UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

MODELAGEM MATEMÁTICA ALIADA À EXPERIMENTAÇÃO NO ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Silvana Emer

Lajeado, julho de 2020

Silvana Emer

MODELAGEM MATEMÁTICA ALIADA À EXPERIMENTAÇÃO NO ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari – Univates, como parte da exigência para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Jussara Hepp Rehfeldt

Lajeado, julho de 2020

AGRADECIMENTOS

É chegado o momento de agradecer aos que contribuíram para que se fizesse possível esta importante etapa da minha vida. Meu muito obrigado:

À minha mãe, Luiza Lorenzi Emer, pelo incentivo a alçar altos voos e pelos ensinamentos e valores, legados deixados ao longo da vida por ela e por meu pai, Armando Emer (*in memorian*). À minha família, principalmente, aos meus filhos, Rodrigo Emer Kerber e Nycolle Cristhine Emer Kerber, pelo incentivo, pela paciência, pelo apoio e pelos abraços.

À minha orientadora, professora doutora Márcia Jussara Hepp Rehfeldt, por todos os momentos disponibilizados para a leitura cuidadosa do meu trabalho e pelas excelentes contribuições dadas, pelos elogios, pelas cobranças, pelo alento e pelo abraço. Também agradeço às professoras doutoras Marli T. Quartieri e Miriam I. Marchi, pelas sugestões, que contribuíram para a qualificação deste trabalho. E, aos colegas e professores do Mestrado, pelas discussões e pelo compartilhamento de experiências que levarei para toda a minha vida.

Agradeço às professoras e colegas das escolas onde atuo, pela colaboração e apoio em momentos críticos. Em especial, à minha colega, professora de Química, Betina Nogueira, que não hesitou em colaborar na prática interdisciplinar. Ao Centro de Ensino Médio Pastor Dohms - Unidade Taquari, que abriu as portas para que pudesse desenvolver minha prática pedagógica e coletar os dados desta pesquisa. Em especial, aos discentes, sujeitos desta pesquisa, sem vocês, nada teria sido possível.

Agradeço à banca examinadora, o tempo dispensado para a leitura cuidadosa do meu trabalho e as contribuições dadas nesta dissertação.

RESUMO

Esta dissertação aborda uma prática pedagógica explorada à luz da Modelagem Matemática, na perspectiva de autores como Bassanezi (2014), Barbosa (2004), Biembengut (2009), entre outros. A questão que norteou esse trabalho de pesquisa teve como finalidade principal identificar a contribuição da Modelagem Matemática aliada à experimentação no ensino da função exponencial. A prática, desenvolvida em dez encontros de duas horas cada, envolvendo alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular do Vale do Taquari, consistiu na exploração de experimentações, tendo a Modelagem Matemática como metodologia para o ensino da matemática. Para tanto, foram realizados dois experimentos: O experimento I (simulação), processo de despoluição de um lago; e o experimento II, mensuração do pH no processo de diluição do HCl. A coleta de dados foi realizada por meio de registros no diário de bordo, filmagens, fotografias e questionários abertos. A pesquisa, de cunho qualitativo, com características de estudo de caso, foi analisada com base nos pressupostos da análise textual discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2011). Para tal, foram elencadas duas categorias a *priori*, "Representação de modelos matemáticos" e "Trabalho de grupo" e, como categoria emergente, a "Construção coletiva do modelo matemático". A partir da análise dos registros dos alunos, pode-se inferir que o trabalho em grupo proporcionou discussões e a expressão de vários pontos de vista, interação e cooperação entre os grupos, bem como, que a representação dos modelos matemáticos por tabelas, gráficos e modelos algébricos foi exitosa. Decorrente dessas categorias, emergiu a construção coletiva do modelo matemático, evidenciado na transposição da prática e da teoria, na interação, na compreensão e nos conhecimentos comungados. Além dessas categorias, emergiram dos alunos, de forma espontânea, alguns "brotamentos", assim chamados por nascerem de forma natural, fluida, não premeditada. São eles: a) capacidade de estabelecer relações com visão crítica sobre os processos realizados; b) a constatação de que a "ideologia da certeza" tem seu fundamento no cálculo e não no contexto real; c) a reflexão/ação que os levou a interligar conceitos matemáticos e conceitos químicos, promovendo a (re)significação dos saberes e a interdisciplinaridade. Enfim, após analisar os resultados, concluo que a Modelagem Matemática aliada à experimentação contribuiu significativamente para o ensino da função exponencial e que esses "brotamentos", competências desenvolvidas durante o processo, constituem um perfil de aluno pesquisador que cresce no "terreno fértil" da Modelagem Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Função exponencial. Experimentação. Ensino.

ABSTRACT

This thesis approaches a pedagogical practice based on Mathematical Modeling, according to the perspective of authors such as Bassanezi (2014), Barbosa (2004), and Biembengut (2009), among others. This research focused predominantly on identifying the contribution of Mathematical Modeling associated with experimentation to the teaching of exponential function. The practice performed in ten two-hour sessions with 1^{st}-year students of the Secondary School of a private institution in the Taquari Valley, RS, Brazil, consisted in exploring experimentations with Mathematical Modeling as a methodology to teach mathematics. In order to do so, two experiments were carried out: Experiment I (simulation), the process of depolluting a lake; Experiment II, measuring the pH when diluting HCl. Data was collected through records in journals, filming, photographs, and open questionnaires. The research was qualitative in nature, with characteristics of a case study based on assumptions of the discursive textual analysis (MORAES; GALIAZZI, 2011). Therefore, two categories were deduced: “Representation of mathematical models” and “Group work”, and an emerging category, “Collective construction of knowledge”. Upon analyzing the students’ records, one may infer that the group work enabled discussions and the expression of various viewpoints, interaction, and cooperation among the groups; furthermore, the representation of mathematical models with tables, graphs and algebraic models was successful. These categories promoted the collective construction of knowledge, highlighted by the transfer of practice and theory in the interaction, understanding, and in the shared knowledge. Besides these categories, the students made spontaneously emerge some “sprouts”, thus called for being originated in a fluid, non-predetermined manner. They were: a) the capacity to establish critical relationships about the processes performed; b) the conclusion that “the ideology of certainty” is based on calculations and not on the real context; c) the reflection/action that led them to interconnect mathematical and chemical concepts, thus promoting the (re)significance of knowledge and interdisciplinarity. Finally, after analyzing the outcomes, one may conclude that Mathematical Modeling used with experimentation significantly contributed to the teaching of the exponential function, and that these “sprouts”, i.e. competences developed along the process, characterize a researcher-student thriving in the “fertile soil” of Mathematical Modeling.

Keywords: Mathematical Modeling. Exponential Function. Experimentation. Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No Brasil, a educação matemática vem sendo percebida com preocupação, tendo em vista os resultados divulgados pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (BRASIL, 2018), o qual revela que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem o nível básico de matemática. Esse baixo desempenho dos estudantes brasileiros em matemática remete a uma reflexão sobre a educação matemática e a prática docente, considerando que a maioria das escolas ainda preconiza, prioritariamente, a utilização do método de transmissão do conhecimento. Neste contexto, D'Ambrósio (2002) afirma que exercícios de aplicação, no ensino tradicional[1], nada mais são do que a repetição do modelo de resolução exposto pelo professor.

A partir dessas informações iniciais, passo a refletir sobre minha vida profissional e minha prática pedagógica. Advinda de uma educação conservadora, sempre reproduzi o modelo pedagógico no qual fui ensinada. Por muitos anos, mantive certa inflexibilidade na cobrança dos resultados das provas e na forma teórica abordada em explicações seguidas de exercícios de fixação. Porém, algumas mudanças foram ocorrendo gradativamente. A cada ano, procurava explicar de forma mais acessível, observava a receptividade dos alunos e buscava entender as causas das dificuldades na aprendizagem matemática. Comecei, então, a questionar a aplicabilidade dos conteúdos e tentar estabelecer as conexões com a prática e, algumas vezes, nas aulas, criava algo similar a um modelo matemático, como, por exemplo, os dados sobre gastos fixos e variáveis de um evento promovido pela turma, para auxiliá-los no cálculo sobre a viabilidade financeira. Segundo Bassanezi (2014, p. 16), "a Modelagem Matemática consiste

[1]Ensino cuja a prática pedagógica predominante se faz baseada na transmissão de conceitos e técnicas.

na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Embora, naquele momento, a Modelagem Matemática (MM) fosse desconhecida para mim, eu já desenvolvia algumas práticas similares. De forma intuitiva e sem fundamentação teórica, aplicava um modelo matemático de função partindo de uma situação real.

Concomitantemente, buscando aprimorar meus conhecimentos pedagógicos, participava dos encontros de professores de Matemática, coordenados por pesquisadores da Universidade do Vale do Taquari, promovidos pela Pró-Reitoria de Pesquisa e Extensão da Univates, o que fortalecia a minha vontade de seguir uma linha pedagógica diferente da simples transmissão de conteúdos. No decorrer destes cursos, fui conhecendo outras tendências como a Etnomatemática e a Investigação Matemática, mas, ao conhecer a Modelagem Matemática, identifiquei-me, uma vez que, de forma intuitiva e discreta, essa tendência já fazia parte do meu fazer pedagógico.

Assim, devido à minha trajetória e à vontade de (re)significar o ensino da matemática, encontrei na Modelagem Matemática, um viés possível e pertinente a essa proposta. Apesar de a Modelagem Matemática ter iniciado na década de 1970 (BIEMBENGUT, 2009), o conhecimento mais aprofundado dela no meu fazer pedagógico ocorreu a partir da minha participação na pesquisa, "Despertando a vocação científica e a criatividade, por meio da modelagem matemática, em alunos do Ensino Médio, no interior do Rio Grande do Sul", desenvolvida na Univates. Essa pesquisa tem por objetivo analisar as implicações do uso da Modelagem Matemática como metodologia de ensino na área de Ciências Exatas num grupo de alunos de Ensino Médio. Além da coordenadora da pesquisa, fazem parte do grupo dois alunos bolsistas, um professor de Física da Univates e quatro professores de Matemática do Ensino Médio, atuantes em escolas da região.

As atividades desenvolvidas nesse grupo de pesquisa propiciaram-me experiências em Modelagem Matemática (MM), que foram fundamentais para posterior aplicação. Não satisfeita com a forma como eu abordava o conceito de funções em minhas aulas, essa vivência encorajou-me a aplicar essa metodologia. Essa insatisfação vai ao encontro do pensamento de Espírito Santo (2017, p. 17), ao afirmar que "os métodos de ensino de disciplinas matemáticas tendem a apresentar o produto final do pensamento matemático em vez dos processos do pensamento matemático, necessários ao desenvolvimento de conceitos". Já, em relação ao ensino e aprendizado de funções, Sierpinska (1992) ressalta que a principal dificuldade encontrada pelos alunos é relacionar as fórmulas com os gráficos, diagramas e descrições verbais. Rezende (2003) acrescenta outra dificuldade, que diz respeito à identificação das variáveis e sua dependência, aspecto fundamental no conceito de função.

Considerando as dificuldades abordadas por esses autores e minhas experiências empíricas, percebo que o conceito de funções é, predominantemente, trabalhado de forma algébrica, sem imbricá-lo com a realidade cotidiana. Essa forma de ensino reproduz um algoritmo com pouca significação para o aluno, o que pode resultar no desinteresse pelo saber matemático da sala de aula e, consequentemente, deixar lacunas na aprendizagem matemática.

Por conseguinte, a necessidade de desenvolver novas competências e habilidades no ensino da matemática e a vontade de aprimorar meu fazer pedagógico resultaram no aprofundamento dessa metodologia com foco no ensino de funções. Trabalhando as funções no Ensino Médio, o maior desafio é aplicar a MM no ensino da função exponencial, por ser de difícil compreensão para os alunos, conforme pude verificar na minha prática docente. Em resposta a esse desafio, defini como enfoque dessa pesquisa a aplicação da Modelagem Matemática como metodologia no ensino de funções exponenciais.

Na sequência, intensifiquei leituras sobre as várias concepções e possibilidades de aplicação. A leitura de trabalhos já realizados nessa linha de pesquisa e de situações de outras áreas do conhecimento suscitou a possibilidade de aplicar a MM por meio da experimentação. Essa junção tornou possível associar a prática e a teoria, além de possibilitar a proximidade entre as etapas da MM e da experimentação.

Dessa forma, essa temática, ensino de funções exponenciais por meio da Modelagem Matemática aliada à experimentação, remeteu a um questionamento que resultou no problema desta pesquisa: Como a modelagem matemática, desenvolvida por meio de experimentações, pode contribuir no ensino da função exponencial com alunos no 1º Ano do Ensino Médio?

Assim, com o objetivo de identificar a contribuição da Modelagem Matemática, aliada à experimentação, no ensino de função exponencial, a presente pesquisa, “Modelagem Matemática aliada à experimentação no ensino de função exponencial”, foi realizada com uma turma de 1º ano do Ensino Médio, da escola onde atuo como professora de matemática. Os objetivos específicos foram os seguintes:

- Desenvolver uma prática pedagógica no ensino de função exponencial com alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio, que envolva Modelagem Matemática, por meio de experimentações.

- Analisar como as atividades desenvolvidas durante a prática pedagógica favorecem o trabalho em grupo e a representação de modelos matemáticos.

Após essa introdução em que relatei minha trajetória docente, as motivações para a realização deste estudo, a questão que norteou a pesquisa desenvolvida e os objetivos, segue o referencial teórico.

Para sustentar a pesquisa, no capítulo dois, destaco a Modelagem Matemática, suas concepções, etapas, potencialidades e limitações. Ainda discorro acerca da importância das experimentações e defino a função exponencial, descrevendo suas características, propriedades e representações gráficas. Por fim, comento os estudos recentes na área em que proponho esta pesquisa.

No capítulo três, apresento os procedimentos metodológicos, as atividades propostas na prática pedagógica, os instrumentos utilizados para a coleta de dados, o local e a forma de análise.

No quarto capítulo, apresento os resultados da pesquisa, acompanhados de reflexões. Nos subcapítulos, elenquei categorias - as categorias *a priori* - que são: “representação do modelo de função do experimento” e “trabalho em grupo”, bem como, uma categoria emergente, que intitulei “construção coletiva do modelo matemático” e algumas reflexões, que chamei de “brotamentos” reflexivos da prática.

No quinto capítulo apresento as considerações finais e as reflexões acerca do trabalho desenvolvido. Ao final, as referências e os apêndices.

Na sequência, a fundamentação que sustenta essa dissertação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

De acordo com Fiorentini (1995), o ensino no Brasil, nas décadas de 1940 e 1950, era prioritariamente tradicional, centrado no professor, cuja função era transmitir os conteúdos já sistematizados nos livros didáticos. A aprendizagem era passiva, os alunos memorizavam teoremas e demonstrações e reproduziam mecanicamente os procedimentos ditados pelo professor. Mais adiante, nas décadas de 1960 e 1970, com o Movimento da Matemática Moderna, o foco passou a ser a Teoria dos Conjuntos, as Estruturas Algébricas e as Relações e Funções. Também foi introduzida no currículo, a lógica, envolvendo o abstrato e o formal, evidenciando aplicações. No entanto, o ensino continuou sendo autoritário e centrado no professor. Esta fase caracterizou-se por um ensino tecnicista.

Nos anos 1980 e 1990, surgiu o ensino construtivista no Brasil e a valorização dos aspectos sociais, antropológicos, linguísticos e cognitivos. A partir da década de 1990, as Diretrizes Básicas da Educação Nacional passaram a direcionar-se para uma matemática voltada à realidade do aluno, caracterizando a valorização da prática aliada à teoria, o diálogo, a interação, o desenvolvimento da autonomia, a participação crítica, o uso da tecnologia, a aquisição de competências básicas pelo cidadão e a ação do aluno no processo da construção do conhecimento. Porém, apesar da tendência transformadora, o ensino tradicional continua a exercer forte influência na educação matemática, por estar bastante arraigado na formação dos professores que atuam no contexto atual (FIORENTINI, 1995).

Essas discussões levaram à emergência de novas concepções de ensino da matemática, ou seja, o surgimento de propostas alternativas para a ação pedagógica do ensino matemático, que constitui o movimento da educação matemática. Dentre essas tendências em Educação Matemática, destacam-se: a Etnomatemática, a Modelagem, a Tecnologia e a Educação

Matemática, a Filosofia da Educação Matemática e a Resolução de Problemas (ZORZAN, 2007). Entre essas tendências, optei pela Modelagem Matemática, pois, ao explorá-la junto com o grupo de pesquisa da Univates, “Despertando a vocação científica e a criatividade, por meio da modelagem matemática, em alunos do Ensino Médio, no interior do Rio Grande do Sul”, numa das turmas em que lecionava, percebi a motivação dos alunos e o retorno positivo em termos de aprendizagem, autonomia, criatividade e colaboração.

A seguir, na seção 2.1, concepções de MM, os papéis do professor e alunos, casos graduais de aplicação da MM (BARBOSA, 2004) e as etapas da MM de acordo com Biembengut e Hein (2009). Na seção 2.2 a experimentação por investigação suas similaridades com as etapas da MM e sua importância no desenvolvimento do pensamento científico. Já na seção 2.3, uma revisão das principais características da função exponencial e suas aplicações e, ao finalizar esse referencial, os estudos recentes na área da MM e experimentações no ensino de funções exponenciais.

2.1 Modelagem Matemática

Embora o uso de modelos matemáticos na resolução de problemas já venha desde a antiguidade, sua aplicação como estratégia de ensino despontou na década de 1970, com a matemática aplicada, caracterizada por um conjunto de símbolos que representavam uma situação-problema e a busca de sua solução (FIORENTINI, 1995). No Brasil, a modelagem na educação aparece nos anos 1970 e 1980, difundida, principalmente, por Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D’Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi (BIEMBENGUT, 2009). Segundo Bassanezi (2015, p. 10, grifos meus), a “atividade de aplicar matemática é tão antiga quanto a própria matemática e muitas ideias matemáticas surgiram de **problemas práticos**”. Aqui se expressa a principal característica da modelagem: partir de uma situação real.

Ainda, para Bassanezi (2014, p. 16), “a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. De forma similar, Biembengut (2009) e Skovsmose (2000) afirmam que o ato de modelar como estratégia de ensino consiste em elaborar um modelo a partir da realidade. Biembengut (2009) define a modelagem como “uma metodologia de ensino-aprendizagem [que] parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso do ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema” (BIEMBENGUT; HEIN, 2009, p. 28). Barbosa (2004, p. 3) resume a modelagem como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e a investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”.

Além desses autores, a ideia de Modelagem Matemática a partir de uma situação real também é contemplada nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008):

> Ante uma situação-problema ligada ao “mundo real”, com sua inerente complexidade, o aluno precisa mobilizar um leque variado de competências: selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado (BRASIL, 2008, p. 84-85).

Nesse sentido, a Modelagem Matemática no currículo se movimenta pelo paradigma da investigação (SKOVSMOSE, 2000). Este autor afirma que a Modelagem Matemática está associada à problematização, à criação de perguntas e à investigação, buscando selecionar, organizar, manipular informações e refletir.

Em concordância, Barbosa (2004, p. 3) menciona que:

> O ambiente de Modelagem está associado à problematização e à investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo.

Ainda, em relação ao procedimento para a realização de uma prática em Modelagem Matemática, Biembengut e Hein (2009) o dividem em três etapas descritas a seguir:

Etapa 1 – Interação com o problema: É a etapa inicial do contato com a situação-problema e envolve a obtenção de informações, a compreensão e a familiarização com o tema em questão.

Etapa 2 – Matematização: Com os dados obtidos na fase de interação, ocorre a estruturação da situação e a transformação da linguagem natural para a linguagem matemática. É a etapa de identificação de um modelo. Bassanezi (2014, p. 19) afirma que “quando se procura refletir uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender ou de agir sobre ela, o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o Modelo”, que pode ser “um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou equações algébricas, ou gráfico, ou representação, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução”

(BIEMBENGUT; HEIN, 2009, p. 14). Segundo Rehfeldt et al (2013), para que um modelo seja eficiente depende de uma tradução adequada da realidade, mantendo isomorfismo entre essa realidade complexa e o modelo a ser traduzido. Nesta etapa, é importante compreender os registros da representação. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 34):

> Falar de representação equivale a falar de conhecimento, significado, compreensão uma vez que se pode considerar que a compreensão de um objeto matemático está diretamente relacionada com a identificação das diferentes representações que lhe são associadas.

Em se tratando de funções, essas representações podem ser algébricas ou gráficas. Cabe salientar que essa conversão leva o aluno a compreender as diferentes características de um objeto, suas diferentes representações. Essa reflexão vai ao encontro com a ideia de Duval (1993, p. 37), quando o autor escreve que “a distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico na compreensão da matemática”. Assim, o professor que pretende fazer com que os seus alunos aprendam Matemática, sob diferentes pontos de vista, não deve, simplesmente, tratá-la sem evocar o importante papel diferenciando “o que é objeto matemático e o que é a representação que torna esse objeto acessível” (ALMEIDA; VERTUAN, 2013, p. 35).

Etapa 3 – O Modelo Matemático: É a etapa de validação. Nesta etapa, verifica-se se a representação ou o modelo construído responde satisfatoriamente ao problema proposto e, caso não seja confiável, alunos e professores deverão retornar à segunda etapa, em busca de uma melhor adequação do modelo construído ao problema proposto.

Essas etapas propostas por Biembengut e Hein (2009) foram utilizadas no desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, ou seja, foi feita uma breve exposição do tema com informações essenciais que provocaram o levantamento de questões. Após, foram problematizadas algumas questões que promoveram o início da matematização, que conduziu a construção de um modelo matemático que foi validado.

No que se refere às etapas 2 e 3, alguns autores como Barbosa e Santos (2007) e Borba e Skosmose (1997) discutem a possível interferência humana no modelo matemático, pois a escolha das variáveis, que ocorre na etapa de construção do modelo, parte de uma compreensão teórica prévia. Os critérios usados nesta construção e a forma como são usados oportunizam discussões e fazem emergir um pensar crítico sobre o papel dos modelos matemáticos no âmbito social (BARBOSA; SANTOS, 2007).

Sob essa perspectiva crítica, Skovsmose (1994) e Borba e Skovsmose (1997) discutem a relação dos modelos matemáticos com a sociedade. Esses autores abordam a “ideologia da certeza”, ou seja, o entendimento de que o uso da matemática lembra certeza, precisão e verdade. E, nesse sentido, a modelagem pode contribuir para questionar essa ideologia, lançando um olhar crítico sobre as aplicações da matemática, sua veracidade e confiabilidade (BARBOSA, 2004).

Nessa perspectiva, as ideias matemáticas construídas pelo aluno no decorrer das atividades de modelagem propostas nesta pesquisa, os questionamentos, os dados não exatos, as aproximações, as validações ou não, contribuíram na formação de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

Por conseguinte, é imprescindível que, no contexto escolar, a Modelagem Matemática não se restrinja a um compartimento do currículo, pois sua aplicação conduz a um processo crítico e investigativo, que sugere novas tarefas na atuação do professor e do aluno (BARBOSA, 2004). Na Modelagem Matemática, o professor passa a ser um mediador, instigando o aluno a pensar, a criar, a refletir, a decidir e a agir, sendo a investigação, a característica predominante. Por meio da modelagem, atribui-se significação ao que está sendo estudado e potencializa-se motivação, aprendizagem e colaboração (ESPIRITO SANTO, 2017).

Por isso, as atividades de Modelagem Matemática em sala de aula envolvem ações conjuntas e integradas, acompanhadas de diálogos tanto na busca de informações sobre o fenômeno em estudo, como nas discussões para identificar e selecionar variáveis, elaborar hipóteses, testar e discutir resultados, sendo um ambiente de aprendizagem adequado para ser realizado em grupo. Defensores da ideia de que o trabalho em grupo é fator importante no processo de aprendizagem, Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 33) afirmam que,

> [...] quando os alunos trabalham juntos com o mesmo objetivo e produzem um produto ou solução final comum, tem a possibilidade de discutir os méritos das diferentes estratégias para resolver um mesmo problema e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

Essas interações, tanto entre alunos como entre professor e aluno, são consideradas por diversos pesquisadores como determinantes para a aprendizagem (SKOVSMOSE, 2006). Neste sentido, a articulação entre os participantes é fator fundamental; porém, não pode existir relação de dominação (FREIRE, 2006). É necessário engajamento, colaboração, auxílio entre os colegas, respeito aos saberes e experiências compartilhados. Outra característica importante no trabalho em grupo, citada por Alro e Skovsmose (2006), é a qualidade da comunicação que pode ser expressa em termos de relações interpessoais, uma vez que aprender é:

> [...] uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E, por conseguinte, a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 12).

No que se refere à aprendizagem e à colaboração, Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 34) ressaltam que

> [...] atividades de Modelagem Matemática são essencialmente cooperativas, em que a cooperação e a interação entre os alunos e entre o professor e aluno tem um papel importante na construção do conhecimento.

Portanto, no ensino de Matemática por meio da Modelagem, professor e aluno assumem papéis distintos. Para Burak (2004), "o papel do professor fica redefinido, pois ele passa a se constituir como mediador entre o conhecimento matemático elaborado e o conhecimento do aluno ou do grupo" (BURAK, 2004, p. 4).

Essa organização, além de exigir uma redefinição do papel do professor e do aluno, propõe, por conseguinte, um ambiente de aprendizagem diferenciado. Inspirado em Galbraith (1995), Barbosa (2004) propõe diferentes possibilidades de organizar o ambiente de Modelagem Matemática em sala de aula, conforme as responsabilidades de atuação do professor e do aluno, classificando-as em três casos, conforme o Quadro 1:

Quadro 1- Os casos de modelagem.

	Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**
Elaboração do problema	Professor	Professor	Professor/alunos
Coleta de dados	Professor	Professor/alunos	Professor/alunos
Resolução	Professor/alunos	Professor/ alunos	Professor/alunos

Fonte: Barbosa (2004).

De forma mais detalhada, Barbosa (2009) descreve os 3 casos:

Caso 1: o professor apresenta um problema com os dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a resolução do problema. Neste caso, o professor tem maior previsibilidade, por conhecer de antemão o problema e os dados disponibilizados, tendo como tarefa acompanhar a discussão das possíveis soluções que surgem em cada grupo de alunos.

Caso 2: o professor apresenta o problema, porém a coleta de dados, a investigação e a resolução são atribuições do aluno, que, neste caso, tem a tarefa de coletar dados e informações sobre a situação-problema, o que demanda mais tempo para testar, discutir, validar ou reformular.

Caso 3: a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos. Caracteriza-se por ser mais aberto, pois a escolha do tema, a formulação do problema, a coleta de dados, a formulação e a resolução são tarefas dos alunos, sendo o professor apenas observador (BARBOSA, 2009).

Com base nesses casos e analisando o contexto escolar e a turma na qual foi aplicada essa proposta de ensino, optei pelo caso 2, em que os alunos, a partir de uma situação-problema proposta (experimento), buscaram informações, testaram hipóteses, coletaram dados, criaram um modelo e discutiram a validade dos resultados encontrados (BARBOSA, 2009). De acordo com Barbosa (2009), em relação à atuação do professor, no caso 2, o papel dele é mediar, ou seja, observar e acompanhar os grupos, provocando questionamentos que conduzem o aluno a formular, a apropriar-se de novos conceitos, a refletir, a dar significado às ideias matemáticas e a relacioná-las aos conceitos estudados.

Observa-se que os três casos propostos por Barbosa (2009) conduzem o aluno a realizar de forma gradual a atividade de modelagem, caracterizando diferentes “momentos” ilustrados no Quadro 2 (ALMEIDA; VERTUAN, 2013).

Quadro 2- Diferentes momentos da Modelagem Matemática na sala de aula.

1º momento	2º momento	3º momento
Primeiro contato do aluno com a Modelagem Matemática.	Maior independência do aluno em relação aos procedimentos.	Aluno responsável pela construção da atividade.

Fonte: Almeida e Vertuan (2013, p. 28).

No Quadro 2, Almeida e Vertuan (2013) demonstram que, nos três casos de Barbosa (2009), o aluno sai gradativamente da relação de dependência no processo de aprender e passa a ter liberdade para definir caminhos, ou seja, passa a ter uma postura mais autônoma na construção do próprio conhecimento. Neste processo gradativo de aplicação da Modelagem Matemática, os alunos vão aumentando seu repertório de estratégias, adquirindo liberdade de decidir, de testar, de relacionar e de construir conhecimento. Contudo, Malheiros (2015), em relação ao processo gradual de desenvolvimento da autonomia, alerta que “esse exercício, que exige autonomia, muitas vezes, é novo para os alunos, acostumados à cultura do silêncio e à pedagogia da resposta” (MALHEIROS, 2015, p. 5).

Bassanezi (2014) também chama atenção para outros cuidados ou possíveis obstáculos ao utilizar a Modelagem Matemática:

1. Obstáculos instrucionais - O professor tem um currículo a cumprir, mas a aplicação da modelagem exige mais tempo.

2. Obstáculos aos estudantes - A Modelagem permite ao aluno sair da zona de conforto e promove atividades em que ele participa ativamente, o que pode levá-lo a uma certa apatia, caso não acompanhe o processo educacional. O aluno, habituado ao ensino de simples transmissão de conhecimento, também pode sentir insegurança, caso não tenha uma resposta imediata.

Outro fator é a escolha do tema, que nem sempre é do interesse de todos. Além disso, pode ocorrer a frustração do grupo ao não conseguir chegar a um modelo aproximado, ou seja, não conseguir solucionar a situação-problema (BIEMBENGUT, 2009; BASSANEZI, 2014).

3. Obstáculos para os professores - A insegurança do professor devido ao despreparo para lidar com esta metodologia ou por medo de deparar-se com situações difíceis ao aplicar a matemática em áreas desconhecidas.

Refletindo sobre a aplicação da Modelagem Matemática em minhas práticas, deparo-me com essa insegurança no que se refere à imprevisibilidade, ou seja, receio não conseguir conduzir situações desconhecidas. A modelagem demanda que o professor mobilize uma diversidade de saberes e conhecimentos que possibilitem a elaboração, a condução, a organização e a mediação, tendo em vista promover a aprendizagem (ESPIRITO SANTO, 2017). Nessa perspectiva, Biembengut e Hein (2009, p. 29) afirmam que

> [...] a condição necessária para o professor implementar modelagem no ensino – modelação - é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas significativas.

Com isso, o professor deve ter alguns cuidados ao planejar a utilização da modelagem matemática. Barbosa (2001) ressalta que o professor, ao inserir a Modelagem Matemática no programa curricular de ensino da escola, deve conhecer os limites da instituição de ensino; iniciar com modelos matemáticos simples; analisar o tempo disponível para o desenvolvimento da Modelagem Matemática; fazer uma avaliação diagnóstica do seu saber e do saber de seus alunos; avaliar a disposição, o grau de interesse e a motivação dos alunos, bem como, a disposição e apoio da direção e da comunidade escolar. Também, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento orientador do trabalho relacionado ao currículo escolar, identificam-se articulações entre a Modelagem Matemática e algumas das propostas apresentadas neste documento:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 523).

Assim, por meio da Modelagem Matemática como metodologia de ensino, é possível criar um ambiente de aprendizado que possibilita o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais, conforme propõe a BNCC. Em complemento, abre a possibilidade de promover um ensino de mais qualidade, em que o aluno passa a ser protagonista, questiona, cria, modela, soluciona e desenvolve seu senso crítico. Ademais, Meyer, Caldeira e Malheiros (2019, p. 24) reforçam que o aluno é o sujeito do processo cognitivo e que:

> Não se deve mais assistir aos objetos matemáticos, mas manipulá-los, porque rompemos com a concepção de que o professor ensina e passamos a acreditar na ideia de que o conhecimento não está somente nem no sujeito nem no objeto, mas na sua interação.

Diante dessa nova concepção de ensino, fiquei instigada a buscar um fazer pedagógico diferente e aplicar uma proposta metodológica no ensino da função exponencial, a partir de uma atividade que permitisse ao aluno manusear, manipular, experimentar: a Modelagem Matemática aliada à experimentação.

2.2 Experimentação

Ao longo do tempo, a experimentação, própria da natureza humana, tornou-se uma valiosa ferramenta na construção do conhecimento. Sua importância não está apenas na atividade experimental ou na observação dos fenômenos, mas também, nas investigações que resultam na construção de conceitos. Demo (2011) afirma que a experimentação, na perspectiva do "educar para a pesquisa", promove o diálogo entre a atividade experimental e o conhecimento prévio dos alunos, que deixam de ser meros espectadores para serem sujeitos de sua própria aprendizagem. De forma similar, Rosito (2003), numa concepção construtivista, afirma que as atividades experimentais combinam ação e reflexão, pois o conhecimento é construído ou reconstruído na discussão e no diálogo com conceitos já existentes. Já Lorenzato (2010) afirma que a experimentação no ensino de Matemática promove a participação ativa dos alunos e a vivência de situações interessantes e motivadoras, ou seja, é uma forma de significar a aprendizagem matemática. Suart, Marcondes e Carmo (2009) entendem a experimentação como um recurso pedagógico que contribui para a busca de novas compreensões e contempla diversas habilidades como proposição de hipóteses, testes e discussões, propiciando a aprendizagem de conceitos dos fenômenos estudados e a articulação entre diferentes disciplinas. Para Carvalho (2013, p. 103), a "experimentação é pensada como uma investigação dos alunos para a solução de um problema novo a eles".

Também, na Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BRASIL, 2018), as atividades experimentais são evidenciadas na Competência 5:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 524).

Observa-se que a Competência 5 sugere imbricar conceitos matemáticos às atividades experimentais e investigativas. Já a Competência 3 (BRASIL, 2018), citada na seção anterior, menciona a construção de modelos em diferentes contextos.

Ademais, esses excertos da BNCC (BRASIL, 2018) mencionam a construção de modelos matemáticos e atividades experimentais como recurso investigativo, o que vai ao encontro do proposto na presente pesquisa. De acordo com Araújo e Abib (2003), as atividades experimentais são classificadas em três modalidades: atividades de demonstração, de verificação e de investigação. Dentre elas, optei pela experimentação por investigação, por ter características similares à Modelagem Matemática, não me detendo à conceituação das demais modalidades. Quanto às características da modalidade de experimentação por investigação, Carrascosa *et al.*, (2006) destacam: problema inicial, planejamento dos procedimentos experimentais e caminhos de investigação, trabalho coletivo, reflexão sobre a relevância do estudo realizado, implicações para as relações Ciência, Tecnologia e Sociedade e socialização dos resultados.

Malheiros e Fernandes (2015) acrescentam que o trabalho experimental investigativo tem como finalidade resolver um problema real, constituindo uma estratégia pedagógica com "potencial inovador, porquanto possibilita o trabalho em grupo, a pesquisa e a construção de novos conhecimentos e, por isso, também potenciadora de aprendizagens mais amplas e significativas para os alunos" (MALHEIROS; FERNANDES, 2015, p. 80). Nesse sentido, na experimentação como investigação, Carvalho (2013, p. 103), ressalta que:

> é fundamental que a situação proposta permita variações das suas ações, escolha de objetos, opções para decisões diversas por parte dos alunos, intermediadas pelas ações do professor. A situação, assim organizada, deve pro- mover estímulo a ações e pensamentos criativos, com adaptações a suas necessidades específicas de reflexão, de modo que as aprendizagens resultantes para cada aluno e para cada grupo podem variar dependendo de seus conhecimentos prévios e da natureza de suas interações no ambiente da sala de aula.

Em suma, ao comparar as características dessa modalidade de experimentação, já citadas anteriormente, com as da MM, pautada por autores já citados no referencial teórico, percebo pontos em comum. No intuito de visualizar esses aspectos de convergência entre a experimentação por investigação e a Modelagem Matemática, apresento o Quadro 3:

Quadro 3- MM e Experimentação investigativa.

Modelagem Matemática	**Experimentação investigativa**
Inteiração, familiarização e busca de informações sobre o fenômeno em estudo.	Planejamento dos caminhos de investigação e dos procedimentos experimentais.
Matematização, investigação, seleção de variáveis, elaboração de hipóteses, testes, discussões e criação de modelos.	Execução, investigação, reflexão, questionamentos, elaboração de hipóteses, testagens.
Validação do Modelo Matemático.	Discussão dos resultados.
Apresentação dos resultados.	Socialização dos resultados.

Fonte: Da autora (2019).

Este quadro, possibilita visualizar semelhanças entre as etapas de planejamento e de inteiração, pois ambas se referem à fase de preparação. As etapas de execução e de matematização descrevem questionamentos e testagens. As discussões dos resultados e dos modelos matemáticos apresentam, em comum, a validação dos resultados e um possível retorno à fase anterior. Por fim, a conclusão e a apresentação, momento em que o resultado final é expresso. Apesar dessas similaridades, cada uma garante sua função principal, a experimentação no processo de obtenção de dados e a matemática no direcionamento da pesquisa, no sentido de facilitar o cálculo dos parâmetros envolvidos no modelo matemático (BASSANEZI, 2014).

Nesse sentido, a experimentação por investigação contribui com a Modelagem Matemática, ampliando possibilidades, favorecendo a manipulação de materiais e reforçando o espírito investigativo, além de permitir a interação da matemática com outras áreas do conhecimento. Para Carvalho (2013), não se trata de simples manipulações de objetos, mas de raciocinar sobre os fenômenos, fazendo uso de outras áreas de conhecimento e estabelecendo relações demonstrando como o conhecimento científico está presente em diversas situações, levando-os a inserção a uma cultura científica. Assim, esse processo de introdução a uma metodologia de trabalho que envolva processos da construção do conhecimento científico são importantes para propiciar aos alunos a inserção a uma cultura científica.

Para Bassanezi (2014, p. 16), "a modelagem pressupõe multidisciplinaridade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa".

Nessa perspectiva, Almeida, Silva e Vertuan (2013) destacam a interdisciplinaridade como uma possibilidade de inclusão para atividades de Modelagem Matemática em sala de aula. Essa característica interdisciplinar motivou o foco dessa pesquisa, ou seja, a MM aliada a experimentações, envolvendo as disciplinas de Biologia e Química no ensino da função exponencial.

A contextualização da função exponencial, mencionada nas habilidades 4 e 5 da Competência Específica 3, BNCC (BRASIL, 2018), visa:

> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros (BRASIL, 2018, p. 528).
> (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros (BRASIL, 2018, p. 528).

Pode-se concluir que o documento supracitado destaca a importância do ensino e da abordagem da função exponencial no Ensino Médio, além de recomendar que se relacione o conceito a fenômenos reais próprios da matemática, química, biologia e física.

Dessa forma, a experimentação e a MM se entrelaçam e promovem a participação ativa dos alunos no processo de ensino, pois, ao manusearem o objeto experimental, permite-se que eles explorem livremente seus saberes e concluam seu raciocínio ilustrado na própria prática. A partir de uma situação real problematizada, buscam informações, criam hipóteses, preparam testes, manipulam materiais, identificam grandezas e variáveis, colhem dados, constroem e representam o modelo matemático, fazendo conexões entre conceitos de diversas áreas, o que facilita a compreensão do fenômeno em estudo. Esse raciocínio instiga o aluno na reconstrução do conceito de função.

Com isso, por meio da experimentação e da Modelagem Matemática, os alunos podem observar fenômenos biológicos químicos e estabelecer relações com o conceito de função exponencial.

2.3 Funções exponenciais

A principal característica da função exponencial é o crescimento ou decrescimento imediato, ou seja, tem como característica um crescimento ou decrescimento mais acentuado se comparado às funções lineares. Relacionados a esse padrão há muitos fenômenos naturais e sociais, como desintegração radioativa, reprodução de bactérias, crescimento populacional, epidemias, escala Richter, a meia vida de substâncias, mensuração de pressão atmosférica, capitalização e juros compostos, resfriamento de corpos, velocidade de pouso de um paraquedas de asas, entre outros. Alguns exemplos de interações e aplicações de funções exponenciais relacionadas às mais diversas áreas do conhecimento, descritas a seguir, foram extraídos de obras dos autores Iezzi (2014), Lima (2016), Paiva (2012) e Dante (2014).

Matemática Financeira: Juros compostos

Uma das noções mais utilizadas pelas pessoas no dia a dia é a de matemática financeira. A noção de juros é de fundamental importância para resolver situações do cotidiano, como, por exemplo, decidir-se por uma compra à vista ou a prazo. O processo de formação de juros é conhecido como regime de capitalização. Há dois regimes de capitalização: juros simples e juros compostos. O sistema de capitalização dos juros compostos se relaciona com a progressão geométrica e, consequentemente, com a função exponencial. O cálculo do montante (soma do capital principal mais os juros acumulados) proveniente dos juros compostos é feito por meio de uma expressão do tipo: $M=C.(1+i)^t$, em que C é o valor do capital inicial aplicado durante t unidades de tempo à taxa i (em porcentagem) por unidade de tempo.

Cálculo da meia vida: decaimento radioativo, método de carbono-14, medicamentos

Toda substância radioativa sofre um decaimento radioativo com o passar do tempo, o que diminui sua quantidade de átomos e, consequentemente, sua massa. Esse decaimento é calculado pela meia vida, ou seja, o tempo necessário para que a massa de uma substância radioativa se reduza à metade. O valor da meia-vida é sempre constante para um mesmo elemento químico radioativo, sendo possível relacionar a quantidade de material radioativo a qualquer tempo com a quantidade inicial por meio de uma função do tipo exponencial:

$$Q(t)=Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{p}} \qquad (1)$$

Onde Q(0) é a quantidade inicial de material radioativo, t é o tempo decorrido e p é o valor da meia-vida do material considerado. Conhecendo a meia-vida de determinado material, é possível relacionar a quantidade a qualquer tempo, tendo por base esta função exponencial.

Da mesma forma, essa função pode ter aplicação na arqueologia. O método usado para estimar a idade de materiais encontrados, como fósseis ou vestígios de civilizações, é chamado de datação radioativa. O carbono 14 (C 14) é um dos elementos mais utilizados para fazer a datação de objetos muito antigos. Sabe-se que a meia-vida do C 14 é de, aproximadamente, 5730 anos.

O tempo de meia-vida dos medicamentos possibilita uma estimativa da duração do efeito farmacológico e indica o tempo em que esse efeito se reduz a 50% do que tinha, após a introdução do medicamento no organismo do paciente, sendo assim um importante parâmetro para médicos e também para a indústria farmacêutica.

Resfriamento de corpos

A lei do resfriamento de Newton, uma das leis básicas da física, possui vasta aplicação. Essa lei estabelece que, quando um corpo é colocado num ambiente mantido a uma temperatura constante, a temperatura do corpo varia numericamente se aproximando da mesma do ambiente, a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Aplica-se esta lei para estimar a hora da morte de uma vítima, ou, ainda, determinar o tempo necessário de espera para que a temperatura do café esteja ideal para o consumo. Pode-se dizer que, quando um objeto tiver uma temperatura mais alta do que a sua vizinhança, ele perderá calor para o ambiente e esfriará.

Os Terremotos e a Escala Richter

Sismo ou terremoto é um fenômeno de vibração brusca e passageira da superfície da Terra resultante de movimentos subterrâneos de placas rochosas, de atividade vulcânica ou de deslocamentos de gases no interior da Terra, principalmente, o metano. O movimento é causado pela liberação rápida de grandes quantidades de energia sob a forma de ondas sísmicas. A amplitude dessas ondas e a liberação de energia determinam a magnitude do terremoto, que pode ser mensurada por meio de um sismógrafo (aparelho desenvolvido por Charles Richter e Beno Gutenberg, em 1935, no *California Institute of Technology*), que mede a magnitude, em graus, na escala Richter. De acordo com o grau de magnitude registrado, pode-se saber o quão destrutivo pode ser um terremoto e verificar as consequências menos ou mais graves.

Crescimento populacional

Em 1798, Thomas Malthus formulou um modelo para descrever a população presente num ambiente em função do tempo e chegou à seguinte equação para descrever a população presente em um instante t:

$$N(t)=N_{0}.e^{rt} \tag{2}$$

O N_0 é a população presente no instante inicial t=0 e r, também chamado de potencial biótico, é uma constante que varia com a espécie de população. Cada espécie tem um potencial de crescimento diferente, ou seja, as espécies se reproduzem com uma velocidade diferente.

Na ausência de fatores inibidores, o crescimento populacional pode ser descrito por meio de uma função exponencial, que pode ser utilizada para calcular o crescimento da população de qualquer espécie, de acordo com o percentual de sua reprodução.

Curvas de aprendizagem

As curvas de aprendizagem tratam das relações entre a eficiência de um trabalhador e o seu tempo de experiência na execução de uma determinada tarefa. Essa relação pode ser definida como modelo exponencial e serve para medir custos futuros e níveis de produção. Também é utilizada para programar tarefas produtivas, reduzindo perdas decorrentes da inabilidade do trabalhador, verificada nos primeiros ciclos de produção (IEZZI et al., 2014).

Analisando as aplicações supracitadas, observa-se que esses fenômenos expressam uma tendência exponencial, em diversas áreas. A partir deles, é possível analisar e identificar grandezas, obter dados e informações e, perceber uma tendência, uma representação, um modelo que simplifica e possibilita a compreensão do fenômeno em estudo.

Uma vez que esses fenômenos podem ser modelados pela função exponencial, seguem, no próximo bloco, sua definição, elementos, características, propriedades e representações gráficas e algébricas.

2.3.1 Definição de uma função exponencial

As definições e representações que seguem foram extraídas de obras dos autores Iezzi (2014), Lima (2016), Paiva (2012) e Dante (2014).

Segundo Lima (2016), uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}+^{*}$, definida por $f(x) = a^{x}$ ou $y = a^{x}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial e possui as seguintes propriedades, para quaisquer x, y ∈ R:

1. $a^x.a^y = a^{x+y}$;

2. $a^1 = a$;

3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0<a<1$

As restrições, $a > 0$ e $a \neq 1$, dadas na definição são necessárias, pois, caso contrário, não seria possível caracterizar uma função exponencial.

- Se $a = 1$, $f(x) = a^x$ é uma função constante.

Exemplo: $f(x) = 1^x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Se $a = 0$, $f(x) = a^x$ não é definida em $\mathbb{R}$.

Exemplo: $f(-5) = 0^{-5}$, 0^{-5} não é definido em $\mathbb{R}$.

- Se $a < 0$, $f(x) = a^x$ não é definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

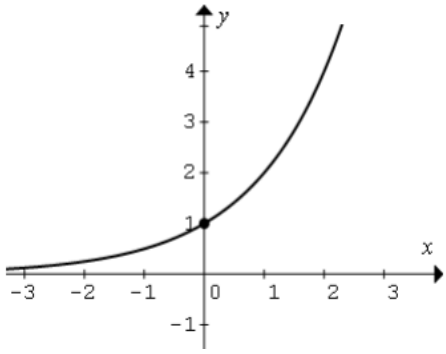
Exemplo: Para $a = -4$ e $x=\frac{1}{2}$ temos: $f\left(\frac{1}{2}\right)=(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

2.3.2 Gráfico de uma função exponencial

Os gráficos favorecem a visualização do comportamento de determinados fenômenos. No caso da função exponencial, essa representação é determinada por situações de crescimento ou decrescimento.

O crescimento exponencial é representado no estudo gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, com a base maior que 1 ($a > 1$) (FIGURA 1).

Figura 1 - Cálculo dos pares e gráfico da função $f(x) = 2^x$

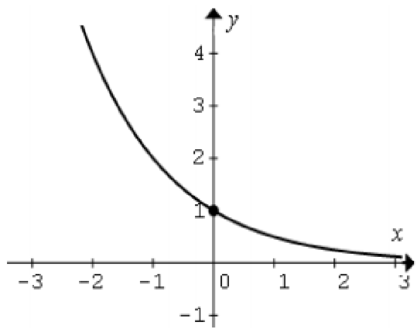
Cálculo dos pares ordenados		Gráfico da função
x	y= f(x)=2^x	
-3	$\frac{1}{8}$	
-2	$\frac{1}{4}$	
-1	$\frac{1}{2}$	
0	1	
1	2	
2	4	

Fonte: Da autora (2019).

O gráfico é crescente e intercepta o eixo y no ponto (0,1).

O decrescimento exponencial é representado no estudo gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, e a outra com a base maior que zero e menor que 1 ($0 < a < 1$) (FIGURA 2).

Figura 2 - Cálculo dos pares e gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Cálculo dos pares ordenados		Gráfico da função
x	y=f(x)=$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	
-2	4	
-1	2	
0	1	
1	$\frac{1}{2}$	
2	$\frac{1}{4}$	
3	$\frac{1}{8}$	

Fonte: Da autora (2019).

O gráfico é decrescente e intercepta o eixo y no ponto (0,1).

De modo geral, numa função exponencial, temos que:

Se a > 1 a função é crescente, pois, se $x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x2} > a^{x1}$

Se 0 < a < 1 a função é decrescente, pois, se $x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x2} < a^{x1}$

O gráfico, denominado curva exponencial, intersecta o eixo y no ponto de coordenadas (0, 1) e assíntota do eixo x, ficando sempre acima do eixo x, pois, $f(x) = a^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo assim, assumem valores muito próximos a zero, mas nunca iguais ou menores que zero.

Além da função exponencial $f(x) = a^x$, com base a, há a função exponencial natural, $f(x) = e^x$, cuja base é o número irracional (e). Conhecido como número neperiano, seu valor aproximado é 2,718281828. A função exponencial natural, além de ser indicada para a modelagem de fenômenos mencionados anteriormente, também é utilizada no cálculo diferencial e integral devido à sua importante característica de ser idêntica à sua própria derivada (LIMA, 2016).

Neste trabalho, o enfoque foi a função exponencial com base a, por tratar-se das noções iniciais da função exponencial para uma turma de 1º ano de Ensino Médio, em situações experimentais que envolvem crescimento e decrescimento exponencial.

Buscando conhecer o que está sendo produzido no meio científico sobre essa temática até o presente momento, fiz uma pesquisa de dissertações que tratam do tema, que são comentadas a seguir.

2.4 Estudos recentes na área

Nesta seção realizei um levantamento da produção científica acerca do ensino da função exponencial, por meio da Modelagem Matemática. Tratei de conhecer e analisar o que foi produzido até o momento da defesa da dissertação, na determinada área.

Para a realização do estado da arte desta pesquisa, optei pelo Catálogo de Teses & Dissertações da CAPES, disponível em http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/. Utilizando o termo "modelagem matemática", foram encontrados 4929 trabalhos. Para refinar a busca, selecionei o tipo "Mestrado profissional", que resultou em 69 investigações. A fim de reduzir ainda mais o número de dissertações a serem selecionadas, optei por 2018, 2017 e 2016, por se tratar de obras mais recentes, o que resultou num total de 35 dissertações. Como nem todas remetiam ao tema do presente estudo, fiz nova triagem, analisando os temas. A partir daí, selecionei quatro dissertações de mestrado que tratam do tema modelagem matemática e função exponencial, duas publicadas em 2017 e duas em 2016 (QUADRO 4).

Quadro 4 - Análise das dissertações da CAPES.

Título	**Autor**	**Instituição**	**Ano de publicação**
O ensino de funções através de Modelagem Matemática	Eder Joacir de Lima	Universidade Federal de Mato Grosso	2017
Modelação Matemática na sala de aula: o conceito de função exponencial numa sequência de atividades para o 1º ano do ensino médio	Lina Flavia Morete de Queiros Maia	Universidade Federal de São Carlos	2017
Investigando a Modelagem Matemática no ensino de funções afins e exponenciais	Ricardo Nogueira Viana Narcizo	Universidade Federal de Goiás	2016
Modelagem Matemática no Ensino Médio: uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas	Aline Fernanda Faquini Helena	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Rio Claro)	2016

Fonte: Da autora (2019).

A pesquisa, “O ensino de funções através de modelagem matemática”, de Lima (2017), aplicada numa turma de 1° ano do Ensino Médio do IFMT - Campus Primavera do Leste, teve como objetivo comparar o método tradicional de ensino com a Modelagem Matemática no ensino e na aprendizagem de funções, além de propor uma sequência didática para o ensino dos principais tipos de funções por meio de modelagem. O conteúdo de funções foi abordado em sete atividades baseadas nos dois métodos de ensino, a partir de situações-problema contextualizadas e com uso do *software* Geogebra. Segundo o autor, as atividades de modelagem matemática trouxeram resultados satisfatórios. Houve maior interesse e participação dos estudantes, aproximou a matemática de outras áreas e conceitos teóricos, além de estimular a criatividade e desenvolver habilidades na resolução de problemas.

A pesquisa, “Modelação Matemática na sala de aula: o conceito de função exponencial numa sequência de atividades para o 1º ano do Ensino Médio”, de Maia (2017), teve como objetivo apresentar uma sequência de atividades para o ensino da função exponencial de forma intuitiva e, posteriormente, apresentar sua definição. A sequência de atividades foi composta por oito atividades, envolvendo situações cotidianas para que os alunos, em grupos, discutissem, tabulassem e obtivessem os modelos matemáticos utilizando planilhas eletrônicas de cálculos. A pesquisa seguiu as etapas propostas por Biembengut (2016), a interação, a matematização e o modelo, bem como utilizou a Modelação Matemática como metodologia de ensino, buscando incentivar o professor a utilizá-la como método eficaz em suas práticas.

A pesquisa, “Investigando a Modelagem Matemática no Ensino de Funções Afins e Exponenciais”, de Viana (2016), teve como objetivo investigar se a modelagem matemática pode contribuir ou colaborar com o ensino e a aprendizagem de função afim, principalmente, da função exponencial. Tendo como base estudos de alguns pesquisadores brasileiros e a metodologia da Modelagem Matemática, as atividades desenvolvidas propuseram pesquisar, confeccionar tabelas e gráficos e, por fim apresentar e validar um ou mais modelos matemáticos, para as situações-problema propostas pelo professor, seguindo, assim, as etapas para a apresentação de um modelo matemático de acordo com o referencial teórico estudado. Essas atividades foram desenvolvidas numa turma de 2º ano do ensino médio do Instituto Federal de Brasília, Campus Gama, sendo as duas primeiras direcionadas a serem trabalhadas com funções afins e as demais, com funções exponenciais. Durante a aplicação, os alunos descobriram modelos matemáticos usando potências e chegaram ao modelo para o cálculo de juro composto. A investigação proposta foi realizada a partir da aplicação de cinco atividades e, por duas vezes, o mesmo questionário diagnóstico (no início e no final da investigação). Comparando os questionários, o autor constatou melhora significativa em relação ao estudo da função exponencial. Na primeira aplicação, 95% dos estudantes não acertaram as questões que envolviam esse tema. Ao ser reaplicado o questionário diagnóstico, cerca de 70% acertaram as duas questões. Além disso, eles passaram a escrever o “significado” de cada variável.

A dissertação, “Modelagem matemática no ensino médio: Uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas”, de Helena (2016), buscou refletir sobre o ensino de matemática e discutir a modelagem como metodologia de ensino. O objetivo do estudo foi elaborar uma proposta de Modelagem Matemática capaz de vincular um tema do cotidiano dos jovens, “o consumo de álcool”, ao ensino de funções exponenciais e logarítmicas. Esta proposta foi baseada no modelo Alcoolismo exposto por Bassanezi (2002) e formulada, seguindo as etapas propostas por Biembengut (2011). A partir do tema comum, “consumo de álcool”, foram adotadas três maneiras diferentes de obtenção de um modelo matemático. No Modelo 1, uma forma de calcular a quantidade de gramas de álcool ingeridas ao tomar quantidades diferentes de vinho. A modelagem, de forma intuitiva, surgiu com uma simples substituição de variáveis e a obtenção de uma função afim. No Modelo 2, já um pouco mais elaborado, uma proposta de análise de uma planilha editável oferecida pelo projeto "Viver Bem", da Unesp. Neste momento do trabalho, o professor permitiu que os alunos manipulassem a planilha e escolhessem uma situação para modelar, o que enriqueceu ainda mais o trabalho na sala de aula, principalmente, ao propor a busca de um modelo que determinasse a concentração de álcool no sangue deste indivíduo, caso ele permanecesse assim por *n* horas. Já, o terceiro modelo teve como tema a ingestão de álcool e a chance de envolver-se num acidente de trânsito. A partir de uma tabela com informações sobre a chance de sofrer um acidente e o aumento do consumo de cálices de vinho, os alunos perceberam, por meio da relação entre essas grandezas e sua representação gráfica, o crescimento exponencial. Nessa proposta, foi possível explorar as noções e propriedades das funções de forma natural, aplicadas a uma situação muito presente no cotidiano dos alunos: o consumo de álcool na adolescência.

Analisando as dissertações, constatei que todas abordaram, total ou parcialmente, modelagem e funções exponenciais. As quatro pesquisas demonstraram contribuições da Modelagem Matemática como metodologia no ensino de funções: a pesquisa de Helena (2016) ressaltou o desenvolvimento da noção e propriedades das funções de forma natural, aplicadas à situações do cotidiano. Viana (2016) constatou melhora significativa em relação ao estudo da função exponencial ao aplicar a MM. Lima (2017) menciona a aproximação da matemática a outras áreas do conhecimento e a MM como estímulo à criatividade e desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas. Maia (2017) considerou a MM como método eficaz no ensino de funções, bem como a utilização de planilhas eletrônicas no tratamento de dados. Entretanto, foi possível observar que, nessas quatro pesquisas, a dedução do modelo ocorreu somente por meio de cálculos, originados a partir de um exemplo de situação-problema da vida real. E, apesar das contribuições importantes da MM para o ensino de funções, mencionadas anteriormente, nenhuma delas fez menção à experimentação.

Tendo em vista a carência de resultados referentes ao assunto em estudo, no portal de teses e dissertações da CAPES, busquei por trabalhos da última edição dos anais de eventos proeminentes da Modelagem Matemática, o CNMEM e o ENEM. Nestes eventos, procurei, por meio das palavras-chave "modelagem" e "experimentação" e da leitura do resumo, trabalhos que se aproximassem com o desenvolvido nesta dissertação. Dos trabalhos encontrados, três, que estão indicados no Quadro 5 a seguir, apresentaram semelhanças e foram analisados.

Quadro 5 - Análise das dissertações do ENEM e CNMEM.

Título do trabalho	**Autores**	**Evento/local**	**Ano**
Mobilização de recursos semióticos por alunos no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática	Paulo Henrique Hideki Araki Karina A. Pessoa da Silva	XI CNMEM / UFMG- MG	2019
Desvalorização de carros populares: um estudo de Modelagem Matemática	Romulo Soares Mota Rafael Filipe Novoa Vaz	XIII ENEM / Cuiabá- MT	2019
Sensores de temperatura e a obtenção de funções a partir de dados coletados	Israel Matté	XIII ENEM / Cuiabá- MT	2019

Fonte: Da autora (2019).

O trabalho de Araki (2019), intitulado, “Mobilização de recursos semióticos por alunos no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática”, buscou investigar como os alunos mobilizam recursos semióticos no planejamento e no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, analisada num contexto de experimentação investigativa. Essa atividade foi desenvolvida com quatro alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, na disciplina de Matemática, pelo professor Araki, ao longo de quatro horas, em período extraclasse. A atividade experimental consistiu em verificar a relação entre ângulos de inclinação de um plano e o tempo que uma bola levava para percorrer uma distância preestabelecida. Os resultados analisados mostraram que os alunos estruturaram a própria atividade, utilizando vários recursos semióticos mobilizados pelos conhecimentos prévios sobre Modelagem Matemática. Apesar de ser uma atividade enraizada em preceitos advindos da física, os alunos realizaram a investigação com base em conceitos matemáticos. Ao final, os autores sugerem que, por ser um trabalho realizado com uma única turma, a mesma análise seja feita com outros alunos, de outros níveis de escolaridade.

O trabalho, “Desvalorização de carros populares: um estudo de Modelagem Matemática”, de Motta (2019), apresentado no XIII ENEM, em 2019, buscou interpretar matematicamente o fenômeno da desvalorização dos preços de automóveis populares, a fim de obter como modelo, uma função que permitisse estimar a média dos preços em anos futuros. Apesar de haver outros fatores associados à perda de valor dos automóveis, a pesquisa limitou-se a analisar somente a variação nos preços dos veículos, de acordo com os índices da Tabela FIPE, num período de 11 anos de uso. Os resultados obtidos evidenciaram que a taxa de desvalorização nos primeiros anos é consideravelmente mais elevada e que ela começa a atenuar a partir do terceiro ano de uso, resultando num modelo logarítmico obtido por ajuste de curva no *software Excel*. Com esses dados, podem ser discutidas hipóteses acerca do melhor momento para comprar um veículo usado.

O trabalho de Matté (2019), “Sensores de temperatura e a obtenção de funções a partir de dados coletados”, foi o que mais se assemelhou à pesquisa de minha dissertação. O estudo, de abordagem interdisciplinar, além da Modelagem Matemática, envolveu conteúdos de eletricidade, física e matemática, a partir de dados coletados referentes a sensores de temperatura, numa atividade experimental realizada numa Escola Técnica. Para desenvolver o estudo, foram utilizadas 24 horas/aula do Curso Técnico em Mecatrônica. Essa atividade teve como objetivo específico oferecer condições para que os alunos percebessem a importância da coleta e do tratamento de dados, bem como identificar a simbologia utilizada no estudo dos circuitos eletrônicos, a fim de contatarem modelos matemáticos de fenômenos ou componentes eletroeletrônicos aplicáveis em suas profissões. Os autores buscaram na Modelagem Matemática, os subsídios para uma prática pedagógica flexível. Utilizando essa metodologia, encontraram as condições necessárias para trazer para a sala de aula temas do cotidiano, dando aos alunos a oportunidade de indagações concretas em busca da construção de seus conhecimentos. Nas atividades propostas neste trabalho, os alunos foram responsáveis pela construção de circuitos a partir dos quais tiveram que apropriar-se de conhecimentos de física e de eletricidade para poderem construir tabelas. De posse das tabelas, construíram gráficos e, a partir de diversos conhecimentos matemáticos, conseguiram chegar às funções.

As funções correspondentes a cada um dos sensores e as respectivas validações foram obtidas através da comparação entre o cálculo dos dados a partir da fórmula e os dados coletados nos experimentos. Os grupos observaram os gráficos construídos referentes aos sensores Pt100[2*] e NTC[3*], e os compararam, por semelhança, com o comportamento de algum gráfico que haviam construído anteriormente. Os alunos verificaram diferenças entre os valores coletados e os valores calculados. Concluíram que o Pt100 se assemelhava a uma reta e o NTC a uma curva exponencial.

Os alunos também constataram que, por meio da Modelagem Matemática, chega-se a

[2] O PTC (*Positive Temperatura Coefficient*), apresenta um coeficiente de variação da resistência elétrica em função da temperatura positiva, o que indica que a sua resistência aumenta exponencialmente quando a temperatura se eleva.
[3] NTC (*Negative Temperatura Coefficient*), a resistência é inversamente proporcional à temperatura. Nesse tipo de dispositivo, a resistência elétrica cai exponencialmente com o aumento da temperatura.

uma solução que mais se aproxima da situação real, mas não é uma solução exata. Esta perspectiva mostra uma nova possibilidade de pensar o ensino e a aprendizagem, de uma forma muito mais ampla do aquela a que estavam acostumados, pois engloba não apenas uma área do conhecimento, mas várias, contribuindo, assim, para que alunos e até professores tenham pensamentos mais complexos e desafiadores.

Finalizando essa seção, posso inferir que, na área de Educação Matemática, contamos com inúmeros trabalhos voltados para a Modelagem Matemática, porém poucos abordam especificamente o ensino da função exponencial e a experimentação. Nos anais do XI CNMEM e XIII ENEM, encontrei trabalhos envolvendo a construção do modelo de função exponencial com manipulação de materiais em dois dos três trabalhos analisados.

No decorrer dessas análises, busquei pontos de convergência com a presente pesquisa e destaco que todos os trabalhos analisados se referem à Modelagem Matemática como metodologia e tem sua prática no ensino de funções. Também saliento que, dos 7 trabalhos analisados, 5 se referem à função exponencial (ou logarítmica) e partem de uma pesquisa ou tabela pronta, o que evidencia a criação do modelo a partir de dados prontos. Analisando-os à luz das teorias que fundamentaram a pesquisa, constatei que os problemas foram propostos pelos docentes e os temas abordados foram variados.

É importante ressaltar que o trabalho de Araki (2019) apesar de não tratar de função exponencial, o autor aliou experimentação à MM, o que proporcionou subsídios para essa pesquisa. Já, no trabalho de Motta (2019), a contribuição maior se refere à obtenção do modelo por ajuste de curva no *software Excel*.

Em relação a MM associada à experimentação, dos dois trabalhos encontrados, somente o de Matté (2019) trata do ensino de função exponencial, sendo a atividade de abordagem interdisciplinar, envolvendo conteúdos de eletricidade, física e matemática. Este trabalho inspirou-me pela forma como o autor orientou a prática, pelo tema desafiador, pelo envolvimento dos alunos e pelos resultados obtidos.

A seguir, apresento os procedimentos metodológicos e a descrição detalhada das atividades experimentais, envolvendo conteúdos de química e de meio ambiente, propostas no ensino de funções exponenciais por meio da Modelagem Matemática.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Apresento neste capítulo, a caracterização da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados, o *lócus* e os sujeitos da pesquisa. Ademais, exponho o detalhamento das ações realizadas pelos grupos no decorrer dos experimentos, o material coletado, o método e a análise dos dados. Também descrevo na análise de dados, as orientações da análise textual discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2011) e apresento, organizados num quadro, os instrumentos de coleta de dados utilizados na construção de cada categoria.

3.1 Caracterização da pesquisa, instrumentos de coleta de dados, *lócus* e sujeitos da pesquisa

Esta pesquisa, de abordagem qualitativa, buscou a compreensão de um fenômeno e suas interações. Para Gatti e André (2010, p. 30), esse tipo de pesquisa "defende uma visão holística dos fenômenos, isto é, que leve em conta todos os componentes de uma situação em suas interações e influências recíprocas". Além de características qualitativas, essa pesquisa contém elementos de estudo de caso, por tratar-se de investigação empírica de "um fenômeno contemporâneo em profundidade e em seu contexto de vida real, especialmente, quando os limites entre o fenômeno e o contexto não são claramente evidentes" (YIN, 2010, p. 39). Assim, um fenômeno pode ser melhor compreendido quando analisado no contexto em que ocorre. Ainda, Yin (2001) afirma que o estudo de caso remete ao levantamento de questões do tipo "como" e "por que" e relaciona o desejo de entender fenômenos sociais complexos, especialmente, o comportamento de pequenos grupos e o desempenho escolar. Em vista disso, o presente estudo se classifica como estudo de caso com abordagem qualitativa, por ter sido aplicado a uma única turma de alunos, com suas características próprias e por serem analisados o desenvolvimento das etapas da MM na construção do modelo matemático e as ações e reações, discussões e escolhas dos alunos em relação aos conceitos utilizados em seus contextos frente à situação-problema proposta.

Os dados foram coletados por meio de observações, fotos, filmagens, por meio de questionários, relatórios e anotações no diário de bordo. Esses instrumentos deram subsídios para analisar os percursos, debates, ideias e discussões expressas, na execução das experimentações, pelos alunos durante a inteiração, matematização e modelo matemático. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 118),

> [...] espera-se que contenha impressões, comentários e opinião do observador sobre o meio social em que realiza suas observações, seus erros, dificuldades, confusões, incertezas e temores, suas boas perspectivas, acertos e sucessos, suas reações e as dos participantes (gestos, expressões verbais e faciais etc).

Cada grupo ficou responsável por filmar as discussões durante o desenvolvimento das atividades. A utilização de gravações áudio e vídeo fornecem subsídios significativos para a reprodução fiel dos resultados apresentados (MARCONI; LAKATOS, 2003). Além do vídeo, as fotos permitiram registrar a captura de expressões faciais e gestos no contexto das trocas e discussões dos grupos no decorrer da prática, para fins de arquivo (ANDRADE, 2008). As observações, fotos e filmagens, possibilitaram uma percepção detalhada de expressões faciais, das falas, dos silêncios e dos gestos.

Os cadernos de anotações forneceram informações importantes acerca da compreensão do fenômeno em estudo e o questionário (APÊNDICE D) aplicado ao final dos encontros, possibilitou informações individuais, além de oportunizar a expressão de alunos que não se manifestam oralmente. Segundo Marconi e Lakatos (2003), o questionário favorece uma análise pontual de questões que interessam ao pesquisador.

Já no diário de campo foram registradas informações de relatos, descrições do ambiente, de episódios, anseios, angústias e percepções. Segundo Minayo (2001), o diário de campo é um somatório que irá congregar os diferentes momentos da pesquisa.

As atividades realizadas pelos alunos durante as experimentações e problematizações foram registradas através de gravação em áudios e vídeos, sendo transcritos posteriormente. Nas transcrições, procurei ser fiel às falas dos alunos, mantendo a linguagem coloquial característica desse tipo de interação verbal. Também foram produzidos *slides* para as apresentações, bem como registrei minhas impressões no diário de bordo após cada encontro.

Assim, as interpretações, a busca por soluções, as representações espontâneas sobre o fenômeno e o discurso matemático final puderam ser analisados detalhadamente. Para manter o anonimato dos sujeitos da pesquisa, os alunos foram identificados pela letra A, seguida de um número aleatório; o professor de matemática, pela letra P; e o de química pela letra Q. Além disso, o grupo 1, o grupo 2 e o grupo 3 foram identificados como G1, G2 e G3, respectivamente.

As atividades foram desenvolvidas em dez encontros de duas horas/aula, com 16 alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio do Centro de Ensino Médio Pastor Dohms, unidade Taquari, onde atuo como professora de matemática do ensino médio. Esta escola, a única escola particular da cidade, atende desde a educação infantil até o 3º ano do ensino médio. Localizada no centro do município de Taquari, possui em torno de 300 alunos, a maioria com uma situação socioeconômica mediana. As atividades foram desenvolvidas com a turma do 1º ano do Ensino Médio, em 2019. Para a realização da prática pedagógica, a pesquisa foi devidamente autorizada e assinada pelo diretor e pelos pais ou responsáveis dos discentes, conforme Termo de Concordância da direção da instituição de ensino (APÊNDICE A) e termo de consentimento livre esclarecido da participação dos alunos (APÊNDICE B), respectivamente.

No último encontro, foi oportunizada uma conversa a fim de avaliar as atividades e a metodologia dessa intervenção, norteada por questões conforme a pauta (APÊNDICE C) e, posteriormente, registros individuais escritos (APÊNDICE D), o que oportunizou a expressão dos alunos que não se manifestaram verbalmente. A seguir, o detalhamento dessas atividades.

3.2 Detalhamento das atividades

Nesta seção, apresento a organização dos procedimentos e a sequência didática para o ensino da função exponencial. As atividades foram realizadas num total de 20 horas/aula, durante 5 semanas, distribuídas em dois encontros semanais de duas horas cada, num total de dez encontros, descritos a seguir. Nesta seção, faço uso de figuras ou narrativas dos alunos, sem relacioná-las com autores, tendo em vista que, neste momento, o objetivo é descrever com detalhes a prática realizada.

Nesta pesquisa, partindo de uma problemática local, a "poluição da água do rio Taquari", os experimentos se relacionaram com a temática água e foram pesquisados em jornais, *internet* e inspirados em sugestões da professora de Química. Por meio dessas experimentações e da Modelagem Matemática, os alunos realizaram os Experimentos I e II:

"Experimento-simulação da despoluição de um lago" e "Processo de diluição de uma substância ácida em água, com medição do pH", respectivamente, atrelados às etapas da Modelagem Matemática.

Durante o processo, os estudantes identificaram grandezas e chegaram à representação do Modelo Matemático correspondente. Enquanto professora, acompanhei cada grupo, motivando, instigando, orientando e fazendo questionamentos no sentido de direcionar a busca da solução do problema em questão. A seguir, o Quadro 6 apresenta um breve resumo das atividades dos encontros.

Quadro 6 - Tópicos das atividades desenvolvidas.

Encontros	Atividade	Descrição
1	Apresentação inicial	Apresentação da proposta e organização dos grupos de trabalho.
2, 3, 4 e 5	Experimento I	Experimento-simulação de despoluição de um lago.
6, 7, 8 e 9	Experimento II	Mensuração do pH no processo de diluição do HCl.
10	Avaliação	Discussão final sobre a proposta metodológica

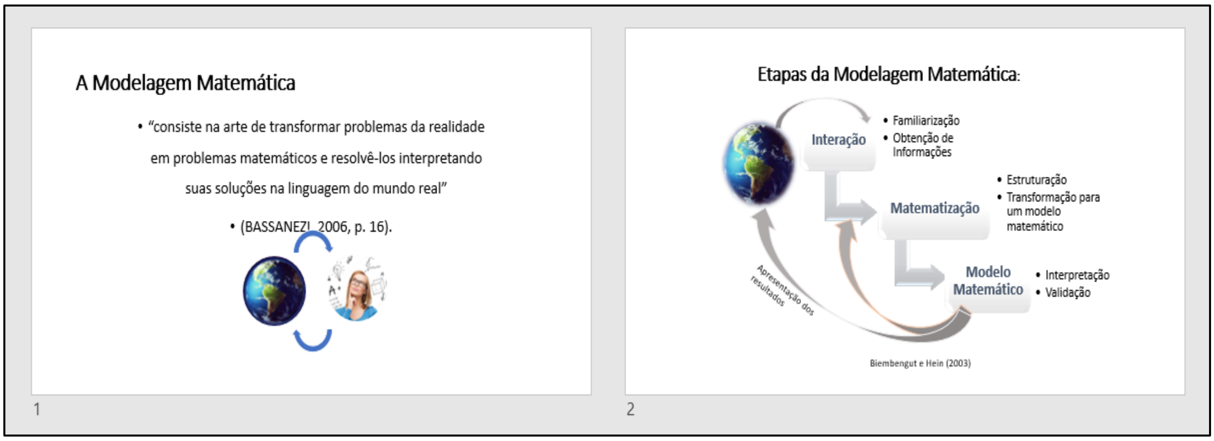
Fonte: Da autora, 2019.

Encontro 1

Neste primeiro encontro, foram expostos os objetivos da pesquisa, as atividades e os recursos utilizados, para que os alunos compreendessem o desenvolvimento da proposta da pesquisa e reconhecessem a importância de participar de uma pesquisa científica.

Iniciei com a apresentação de *slides* sobre Modelagem Matemática (FIGURA 3) e com comentários sobre materiais e *softwares* utilizados durante a intervenção pedagógica.

Figura 3 - *Slides* da apresentação sobre Modelagem Matemática



Fonte: Da autora (2019).

Na sequência dos *slides*, mencionei que a situação-problema seria apresentada por mim e que, entre outras possibilidades existentes, utilizaria o caso 2, segundo Barbosa (2004). Segundo este autor, o ambiente de MM pode ser organizado conforme esses 3 casos (FIGURA 4).

Figura 4 - *Slide* sobre a organização do ambiente de MM, segundo Barbosa (2004)

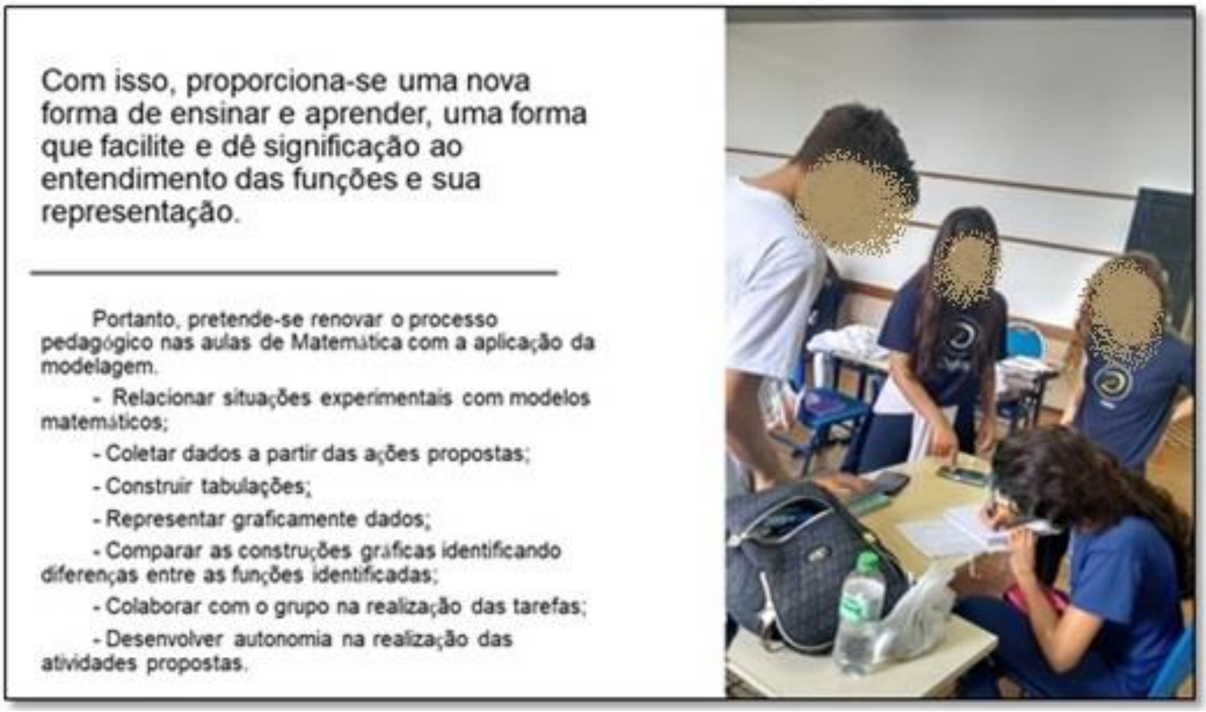
Os casos de modelagem, segundo Barbosa (2004):

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração do problema	Professor	professor	professor/ alunos
Coleta de dados	Professor	professor/ alunos	professor/ alunos
Resolução	professor/ alunos	professor/ alunos	professor/ alunos

Fonte: Da autora (2019).

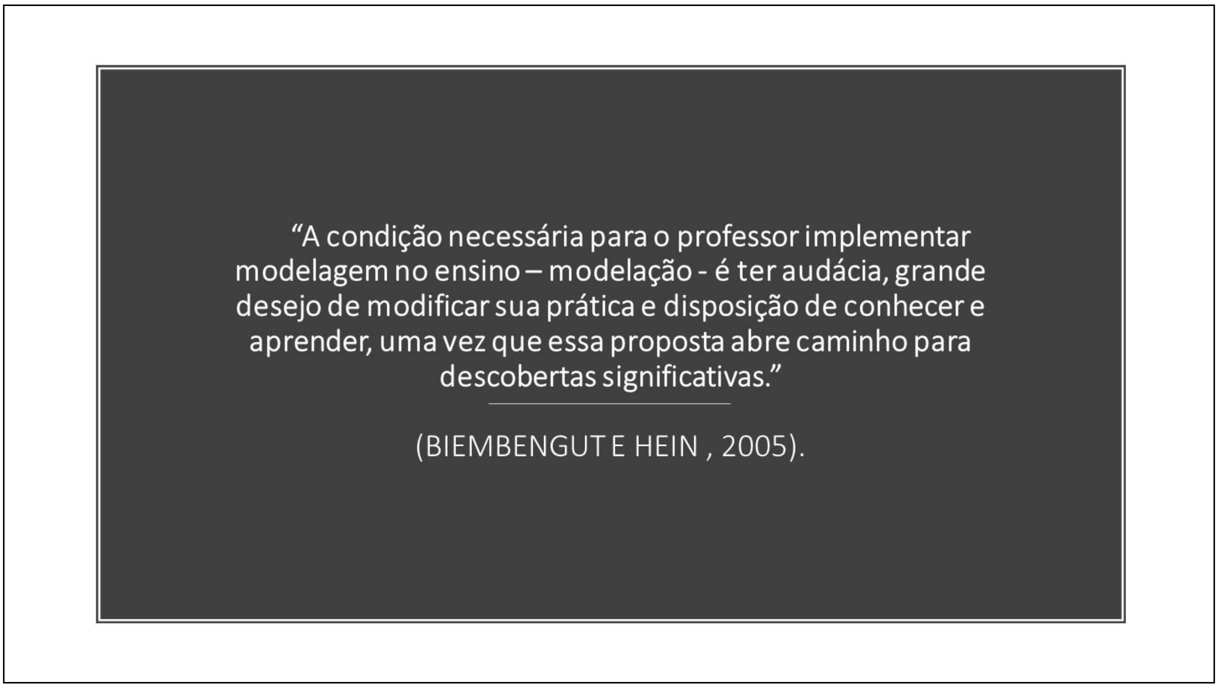
Nos *slides* que se seguiram, foram comentados alguns *softwares*, como *Excel* e Geogebra, que poderiam ser utilizados para a representação dos modelos matemáticos. Encerrei o encontro com algumas habilidades desenvolvidas na MM (FIGURA 5) e uma frase de Biembengut e Hein (2005), sobre a importância da implementação da MM (FIGURA 6).

Figura 5 - Habilidades desenvolvidas na MM (*slide*)



Fonte: Da autora (2019).

Figura 6 - Importância de implementação da MM (*slide*)



Fonte: Da autora (2019).

Posteriormente, como atividade final, ocorreu a organização da turma em três grupos de trabalho. A técnica utilizada foi sorteio, formando 3 grupos de 5 e 6 alunos. Passei-lhes informações acerca da atividade, dos materiais necessários para o Experimento I e dos objetivos de sua aplicação. Ficou combinado que, além de fotos e filmagens feitas por mim, cada grupo gravaria áudio, vídeo e registaria imagens no decorrer das atividades propostas nas aulas e, posteriormente, as encaminhariam para anexar ao material da pesquisa.

Encontros 2 a 5

No encontro 2, iniciei propondo a leitura da reportagem do ano de 2019 (APÊNDICE E), sobre a poluição do Rio Taquari, do jornal local (O Fato Novo, março 2019).

Na sequência, assistimos ao vídeo/reportagem, disponível em <http://g1.globo.com/globo-news/jornal-globo-news/videos/v/nova-tecnologia-despolui-aguas-com-bacterias/7161735/>, intitulado "Nova tecnologia despolui águas com bactérias", da Globo News (2018). Esse vídeo, além de motivar discussões e comentários sobre recursos de despoluição natural, trouxe à tona a situação de poluição da Lagoa Armênia, localizada no centro da cidade de Taquari.

A discussão que se desencadeou após o vídeo teve como foco as possíveis causas da poluição da água da Lagoa Armênia[4], as providências tomadas pelos órgãos ambientais do município, as questões de saneamento devido aos esgotos que desembocam na lagoa e os cuidados dos moradores da cidade em relação ao lixo jogado.

Aproveitando o assunto em debate, introduzi a proposta do experimento-simulação da despoluição de um lago, lançando o seguinte problema: Qual o modelo matemático presente no processo de despoluição de um lago? Enfatizei que se tratava de uma simulação e que, na natureza, este processo de despoluição é promovido pelas algas e bactérias presentes no ecossistema, semelhante ao que foi mostrado na reportagem a que assistimos. Na sequência, foi solicitado que se agrupassem (grupos de 5 e 6 participantes) e, em seguida, a atividade foi distribuída aos grupos, conforme descrição no Quadro 7.

Quadro 7 - Experimento-simulação de despoluição de um lago.

Experimento I: Experimento-simulação de despoluição de um lago. **Problema:** Qual o modelo matemático presente no processo de despoluição de um lago? **Objetivos:** Realizar experimento-simulação de despoluição de um lago-modelo, utilizando os diferentes tipos de registro e sistematização dos dados (tabela, gráfico e/ou algébrico). Através

[4] Lagoa situada na cidade de Taquari, próxima à escola.

desses registros, chegar à aproximação ou à elaboração de um modelo matemático e à compreensão da sua importância no processo de despoluição da água.

Materiais: Pote transparente com capacidade superior a 2 litros, copo plástico, balde, corante (café), água e colher.

Procedimentos: Colocar 1 litro de “água poluída” num recipiente, sendo 800ml de água limpa e 200 ml de água com café diluído. Retirar 200 ml da primeira mistura de “água poluída” e substituir por 200 ml de água limpa. E assim, sucessivamente, observando gradativamente a “água despoluindo”, identificando as grandezas e o processo matemático em cada etapa realizada.

Fonte: Da autora, 2019.

Os grupos então se formaram tendo, cada um deles, os materiais necessários para realização do experimento em sala de aula (garrafas *pet* de 2 litros, balde, copo plástico, café e água). Expliquei então que faríamos o experimento-simulação de despoluição de um lago e buscaríamos entender como ocorria esse processo, lembrando que, de forma similar ao vídeo, consideraríamos que os organismos vivos colocados no lago poluído purificam 20% a cada 24 horas e que o volume de água se mantém constante. Dessa forma, cada grupo deveria organizar seu experimento e registrar os dados de cada etapa, bem como, a respectiva descrição, tentando criar um modelo matemático a partir do experimento-simulação. A situação-problema foi a seguinte: Qual o modelo matemático presente no processo de despoluição de um lago?

Esclareci os objetivos da proposta, ou seja, realizar um experimento-simulação de despoluição de um lago-modelo, utilizando os diferentes tipos de registro (tabela, gráfico e/ou algébrico), para chegar a um modelo matemático que representasse o processo de despoluição da água. Na sequência, a descrição dos procedimentos utilizando os materiais que trouxeram, garrafas *pet* (2 litros), balde, copos plásticos, café e água. Assim, cada grupo iniciou seu experimento-simulação, colocando 1 litro de “água poluída” num recipiente, sendo 800ml de água limpa e 200 ml de água com café diluído. Inicialmente, realizou-se a retirada 200 ml dessa primeira mistura de “água poluída” e a colocação de 200 ml de água limpa. Esse procedimento foi repetido sucessivamente, para que observassem, gradativamente, a “água despoluindo”, conforme o registro enviado pelos alunos na Figura 7.

Figura 7 - Processo do experimento-simulação da despoluição de um lago

Fonte: Da autora, com base no grupo 1 (2019).

Cada grupo realizou o experimento-simulação sem maiores dificuldades, registrando os dados de cada etapa, definida pela retirada e pela entrada de água.

A seguir, com os dados coletados, iniciaram as indagações a respeito de quais grandezas seriam utilizadas para serem representadas graficamente. Essa etapa da matematização foi a mais complexa. Discussões, hipóteses, troca de ideias, tentativas e erros levaram os alunos a raciocinar sobre qual seria o padrão no processo de despoluição de um lago. Aqui, foi necessária minha intervenção com questionamentos, principalmente no grupo 3, que apresentou maior dificuldade de raciocínio na escolha das grandezas e na percepção do padrão.

Dando seguimento à atividade, após essas discussões, os grupos 1 e 2 iniciaram a construção de um gráfico a partir da tabela, representando o processo de despoluição que simularam. Estes grupos utilizaram, na construção dos gráficos, a relação quantidade de água poluída em função do número de trocas e após interpretaram sua tendência. Neste momento, ao observarem a tendência nos valores que obtiveram na tabela e na representação gráfica, depararam-se com uma das principais características da função exponencial, a ideia de um rápido crescimento ou decaimento, com um percentual constante.

Na sequência, instiguei os grupos a tentarem criar um modelo algébrico, além do gráfico. No entanto, as primeiras tentativas não se aproximaram de um modelo algébrico satisfatório. Questionei o que estavam fazendo, mas, como já estava finalizando o horário da aula, preferi esperar pela apresentação para discutirmos a questão no grande grupo. Os grupos deram seguimento na elaboração do relatório e dos slides para a apresentação.

No dia seguinte, ocorreu a etapa da apresentação e da discussão no grande grupo. A fase de apresentação dos modelos é o momento em que os grupos mostram suas elaborações, o desenvolvimento de seus raciocínios, percepções e conclusões preliminares. Para Biembengut (2009, p. 12),

> [...] para elaborar um modelo, além de conhecimento apurado de Matemática, o modelador deve ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

Todos os grupos descreveram o experimento e apresentaram gráficos que sugeriam uma curva exponencial (ou logarítmica), embora não tenham mencionado os nomes das funções pelo fato de não as conhecerem ainda. O grupo 3 apresentou maior dificuldade para entender o processo e tabular, mas demonstrou segurança na apresentação dos resultados. Quanto aos modelos algébricos, os grupos 1 e 2 encontraram o mesmo modelo e, ao serem questionados, verificaram não ser um modelo satisfatório. Aqui, o grupo 3, apesar de não ter conseguido criar o modelo algébrico, chegou a relacionar o processo de despoluição com a fórmula da Progressão Geométrica, estudada recentemente pelos alunos. A partir deste pensamento e alguns questionamentos que fiz, os grupos, juntos, começaram a construir coletivamente os passos para chegar a um modelo válido.

A partir do diálogo, percebi que o grupo 3 não chegou à mesma conclusão dos grupos 1 e 2, mas se aproximou de um modelo viável, ao relacioná-lo com a fórmula da Progressão Geométrica. Assim, busquei conduzir os questionamentos para o modelo algébrico que relacionasse as grandezas despoluição e etapas (dias), pensando na ideia de uma Progressão Geométrica, mencionada pelo grupo 3.

A partir dessas apresentações e considerando as questões levantadas e discutidas durante essa etapa, foi proposto o retorno à formação de grupos para então, a partir das ideias que emergiram na socialização, focar na construção de um modelo algébrico exponencial.

Conforme já havia sido iniciado pelo grupo 3 e complementado pelos grupos 1 e 2 na discussão durante as apresentações, o modelo algébrico começou a ser pensado com base no conhecimento que tinham sobre a Progressão Geométrica. Assim, reunidos em seus grupos, passaram a construir o modelo algébrico. Houve muitas trocas e discussões até que chegassem a um modelo válido.

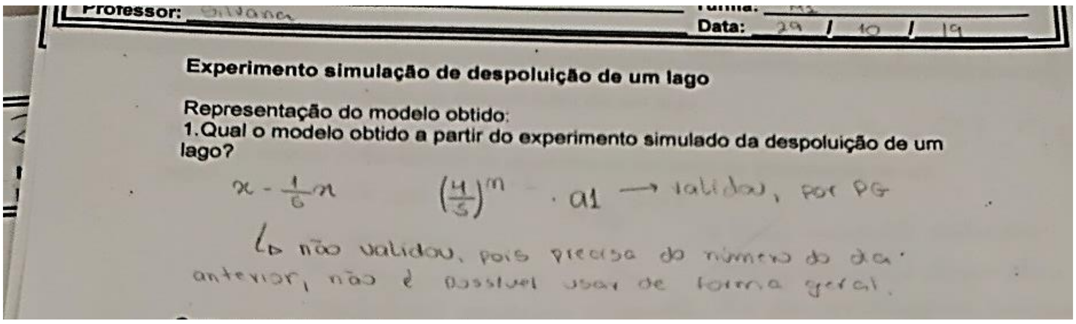
Ao final, os três grupos, depois de muitos cálculos e discussões, chegaram ao modelo algébrico validado e, para complementar e observar melhor o que aprenderam nesse experimento-simulação, elaborei alguns exercícios (APÊNDICE F), com a finalidade de avaliar o entendimento dos alunos. Aplicados esses exercícios, verifiquei que todos entenderam e relacionaram o modelo matemático algébrico com um cálculo que envolve um expoente “x”.

Vale ressaltar que algumas dúvidas surgiram tais como usar, ou não, no modelo matemático, o expoente “n-1” existente na fórmula da Progressão Geométrica. Essas dúvidas, que geraram discussões, eles mesmos sanaram ao compará-lo com os valores da tabela. Concluíram que o primeiro termo da Progressão Geométrica, num processo de despoluição, não tem necessidade de ser contado, por ser a situação inicial do processo.

No final, a questão 1 dos exercícios (APÊNDICE F) teve como resposta as seguintes representações do modelo matemático algébrico: $Y = 100.\ 0{,}8^x$ ou $A = a_1.\left(\frac{4}{5}\right)^x$.

Analisando os resultados dos alunos, constatei que eles tinham clareza nas etapas da modelagem e na questão da validação, pois tiveram que retornar e rever o modelo, criando outro mais apropriado, conforme resposta do aluno A5 (APÊNDICE F), na Figura 8, a seguir:

Figura 8 - Respostas dos exercícios sobre validação do experimento-simulação da despoluição de um lago


Professor: Silvana
Data: 29 / 10 / 19

Experimento simulação de despoluição de um lago

Representação do modelo obtido:
1.Qual o modelo obtido a partir do experimento simulado da despoluição de um lago?

$x - \frac{1}{6}x$ $\left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot a1 \longrightarrow$ validou, por PG

não validou, pois precisa do número do dia anterior, não é possível usar de forma geral.

Fonte: Da autora (2019), com base no A5.

Nesse primeiro experimento, os alunos integraram as etapas da MM e os passos do experimento com facilidade.

Na etapa do modelo matemático, houve o questionamento sobre a validade e confiabilidade dos modelos apresentados. A não validação remeteu ao retorno à etapa de matematização, com novos questionamentos e novas hipóteses a serem testadas e um novo modelo construído e, posteriormente, validado.

Encerrado e validado o modelo do Experimento I, passou-se para o experimento II. Ainda em relação à temática água, propus a MM com o segundo experimento, que envolveu conceitos de Química, num processo de diluição de uma substância ácida em água, com medição do pH.

Encontros 6 a 9

Nesses encontros, ocorreu a realização do Experimento II, conforme descrição no Quadro 8:

Quadro 8 - Processo de diluição do HCl em água, com mensuração do pH.

Experimento II: Trata do fenômeno da mudança do pH na mistura gradual de água, na água com substância ácida, até atingir a medida do pH aceitável na água que utilizamos. **Problema:** Qual o modelo matemático no processo de mudança do pH de uma solução ácida para a água com pH ideal para consumo? **Objetivo:** Identificar um modelo matemático a partir da relação entre as grandezas, coletando dados ao realizar o experimento de diluição de uma substância ácida em água, gradativamente, medindo o pH em cada etapa. **Materiais:** HCl 0,1 mol, 5 béqueres de 50 ml, pipetas volumétricas e graduadas 5 ml, copo descartável, medidor de pH, água. **Procedimentos:** Iniciar com a mistura HCl, 0,1 mol, retirar 5 ml e colocar em 45 ml de água. Dessa nova mistura (50 ml), retirar 5 ml e colocar em um novo béquer com 45 ml de água, e assim, sucessivamente, medindo o pH com fitas de indicadores de pH, em cada etapa do experimento, identificando grandezas e o processo matemático em cada etapa.

Fonte: Da autora, 2019.

Relacionado ao processo de diluição do HCl em água, mensurando o pH. Esse experimento consistiu em observar a mudança do pH na mistura gradual de substância ácida em água, cuja finalidade foi realizar a diluição do HCl em água da torneira e colher dados, buscando identificar o modelo matemático existente nesse processo.

Para isso, na primeira etapa, foi levantada a discussão sobre a qualidade da água que bebemos; além disso, os alunos buscaram informações sobre o pH, sua importância e aplicações. Nesse momento, contamos com a colaboração da professora de Química que, recentemente, havia trabalhado os conceitos de Ácido e Base, além de ter realizado a medição do pH de determinadas substâncias, com essa turma.

Após a obtenção de informações sobre o pH e a revisão do conceito de Molaridade, orientado pela professora de Química, propus a realização do experimento, questionando: Qual o modelo matemático no processo de mudança do pH de uma solução ácida para a água própria para consumo[5*]?

Na sequência, expliquei como seria feito o experimento: Iniciar com uma mistura HCl, 0,1 mol, retirar 5 ml e colocar em 45 ml de água. Dessa nova mistura (50 ml), retirar 5 ml e colocar em um novo béquer com 45 ml de água e assim, sucessivamente, medir o pH com fitas de indicadores de pH (FIGURA 9), em cada etapa do experimento, até a obtenção do pH ideal para água de consumo, ou seja, pH 7, conforme pesquisa feita pelos alunos.

Figura 9 - Indicador universal de pH

Fonte: Da autora (2019).

Após essas orientações, foi medido o pH do HCl concentrado e iniciada a retirada de 5ml para o primeiro processo de diluição do ácido em água. Essa primeira etapa foi realizada

[5] Para caracterizar uma água própria para consumo, são determinados diversos parâmetros, os quais representam as suas características físicas, químicas e biológicas. Nesta pesquisa, me refiro somente ao parâmetro químico, ou seja, o pH recomendável ao consumo.

pela professora de Química (FIGURA 10), devido ao grau de periculosidade de inalação do ácido. A partir dessa primeira diluição, os alunos puderam seguir a experimentação com segurança.

Figuras 10 - Colaboração da professora de Química.

Fonte: Da autora (2019).

Na sequência, os alunos, nos seus grupos, seguiram com o experimento, medindo o pH e anotando os dados coletados numa tabela. Nesta etapa (matematização), surgiram dúvidas relativas à quantidade de HCl que ainda permanecia em cada mistura. Discutiram hipóteses, questionaram, trocaram ideias no grupo e entre os grupos. A dúvida residia em quais grandezas utilizariam, pois havia a quantidade de HCl, quantidade de água e o valor numérico do pH indicado na fita. Neste momento, foi necessário intervir: os questionamentos que lhes fiz remeteram o pensamento para as diferenças entre uma substância com pH 1 e outra com um pH 7. Assim, perceberam que, como as medições do pH da mistura estavam aumentando, a concentração de ácido estava diminuindo, ou seja, a mistura estava se tornando menos ácida a cada diluição.

Em seguida, fiz alguns questionamentos em relação à quantidade de ácido contida em cada etapa da diluição, que conduziram ao fator multiplicativo e/ou percentual de HCl existente em cada etapa. Esclarecida essa relação numérica, os grupos observaram os dados coletados no experimento e identificaram as grandezas relacionadas, ou seja, a quantidade de ácido existente em cada etapa da diluição e o valor do pH correspondente. Observei que dois grupos utilizaram fração para representar a quantidade da mistura inicial e o outro grupo utilizou percentual.

Após a definição das grandezas, os grupos passaram a analisar as 7 diluições que fizeram e perceberam que, nas últimas etapas, o pH permaneceu em 5. Questionei o porquê da estabilidade do pH e várias hipóteses surgiram nas discussões dos grupos e entre os grupos. Em seguida, um dos grupos sugeriu medir o pH da água que utilizaram na diluição (água da torneira) e constataram que seu pH era 5, o que os levou a concluir que, por mais diluições que fizessem, não chegariam a um pH maior que esse. Essa constatação gerou críticas em relação à qualidade da água que estavam bebendo.

Em seguida, ao iniciarem a representação gráfica no caderno, o horário de aula encerrou. Para agilizar, sugeri que fizessem a representação gráfica utilizando o *software* Geogebra, bem como, a função (regressão de crescimento) para a obtenção do modelo matemático algébrico, tarefa essa que foi concluída em casa, bem como o relatório do experimento.

Na sequência, o momento de socialização. Nesta etapa, os grupos apresentaram o relatório do Experimento II, a tabulação dos dados, os procedimentos e cálculos realizados. As tabelas demonstraram corretamente o processo de diluição; porém, no gráfico e no modelo algébrico, houve questionamentos em dois dos três grupos. Ao perguntar sobre a validação do modelo algébrico, um dos grupos percebeu que não havia digitado corretamente os números decimais no Geogebra e outro grupo utilizou a função regressão polinomial em vez de regressão de crescimento. Após essas indagações, os alunos chegaram a um consenso e retomaram a etapa de matematização em busca de um modelo válido. Assim, relacionaram os dados da tabela e, ainda, na discussão, no momento da apresentação, identificaram a razão da Progressão Geométrica do processo de diluição e, com facilidade, criaram o modelo algébrico válido. Vale ressaltar que, nas apresentações deste experimento, os alunos já mencionaram o termo “função exponencial” e, ao serem questionados, relataram que pesquisaram na *internet*.

Após, numa conversa com os grupos, questionei-lhes a relação desse modelo com a fórmula do pH utilizada em Química. Eles ficaram pensativos; então, neste momento, introduzi uma breve noção sobre a definição de logaritmo, devido à necessidade surgida em relação à fórmula do pH. Assim, eles conseguiram significar e relacionar os saberes.

Além dessas descobertas e conexões, esse experimento gerou curiosidades que resultaram em pesquisas em outras áreas do conhecimento. Os alunos, ao relacionarem a descoberta com o seu cotidiano, com os alimentos mais ingeridos por eles, quiseram saber o pH da Coca-Cola. Tendo em vista esse interesse por parte dos alunos, foi realizado um experimento extra: a medição do pH da Coca-Cola e sua diluição até um pH adequado ao organismo. Assim, chegaram à quantidade de água necessária para que a Coca-Cola chegasse a um pH adequado ao organismo humano, ou seja, concluíram serem necessários em torno de 19 copos de água para cada copo de Coca-Cola, considerando que a água utilizada na diluição tinha pH 5. Também, buscando informações, constataram que o pH do sangue é 7,4. Portanto, o pH 7,5 seria ideal ao organismo humano. Dados desse experimento ficaram registrados nas respostas escritas no questionário, conforme o Apêndice G.

Encontro 10

Nesse encontro, houve uma rodada de discussão em que os alunos falaram sobre suas impressões e avaliaram a metodologia Modelagem Matemática aliada aos experimentos. Os depoimentos orais no debate final e a discussão em grande grupo contemplaram os tópicos da pauta (APÊNDICE C) e geraram outros tópicos. A conversa em grupo favorece o desencadeamento de ideias e, na Modelagem, “[...] os estudantes são convidados a trabalhar em grupos. Nesse sentido, eles são incentivados a negociar, a debater, a ouvir o outro e respeitar suas ideias” (ARAÚJO, 2009, p. 65). Portanto, a aprendizagem se constrói na interação, no compartilhamento de tarefas, no exercício de ouvir, no respeito às opiniões dos outros, no acatar a decisão do grupo. É nessa interação, propiciada pelo trabalho em grupo, que a modelagem matemática contribui para que os alunos se tornem sujeitos aptos a interagirem com criatividade e consciência.

Após, foi preenchido o questionário final, oportunizando a expressão escrita individual com a finalidade de obter informações de todos os alunos, inclusive dos mais tímidos, sobre a prática de Modelagem Matemática (APÊNDICE D).

3.3 Caracterização da análise dos resultados

A análise dos dados obtidos nesse trabalho seguiu orientações da análise textual discursiva, considerando seus três momentos: unitarização, categorização e metatexto (MORAIS; GALIAZZI, 2012).

Num primeiro momento, na unitarização, fiz as transcrições e realizei a leitura do material para identificar as unidades de significado. Para Moraes e Galiazzi (2011, p. 71):

> Unitarizar um texto é desmembrá-lo, transformando-o em unidades elementares, correspondendo a elementos discriminantes de sentidos, significados importantes para a finalidade da pesquisa, denominadas de unidades de significado.

Assim, as unidades de significado geraram subcategorias, que foram codificadas em: trabalho em grupo, interação no grupo e entre grupos/colaboração, ideologia da certeza, senso crítico, representação do modelo matemático, aluno pesquisador, confiabilidade "cega" na tecnologia, interdisciplinaridade, interligação dos saberes e construção coletiva do modelo matemático. Após, busquei perceber as divergências e convergências entre elas, organizando conjuntos com algo em comum, formando assim as categorias (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 97). Para Gomes (2004), "a palavra categoria, em geral, se refere a um conceito que abrange elementos ou aspectos com características comuns ou que se relacionam entre si. Essa palavra está ligada à ideia de classe ou série" (GOMES, 2004, p. 70).

Segundo Moraes e Galiazzi (2011, p. 86), há dois tipos de categorias, as à *priori*, "[...] trazidas para a pesquisa antes da análise [...]; e as emergentes, construídas a partir dos dados". Segundo Galiazzi e Moraes (2011, p. 116):

> Cada categoria corresponde a um conjunto de unidades de análise que se organiza a partir de algum aspecto de semelhança que as aproxima. As categorias são construtos linguísticos, não tendo por isso limites precisos. Daí a importância de sua descrição cuidadosa, sempre no sentido de mostrar aos leitores e outros interlocutores as opções e interpretações assumidas pelo pesquisador.

Ao interpretar os dados e elaborar essa síntese, deparei-me com as categorias a *priori*, oriundas dos objetivos específicos e alicerçadas nos pressupostos teóricos dessa pesquisa. A fim de trazer as ocorrências e recorrências de cada categoria, bem como, suas relações com os pressupostos teóricos, consultei mais de um instrumento da coleta de dados.

Após a construção das categorias a *priori*, relativas aos objetivos, ou seja, "Trabalho em grupo" e "Representação do modelo matemático", novas relações foram estabelecidas gerando outras compreensões, emergindo a construção coletiva. Ficou evidente que a construção coletiva do modelo matemático se origina do trabalho em grupo e dos saberes utilizadas na representação do modelo matemático. Além disso, outras subcategorias foram marcantes na unitarização, merecendo destaque devido à sua importância e seu reflexo advindo da MM aliada à experimentação: ideologia da certeza e interligação de saberes.

Assim, para as categorias à *priori*: "Trabalho em grupo" e "Representação do modelo de função do experimento", bem como, para a categoria emergente, "Construção coletiva do modelo matemático", busquei a análise nos instrumentos de coleta de dados, conforme a organização no Quadro 9.

Quadro 9 - Categorias e dados coletados.

Categorias	**Material de consulta**
Trabalho em grupo	Vídeos e áudios de todos os encontros; Diário de campo do professor pesquisador; Questão 6 dos relatórios dos experimentos; Questões 3 e 4 do questionário final.
Representação do modelo de função do experimento	Vídeos e áudios de todos os encontros; Diário de campo do professor pesquisador; Questões 3, 4 e 5 dos relatórios dos experimentos; Questões 1 e 2 do questionário final.
Construção coletiva do modelo matemático	Vídeos e áudios de todos os encontros; Diário de campo do professor pesquisador; Questões 4 e 5 do questionário final; Item 2 da pauta do debate final.

Fonte: Da autora (2019).

E, por fim, o metatexto, que, segundo Moraes e Galiazzi (2011, p. 111), trata de “[...] sínteses elaboradas pelo pesquisador no sentido de expressar as novas compreensões atingidas em relação ao seu objetivo de pesquisa”. Com isso, interlocuções entre as categorias, os fundamentos teóricos e os dados empíricos, deram origem ao metatexto.

No próximo capítulo, analiso os resultados obtidos na exploração da prática pedagógica referente a essa pesquisa, junto com algumas reflexões.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, pautada na análise textual e discursiva (MORAIS; GALIAZZI, 2012), analiso os resultados coletados segundo as categorias a *priori*, já escolhidas anteriormente, "Trabalho em grupo" e "Representação do modelo de função do experimento". A que emergiu durante a exploração dos dados coletados foi a "Construção coletiva do modelo matemático". E, para finalizar este capítulo, uma reflexão sobre alguns fatos deslumbrantes captados durante a prática pedagógica, a que eu chamei de "brotamentos".

4.1 Categorias à *priori*:

A seguir apresento a análise das categorias a *priori* "Representação do modelo de função do experimento" e "Trabalho em grupo", formuladas nos objetivos da pesquisa.

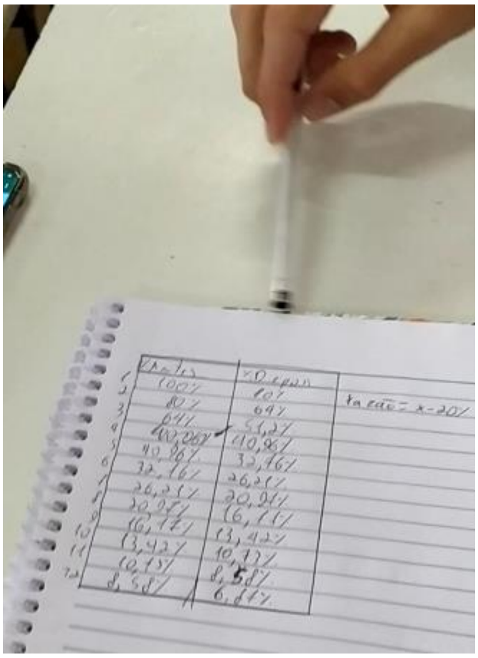
4.1.1 Representação do modelo de função do experimento

Nesta categoria, descrevo como as representações dos modelos matemáticos de função exponencial surgiram a partir dos experimentos e como foram explorados no decorrer da prática pedagógica.

Essas representações podem ocorrer de diversas formas. Segundo Biembengut e Hein (2003, p. 14), a identificação de um modelo pode ser "um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou equações algébricas, ou gráfico, ou representação, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução". Para Bassanezi (2014, p. 20), "Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objetivo estudado".

Assim, as primeiras representações observadas resultaram na elaboração de uma tabela, sendo definidas as grandezas e as relações entre elas, como podemos averiguar na imagem e nos diálogos que seguem na Figura 11.

Figura 11 - Tabela da representação do experimento-simulação da despoluição de um lago



A1: *Como é que a gente vai fazer isso*?

A2: *Faz 2 quadradinhos, depois bota a porcentagem que deu*.

A1: *Tá*[6]*.

P: *Explica essa tabela pra mim*.

A1: *Tá, a gente começou com 100% que tinha no recipiente*.

A3: *A gente foi tirando de cada vez 20% do total*.

A1: *A gente tirou da primeira vez, ficou 20% de 100, ficou 80. A gente tirou 20% de novo, aí ficou 64. Dos 64 a gente tirou 20% e ficou 51,2 e foi tirando sempre 20%*.

A2: *A gente fez 12 vezes e daí ficou 6*.

A3: *Isso aqui é o que ainda ficou de água suja.*

P: *Vocês acham que vai eliminar totalmente*?

A3: *Totalmente eu acho que não*.

A1: *Totalmente eu acredito que não*.

A2: *É*.

A1: *Mas vai chegar um ponto muito perto*.

P: *Tá, tentem fazer um gráfico agora disso*.

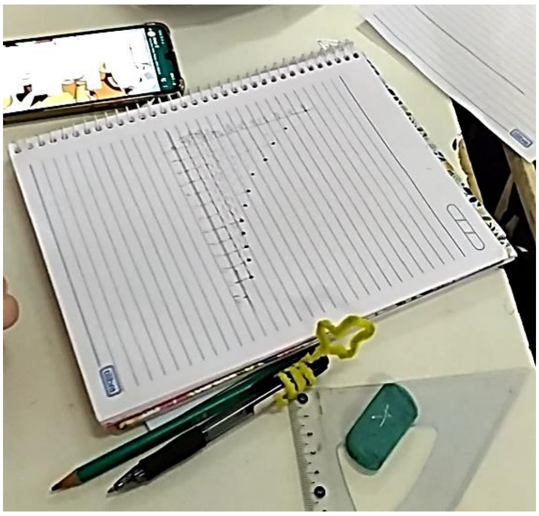
A1: *Tá*.

Fonte: Da autora, com base nos dados do grupo 1 (2019).

Neste diálogo, fica evidente a interpretação da representação gráfica da função exponencial decrescente e a constatação de que ela tende a zerar, mas “nunca chega” (A1, 2019). Essa transcrição apresenta subsídios que demonstram o real entendimento de uma das principais características da função exponencial, ou seja, assumir valores muito próximos a zero, mas nunca iguais ou menores que zero. Portanto, mesmo não conhecendo função a exponencial, os alunos já percebiam uma tendência, visivelmente expressa no momento em que passaram para a representação gráfica (FIGURA 12).

[6] “Tá”, se refere a palavra está.

Figura 12 - Representação gráfica do experimento-simulação da despoluição de um lago

	A2: *Vai diminuindo a quantidade de água suja, só que tipo, nunca vai ter 100% de água limpa, poderia ter zero vírgula alguma coisa*. P: *Então ela nunca vai chegar na linha do zero aqui*? (mostrando no gráfico que fizeram). A1: *Nunca, ela vai chegar a 0,000 ... mas não vai chegar em zero, porque por porcentagem não tem como chegar a zero. Não teria como*. A3: *No caso seria tirar* $\frac{1}{5}$ *em cada uma das etapas, aí tu vais tirando 20% e foi assim sucessivamente*. P: *Se eu tirar 200ml em cada etapa, então se eu tirar 5 vezes 200ml eu tirei toda água suja*? *É correto isso*? A3: *Não, parece que sim, mas não é porque tá sempre fazendo misturas*. P: *Como vocês veem isso no lago*? A1: *Depois de 15 dias estaria aparentemente limpo. Sem contar a entrada de novas sujeiras, né*.

Fonte: Da autora, com base nos dados do grupo 1 (2019).

Neste momento, os alunos perceberam relações entre os valores que obtiveram na tabela, a tendência na representação gráfica e o que isso significaria em termos de despoluição de um lago.

> Para que uma representação seja identificável é necessário, a partir de um registro de representação, saber qual é o objeto matemático que está sendo representado. O tratamento ocorre quando há transformações de representações dentro de um mesmo sistema de registros. A conversão corresponde a transformações de representações onde há mudanças de sistemas de registros, conservando o objeto matemático estudado (ALMEIDA; SILVA, 2009, p. 6).

Essas representações, dispostas até esse momento, foram bem-sucedidas por todos os grupos. Porém, inicialmente, o grupo 3 apresentou dificuldade na compreensão da quantidade de “água poluída” que estaria sendo retirada da mistura. Essa dificuldade, evidenciada pela tentativa do uso de uma expressão algébrica sem a compreensão necessária, ficou expressa no diálogo do grupo 3, a seguir:

> A5: *800x mais 200ml de café, x e y.*
> A4: *Tipo... a primeira ficaria:* ***1000 xy – 200xy + 200x****, só que a próxima ficaria...porque isso aqui é o próximo xy, esse y ele entra dentro desse xy, porque o xy vai mudando.*
> P: *Vocês vão montar um gráfico com esses dados?*
> M: *A gente faz assim no gráfico, coloca o x e o y.*
> A4: *Tá então y vai diminuindo e x vai aumentando. Daí a gente faz uma terceira linha que é a água do pote.*
> A5: *Terceira linha?*
> A4: *Sim que é a água misturada.*

P: *Quais são as duas grandezas que vocês estão trabalhando?*
A16: *Água pura e água misturada.*
A4: *X é água pura*.

Aqui pude observar que esse grupo determinou algebricamente x para água limpa, y para água escura e xy para água misturada. Porém, não conseguiam definir com clareza as grandezas que utilizariam na representação. Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 34) discorrem sobre a representação no contexto da compreensão:

> Falar de representação equivale a falar de conhecimento, significado, compreensão uma vez que se pode considerar que a compreensão de um objeto matemático está diretamente relacionada com a identificação das diferentes representações que lhe são associadas.

Neste momento, a compreensão e a clareza do objetivo são essenciais para essa transição do problema não-matemático para o modelo matemático, que, segundo Bassanezi (2014), é a fase da "abstração", ou seja, levantar hipóteses, escolher variáveis e relacioná-las. E, para auxiliar o grupo nesta fase, fez-se necessária a continuidade das indagações:

P: *Então, na primeira etapa quanto de água suja tinha? Na segunda etapa quanto de água suja tinha? É isso que vocês têm que procurar saber.*
A4: *Eu não entendo como que faz. Como é que a gente vê, por exemplo, nos 200 ml que a gente tira de água suja e limpa misturada, como é que a gente faz pra ver quanto % de água suja e quanto % de água limpa tem.*
A5: *É isso que ela* (professora) *quer que a gente faça.*
P: *É isso, esse é o trabalho de vocês. Vocês têm que criar, se errar, a gente vai indo, eu vou questionando vocês, até vocês chegarem. Vamos lá!*
A4: *Eu não sei, quando a gente tira os 20%, eu entendi o que acontece. Mas eu não sei como fazer porque tá misturado. 20% limpa e 80% sujo que é igual a 100%.*
P: *Visivelmente vocês enxergaram que a água está clareando* (consentiram com a cabeça), *vocês chegaram a essa conclusão. Comparada com o início, ela está bem mais clara. Isso quer dizer que houve uma limpeza, então quer dizer que as "bactérias da limpeza" estão dominando o que pode ser observado na parte limpa. Mas qual é o modelo matemático que ocorre ali, em cada etapa? Na primeira etapa, 24h depois as bactérias tinham comido 20% da poluição. Então tinha o que no início, no final do primeiro dia?*
A5: *80% de poluição e 20% de água limpa.*
A4: *Só que assim ó, quando ele tira a água ele não tira só do 80% de poluição. Ele tira junto, só que eu não sei o quanto % ele tira do 80 e do 20.*
P: *Tirou quanto, 200ml?*
A4*: Sim eu tiro 20% do meu 100% de novo.*
P: *Então...tu podes fazer assim, 20% dos 800 e 20% dos 200, entende? Porque tinha só 800ml de suja ainda.*
A4: *Só que, então eu não tiro 10% de cada um?*
P: *Tu achas que sai exatamente assim? Metade do copo saiu da branca e metade saiu da água preta? O que tinha dentro do vasilhame na segunda etapa? Se desse pra separar numa mistura heterogênea ficaria, teria uma faixinha de 20% e um faixão da outra né?*
A10: *Tipo água e azeite, fica separado azeite em cima e água embaixo.*
P: *Isso, se desse pra dividir vocês iriam ver assim, mas na água poluída não dá pra dividir. Mas, em termos matemáticos, dá pra calcular. Então no momento em que faz a segunda retirada, já tá tirando, como você diz, 20% de uma e 20% da outra.*
A4: *Sim, então eu tenho que ver o 20% do 80 e o 20% do 20.*
P: *Quanto é 20% do 80?*
A4: *Tá 20% de 80 é 16 e de 20 é 4.*

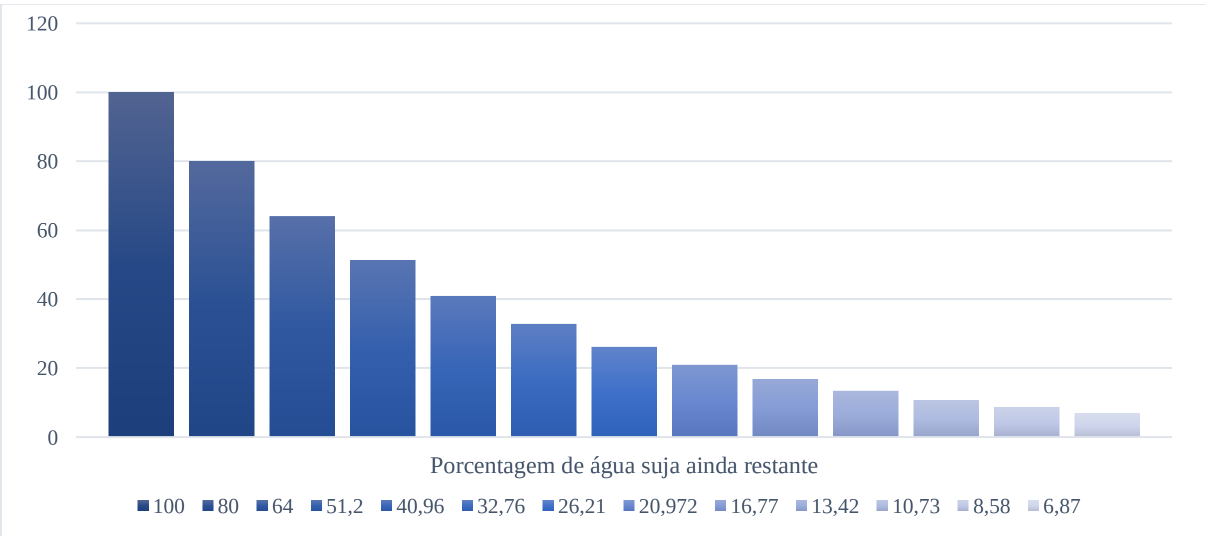
> P: *Isso, fechou. Então pensa, vocês retiraram 16 da água suja e 4 da água limpa, certo?* (o grupo consentiu) *E entrou o que depois?*
> A4: *Mais 200 ml de limpa.*
> P: *Então ficou...*
> A4: *Ficou os 200 menos 40ml de água limpa, mais 200 e 800 menos 160ml de água suja. Ah tá, agora é só indo tirando 20% de cada um.*

Em momentos como este, percebe-se a importância dos questionamentos e de uma boa comunicação entre professor e alunos. De acordo com Barbosa (2009), na MM, o papel do professor é mediar, observar, questionar e acompanhar os grupos, de forma a conduzir o aluno a formular, relacionando conceitos prévios e associá-los a novos conceitos, refletindo e dando significado às ideias matemáticas. Assim, foram necessários vários questionamentos que levaram os alunos a relacionar os conceitos estudados, de modo a dar significado, buscando identificar o modelo matemático existente na realização do experimento-simulação de despoluição de um lago. Posteriormente, o grupo prosseguiu sozinho; concluiu os cálculos, elaborou a tabela e representou-a graficamente.

O grupo 2, embora houvesse divergências de opiniões entre eles, chegou à tabela e ao gráfico, sem necessitar da minha mediação.

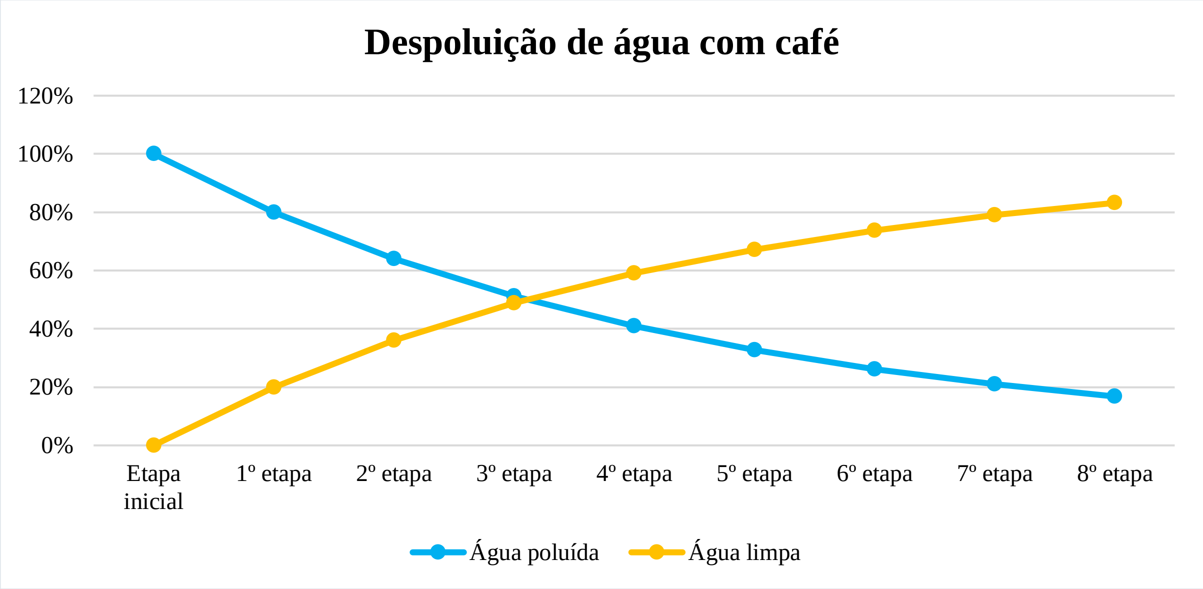
Assim, na apresentação, todos os grupos mostraram as representações do modelo matemático na tabela, no gráfico, como pode ser comprovado nas Figuras 13,14 e 15.

Figura 13 - Representação gráfica do modelo de despoluição de um lago (simulação)



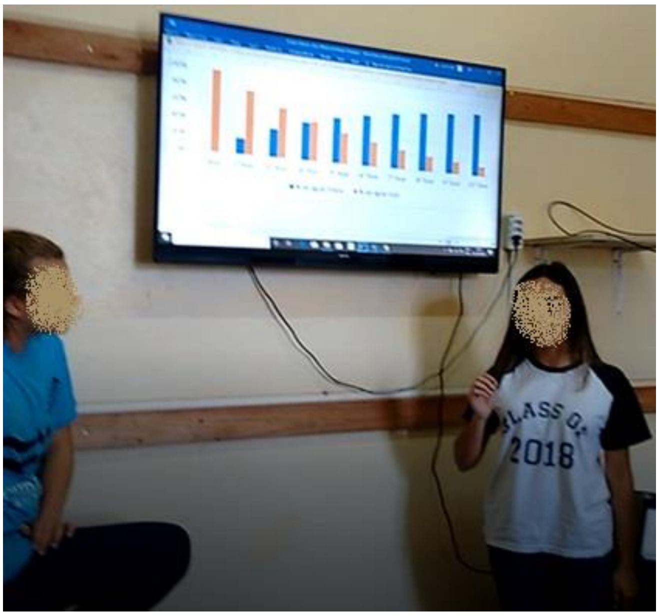
Fonte: Da autora, com base nos dados do grupo 1 (2019).

Figura 14 - Representação gráfica do modelo de despoluição de um lago (simulação)



Fonte: Da autora, com base em dados do grupo2 (2019).

Figura 15 - Representação gráfica do modelo de despoluição de um lago (simulação)



Fonte: Da autora (2019), com base em dados do grupo, 3.

Além dos gráficos iniciais, elaborados à mão, no caderno, observei que os grupos, ao utilizarem *softwares*, diversificaram as representações gráficas. Também, os grupos 2 e 3 compararam graficamente, a diminuição da quantidade do suposto poluente e o aumento de água limpa, estabelecendo uma comparação intuitiva entre a função exponencial e sua inversa, a função logarítmica.

Quanto aos modelos algébricos, os grupos 1 e 2 encontraram o mesmo modelo, conforme constatou-se nas apresentações (FIGURA 16) e nos itens 5 e 6 do relatório (APÊNDICE H).

Figura 16 - Questão 5 e 6 do relatório do grupo 2, Experimento I

5. Qual o modelo matemático obtido?

$A_{poluída}$ = X - 1/5X

Onde X é a porcentagem de água poluída na etapa anterior.

6.Quais foram os caminhos utilizados para representar o modelo matemático.

A cada etapa, adicionava-se 200ml de água limpa e retirava-se 200ml do líquido presente na garrafa, ou seja, uma porcentagem de água limpa e uma procentagem de água suja. Assim, durante o experimento, observou-se que a cada etapa, a água poluída reduzia em 20/100 (20%), simplificando, 1/5.

Fonte: Da autora, com base no grupo 2 (2019).

Esse modelo criado pelos grupos 1 e 2 foi questionado, pois, segundo Biembengut e Hein (2003), essa é a etapa de validação. Nesta etapa, verifica-se a representação ou o modelo construído, se responde satisfatoriamente ao problema proposto e, caso não seja confiável, alunos e professores deverão retornar à segunda etapa em busca de uma melhor adequação.

Neste sentido, fui direcionando as perguntas de forma que os alunos percebessem se o modelo criado por eles era válido, como pode-se comprovar no diálogo a seguir:

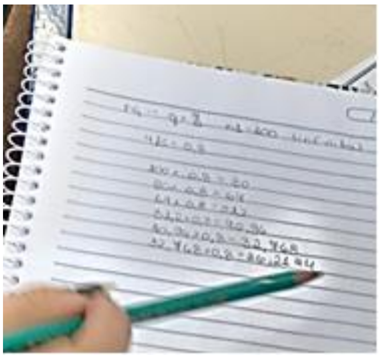
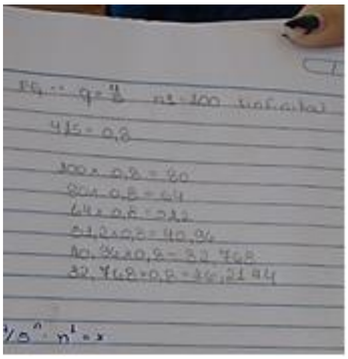
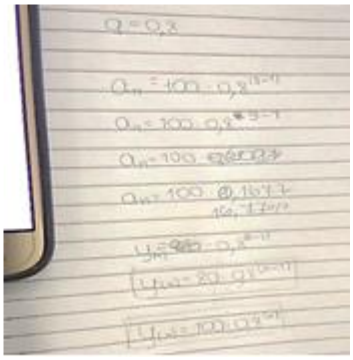
> P: *Vocês pegaram esse valor e diminuíram $\frac{1}{5}$ do valor anterior sempre, certo?* [consentiram].
> P: *E, vamos supor que eu não tenha essa sequência de cálculo toda feita, etapa por etapa e eu quisesse saber no 7º dia quanto % tem, sem ter que fazer etapa por etapa. Daria para aplicar essa fórmula?*
> A6 (G1): *Não, essa não dá porque depende do dia anterior, porque é $\frac{1}{5}$ a menos do que o dia anterior.*
> P: *Então é um modelo que não teria a sua validação? Não sei se o grupo 3 pensou assim também.*
> A5 (G3): *A gente pensou em usar Progressão Geométrica, só que não deu certo. Não sei se foi porque eu não botei na ordem certa, mas eu botei como se o a_n fosse 1000, no caso 1000 ml igual ao* a_1 *que eu quisesse descobrir, vezes os 20%, o expoente seria a etapa.*
> P: *Humm... tem outro jeito de calcular isso?*
> A1 (G1): *Ah, então a razão da Progressão Geométrica seria, $\frac{4}{5}$ que é o que fica dentro.*
> A1(G1): *A gente tá tirando toda vez $\frac{1}{5}$, daria uma Progressão Geométrica de razão*

$\frac{4}{5}$, porque vai multiplicando, vai tirando $\frac{1}{5}$?

Diante desses questionamentos, os alunos perceberam a não validade do modelo matemático. Reflexões e hipóteses surgiram até que, na troca de ideias, chegaram a um consenso, assentando a construção do modelo matemático num conhecimento prévio relacionado com a ideia de exponencial da Progressão Geométrica, identificando assim a razão.

A partir da identificação da razão, os grupos construíram seus modelos matemáticos algébricos. Ainda houve algumas discussões até sua finalização, mas todos os grupos, ao testarem substituição do número de cada etapa encontravam a quantidade provável de "água poluída" no recipiente e, com isso, validaram a representação do modelo algébrico da função exponencial. Na Figura 17, os modelos algébricos de cada grupo.

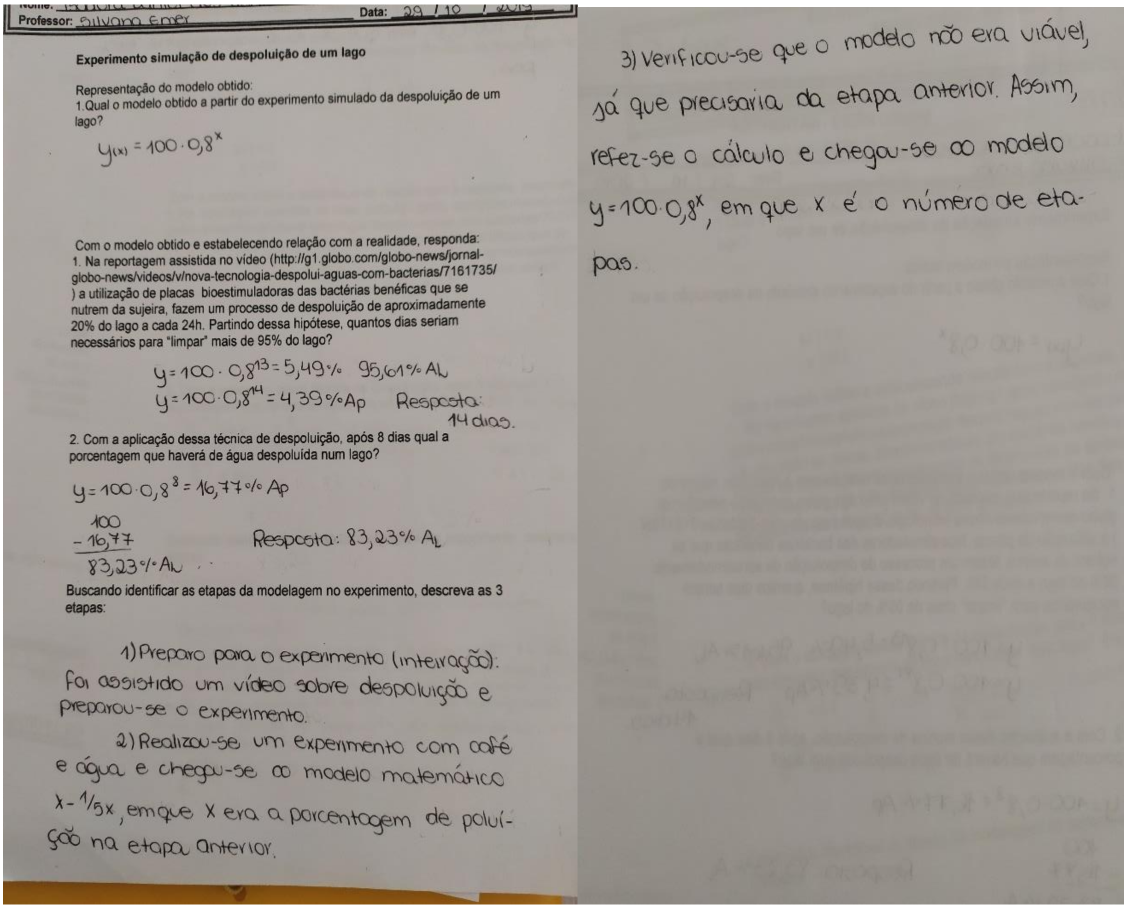
Figura 17 - Modelos algébricos de cada grupo

		
A = $a_{1.} \left(\frac{4}{5}\right)^n$	$\left(\frac{4}{5}\right)^n .n = x$	Y(x) = 100. $0{,}8^x$

Fonte: Da autora, com base nos grupos 1, 2 e 3 (2019).

Assim, os três grupos, depois de muitos cálculos e discussões, chegaram ao modelo algébrico validado e, para complementar e observar melhor o que apreenderam nesse experimento-simulação, elaborei alguns exercícios, conforme Apêndice F, Figura 18.

Figura 18 - Respostas dos exercícios, conforme Apêndice F



Professor: Silvana Emer Data: 29 / 10 / 2019

Experimento simulação de despoluição de um lago

Representação do modelo obtido:
1.Qual o modelo obtido a partir do experimento simulado da despoluição de um lago?

$y_{(x)} = 100 \cdot 0{,}8^x$

Com o modelo obtido e estabelecendo relação com a realidade, responda:
1. Na reportagem assistida no vídeo (http://g1.globo.com/globo-news/jornal-globo-news/videos/v/nova-tecnologia-despolui-aguas-com-bacterias/7161735/) a utilização de placas bioestimuladoras das bactérias benéficas que se nutrem da sujeira, fazem um processo de despoluição de aproximadamente 20% do lago a cada 24h. Partindo dessa hipótese, quantos dias seriam necessários para "limpar" mais de 95% do lago?

$y = 100 \cdot 0{,}8^{13} = 5{,}49\%$ 95,61% AL
$y = 100 \cdot 0{,}8^{14} = 4{,}39\%$ Ap Resposta: 14 dias.

2. Com a aplicação dessa técnica de despoluição, após 8 dias qual a porcentagem que haverá de água despoluída num lago?

$y = 100 \cdot 0{,}8^{8} = 16{,}77\%$ Ap

$100 - 16{,}77 = 83{,}23\%$ AL Resposta: 83,23% AL

Buscando identificar as etapas da modelagem no experimento, descreva as 3 etapas:

1) Preparo para o experimento (inteiração): foi assistido um vídeo sobre despoluição e preparou-se o experimento.

2) Realizou-se um experimento com café e água e chegou-se ao modelo matemático $x - 1/5x$, em que x era a porcentagem de poluição na etapa anterior.

3) Verificou-se que o modelo não era viável, já que precisaria da etapa anterior. Assim, refez-se o cálculo e chegou-se ao modelo $y = 100 \cdot 0{,}8^x$, em que x é o número de etapas.

Fonte: Da autora, com base no aluno A8 do grupo 2 (2019).

Nas questões desses exercícios, todos eles representaram o modelo Y = 100x $0{,}8^x$ ou A = $a_1.\left(\frac{4}{5}\right)^n$

No experimento da mensuração de pH no processo de diluição do HCl, algumas dúvidas pairaram sobre as grandezas e conceitos matemáticos a serem utilizados na representação. Essas dúvidas geraram questionamentos e resultaram na reunião de integrantes de todos os grupos, conforme o diálogo a seguir:

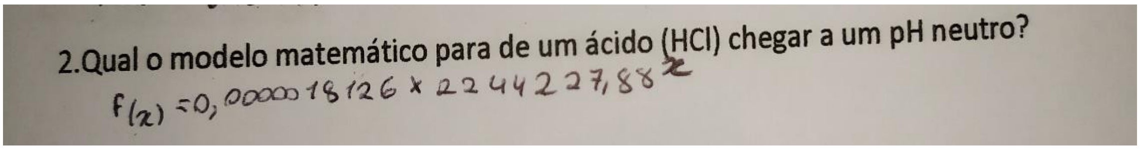
> A6 (G1): *Pois é, mas eu não sei como colocar na tabela.*
> A8 (G2): *Eu coloquei 1% de HCl e 99% de água.*
> A6 (G1): *Ah, porque daí é 10% de 10%* [A6 demonstrou em sua expressão facial entender com a fala da colega do outro grupo].
> P: *Concentra só no HCl que pegou na primeira vez, 5ml de HCl que corresponde a*

> *10%. Na segunda vez, ficou quanto? Ficou* $\frac{1}{10}$*, ou seja, 10% da primeira. Na segunda, ficou quanto do HCl?*
> A6 (G1): *Ficou* $\frac{1}{10}$ *desse* $\frac{1}{10}$*. Mas aí o que eu ponho aqui?*
> P: *Quanto é* $\frac{1}{10}$ *de* $\frac{1}{10}$*?*
> A6 (G1): *Sim!* $\frac{1}{100}$*.*
> P: *Que é o que vai dar 0,1 mol.*
> A6 (G1): *Tá então aqui é 1%.*
> P: *A unidade de medida mol, está relacionada com a matemática com esse 0,1, 0,01 e assim por diante.*
> A6 (G1): *Tá e daí aqui fica 1% de HCl e 99% de água e os ml.*
> A5 (G3): (outra integrante) *Tá, então só vai dividir por 10.*
> P: *Essa quantidade 45ml e o 5ml é fixo, certo? Mas o que tem dentro desse 5 ml? Isso é que faz a diferença.*

Nota-se aqui que esse entendimento de retirada, tendo que pensar a proporção e tendo como quantidades de referência, 5ml e 45 ml, em vez de 10 e 100, dificultou o entendimento. Além disso, a coloração transparente da água e do HCl também dificultou, pois a quantidade de HCl não se evidenciava no aspecto visível (sem coloração), somente no manipulável. Esclarecidas as equivalências matemáticas e identificadas as razões, os grupos tiveram facilidade na construção da tabela.

Também, no experimento II, ocorreu a descoberta do modelo; porém, nesse segundo experimento, os grupos utilizaram, por sugestão, o *software* Geogebra. Neste experimento, o modelo algébrico foi criado no *software*, mas não verificado pelos alunos, como pude observar nos registros dos modelos (FIGURA 19).

Figura 19 - Resposta da pergunta sobre o modelo obtido no Experimento II (APÊNDICE G)



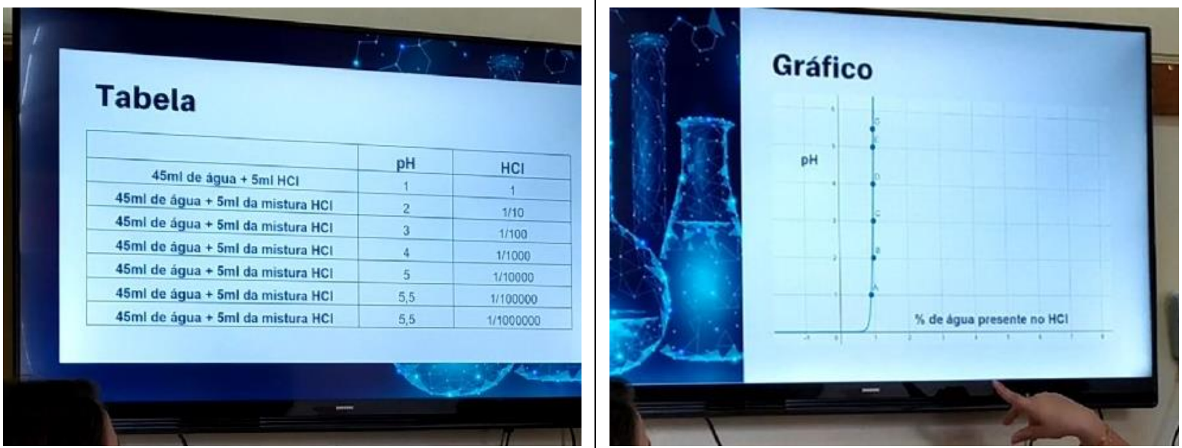
Fonte: Da autora, com base em A1 (2019).

Ao serem questionados sobre a validade deste modelo, A9 respondeu: “a gente colocou os dados lá e deu isso, aí a gente achou que tava certo”. Embora o uso do *software* seja somente um instrumento, nas falas da aluna percebi uma confiança “cega” no uso da tecnologia. Skovsmose (2013) adverte que a educação crítica deve dialogar com a matemática, para evitar a cooptação pela tecnologia e se transformar numa teoria acrítica.

No decorrer do registro na tabela, em relação aos dados obtidos neste experimento, houve algumas dúvidas referentes à quantidade de HCl na mistura. Esta quantidade causou estranhamento pelo fato de os valores serem baixos, ou melhor, com muitas casas decimais. E, com exceção do grupo 2, tive que fazer a mediação. Assim, todos conseguiram elaborar as tabelas e passaram para a construção dos gráficos.

Embora tenham usado o Geogebra, a representação gráfica gerou modelos diferentes. Somente o grupo 2 apresentou um gráfico satisfatório (FIGURA 20).

Figura 20 - Representação gráfica da neutralização do pH (grupo 2)

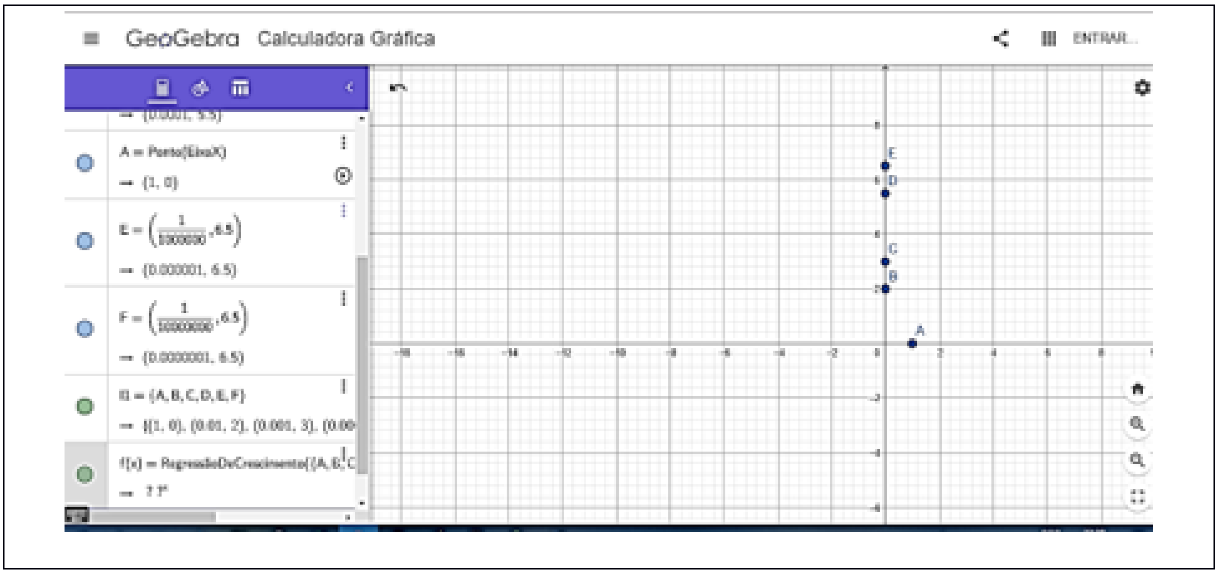


Fonte: Da autora, com base no grupo 2 (2019).

Os grupos 1 e 3, conseguiram representar na tabela a neutralização do HCl, porém, não, na representação gráfica (FIGURAS 21 e 22).

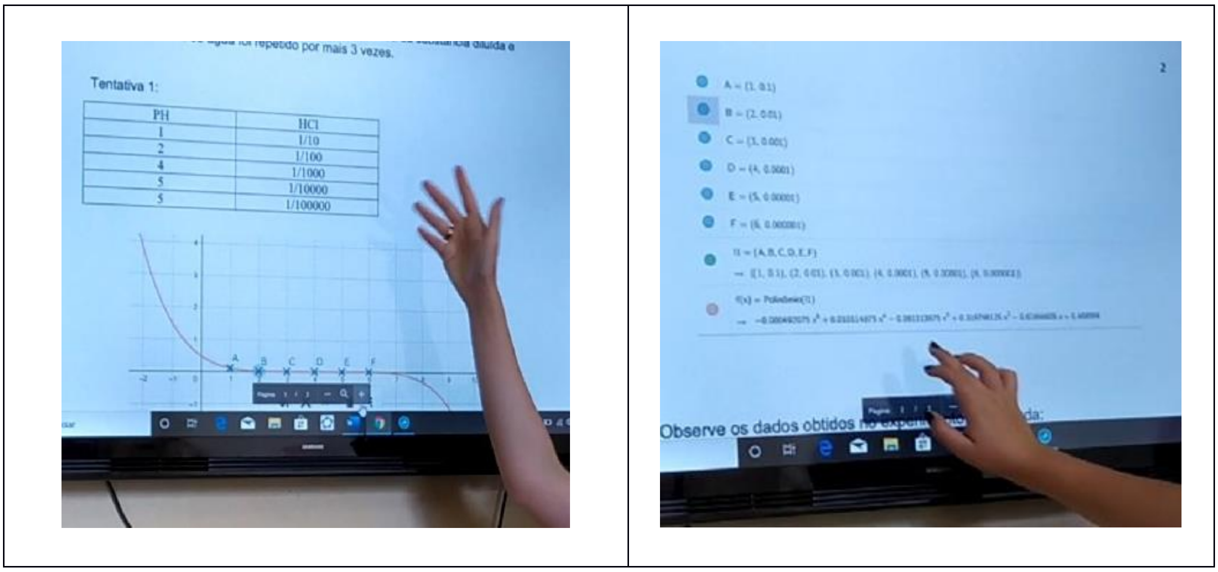
Figura 21 - Representação gráfica da neutralização do pH (grupo 1)

-	Ph	HCl
Etapa inicial	1	1/10
1° etapa	2	1/100
2° etapa	3	1/1000
3° etapa	5,5	1/10000



Fonte: Da autora, com base no grupo 1 (2019).

Figura 22 - Representação gráfica da neutralização do pH (grupo 3)



Fonte: Da autora, com base no grupo 3 (2019).

O grupo 3, que não validou a representação gráfica, ao repensá-la, a aluna A4 lembrou que digitou “regressão polinômios”, em vez de “regressão de crescimento”, para achar o modelo algébrico no Geogebra.

Nenhum grupo obteve um modelo matemático algébrico satisfatório. Ao serem questionados sobre o que gerou essa falha, alegaram que não cuidaram da alimentação dos dados no Geogebra, para a obtenção do modelo.

Apesar da confiabilidade do uso de um s*oftware,* os resultados produzidos por ele me surpreenderam. Os três grupos não obtiveram resultados satisfatórios com a utilização do Geogebra. O mau uso, ou seja, o descuido na alimentação de dados e na função digitada contribuiu para que, na apresentação, expusessem gráficos e modelos algébricos não validados.

Nesse sentido, ressaltei a importância de validar o modelo matemático e conduzi o diálogo de forma reflexiva sobre o ocorrido, pois, ao coletarem os dados e elaborarem a tabela, demonstraram compreender o processo em sua linguagem matemática. Conforme diálogo a seguir:

> *P: Mas agora, com essa conversa que a gente teve, vocês não acham que teria uma lógica?*
> *A6: Sim*
> *P: Qual?*
> *A1: seria uma coisa vezes 10 elevado a x. O x seria 1, 2, 3...*
> *A9: Na verdade teria dado certo, na primeira vez a gente pegou 10, depois a gente pegou 10 de novo, pegou 10...e assim foi*
> *P: Essa sequência se assemelha a qual conteúdo que a gente trabalha?*
> *A9: Agora não lembro o nome.*
> *A6: PG. F =$\frac{1}{10}$ vezes x.*
> *A6:Sempre vai crescer vezes 10 na parte debaixo.*
> *P: Ok, agora cada grupo vai tentar criar um modelo matemático que satisfaça os dados do experimento que fizeram.*

Após, os grupos trocaram ideias e, ao elaborarem o modelo algébrico sem o uso do *software*, relacionaram-no com o experimento I, quando então lembraram da retirada de $\frac{1}{10}$ da mistura, identificando ser a razão da Progressão Geométrica. No final, após trocas nos grupos e entre os grupos, todos chegaram ao modelo válido: $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ ou $f(x)=1.(0,1)^x$.

Embora apresentassem dificuldades na construção do modelo algébrico, elas foram amenizadas a partir das trocas entre os grupos e dos questionamentos que fiz, pois “[...] orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não é bom, é sugerir procedimentos” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 24).

Ao encerrar essa categoria, percebo que a representação dos modelos matemáticos, por tabelas, gráficos e modelos algébricos, teve êxito.

As questões inicialmente propostas foram solucionadas. Para Almeida, Tortola e Merli (2012, p. 217):

> A Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, neste caso, é o que “dá forma” à solução do problema e a Modelagem Matemática é a ‘atividade’ de busca por esta solução.

Ressalto que as discussões foram constantes e importantes para que pudessem ocorrer as representações do modelo. Além disso, essas trocas de ideias foram favorecidas pelo trabalho em grupo, categoria a ser analisada a seguir.

4.1.2 Trabalho de grupo

Na estruturação dessa categoria, inicialmente, busquei nas questões 3 e 4 do questionário final (APÊNDICE D), palavras ou situações que evidenciassem características do trabalho em grupo, o que pode ser constatado nas respostas dos alunos em relação aos aspectos positivos:

> A14: *Foi bom, **a gente** pode receber **ajuda** dos colegas.*
> A16: *O que alguns não sabiam, outros **ajudavam.***
> A15: ***Ajuda** dos colegas.*
> A1: *Todos **ajudam.***
> A11: *Teve troca de ideias e cada um **ajudando** no que podia.*
> A6: *Alguém sabia e foi se **ajudando** e aí conseguia.*
> A9: ***A gente** pode fazer análise de vários pontos de vista, **interação** e **cooperação**.*
> A4: *Eu achei bom trabalhar em **grupo** porque cada um tem ideia diferente **todo mundo** acrescenta um pouco até chegar num resultado final.*

Como podemos apreciar, a palavra "ajuda" foi citada com frequência e, analisada dentro do contexto, remete à troca entre os alunos. Riess (2010, p. 9), sob o aporte teórico de Madalena Freire (2005), comenta que:

> Na educação quando se pensa em trabalho em grupo, destaca-se que ele favorece a interação entre os alunos, incrementando a qualidade das aprendizagens e a aquisição de novos conhecimentos. Além disso, desenvolve habilidades sociais, possibilitando o diálogo entre os integrantes do grupo, facilitando a comunicação e a inclusão dos mesmos no grupo. É importante dizer que os **alunos compreendem o que significa ajuda mútua em suas aprendizagens durante o trabalho em grupo**, favorecendo a cooperação face às intenções do grupo (grifos meus).

Corroborando o citado anteriormente, a palavra ajuda conota importante significação no contexto da aprendizagem, "a atividade coletiva deixa de ser um 'bate papo entre amigos', para se tornar uma atividade séria de construção de conhecimento e de aprendizagem" (MASETTO, 2001, p. 9).

Também, no debate final, os alunos comentaram a importância de trabalhar em grupo. Expressões como "no grupo" e "a gente" foram constantes nas verbalizações:

> A5: *No **grupo**, nem todo mundo estava sabendo o conteúdo, como, por exemplo, eu não sabia fazer o modelo matemático, mas sabia como fazer o experimento e aí **a gente** ia vendo junto.*
> A4: *Cada um era bom em alguma área e **contribuía pro trabalho**, aí **juntava** e com a lógica, desenvolvíamos o modelo.*
> A1: *Cada um dava sua visão, cada um vê de um jeito. As gurias estavam fazendo de um jeito, aí **a gente** tava fazendo de outro. E aí a gente viu o que tava certo.*
> A6: *É, e como **a gente** teve dificuldade no modelo matemático, como **a gente** tava*

> *fazendo em* ***grupo,*** *cada um ia dando ideias até que a* ***gente*** *chegava* ***e*** *conseguia fazer o modelo.*
> A10: [...] *e daí* ***a gente*** *ia montando isso juntos.*
> A13: *O* ***envolvimento de todos*** *e as ideias que cada um tem que* ***ajudam*** *na construção do trabalho.*
> A11: *Eu também tenho dificuldade de botar na fórmula, mas, igual, a gente fazendo em* ***grupo a gente*** *se* ***ajuda.***

Ainda, a expressão “a gente” denota um feito em conjunto, caracterizando trabalho em grupo. Segundo Madalena Freire (2005), o grupo deixa de ser um amontoado de pessoas a partir do momento em que há uma tarefa e objetivos comuns; ou seja, quando cada integrante assume seu papel e introjeta o outro dentro de si, inicia a construção do grupo. Assim, quando a aluna A4 comenta que “cada um era bom em alguma área e contribuía pro trabalho, aí juntava e com a lógica, desenvolvíamos o modelo”, está explícita uma tarefa: a contribuição de cada integrante e o fazer em conjunto.

Contudo, é necessário salientar que o que caracteriza o trabalho em grupo, em se tratando de educação, vai além de uma ação em conjunto, é necessário saber ouvir e respeitar as diversas opiniões. Esses aspectos foram mencionados por alguns alunos na questão 4b do questionário final (APÊNDICE D):

> A16: [...] *às vezes não consegui fazer do meu jeito.*
> A4: *Divergência de ideias.*
> A8: *Nem sempre estavam de acordo.*
> A6: *Tive dificuldade de trabalhar em grupo em alguns momentos.*

Nessas respostas, percebe-se que o exercício de ouvir, de analisar e de aceitar (ou não) a ideia do outro, argumentar e chegar a um consenso é contemplado no trabalho em grupo. Mazetto (2001, p. 13) afirma que “situações exigem equipe, exigem o coletivo, exigem saber trabalhar em grupo, partilhar ideias e sugestões, respeitar ideias dos outros, colaborar, por vezes, desprender-se de suas próprias ideias em prol de uma proposta melhor”. Também, Demo (2011, p. 23) salienta que “[...] o trabalho de equipe, além de ressaltar o repto da competência formal, coloca a necessidade de exercitar a cidadania coletiva e organizada, à medida que se torna crucial argumentar na direção dos consensos possíveis”. Portanto, a proposta de trabalhar em grupo, característica da MM, possibilita o exercício dessas habilidades e valores.

Ainda, em relação aos aspectos negativos do trabalho em grupo, observei que as respostas vieram do mesmo grupo, com exceção de um aluno, o que supõe a supervalorização de uma tarefa específica, sem valorizar as demais participações. Embora essas evidências nas respostas pudessem sugerir problemas nas relações desse grupo, observei que foi um dos grupos que mais interagiu, bem como, nas filmagens, pude comprovar a participação de todos

(FIGURA 23), com opiniões consistentes, que geraram discussões importantes na construção dos modelos matemáticos.

Figura 23 - Grupo 3, trocando ideias sobre os dados do Experimento I

Fonte: Da autora, com base no grupo 3 (2019).

Além disso, o trabalho em grupo promove a ajuda mútua nas dificuldades de aprendizagem, como podemos comprovar nas expressões de alunos na discussão final da prática de MM:

> A11: *Eu também tenho dificuldade de botar na fórmula, mas, igual, a gente fazendo em grupo a gente se* ***ajuda.***
> A6: *Alguém sabia e foi se* ***ajudando*** *e aí conseguia, mas é melhor do que ganhar a fórmula pronta.*

Ademais, as expressões de A4: *"Cada um era bom em alguma área e contribuía pro trabalho, aí juntava e com a lógica, desenvolvíamos o modelo"*, A5: "*No grupo, nem todo mundo estava sabendo o conteúdo, como, por exemplo, eu não sabia fazer o modelo matemático, mas sabia como fazer o experimento e aí a gente ia vendo junto",* A6: *"É, e como a gente teve dificuldade no modelo matemático, como a gente tava fazendo em grupo, cada um ia dando ideias até que a gente chegava e conseguia fazer o modelo"* e A13 *"O envolvimento de todos e as ideias que cada um tem que ajudam na construção do trabalho",* demonstram que o trabalho em grupo foi um aspecto relevante durante a prática aqui apresentada. Dentre outros autores, esse aspecto é mencionado por Burak (1994), quando afirma que a Modelagem Matemática, enquanto prática educativa, contempla, em seus desdobramentos, o **interesse do grupo ou dos grupos**, as ações e as interações que ocorrem no desenvolvimento das atividades, o impacto no currículo, a mudança de postura do professor, **a importância do trabalho em grupo**, a importância da contextualização, a importância da prática, dentre outras (BURAK, 1994, grifos meus).

Portanto, uma prática de MM possibilita, no ambiente de aprendizagem, interações, como se pode perceber na fala do aluno A13: "O envolvimento de todos e as ideias que cada um tem que ajudar na construção do trabalho". Também, de acordo com Bassanezi (2015), os estudantes devem trabalhar em pequenos grupos com problemas específicos do tema comum ao grupo (FIGURA 24), pois os alunos, ao trabalharem em grupo, dividem suas experiências e buscam juntos soluções para o problema proposto, atingindo assim resultados positivos.

Figura 24 - Grupos trabalhando no laboratório, Experimento II, neutralização do HCl

Fonte: Da autora, com base nos grupos 1 e 2 (2019).

Portanto, o trabalho em grupo em ambiente de aprendizagem agrega conhecimento, atitude, pois, ao desenvolverem atividades em conjunto, os alunos tornam-se responsáveis pelo que está sendo criado, além de se apoiarem em busca do mesmo objetivo. Assim, o trabalho em grupo, característico da MM, promove indagações na busca por soluções, na troca de ideias e na construção de conhecimentos.

Esse fato ficou evidente durante as apresentações, pois houve a participação de todos os componentes do grupo e a atenção dos colegas que assistiam era constante e contributiva em momentos oportunos. As contribuições no trabalho do grande grupo surpreenderam-me positivamente, conforme comprova o registro no diário de bordo e a imagem da Figura 25:

> Notei que no trabalho em grupo, houve inúmeras discussões, e percebi ajuda mútua nos grupos e entre os grupos. O grupo 1 lançou a ideia para o grande grupo, alunos de outros grupos foram conjecturando possíveis soluções encaminhando para um modelo válido (DIÁRIO DE BORDO DO AUTOR, 2019).

Figura 25 - Momento da apresentação do grupo 3, quando a aluna A9 complementa outras falas e contribui para a construção do modelo algébrico

A5 (G3): *A gente pensou em usar a fórmula da Progressão Geométrica para o modelo.* P: *Quer falar?* A9 (G1): *eu tava pensando...a gente tá tirando toda vez* $\frac{1}{5}$*. Se fizesse por* $\frac{4}{5}$ *não daria uma Progressão Geométrica?* P*: ...a razão?* A9 (G1): *é... a razão seria* $\frac{4}{5}$*.*	

Fonte: Da autora, com base na apresentação do grupo 3 (2019).

Essa socialização, essa troca de ideias entre eles, suscitou a construção do modelo da função exponencial, a partir da Progressão Geométrica. No diário de bordo, outros registros relativos à colaboração e à troca de ideias entre os grupos:

> Posso dizer que, em termos de grupo, houve troca de ideia, colaboração, agregando conhecimentos. Percebi que nos grupos discutiam vários pontos de vista. Também alunos de grupos diferentes trocavam ideias para descobrir o modelo algébrico (DIÁRIO DE BORDO DO AUTOR, 2019).

Nessa convivência, é possível observar que o trabalho coletivo na MM proporciona o debate e cada um contribui, com suas habilidades e ideias, na busca por solução para o problema proposto, o que resulta em novos conhecimentos. Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 33) frisam que:

> A modelagem em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa em que a cooperação e a interação entre alunos e entre professor e aluno tem um papel importante na construção do conhecimento.

Em suma, ao encerrar essa categoria, pondero que, neste ambiente de aprendizagem, os alunos são desafiados a pensar, a traçar estratégias, a proporem soluções e, ao fazê-lo em conjunto, abrem-se para discussões, um complementa ou contesta a opinião do outro, propiciando debate e consenso, mudança e retorno de caminhos. Enfim, assim se faz o aprender a aprender, na colaboração, na interação e, nesse sentido, o trabalho em grupo contribui, de forma relevante, na construção do conhecimento.

4.2 Categoria emergente

Ao classificar os dados encontrados nos instrumentos de pesquisa e classificá-los, de forma recorrente e insistente surge a construção coletiva do modelo matemático. Esta categoria está imbricada nas categorias a priori, mas assume luz própria ao ser vista no contexto do processo de construção. A seguir, a construção coletiva do modelo matemático em suas tangências com as demais categorias aqui mencionadas.

4.2.1 A construção coletiva do modelo matemático

O trabalho em sala de aula na MM apresenta-se como uma possibilidade de ação capaz de promover a construção do conhecimento a partir das interações que ocorrem no ambiente de aprendizagem, que, na concepção de Rosa e Orey (2012, p. 284), possui "um papel importante para a construção do conhecimento matemático, pois pode facilitar a comunicação entre os professores e os alunos num ambiente propício para a conversão entre os conhecimentos matemáticos". Portanto, inicio a categoria emergente, "Construção coletiva do modelo matemático", elencando as categorias anteriores, considerando-a como uma efetivação do trabalho em grupo e da representação do modelo.

Além disso, considero a categoria, "Construção coletiva do modelo matemático", como uma das mais relevantes dessa pesquisa, pois ela emerge da interação, da troca de ideias e da cooperação entre os componentes do grupo. Com base nas minhas observações, tanto no experimento I como no experimento II, posso dizer que essas trocas de conhecimento, essa interligação de saberes ocorreu em praticamente todos os encontros. Burak (2016, p. 38) argumenta que "nesse método, a construção do conhecimento matemático é favorecida pelas inúmeras possibilidades de um mesmo conteúdo ser visto no decorrer do desenvolvimento de um tema". Para ilustrar esse parágrafo, segue a Figura 26.

Figura 26 - Grupo discutindo e trocando ideias no decorrer do Experimento II

A8: *Eu coloquei 1% de HCl e 99% de água.*

A7: *Conversando com os outros grupos, a gente viu que o que acontecia era uma potência de 10.*

Fonte: Da autora, com base no grupo 2 (2019).

Neste diálogo, percebe-se a descoberta da razão da Progressão Geométrica, no experimento II. Nesta etapa, os alunos mostraram ter dificuldades em saber a quantidade de HCl existente após cada diluição, em razão da retirada de 5 ml da mistura anterior em nova diluição com 45 ml de água. Ou seja, 10% da mistura era diluída em 90% de água. Neste momento, a interação dos grupos foi fator importante para a compreensão deste processo e a identificação razão $\frac{1}{10}$. Portanto, essa compreensão foi possível devido à troca de conhecimentos matemáticos entre os grupos. Segundo Espírito Santo (2017, p. 139), “na Modelagem Matemática sob a perspectiva educacional, o que está implícito é a construção de conhecimentos matemáticos sob a peculiaridade de aproximar a matemática escolar de temas e problemas da realidade”.

Também, no diário de bordo e nas respostas do questionário final, registros comprovam a importância da troca de ideias na construção do conhecimento.

> Quanto ao modelo algébrico, no momento em que o grupo 3 lançou a ideia de Progressão Geométrica para o grande grupo, uma aluna de outro grupo foi raciocinando e conjecturando possíveis valores para os termos da Progressão Geométrica e, na própria discussão, já se chegou à razão, que condizia com a função referente ao experimento (DIÁRIO DE BORDO DO AUTOR, 2019).
>
> A2: *As **discussões no grupo chegaram em conhecimentos** do trabalho.*
> A10: ***Houve aprendizado com os pensamentos e conclusões** diferentes de cada um.*

> A11: *O envolvimento de todos e as* ***ideias que cada um tem é que ajudam na construção*** *do trabalho.*
> A9: *No grupo houve* ***análise de vários pontos de vista****,* ***interação e cooperação****.*

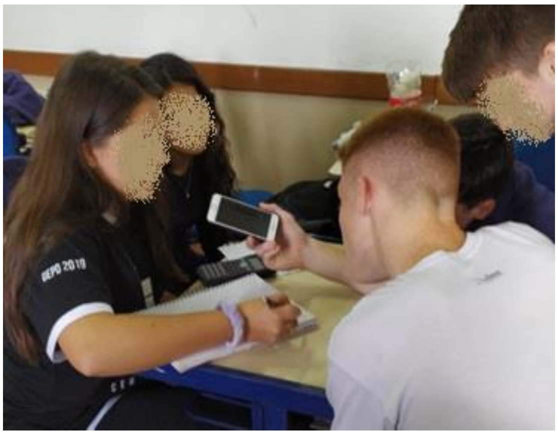
Na análise desses excertos, percebe-se a culminância dessa categoria, o envolvimento de todos, o aprender com o outro, a relação de saberes, o aluno protagonista na construção do conhecimento.

Ainda, nesses excertos citados do questionário final, destaco a resposta da aluna A9, que menciona aspectos relevantes promovidos pela MM: “[...] análise de vários pontos de vista, interação e cooperação”. Sobre a importância destes aspectos na construção do conhecimento, Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 33), afirmam que:

> A modelagem em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa em que a cooperação e a interação entre alunos e entre professor e aluno tem um papel importante na construção do conhecimento.

Ainda, reforça-se que a construção do modelo matemático na MM é alicerçada pela cooperação, pela troca de ideias e pelas interações; por isso, torna-se uma construção coletiva do modelo matemático, como mostra a Figura 28, momento em que o grupo 2 buscava definir as grandezas identificadas na prática do experimento I, relacionando-as com os conceitos prévios.

Figura 27 - Grupo 2 discutindo a relação entre as grandezas com os dados no experimento-simulação despoluição de um lago



P*: O que vocês estão fazendo?*

A7: *A porcentagem de água suja e limpa que tem no litrão.*

A8: *Aqui tinha 80% de água limpa e 20% de água suja, que seria o inicial.*

A7: *Vamos ver a tendência.*

P: *Para isso, podem fazer mais algumas etapas e depois vocês vão representar isso de alguma forma.*

A10: *A gente vai ter que fazer o tanto de vezes que a gente fez e o tanto de gráfico, né?*

A8: *Então, as duas grandezas vão ser água suja e água limpa?*

P: *Pensem, definam as grandezas e façam a representação.*

A8: *Vai dar pra fazer uma fórmula?*

Fonte: Da autora, com base no grupo 2 (2019).

Esse diálogo, além de demonstrar um momento de construção, também remete a uma reflexão sobre a postura do professor diante das indagações dos alunos. O professor deve estar comprometido com o processo e deve atentar às suas respostas, ter clareza dos seus objetivos e do seu papel na MM; deve orientar, instigar, sem dar a resposta pronta. À vista disso, pode-se dizer que há uma linha tênue entre o conduzir e o orientar, entre o reproduzir e o criar, o que pode, se não for observado, desestruturar o processo de construção do conhecimento proposto pela MM. Meyer, Caldeira e Malheiros (2019, p. 58) salientam a importância da definição dos papéis na MM, no processo de construção do conhecimento, quando afirmam que "os alunos são atores principais e o professor, orientador do processo, faz com que a ênfase esteja na relação do aluno com o conhecimento, a qual é mediada por um professor que está preocupado e engajado com a construção desse conhecimento pelo aluno".

Além disso, a categoria construção coletiva do modelo matemático, que emergiu das observações e dos desdobramentos da MM, denota a transposição da prática à teoria, do real ao abstrato. Para Bassanezi (2014, p. 17), "a Modelagem Matemática, e seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la". Isso pode ser evidenciado, também, na fala da aluna A6, na discussão final: "[...] houve a **junção de ideias** para completar o experimento e **lincar com a parte teórica** (2019, grifos meus). Essa união entre teoria e prática implica na construção do modelo matemático de forma significativa e, sendo feita em conjunto, em grupo, denota uma construção coletiva.

Em consonância, outro depoimento que sinaliza a dinâmica na construção coletiva do modelo matemático é do aluno A1, transcrito a seguir:

> A1: *É, e a gente teve dificuldade no modelo matemático, como a gente tava fazendo em grupo,* ***a gente ia dando ideias até que chegava num lugar*** *onde a gente conseguia fazer o modelo, e daí a gente ia* ***montando isso juntos****.*

Portanto, ao envolver prática e teoria, a MM leva o aluno a interagir e a entender a realidade e, por meio de trocas e discussões, conhecimentos são comungados, tendo como consequência, a construção de um modelo matemático. Esse dinamismo é mencionado por Rosa e Orey (2012, p. 274), ao afirmarem que "o ambiente de aprendizagem da modelagem é dinâmico, pois favorece a elaboração de modelos matemáticos através de práticas discursivas que se desencadeiam a partir de espaços de interações sociais entre aluno-aluno, professor-aluno e aluno-professor".

No que tange à construção coletiva do modelo matemático, penso que ela decorre do trabalho em grupo e do ambiente proporcionado pela MM. Barbosa (2001, p. 31) caracteriza a Modelagem como "ambiente de aprendizagem, no qual os alunos são convidados a indagar e/ou a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade", o que possibilita a construção, a acumulação, a manipulação e a disseminação do conhecimento matemático (BARBOSA, 2007; ROSA; OREY, 2007).

E, para finalizar essa categoria, trago alguns comentários dos alunos no debate final:

> A12: *Eu acho bom porque cada um tem ideia diferente* ***todo mundo acrescenta um pouco*** *até chegar num resultado final.*
> A4: ***Cada um é bom em alguma área e contribuía*** *pro trabalho, tipo cada um dava, não necessariamente com a matemática em si, mas com a... lógica, o desenvolvimento.*
> A1: *Cada um dava sua visão, cada um vê de um jeito. As gurias estavam fazendo de um jeito, aí a gente tava fazendo de outro. E aí* ***a gente viu*** *o que tava certo.*
> A4: *Tipo, o que uma pessoa conseguia enxergar,* ***a ideia de todo mundo foi ajudando****.*

Observa-se que as falas aqui transcritas corroboram as características da categoria "Construção coletiva do modelo matemático" e sinalizam que a MM promove um ambiente de aprendizagem propício à construção do conhecimento, além de atribuir significação ao que está sendo estudado e potencializar a motivação, a aprendizagem e a colaboração (ESPIRITO SANTO, 2017). Em acréscimo, Bassanezi (2014, p. 16) reafirma que a modelagem "[...] vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa".

4.3 "Brotamentos" reflexivos dessa prática...

No decorrer da análise dos dados, ao selecionar as ocorrências, deparei-me com formas surpreendentes de pensar, que "brotavam" nas deduções e discussões dos alunos em grupo, entre elas, a capacidade de estabelecer relações com uma visão crítica sobre os processos realizados. Utilizo a palavra "brotamento" para expressar habilidades que emergem naturalmente, no decorrer da prática da MM aliada às experimentações.

Um desses "brotamentos" foi a comparação entre os experimentos e a diferenciação entre eles quanto à manipulação de resultados. Além do espírito investigativo, os registros desses momentos durante essa intervenção revelaram pensamento crítico e capacidade de discernir, que ficou evidente, na seguinte transcrição:

> A4: *No do pH a gente manipulava a quantidade de água que entrava e que saia, o resultado era alguma coisa que ia mudando. A gente manipulava o HCl e manipulava*

> *a água, só que o resultado a gente não tinha como saber.*
> A4: *Na despoluição a gente sempre manipulava tudo.*
> A6: [...] *a gente controlava o cálculo, entende? E na diluição do pH, não, porque o pH era medido com a fita. Por isso a simulação da despoluição foi mais fácil.*
> A7: *Era sempre os 20% que a gente tirava e a gente não tinha como pegar o medidor pra ver se tava certo* [...] *é que na despoluição, às vezes a gente tirava mais ou colocava mais água, não ficava bem certinho, mas isso não interferiu no cálculo.*
> A6: *Tipo...a gente fez isso pela teoria.*

Ficou evidente nesse diálogo, a reflexão dos alunos a respeito das diferenças no processo de obtenção dos resultados. Autores como Barbosa e Santos (2007) e Borba e Skosmose (1997) trazem para discussão a ideia de que o modelo matemático estaria sujeito à interferência humana, pois a escolha das variáveis, que ocorre na etapa de construção do modelo, parte de uma compreensão teórica prévia. Os critérios usados nesta construção e a forma como são usados oportunizam discussões e fazem emergir um pensar crítico sobre o papel dos modelos matemáticos no âmbito social (BARBOSA; SANTOS, 2007).

Esses alunos perceberam que há um fenômeno num contexto, sujeito a interferências externas e imprecisões na mensuração. Esse conhecimento reflexivo possibilitado pela MM respalda-se no conhecimento matemático, o que torna a competência necessária no processo de compreensão da sociedade. Portanto, “se pretendemos uma abordagem crítica, a fim de discutir a natureza de um modelo, suas implicações sociais e desenvolver habilidades para avaliar o uso deste modelo, um modo de fazê-lo é por meio do conhecimento reflexivo” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 33).

Essa dimensão crítica da Educação Matemática também é abordada por Borba e Skovsmose (1997) como “ideologia da certeza”, ou seja, o entendimento de que o uso da matemática lembra certeza, precisão e verdade. Em busca de afirmações seguras, a Matemática foi sendo concebida como indubitavelmente exata. E, neste sentido, a MM pode contribuir para questionar essa ideologia, lançando um olhar crítico sobre as aplicações da matemática, bem como, sobre sua veracidade e confiabilidade (BARBOSA, 2004).

Um segundo “brotamento” foi a interligação de saberes, evidenciada em dois momentos. O primeiro surgiu durante a conversa com os grupos, após o experimento II, quando questionei a relação do modelo matemático criado e validado, com a fórmula do pH utilizada em Química. Percebendo que estavam pensativos por não conhecerem o conceito de logaritmo, introduzi uma breve definição, por ser necessário esse conhecimento prévio para relacioná-lo com a fórmula do pH. Ter essa noção favoreceria a interligação entre os conceitos e a consequente significação. Nesse sentido, Biembengut e Hein (2009, p. 12) mencionam que “tanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada".

Dada a devida explicação, os alunos conseguiram significar e relacionar os saberes, como pude comprovar na fala da aluna A6:

> A6: *Durante o nosso relatório, a gente viu aquilo do $\frac{1}{10}$. que foi cada vez diminuindo $\frac{1}{10}$. E agora, que explicou da fórmula do pH com logaritmo e fez sentido. Isso que a gente viu na prática, tem na fórmula,* ***daí a gente entende porque que é aquela fórmula e consegue usar melhor****.*

Esse fato remeteu ao "brotamento", interligação de saberes, pois o modelo matemático estudado em Química interligou com o modelo matemático do experimento, que, por sua vez, interligou com a significação matemática do número de indicação do pH, a ideia do que indicava esse número em termos de diluição do HCl, conforme evidenciado nos seguintes diálogos:

> A6: *Sim, $\frac{1}{100}$, que é o que vai dar 0,01 mol.*
> P: *Viu? A unidade de medida mol, está relacionada com a matemática com esse 0,1; 0,01...*
> A6: *Tá e daí aqui fica 1% de HCl e 99% de água.*
> A9: *Tá, então só vai dividir por 10.*

Ainda, num outro momento da discussão:

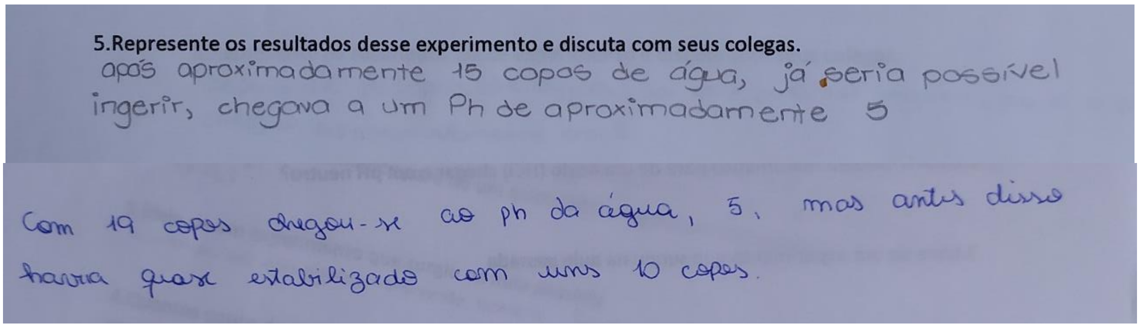
> A6: [...] *como agente baixa sempre $\frac{1}{10}$ do HCl, o número do pH baixou 1 aqui, baixou 1 ali, foi sempre baixando1.*
> A4: *Foi até 5, por conta do pH da água.*
> A6: *É! Ficou em 5, aí a gente viu que não ia sair daquele 5.*
> A4: *A nossa meta era diluir o HCl, pra 7, só que na realidade a gente já tinha estabilizado no 5.*
> A10: *Porque depois a gente descobriu que a água da torneira era pH 5.*

Essa reflexão/ação interligou conceitos matemáticos e conceitos químicos, de forma natural, fluida, não premeditada, contemplando assim um dos objetivos da modelagem. Meyer, Caldeira e Malheiros (2019, p. 54) afirmam que o que se quer com a modelagem é

> Ensinar Matemática de uma maneira que os alunos, a partir das ações para esse ensino, também criem mecanismos de reflexão e de ação. Portanto, nessa perspectiva não existe mais um currículo neutro, descontextualizado e sem significado nem para o professor e nem para o aluno.

Ao contrário, o currículo é dinâmico, flexível e constantemente reconstruído pelos professores e alunos. E, esta flexibilidade resultou em curiosidade e pesquisa, pois os alunos, ao associarem o conhecimento adquirido aos seus hábitos alimentares diários, buscaram saber qual o pH da Coca-Cola. Biembengut e Hein (2009, p. 18) afirmam que “a modelagem matemática proporciona ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio da pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico”. Neste sentido, tendo em vista o despertar desse interesse, foi realizado outro experimento (não planejado): a medição do pH da Coca-Cola e sua diluição até chegar a um pH “ideal” para o organismo humano, medindo, inicialmente, com a fita indicador de pH, o que resultou em pH 3 e, ao realizar o processo de diluição, concluíram que deveriam tomar 19 copos de água para neutralizar a acidez da Coca-Cola, isto é, para chegar ao pH adequado ao organismo humano. Dados desses experimentos estão registrados nas respostas da questão 5 do exercício (APÊNDICE G), conforme Figura 28.

Figura 28 - Experimento de neutralização da acidez da Coca-Cola



5.Represente os resultados desse experimento e discuta com seus colegas.

após aproximadamente 15 copos de água, já seria possível ingerir, chegava a um Ph de aproximadamente 5

Com 19 copos chegou-se ao ph da água, 5, mas antes disso havia quase estabilizado com uns 10 copos.

Fonte: Da autora, com base nas respostas dos alunos A8 e A11 (2019).

Além dessa curiosidade, houveram outras contribuições nesse sentido, como a importância da ingestão de alimentos com pH neutro, a verificação do pH das águas minerais, o valor do pH do sangue. Evidencia-se, assim, a característica interdisciplinar da MM, à medida que um conhecimento desencadeou outros, de outras áreas. Fazenda (2001) comenta que, embora a interdisciplinaridade não tenha um sentido único e estável, seu princípio é a articulação entre as disciplinas e as diferentes áreas de conhecimento, entrelaçando os conteúdos que fazem parte do currículo escolar.

Finalizando essa seção, pondero que a articulação entre as diferentes disciplinas é favorecida com a prática da MM aliada à experimentação, que criam um ambiente propício ao desenvolvimento de “estratégias que lhes permitem resolver as situações-problema que vão emergindo no decorrer da atividade” (ARAKI; SILVA, 2018, p. 4).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao chegar na parte final deste trabalho, sou levada a retornar ao problema inicial e aos objetivos dessa pesquisa: Como a modelagem matemática, desenvolvida por meio de experimentações, pode contribuir no ensino da função exponencial, numa turma de 1º ano do Ensino Médio? Também, busco refletir sobre o desenvolvimento da prática realizada, analisando especificamente o trabalho em grupo e a representação de modelos matemáticos, bem como, sobre a construção coletiva do modelo matemático. Assim dou início à tessitura das principais reflexões que nortearam este trabalho e de outras que emergiram no seu desdobramento.

Inicio, descrevendo em linhas gerais, o ambiente dessa prática e as compreensões construídas no decorrer da pesquisa. Na MM, os alunos são inseridos em um contexto de aprendizagem em que a discussão da situação-problema, a participação ativa e os diferentes registros são essenciais. Tendo como base essa metodologia, os alunos foram desafiados a buscar solução para o problema apresentado, levados a relacionar os experimentos e os conceitos matemáticos e, com isso, construir a representação de um modelo definido como função exponencial. Nesse processo de construção, que ocorreu por meio de constantes trocas e cooperação nos grupos e entre os grupos, os alunos vivenciaram, a partir dos experimentos, o registro de dados e a constatação do movimento de uma função que cresce ou decresce rapidamente, descrito por um padrão multiplicativo constante em cada etapa, que define a caracterização de um expoente que se modifica. A identificação das grandezas e o reconhecimento do fator multiplicativo correspondente a cada experimento, junto com a interpretação da representação gráfica da função e a constatação manifesta por vários alunos de que “ela tende a zerar, mas nunca chega” definiram uma tendência, visivelmente expressa na etapa de matematização. Esses subsídios aqui descritos demonstram a compreensão dos alunos quanto às principais características da função exponencial. Em vista disso, posso inferir que a MM aliada à experimentação contribuiu, de forma relevante, para o ensino da função exponencial.

Além disso, analisando a pesquisa, conforme já mencionado no parágrafo anterior, os momentos de troca, de colaboração, de discussões e de construções coletivas, a cooperação nos grupos e entre os grupos, as tarefas realizadas em conjunto foram constantes no decorrer da prática, o que leva a concluir que o trabalho em grupo propiciado pela Modelagem Matemática foi um dos objetivos específicos plenamente contemplado nesta pesquisa. Ademais, os registros das vivências, a atuação dos alunos, as discussões, os debates, a criatividade e a troca de ideias foram fatores essenciais na condução do pensamento lógico, em direção a um modelo testado e validado, que resultou em representações por tabela, gráfico e forma algébrica. Essas evidências imbricam na consolidação de outro objetivo: a representação de modelos matemáticos. Com isso, as categorias *a priori* previstas no estudo do referencial se consolidaram e, nelas alicerçada, emergiu a construção coletiva do modelo matemático.

Além do conhecimento construído por meio da MM aliada à experimentação, dos objetivos alcançados, já mencionados no parágrafo anterior, e das categorias *a priori* e emergente, sigo fazendo algumas considerações observadas e evidenciadas nos registros. Trata-se de "brotamentos" que emergiram naturalmente, à medida que o processo se tornava mais frequente e mais intenso. Um desses "brotamentos" refere-se ao olhar crítico do aluno modelador, que, ao realizar os experimentos, percebeu diferenças entre as formas de captação dos dados, evidenciadas, principalmente, na fala da aluna A6: "*No experimento-simulação da despoluição de um lago, a gente controlava o cálculo, entende? E na diluição do pH, não. Porque o pH era medido com a fita"*. Essa fala remete ao questionamento e à desmitificação de que a Matemática é sempre exata, bem como, a constatação de que a "ideologia da certeza", tão impregnada na Matemática, tem seu fundamento no cálculo e não no contexto real. Essa turma, que já havia realizado uma atividade de modelagem, demonstrou uma capacidade de percepção mais aguçada, própria de aluno crítico, atento, autônomo, enfim, de aluno com habilidades de pesquisador.

Outro "brotamento" foi a interligação de saberes, evidenciada na constatação de que o $\frac{1}{10}$ retirado da mistura no processo de diluição correspondia ao valor numérico do pH, bem como sua relação com a fórmula utilizada nos cálculos de Química. Ainda, em decorrência do experimento referente à diluição do HCl com mensuração do pH, outra situação-problema emergiu nos momentos das discussões, relacionada ao pH dos alimentos digeridos, especialmente sobre o pH da Coca-Cola. Os alunos questionaram, sugeriram e realizaram o processo de diluição da Coca-Cola em água até atingir um pH favorável ao organismo. Nesse episódio, observa-se a curiosidade surgida naturalmente, a relação com o cotidiano, o surgimento de um problema e uma possível solução promovida pelos próprios alunos, sendo fundamental a sensibilidade do professor e flexibilidade quanto ao planejamento. Biembengut e Hein (2009, p. 18) afirmam que “a modelagem matemática proporciona ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio da pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico”.

Dessa forma, pode-se constatar que o ambiente de MM aliada a experimentações, tende a favorecer a manifestação de novas ideias que emergem dos alunos, o interesse pela ciência, o senso crítico, a autonomia e a busca de solução de curiosidades surgidas, de forma natural, nos desdobramentos da prática. Essa significação também ficou evidente na identificação de variáveis, na criação do modelo matemático, na constatação da tendência característica da função exponencial, da relação dos conceitos matemáticos com uma situação real e na vivência da junção da prática com a teoria. Ficou evidente no brilho do olhar da aluna, ao perceber que aquela fórmula do pH usada para cálculos, sem saber sua origem, agora, tem sua razão e significação. Assim, a MM, além de proporcionar esses momentos gratificantes, é uma metodologia importante ao provocar o entrelaçamento das disciplinas. Sendo esse mais um “brotamento” que, de forma espontânea, emergiu dessa prática.

Essas descobertas nos fazem atentar e perceber a presença da matemática em várias áreas, atiçar nossa curiosidade, tornar-nos desbravadores de conhecimentos, faz-nos professores pesquisadores. Como afirma Biembengut (2009), o vínculo entre conhecimentos aparentemente isolados alimenta o prazer intelectual e instiga a curiosidade dos alunos. Na verdade, não só dos alunos, mas também a curiosidade do professor, pois essas percepções promovidas pela MM me instigam a ousar, a trabalhar com MM não só no ensino de funções, mas também de outros conceitos ainda não explorados.

Nesse “dar-se conta”, nessa construção de conhecimentos previstos e não previstos, proporcionada por um ambiente de MM, a visão crítica se processa e outras reflexões, como a importância da ética ao se fazer um pesquisador, a responsabilidade na obtenção de modelos, o questionamento dos hábitos consumistas e consequências para a saúde surgem de forma espontânea. Esses saberes, habilidades e competências desenvolvidos pela MM afetam o aspecto formativo e a capacidade de que o aluno, em qualquer circunstância da vida, possa buscar, colaborando com os outros, a solução de problemas da vida real.

Bassanezi (2015), um dos autores que embasou esse trabalho, considera que a utilização da modelagem na Educação Matemática valoriza o "saber fazer" do estudante e desenvolve sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos em seus diferentes contextos de aplicações, a partir da realidade de seu ambiente. Assim, a modelagem contempla um dos principais objetivos do ensino, que é o aprender a aprender, ou seja, fazer com que o estudante aprenda a buscar soluções para as mais diferentes situações.

Portanto, na prática da MM, é possível perceber as conexões e relações que os alunos estabelecem, seus saberes e suas compreensões, de forma livre, não limitada a algumas perguntas. A MM aliada à experimentação propicia ao aluno a manipulação de objetos e a percepção das diferenças matemáticas (manipuláveis ou não) na obtenção dos modelos matemáticos de acordo com os procedimentos e instrumentos experimentais. E, é a partir de práticas como essa que o pensamento crítico se desenvolve e percebemos, então, potencialidades antes encobertas, um novo jeito de fazer, de saber fazer.

Para finalizar, posso afirmar que a experimentação e a MM entrelaçam-se e, juntas, potencializam o ensino da função exponencial, da construção coletiva do modelo matemático, despertam alunos pesquisadores, comprometidos com a importância da validação de modelos e resultados e, por consequência, com a ética profissional. Ao realizar práticas como essa, o espírito crítico vai sendo aguçado e um professor pesquisador vai se formando. Novos desafios vão se apresentando e a motivação de experienciar, de pesquisar, de utilizar a MM em novas situações ficam latentes na mente do professor que viu na MM uma metodologia de ensinar e de aprender fazendo. Essas considerações projetam novas possibilidades de exploração de situações cotidianas por meio da MM em pesquisas futuras, pois elucidam um caminho de formação de alunos e professores pesquisadores.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes M. W. de; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? **Revista Acta Scientiae**, Canoas, RS: ULBRA, v. 14, n. 2, p. 200-214, mai./ago. 2012. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/230/226. Acesso em: 20 fev. 2020.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1. ed. 1. reimpr. São Paulo: Contexto, 2013.

ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ANDRADE, Mario Celso Ramiro de. **O gabinê fluidificado e a fotografia dos espíritos no Brasil: a representação do invisível no território da arte em diálogo com a figuração de fantasmas, aparições luminosas e fenômenos paranormais.** 2008. 162f. Tese (Doutorado) – Escola de Comunicações e Artes, Universidade de São Paulo (USP): São Paulo, 2008.

ARAKI, Paulo Henrique Hideki; SILVA, Karina Alessandra Pessoa. Mobilização de recursos semióticos por alunos no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática. In: 11ª CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Belo Horizonte, MG. **Anais...** Belo Horizonte: UFMG, 2019. p. 1-15.

ARAKI, Paulo Henrique Hideki; SILVA, Karina Alessandra Pessoa. **Modelagem e a Sala de Aula.** In: VIII EPMEM, Cascavel, PR, 2018. Disponível em: http://sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPMEM/VIII_EPMEM/paper/viewFile/733/377. Acesso em: 23 mar. 2020.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. Uma abordagem Sócio-crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria** - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, SC, v. 2, n. 2, p. 55-68, 2009. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37948/28976. Acesso em: 18 fev. 2020.

ARAÚJO, Mauro Sérgio Teixeira de Araújo; ABIB, Maria Lúcia Vital dos Santos. Atividades

Experimentais no Ensino de Física: Diferentes Enfoques, Diferentes Finalidades. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [S.l.], v. 25, n. 2, p. 176-194, 2003.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática:** concepções e experiências de futuros professores. 2001. 268f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática e a perspectiva socio-crítica**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. [S.l.], 2003.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 8, 2004, Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM.

BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizete; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Orgs.) **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007.

BARBOSA, Jonei Cerqueira; SANTOS, Marluce A. Modelagem matemática, perspectivas e discussões. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, Belo Horizonte, 2007. **Anais...** Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. 1 CD-ROM.

BASSANESI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática:** uma nova estratégia. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática:** teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2009.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria** - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BORBA, Marcelo Carvalho; SKOVSMOSE, Ole. A ideologia da certeza em educação matemática. In: SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001. cap. 5. p. 127-148.

BORBA, Marcelo de Carvalho; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos; SCUCUGLIA, Ricardo. Metodologia da pesquisa qualitativa em educação a distância online. In: SILVA, M. (Org.). **Formação de professores para docência online**. São Paulo: Edições Loyola, 2012. p. 235 – 261.

BORBA, Marcelo de Carvalho; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos; ZULATTO, Rúbia Barcelos Amaral. **Educação a Distância Online**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam G. **Informática e educação**

matemática. Belo Horizonte, Autêntica, 2001.

BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mônica Ester. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York, v. 39, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 26 fev. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ensino Médio. Matemática. Brasília: Secretaria de Educação Básica, v. 2, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil**. Brasília, 2019. Disponível em: http//portal.mec.gov.br. Acesso em: 18 jan. 2020.

BURAK, Dionísio. Critérios norteadores para a adoção da Modelagem Matemática no ensino fundamental e secundário. **Revista Zetetiké**, Campinas, v. 1, ano 2, n. 2, p. 47-60, 1994.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2004. Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004.

BURAK, Dionísio. Uma perspectiva da Modelagem Matemática para o ensino e a aprendizagem da Matemática. In: BRANDT, Celia Finck; BURAK, Dionísioe; KlÜBER, Tiago Emanuel (Orgs.). **Modelagem Matemática:** perspectivas, experiências, reflexões e teorização. 2. ed. rev. ampl. Ponta Grossa: UEPG, 2016.

CARRASCOSA, Jaime; PEREZ, D. Gil; VILCHES, Amparo; VALDEZ, Pablo. Papel de la actividad experimental en la educación científica. **Caderno Brasileiro do Ensino de Física**, [S.l.], v. 23, n. 2, p. 157-181, 2006. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/6274/12764. Acesso em: 29 mar. 2020.

D’AMBROSIO, Ubiratan. A matemática nas escolas. **Educação Matemática em Revista**, [S.l.], ano 9, n. 11A, edição especial, abr. 2002.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Múltiplo: Matemática:** ensino médio. São Paulo: Ática, v. 1, 2014.

DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa**. 9. ed. Campinas: Autores Associados, 2011.

DUVAL, Raymond. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 5, p. 35-65, 1993.

ESPÍRITO SANTO, Adilson Oliveira do; FURTADO, Alfredo Braga; Souza Ednilson S. Ramalho. **Modelagem na educação matemática e científica:** práticas e análises. Belém, 2017.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes (Org.). **Práticas Interdisciplinares na Escola**. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. rev. São Paulo: Autores Associados, 2007.

FRANCHI, Regina. H. de Oliveira Lino. Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e a informática como possibilidades para a Educação Matemática. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizete; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, v. 3, 2007. p. 177-194. (Biblioteca do Educador Matemático).

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**. São Paulo: Paz e Terra, 2006.

GATTI, B.; ANDRÉ, M. A relevância dos métodos de pesquisa qualitativa em Educação no Brasil. In: WELLER, Wivian; PFAFF, Nicolle (Orgs.). **Metodologia da pesquisa qualitativa em educação:** teoria e prática. Petrópolis: Vozes, 2010.

GOMES, Romeu. A análise de dados em pesquisa qualitativa. In: MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org.). **Pesquisa Social**. 23. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2004.

HELENA, Aline Fernanda Faquini. **Modelagem matemática no ensino médio:** uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas. 2016. 75f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - UNESP, Rio Claro, 2016. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/143851. Acesso em: 10 jul. 2019.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática Ciência e Aplicações**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, v. 1, 2014.
LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LIMA, Eder J. **O ensino de funcões através de modelagem matemática**. 2017. 88f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - UFMT – PROFMAT, Barra do Garças, MT, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150320081. Acesso em: 10 jul. 2019.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, v. 1, 2016.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2010.

MAIA, Lina Flávia M. Q. **Modelação matemática na sala de aula:** o conceito de função exponencial numa sequência de atividades para o 1º ano do Ensino Médio. 2017. 68f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - UFSCAR – PROFMAT, Sorocaba, 2017. Disponível em:

https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/10156/Disserta%c3%a7%c3%a3o%20Lina%20Fl%c3%a1via%20M%20Q%20Maia%20-%20vers%c3%a3o%20final.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 08 jun. 2019.

MALHEIRO, João Manoel S.; FERNANDES, Preciosa. O recurso ao trabalho experimental e investigativo: Percepções de professores de ciências. **Investigações em Ensino de Ciências**, [S.l.], v. 20, n. 1, p. 79-96, 2015. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/60/37. Acesso em: 23 jun. 2019.

MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **A Produção Matemática dos Alunos em Ambiente de Modelagem**. 2004. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - UNESP, Rio Claro, 2004.

MASETTO, Marcos T. **Atividades pedagógicas no cotidiano da sala de aula universitária:** reflexões e sugestões práticas. Temas e textos em metodologia do ensino superior. Campinas: Papirus, 2001. p. 83-102.

MEYER, João F. da C. de A,; CALDEIRA, Ademir D.; MALHEIROS, Ana Paula dos S. **Modelagem em Educação Matemática**. 4.ed.; Belo Horizonte: autêntica editora, 2019.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). **Pesquisa Social.Teoria, método e criatividade.** 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise Textual Discursiva**. 2. ed. rev. Ijuí: Unijuí, 2011.

MOTA, Romulo Soares; VAZ, Rafael Filipe Nóvoa. Desvalorização de carros populares: um estudo de Modelagem Matemática. In: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Cuiabá, MT. **Anais...** Cuiabá: UFRJ, 2019. p. 1-8.

NARCIZO, Ricardo Nogueira Viana. **Investigando a modelagem matemática no ensino de funções afins e exponenciais**. 2016. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2016. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/6402?mode=full. Acesso em: 08 jun. 2019.

NOVA tecnologia despolui águas com bactérias. In: **Globo News**. TV Globo, 14 nov. 2018. Vídeo (5:06s) Disponível em: http://g1.globo.com/globo-news/jornal-globo-news/videos/v/nova-tecnologia-despolui-aguas-com-bacterias/7161735/. Acesso em: 24 jul. 2019.

OLIVEIRA, Andréia Maria Pereira; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e situações de tensão e as tensões na prática de Modelagem. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 265-296, abr. 2011.

PAIVA, Manoel. **Matemática:** conceitos, linguagem e aplicações. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2012.

PORTAL TRATAMENTO DE ÀGUA. **Qualidade da água**. [S.l.], 2019. Disponível em: https://www.tratamentodeagua.com.br/artigo/qualidade-da-agua/. Acesso em: 24 jul. 2019.

REHFELDT, Márcia Jussara Hepp et al. O estudo de situações-problema para o ensino de ciências exatas e a modelagem matemática. **Anais da VIII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática,** 2013.

REZENDE, Denis Alcides. **Planejamento de Sistemas de Informação e Informática**. São Paulo: Atlas, 2003.

RIESS, Maria Luiza Ramos. **Trabalho em Grupo:** Instrumento Mediador de Socialização e Aprendizagem. 2010. 33f. Trabalho de Conclusão (Licenciado em Pedagogia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/35714/000816117.pdf. Acesso em: 14 fev. 2020.

ROSA, Milton; OREY, Daniel C. A Modelagem como um Ambiente de Aprendizagem para a Conversão do Conhecimento Matemático. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 26, n. 42A, p. 261-290, abr. 2012.

ROSITO, Berenice Alvares. O ensino de ciências e a experimentação. In: MORAES, Roque (Org.). **Construtivismo e Ensino de Ciências:** reflexões epistemológicas e metodológicas. 2. ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2003. p. 195-208.

SANTO, Adilson Oliveira do Espírito; SILVA, Francisco Hermes Santos da. **A contextualização:** uma questão de contexto. In: VII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Recife: Ed. Da Universidade Federal de Alagoas, 2004.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: Dubinsky & Harel (Ed.). **The concept of function** - aspects of epistemology and pedagogy, M. A. A. Notes, [S.l.], v. 25, p. 25 - 58, 1992.

SILVA, Francinéia Alves de Souza. **Aprendendo funções com experimentos de física e atividades interdisciplinares**. 2015. 63f. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Catalão, GO, 2015.

SUART, Rita C.; MARCONDES, Maria E. R.; CARMO, Miriam O. Atividades experimentais investigativas: utilizando a energia envolvida nas reações químicas para o desenvolvimento de habilidades cognitivas. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 7, 2009, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: ABRAPEC, 2009.

VOLUNTÁRIOS coletam mais de uma tonelada de lixo nas margens do rio. **O Fato**, Taquari, p. 11, 29 mar. 2019.

YIN, Robert. K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

YIN, Robert K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZORZAN, Adriana S. L. Ensino-aprendizagem: algumas tendências na educação matemática R. **Ciências Humanas**, Frederico Westphalen, v. 8, n. 10, p. 77 – 93, jun. 2007. Disponível em: http://revistas.fw.uri.br/index.php/revistadech/article/viewFile/303/563. Acesso em: 10 fev. 2020.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Termo de concordância da direção da instituição de ensino

TERMO DE CONCORDÂNCIA DA DIREÇÃO DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO

Ao senhor (a) Diretor do Centro de Ensino Médio Pastor Dohms – unidade Taquari

Eu, Silvana Emer, aluna regularmente matriculada no Curso de Pós-graduação Stricto Sensu, Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari – Univates, Lajeado, RS, venho solicitar autorização para coletar dados neste estabelecimento de ensino, para a realização de minha pesquisa de Mestrado, intitulada: “MODELAGEM MATEMÁTICA ALIADA À EXPERIMENTAÇÃO NO ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL”. O objetivo geral desta pesquisa é identificar em que aspectos a Modelagem Matemática aliada à experimentação pode contribuir no ensino da função exponencial em uma turma de 1º ano do Ensino Médio. Afirmo, ainda, que as coletas de dados serão realizadas por meio de observações, vídeos, questionários, fotografias, relatos aos alunos da referida turma.

Desde já, agradeço a disponibilização, visto que a pesquisa contribuirá para o desenvolvimento do ensino da Matemática.

Pelo presente termo de concordância, o senhor diretor Irineu Barcelos autoriza a realização da pesquisa prevista no Centro de Ensino Médio Pastor Dohms – unidade Taquari, bem como, o uso do nome da instituição.

Data_____/____/_____

____

Direção da Escola

____

Silvana Emer

Mestranda em Ensino de Ciências Exatas – Univates

APÊNDICE B - Termo de Consentimento Livre Esclarecido

Prezado participante,

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa de Mestrado, intitulada: “MODELAGEM MATEMÁTICA ALIADA À EXPERIMENTAÇÃO NO ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL”, que faz parte da dissertação de mestrado desenvolvida por Silvana Emer, no programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu*, Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, tendo como Orientadora a Professora Márcia Jussara Hepp Rehfeldt, com o intuito de alcançar o objetivo proposto para este projeto: “Identificar em que aspectos a Modelagem Matemática aliada à experimentação pode contribuir no ensino da função exponencial em uma turma de 1º ano do Ensino Médio”. Deste modo, no caso de concordância em participar desta pesquisa ou deixar participar (alunos menores), ficará ciente de que a partir da presente data: - Os direitos da entrevista gravada ou respondida (questionários), realizada pela pesquisadora, serão utilizados integral ou parcialmente, sem restrições; - Estará assegurado o anonimato nos resultados dos dados obtidos, sendo que todos os registros ficarão de posse da pesquisadora por cinco anos e após esse período serão extintos. Será garantido também: - Receber a resposta e/ou esclarecimentos de qualquer pergunta e dúvida a respeito da pesquisa; - Poderá retirar seu consentimento a qualquer momento, deixando de participar do estudo, sem que isso traga qualquer tipo de prejuízo. “Em caso de dúvida quanto à condução ética do estudo, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Univates (Coep/Univates). O Comitê de Ética é a instância que tem por objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade, bem como, contribuir para o desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos. Dessa forma, o comitê tem o papel de avaliar e monitorar o andamento do projeto de modo que a pesquisa respeite os princípios éticos de proteção aos direitos humanos, da dignidade, da autonomia, da não maleficência, da confidencialidade e da privacidade. Contatos: (51) 3714.7000, ramal 5339 e coep@univates.br.”

Assim, mediante termo de Consentimento Livre e Esclarecido, declaro que autorizo a participação do meu filho..., nesta pesquisa, por estar esclarecido e não me oferecer nenhum risco de qualquer natureza. Declaro, ainda, que as informações fornecidas nesta pesquisa podem ser usadas e divulgadas neste curso Pós-graduação *stricto sensu*, Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari – Univates, bem como, nos meios científicos, publicações eletrônicas e apresentações profissionais.

Taquari, ...de .... de 2019.

____

(Assinatura do responsável)

Nome do participante:

____

Pesquisadora: Silvana Emer - silvana.emer@universo.univates.br

APÊNDICE C - Pauta norteadora para debate

1) Autonomia.

2) Colaboração entre os componentes do grupo e entre os grupos.

3) Aspectos positivos e negativos sobre o processo da Modelagem Matemática aliada à experimentação para chegar a uma representação do modelo.

APÊNDICE D - Questionário final

COLÉGIO PASTOR DOHMS – UNIDADE TAQUARI
Matemática Ensino Médio Prof.: Silvana Emer

Nome:... Data:........./........../................

QUESTIONÁRIO

1) As experimentações e a Modelagem Matemática auxiliaram na compreensão do conceito de função exponencial? Por quê?

2) O que você achou da utilização do *software* Geogebra para a construção de gráficos e a descoberta do Modelo Matemático? Justifique.

3) Quais as dificuldades que encontrou no desenvolvimento das atividades propostas. Explique detalhadamente.

4) Quanto ao trabalho em grupo:

   Aspectos positivos:

   Aspectos negativos:

5) Comparando a estratégia de ensino Modelagem Matemática com o método tradicional, cite aspectos positivos e negativos.

APÊNDICE E – Reportagem Jornal “O FATO”

Voluntários coletam mais de uma tonelada de lixo nas margens do rio

Além de reduzir poluição, ação visa a conscientizar comunidade para descarte correto dos resíduos

Voluntários fazem parte da Patrulha Ecológica, barqueiros, Certaja, Motasa, Duratex, Escoteiros e grupos de igrejas

Um grupo com cerca de 50 voluntários recolheu mais de uma tonelada de lixo depositado às margens do Rio Taquari. A ação ocorreu na manhã do último sábado, entre as localidades de Caramujo e Fazenda Lengler.

A atividade é realizada há mais de 20 anos no município, a partir de uma iniciativa da Patrulha Voluntária Ecológica. O presidente do grupo, João de Souza Rolim, disse que a maior concentração de resíduos estava nas ilhas e locais de remanso do rio. “Quando dá cheia, o lixo se acumula nesses locais. A maior parte desse lixo não é nosso, vem lá de cima com a enchente”, relatou. Entre os materiais coletados, além de muito plástico e garrafas PET, o que chamou atenção foram os móveis. Foram encontrados dois sofás, dois fogões, geladeira, monitor de comuptador e televisão. “Dá uma casa montada”, brinca João Rolim.

Além da Patrulha Ecológica, realizaram a ação funcionários da Certaja, Duratex e Motasa, integrantes do grupo escoteiro Costa e Silva, além de participantes de igrejas do município. “O nosso objetivo específico é a conscientização do pessoal para não jogar lixo, não só no rio, mas também nos córregos, nas valetas de estradas, porque isto vem pelo pluvial e cai no rio”, disse um dos integrantes da atividade, Leandro da Cruz Vargas.

O sócio-gerente da Motasa, Andreas Elter, também participou da coleta. Para ele, é importante o engajamento nestas ações, principalmente para os jovens, que poderão multiplicar essas atitudes de conscientização em relação ao meio-ambiente. “O rio faz parte do nosso município, se a gente não cuidar dele, será finito. Acho que temos que começar a cuidar mais e dedicar-nos a ações como esta. É importante esta atitude de respeito com o nosso rio”, considerou.

Os voluntários contam com o auxílio de empresários locais para realizar a atividade. Eles receberam doações de combustível e alimentação para auxiliar no trabalho.

Conferência do Idoso ocorre hoje

A 3ª Conferência Municipal dos Direitos da Pessoa Idosa ocorre hoje, na sede da Associação Beneficente Pella Bethânia. O tema “Os desafios de envelhecer no século XXI e o papel das políticas públicas”, o evento é organizado pelo Conselho Municipal do Idoso, com início previsto para as 8h30min. Às 9h15min, haverá apresentação de coral do projeto Comunidade Ativa; às 9h30min, panorama “Idosos – políticas públicas e serviços socioassistenciais do município de Taquari”; às 9h30min, palestra com Simone Tatiane Pfuller Lisboa, defensora pública de Taquari, às 11h, debates e às 12h, intervalo para o almoço. À tarde, às 13h30min, apresentação do grupo de dança da Associação Beneficente Pella Bethânia, seguida de ginástica laboral; às 14h, formação dos grupos para discussão dos eixos; 15h30min, plenária final para a aprovação das deliberações e a eleição de delegados para a Conferência Estadual dos Direitos da Pessoa Idosa.

NOTA DE AGRADECIMENTO

Em nome da Patrulha Ecológica Voluntária, gostaria, através deste jornal, de agradecer aos barqueiros Ezequiel, com seu barco representando a colônia de Pescadores de Taquari; ao Nestor, com seu barco e grupo representando a igreja do pastor Paulão; ao Meio Kilo, com seu barco e grupo; ao Andreas, com seu barco, representando a Motasa; ao Rolim e seu grupo, com seu barco representando a Patrulha Ecológica, e ao Fúlvio, que participou com seu caiaque.

Também agradeço aos patrocinadores, Posto Charrua e Posto 24 Horas, que doaram gasolina, e a Chico Florestal, Certaja e Motasa. Muito obrigado a todos que compareceram e ajudaram. É uma pena que muitos pescam, usam o rio como lazer, mas não comparecem para ajudar; enfim, a eles também o meu agradecimento, foram recolhidos mais de 1000 kg de dejetos diversos incompatíveis com a água. Meus parabéns ao Leandro da Certaja pela organização.

Preserve a água que vai beber!

João de Souza Rolim
Presidente da Patrulha Ecológica Voluntária

APÊNDICE F - Exercícios experimento I

COLÉGIO PASTOR DOHMS – UNIDADE TAQUARI
ENSINO MÉDIO - MATEMÁTICA

Nome: ____ Turma: ___________________
Professor: ____________________________________ Data: ______/______/_________

Experimento-simulação de despoluição de um lago

Representação do modelo obtido:

1. Qual o modelo obtido a partir do experimento simulado da despoluição de um lago?

Com o modelo obtido e estabelecendo relação com a realidade, responda:

1a. Na reportagem assistida no vídeo (http://g1.globo.com/globo-news/jornal-globo-news/videos/v/nova-tecnologia-despolui-aguas-com-bacterias/7161735/), a utilização de placas bioestimuladoras de bactérias benéficas que se nutrem da sujeira faz um processo de despoluição de aproximadamente 20% do lago, a cada 24 horas. Partindo dessa hipótese, quantos dias seriam necessários para “limpar” mais de 95% do lago?

1b. Com a aplicação dessa técnica de despoluição, após 8 dias, qual a porcentagem de água despoluída num lago?

2. Buscando identificar as etapas da modelagem no experimento, descreva as 3 etapas:

APÊNDICE G – Exercício experimento II

COLÉGIO PASTOR DOHMS – UNIDADE TAQUARI
Matemática Ensino Médio Prof.: Silvana Emer

Nome:.. Data:........./........../................

1. O que caracteriza uma substância ácida, neutra e básica? Qual a importância do pH na nossa vida? Cite algumas aplicações.

2. Qual o modelo matemático para de um ácido (HCl) chegar a um pH neutro?

3. Sobre a ideia de experimento que surgiu na aula passada: Qual o pH da Coca-Cola?

4. Quantos copos de água precisamos para que o pH do refrigerante chegue a um pH saudável para o ser humano?

5. Represente os resultados desse experimento e discuta-o com seus colegas.

6. Observe as expressões matemáticas do pH:

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$ ou $= H^+$

Qual a relação dessas expressões com o modelo encontrado?

APÊNDICE H – Modelo de relatório dos experimentos

COLÉGIO PASTOR DOHMS – UNIDADE TAQUARI
Matemática Ensino Médio Prof.: Silvana Emer

Componentes do grupo:
....
....

Data:........./........../................

Título do experimento:...

Relatório do experimento

1.Material utilizado:

2.Descrição do experimento:

3.Relato do experimento com tabelas e gráficos (utilize *prints* e fotos):

Tentativa 1:

Tentativa 2:

Tentativa 3:

4.Observe os dados obtidos no experimento e responda:

a) Quais as grandezas identificadas?

b) Qual a variável dependente e a independente?

c) Há proporcionalidade entre as medidas?

5. Qual o modelo matemático obtido?

6. Quais os caminhos utilizados para representar o modelo matemático?

7. Outras observações:

UNIVATES

R. Avelino Talini, 171 | Bairro Universitário | Lajeado | RS | Brasil
CEP 95914.014 | Cx. Postal 155 | Fone: (51) 3714.7000
www.univates.br | 0800 7 07 08 09