar o Teorema de Tales, além de instigar os alunos a fazerem construções que estejam aplicadas ao referido teorema” (SILVA, 2019, p. 12).
03	Rogério Maurício Fernandes Pessanha	“O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma metodologia de ensino que favoreça o aprendizado dos temas propostos, de forma significativa, pelos alunos da EJA” (PESSANHA, 2017, p. 7).
04	Leonardo dos Santos Ferreira	“Este trabalho apresenta uma análise de como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano, como são feitas as demonstrações, os exercícios, as figuras” (FERREIRA, 2017, p. 6).
05	Venício do Nascimento Silva	“Este trabalho tem como objetivo maior, demonstrar o teorema de Tales, de tal forma, que um aluno do ensino médio possa entender” (SILVA, 2015, p. 6).
06	Paulo Fernando Silva dos Reis	“Este trabalho tem como objetivo apresentar uma sequência didática para o ensino do Teorema de Tales para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental” (REIS, 2014, p. 6).
07	Erickson Nunes Martins	“Este trabalho busca verificar quais são as dificuldades de aprendizagem reveladas pelos alunos do 8º e do 9º ano do Ensino Fundamental, nas atividades que envolvem o teorema de Tales. Através de uma abordagem construtivista, pretende-se direcionar e orientar o aluno para uma análise gradativa e interpretativa das ações tomadas para o entendimento e a resolução de situações-problemas que envolvam o teorema de Tales” (MARTINS, 2014, p. 7).
08	Adão Regis Pereira	“O objetivo deste trabalho é analisar como esta sendo apresentado o Teorema de Tales, em alguns livros didáticos do PNLD 2014. E também produzir material de apoio para professores e estudantes” (ADÃO, 2014, p. 11).

Item	Autor	Descrição
09	Nilberti Assis Duarte de Almeida	“Este estudo tem por objetivo analisar a apresentação do Teorema de Tales em três livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, observando os seguintes aspectos: motivação, pré-requisitos, provas, consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais, exercícios e trazer uma breve fundamentação sobre alguns aspectos das teorias de Balacheff e Van Hiele, as quais identificam níveis de evolução dos alunos em provas e demonstrações (NILBERTI, 2013, p. 14)”
10	Weidson do Amaral Luna	O objetivo foi “[...] mostrar que é possível deduzir as principais fórmulas da Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras, valorizando o raciocínio lógico dedutivo, onde um número reduzido de definições e proposições iniciais da Geometria Euclidiana, são o bastante para se demonstrar, uma após outra, as principais fórmulas da Geometria Analítica, provocando, assim, uma reflexão sobre o atual ensino da Geometria Analítica e conectando-a às contribuições de Tales e de Pitágoras para o seu desenvolvimento e resgatando, desta forma, o ensino de geometria adotado antes da reforma que ficou conhecida por Matemática Moderna” (p. 3).

Fonte: Os autores.

No Quadro 04 passamos a designar a Categoria B (Qual o segmento escolar a que se dirige?).

Quadro 04: Qual o segmento escolar a que se dirige?

Item	Autor	Descrição
01	Edmilson Corrêa de Oliveira	Ensino Médio.
02	Jonathan de Aquino da Silva	Ensino Médio.
03	Rogério Maurício Fernandes Pessanha	Educação de Jovens e Adultos (EJA).
04	Leonardo dos Santos Ferreira	Ensino Fundamental (9º ano).
05	Venício do Nascimento Silva	Não se aplica.
06	Paulo Fernando Silva dos Reis	Ensino Fundamental (9º ano).
07	Erickson Nunes Martins	Ensino Fundamental (8º e 9º ano).
08	Adão Regis Pereira	Ensino Fundamental (9º ano).
09	Nilberti Assis Duarte de Almeida	Ensino Fundamental (9º ano).
10	Weidson do Amaral Luna	Ensino Médio.

Fonte: Os autores.

No Quadro 05 indicamos a Categoria C (Qual o sujeito de pesquisa?).

Quadro 05: Qual o sujeito de pesquisa?

Item	Autor	Descrição
01	Edmilson Corrêa de Oliveira	Seis livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio.
02	Jonathan de Aquino da Silva	Dois livros didáticos e alunos do 3º ano do Ensino Médio.
03	Rogério Maurício Fernandes Pessanha	Alunos do 6º, 7º e 8º ano da Educação de Jovens e Adultos (EJA)
04	Leonardo dos Santos Ferreira	Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.
05	Venício do Nascimento Silva	O conhecimento matemático.
06	Paulo Fernando Silva dos Reis	Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.
07	Erickson Nunes Martins	Alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental.
08	Adão Regis Pereira	Seis livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental. Atividades envolvendo o GEOGEBRA.
09	Nilberti Assis Duarte de Almeida	Três livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental. Professores e licenciandos do Ensino Superior.
10	Weidson do Amaral Luna	Alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Fonte: Os autores.

No Quadro 06 representamos os resultados da Categoria D (Apresenta referenciais teóricos? Se sim, quais?).

Quadro 06: Apresenta referenciais teóricos? Se sim, qual (quais)?

Item	Autor	Descrição
01	Edmilson Corrêa de Oliveira	Parâmetros Curriculares Nacionais. Base Nacional Comum Curricular ² . Programa Nacional de Livro Didático (PNLD 2015).
02	Jonathan de Aquino da Silva	Anamorfismos.
03	Rogério Maurício Fernandes Pessanha	Aprendizagem Significativa de Ausubel, Novak e Hanesian (1980).
04	Leonardo dos Santos Ferreira	Parâmetros Curriculares Nacionais.
05	Venício do Nascimento Silva	O conhecimento matemático.
06	Paulo Fernando Silva dos Reis	Modelo de Van Hiele (Crowley, 1994).
07	Erickson Nunes Martins	Modelo de Van Hiele. Parâmetros Curriculares Nacionais.
08	Adão Regis Pereira	Parâmetros Curriculares Nacionais. Programa Nacional de Livro Didático (PNLD 2011).

2 No texto, o autor utiliza os documentos no item Introdução, como parte da justificativa para a pesquisa do tema, apesar de no resumo ser colocado como referencial teórico. Aqui, estamos mantendo a concepção do autor.

Item	Autor	Descrição
09	Nilberti Assis Duarte de Almeida	Parâmetros Curriculares Nacionais. Programa Nacional de Livro Didático (PNLD 2015). Tipos de provas e demonstrações (Balacheff, 1987). Níveis de raciocínio geométrico (Van Hiele <i>apud</i> Nasser, 2000).
10	Weidson do Amaral Luna	O conhecimento matemático.

Fonte: Os autores.

No Quadro 07 descrevemos a Categoria E (Apresenta referencial (is) metodológico(s)? Se sim, quais?).

Quadro 07: Apresenta referencial (is) metodológico(s)? Se sim, qual (quais)

Item	Autor	Descrição
01	Edmilson Corrêa de Oliveira	Não mencionado.
02	Jonathan de Aquino da Silva	Qualitativa, do tipo exploratório, descrito em Gil (2008).
03	Rogério Maurício Fernandes Pessanha	Aplicação de uma atividade composta de três partes: “[...] verificação dos conhecimentos prévios dos alunos acerca dos temas propostos (pré-teste), aplicação de duas sequências didáticas elaboradas segundo a teoria da Aprendizagem Significativa e, por fim, verificação da aprendizagem (pós-teste)” (PESSANHA, 2014, p. 7).
04	Leonardo dos Santos Ferreira	Não enunciado.
05	Venício do Nascimento Silva	Não enunciado.
06	Paulo Fernando Silva dos Reis	Atividades aplicadas a 35 alunos em uma das turmas do 9º ano de uma escola municipal.
07	Erickson Nunes Martins	Não enunciado.
08	Adão Regis Pereira	Não enunciado.
09	Nilberti Assis Duarte de Almeida	Questionário aplicado a professores e licenciandos do curso de Graduação em Matemática.
10	Weidson do Amaral Luna	A metodologia utilizada foi a Pesquisa Bibliográfica “[...] que permitiu a fundamentação da presente análise no que diz respeito à coerência e à relevância da temática escolhida. Desta forma, utilizou-se uma variedade de fontes que propiciassem o trajeto do processo de investigação e de análise” (p. 4).

Fonte: Os autores.

No Quadro 08 indicamos o levantamento da Categoria F (Como é abordado o Teorema de Tales?).

Quadro 08: Como é abordado o Teorema de Tales?

Item	Autor	Descrição
01	Edmilson Corrêa de Oliveira	Expõe e analisa os diferentes enunciados, as figuras típicas, discute os exercícios de aplicação e possíveis contextualizações/interdisciplinaridade/transversalidade/aplicações do Teorema de Tales em outros tópicos.
02	Jonathan de Aquino da Silva	Expõe o uso de anaformismo por meio de problematização para introduzir a semelhança de triângulos.
03	Rogério Maurício Fernandes Pessanha	A intervenção didática fez uso de materiais concretos e situações-problema contextualizadas que requeriam o uso do subsunçor proporcionalidade direta.
04	Leonardo dos Santos Ferreira	O autor centraliza as discussões em torno da necessidade de demonstrações matemáticas. Foram encontradas breves menções a história de Tales de Mileto, porém não é comentado ou descrito o provável método deste grego para medir a altura das pirâmides.
05	Venício do Nascimento Silva	O autor cita um pouco sobre Tales de Mileto e que a referência que matemáticos posteriores deram ao Teorema de Tales.
06	Paulo Fernando Silva dos Reis	Foram aplicadas três atividades aos alunos, sem mencionar um referencial específico do modo de criação e desenvolvimento.
07	Erickson Nunes Martins	O autor aplicou uma atividade que consta de um Questionário (sondagem dos conhecimentos prévios dos alunos), uma primeira 'aula de História da Matemática', uma 2ª aula onde foi exposto o modelo de Van Hiele, a posição relativa entre retas e, por fim, o Teorema de Tales aos alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental.
08	Adão Regis Pereira	O autor verifica o Teorema de Tales nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), realiza uma revisão bibliográfica sobre Tales de Mileto, analisa os livros didáticos quanto a metodologia, contextualização e as demonstrações sobre o Teorema de Tales.
09	Nilberti Assis Duarte de Almeida	O autor apresentou alguns modos de demonstração do teorema de Tales no segmento do Ensino Fundamental.
10	Weidson do Amaral Luna	Luna (2013) realizou uma brevíssima explanação sobre a história de Tales.

Fonte: Os autores.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando-se em consideração o levantamento de dados no catálogo do PROFMAT, foram inventariadas dez dissertações profissionais em um período de dez anos, uma presença mínima considerando-se a relevância do tema do ‘Teorema de Tales’ no campo de ensino da Matemática.

Quanto ao ‘segmento de ensino’ encontramos cinco monografias voltadas ao Ensino Fundamental (50%), três para o Ensino Médio (30%), uma para a Educação de Jovens e Adultos (EJA- 10%) e uma sem identificação (10%).

No quesito ‘Qual o sujeito de pesquisa?’ encontramos que 45,83% das monografias realizaram um discurso situando e descrevendo o ‘conhecimento matemático’ de um ponto de vista axiomático, 41,67% organizaram algum tipo de produto educacional, 8,33% se focaram na análise de livros didáticos e 4,17% desenvolvem algum tipo de atividade com alunos.

No item ‘Os Principais referenciais teóricos’ observamos o uso dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997;1998) e a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) em 36,84%, assim como 31,57% de menções com relação a área da História da Matemática.

Na que se refere aos ‘Principais referenciais metodológicos’ destaca-se que 50% não fizeram menção. Outras, realizaram atividades matemáticas (20%), pesquisa qualitativa (10%), pesquisa bibliográfica (10%) e questionário aplicado a professores (10%).

Quanto ao modo ‘Como é abordado o Teorema de Tales?’ levantamos que em 15% houve ênfase na exposição do tema do ponto de vista axiomático por meio de demonstrações e uso de formalismo matemático, 35% utilizam exercícios matemáticos para ilustrar o tema, 25% expõe exercícios de aplicação de modo contextualizado, 5% revelam preocupação em problematizar o assunto e 20% fazem referência ao uso da História da Matemática.

Com base nos dados coletados, concluímos que no segmento educacional da escolaridade básica indicada nas dez monografias analisadas o discurso predominante de exposição do Teorema de Tales ainda revela maior preocupação em inicialmente expor o ‘conhecimento matemático’ a partir da perspectiva axiomática, como também através de exemplos prototípicos, algumas aplicações e contextualizações, que acaba enfatizando pouca preocupação em construir um discurso narrativo ou outros meios heurísticos de abordar este conhecimento.

Quanto os produtos educacionais, a maioria deles realiza a proposição de atividades para a sala de aula baseadas, quase que exclusivamente, com base no conhecimento matemático, sem revelar ponderações da área educacional que possam dar apoio a essas considerações.

Devemos lembrar que as pesquisas voltadas a área de Ensino mencionam documentos prescritos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), que apontam uma preocupação

central para a inserção dos conteúdos em termos da educação do cidadão brasileiro em aspectos de formação de cidadania, mercado de trabalho e inserção social.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, N. A. D. **Uma análise da apresentação do Teorema de Tales em livros didáticos do nono ano do ensino fundamental**. 2013. 57f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013.
- AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia Educacional*. 2. ed. [S.l.: s.n.], 1980.
- BALACHEFF N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, v.18, n.2, 1987, p. 147-176.
- BOYER, Carl, Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974. 489 p.
- BONGIOVANNI, V. O Teorema de Tales: Uma ligação entre o geométrico e o numérico. **REVEMAT**, UFSC, 2007. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12993/12094>>. Acesso em: 03 set. 2021.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.
- _____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. v. 3 Brasília, DF:MEC/SEF, 1998.
- _____. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília: SEMT/MEC. 1997.
- BURTON, David M. **The history of mathematics: an introduction**. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2011.
- COSTA, M. dos S.; ALLEVATO, N. S. G. Futuros professores de Matemática e o ensino de proporcionalidade através da resolução de problemas de Geometria. **Boletim GEPEN**. n. 61, jul.-dez. 2012, p. 109-123.
- CROWLEY, M. L. O Modelo Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, São Paulo: 1994. Tradução de Hygino H Domingues.
- DA COSTA, A. P. O PENSAMENTO GEOMÉTRICO EM FOCO: construindo uma definição. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, n.6, v.16, 2020. p. 77-94.
- D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática da Teoria à Prática**. 17 ed. Campinas: Papirus, 1996.

- DOS REIS, P. F. S. **O Teorema de Tales por meio de atividades investigativas.** 2014, 85f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campus dos Goytacazes, 2014.
- FERREIRA, L. dos S. **Como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano.** 2017. 48f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2015.
- FERREIRA, N. S. A. **As pesquisas denominadas ‘estado da arte’.** Educação & Sociedade, Campinas, ano 23, n. 79, p. 257-272, ago. 2002.
- FIorentini, D.; Lorenzato, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2007.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- HEATH, Thomas Little. **A manual of Greek Mathematics.** v.1. UK: Oxford, Clarendon Press, 1921.
- LEIVAS, J. C. P. O Ensino Atual de Geometria: Concepções e Tendências. **Acta Science.** v.4, n.1, jan./jun. 2002, p. 43-46.
- LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.
- _____. Por que não ensinar geometria. **A educação matemática em revista**, n. 3, 1995, p. 2-12.
- LUNA, W do A. **Uma construção da Geometria Analítica a partir dos teoremas de Tales e de Pitágoras.** 2013. 80f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013.
- MAGALHÃES, J. L. Uma Tipologia de Provas Elaboradas por Alunos do Ensino Fundamental e Início do Ensino Médio na Passagem da Aritmética para a Álgebra. **In: Anais... SBEM**, 2006. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/anais/vi%20enem/arquivos/comun_8.pdf>. Acesso em 23 mar. 2018.
- MARTINS, E. N. **Uma abordagem construtivista do Teorema de Tales sob a perspectiva da teoria de Van Hiele.** 2014. 84f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.
- NASSER, L. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática- UFRJ - Projeto Fundão-SPEC-PADCT-CAPEs, p. 4-5, 2000.
- OLIVEIRA, E. C. **Teorema de Tales e semelhança nos livros do PNLD de 2015 - Ensino Médio.** 2019. 151f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

PEREIRA, A. R. **Teorema de Tales**: análise de sua apresentação nos livros didáticos e proposição de atividades. 2014. 53f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

PESSANHA, R. M. F. **Teorema de Tales e semelhança de triângulos na educação de jovens e adultos**: uma aprendizagem significativa. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campus dos Goytacazes, 2017.

PIMENTEL, G. H., **A História da Geometria nos Livros Didáticos e Perspectivas do PNLD**. 2014. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

ROUCHE, E.; COMBEROUSSE, C. de. **Traite de Geometrie**. 1893.

SILVA, J. A. da. **Teorema de Tales**: uma abordagem usando anamorfismos. 2018. 65f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2018.

SILVA, V. do N. **Teorema de Tales e suas aplicações**. 2015. 53f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **PROFMAT**: Uma reflexão e alguns resultados. 2017.

TINOCO, L. A. A. **Razões e proporções**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.