



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*  
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

CARTOGRAFIA E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA:  
POSSIBILIDADES PARA UMA INTERVENÇÃO  
PEDAGÓGICA COM ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO  
FUNDAMENTAL

Mateus Mariani

Lajeado, junho de 2018

Mateus Mariani

CARTOGRAFIA E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA:  
POSSIBILIDADES PARA UMA INTERVENÇÃO  
PEDAGÓGICA COM ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO  
FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade do Vale do Taquari - Univates, como parte da exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientadora: Profa. Dra. Marli Teresinha Quartieri

Lajeado, junho de 2018

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha orientadora, Marli Teresinha Quartieri, que não desistiu de me ajudar a concluir essa etapa. Não poupou o seu tempo em me orientar, tanto no mestrado bem como na minha caminhada de vida. O teu saber, e o carinho que tu e o Luís (Gringo) demonstraram por mim, foram muito importante nessa jornada. Muito obrigado Marli!

Aos meus pais, que sempre estiveram do meu lado, incentivando a continuar a jornada da vida. Sempre estiveram e estarão no meu coração. Muito obrigado!

Aos professores que fizeram parte do processo de formação do mestrado.

Aos meus manos: Lucas e Stéfani. O grande Lucas, com seus conselhos e aquela ajuda especial na escrita, conferindo as ideias e dialogando sempre. A Stéfani, nunca desistiu de seus sonhos e enfrentou obstáculos para chegar onde está, sendo um grande exemplo para o seu mano e ex-professor. Obrigado a todos vocês.

A minha esposa, Lisandra Benini Mariani. Enfrentou todos os percalços dessa trajetória do meu lado, sendo guerreira e meu porto seguro. Muito obrigado por me dar durante o período do mestrado o melhor presente que já recebi, minha doce e amada Ana Laura. Saibam que cheguei até aqui por causa de vocês. Amo muito vocês!

Aos meus colegas de turma: Gustavo e Vanessa agradeço pelos momentos compartilhados durante essa caminhada e toda a amizade construída.

Aos funcionários da UNIVATES, principalmente do Programa de Pós-Graduação, William e Ana Paula, pelo auxílio e atenção em todos os momentos de necessidade.

A minha irmã de coração, minha colega e amiga Ângela, que sempre me incentivou e nunca me deixou desistir, estando presente. Muito obrigado.

Aos professores e direção da escola que oportunizaram a realização da prática.

A Deus, por me permitir viver mais um dia. Por me dar sabedoria e energia para poder escrever essas palavras.

## RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo investigar como alunos do 9º ano do Ensino Fundamental operam com atividades de Investigação Matemática envolvendo Cartografia e conteúdos matemáticos. O estudo fundamentou-se em Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) no que se refere à tendência metodológica Investigação Matemática, sendo de natureza qualitativa, do tipo estudo de caso. Foram elaboradas atividades investigativas com o intuito de promover a significação de alguns conceitos envolvendo Cartografia e Matemática, visando instigar os alunos a elaborarem estratégias matemáticas e desenvolverem a escrita matemática. A coleta dos dados ocorreu por meio de observações, diários de campo dos alunos e do professor, relatório dos trabalhos realizados nos grupos e filmagem da fase de discussão. Os resultados apontam a Investigação Matemática como uma metodologia de ensino que pode despertar no estudante o interesse pela descoberta. A partir das estratégias elaboradas, durante as atividades investigativas, foi possível acompanhar o progressivo desempenho dos alunos na construção de seu conhecimento matemático, bem como sua vontade de desenvolver os conceitos e aprendizados a respeito. No decorrer da intervenção pedagógica surgiram alguns conceitos de área, perímetro, proporção e análise de gráficos. Além disso, percebeu-se melhoria na capacidade de escrita dos alunos, uma vez que buscavam, a cada atividade, refinar os elementos para a resolução das atividades.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Cartografia. Intervenção Pedagógica. Ensino Fundamental.

## **ABSTRACT**

The present work had as aim to investigate how the students of the 9th year of Elementary School operate with mathematical investigation activities involving Cartography and mathematical contents. The study was based on Ponte, Brocardo and Oliveira (2003) regarding the Mathematical Investigation methodological trend, being of a qualitative nature, of the case study type. Investigative activities were developed with the purpose of promoting the meaning of some concepts involving Cartography and Mathematics, in order to instigate students to elaborate mathematical conjectures and develop mathematical writing. Data were collected through observations, students and teacher's field diaries, report of the work done in the groups and filming of the discussion step. The results pointed to Mathematical Investigation as a teaching methodology that can arouse the student's interest in the discovery. From the developed strategies, during the investigative activities, it was possible to follow the progressive performance of students in building their mathematical knowledge, as well as their willingness to develop the concepts and learnings about them. In the course of the pedagogical intervention some concepts of area, perimeter, proportion and graph analysis emerged. In addition, it was noticed an improvement in the students' writing capacity, since they searched for, at each activity, greater elements for the resolution of activities.

**Keywords:** Mathematical Investigation. Cartography. Pedagogical intervention. Elementary School.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura.....	17
Figura 2 – Mapa de Ga Sur.....	21
Figura 3 – Mapa T no O.....	22
Figura 4 – Mapa do Aluno 20.....	44
Figura 5 – Mapa do Aluno 22.....	50
Figura 6 – Esquema do Aluno 22.....	51
Figura 7 – Mapa de Teutônia.....	55
Figura 8 – Mapa do Transporte Aéreo.....	62
Figura 9 – População Total.....	71
Figura 10 – Resolução do aluno 18.....	73

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 1 – Exemplos de exercícios, problemas e tarefas investigativas.....	16
Quadro 2 – Momentos na realização de uma investigação.....	18
Quadro 3 – Investigação Matemática em dissertações a partir de 2013.....	28/.29
Quadro 4 – Objetivos e atividades desenvolvidas, por encontros.....	38/39

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	8
2 REFERENCIAL TEÓRICO .....	14
2.1 Investigação Matemática .....	14
2.2 Cartografia.....	21
2.3 Alguns estudos efetivados sobre Investigação Matemática e cartografia.....	28
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	36
4 RESULTADOS DECORRENTES DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA.....	41
5 CONSIDERAÇÕES SOBRE A PESQUISA .....	77
6. REFERÊNCIAS.....	82
7. APÊNDICES.....	86

## 1 INTRODUÇÃO

No ensino da matemática, professores buscam, constantemente, mecanismos e formas de despertar nos alunos o interesse pelos conteúdos dessa disciplina, o que os leva a pesquisarem melhores metodologias de ensino e de aprendizagem. Acredito que a Matemática deve ser atraente, não apenas para quem busca ensinar e instigar o conhecimento, mas também para quem busca aprender.

Sempre tive o desejo de ser educador e pesquisador, pois meus pais eram professores. Assim, em 2000, ingressei no Centro Universitário UNIVATES, no curso de “Licenciatura Plena em Ciências Exatas, com Habilitação integrada em Química, Física e Matemática”. A partir desse momento, minhas perguntas, feitas no Ensino Médio, passaram a fazer parte do meu cotidiano e das minhas preocupações como futuro professor. Tais questionamentos versavam sobre: Só podemos explicar a Matemática, pegando um livro e o seguindo, como se ele fosse um guia? É preciso que as aulas sejam separadas em períodos, se muitas coisas que aprendo em Matemática, posso utilizar também na física, química, biologia e geografia? Poderei explicar o conteúdo de forma a tornar minha aula mais atrativa para o aluno?

Durante a graduação, tive oportunidade de ser bolsista de iniciação científica e de começar a lecionar as disciplinas de Química, Física e Matemática, no Ensino

Médio, indagando-me constantemente sobre maneiras de ensinar. Mesmo ainda na graduação, ingressei na Pós-graduação em Ensino de Matemática, na UNIVATES. Tive, então, contato com novas metodologias e tendências de ensino, procurando, por meio dessas aulas, tornar minha atuação docente e minha interação com o alunado, mais significativas.

Passado o tempo, senti a necessidade de retornar aos estudos e me aperfeiçoar como professor. Ao tentar retornar ao aperfeiçoamento profissional e, por que não dizer, pessoal, procurei o Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas. Ao ingressar no programa, percebi que a leitura e a escrita estavam presentes em todas as aulas. Mas eu, como professor de Matemática, buscava produzir práticas em que a escrita fosse incentivada? Como fazer com que a escrita estivesse mais presente nas aulas de Matemática? Essas foram perguntas que surgiram durante as aulas do Mestrado. Percebi, pelos estudos e leituras durante o referido curso, que a escrita e a leitura deveriam ser práticas corriqueiras na minha atuação.

Como professor de Matemática, notei dificuldades dos alunos em relação não apenas à leitura e à interpretação de textos, gráficos, mapas, tabelas, mas também em relação ao raciocínio lógico-matemático e à argumentação dos mais variados assuntos. Os alunos, por vezes, apenas aprendem a fórmula e a solução do problema, sem saber argumentar sobre a forma de resolvê-lo ou mesmo sem questionar a solução, os motivos pelos quais os problemas foram resolvidos.

Talvez a pouca importância dada à análise de gráficos, tabelas, quadros e até mesmo, por que não dizer, de mapas, nas aulas de Matemática, pode ser um fator das dificuldades dos alunos em relação a essa competência. Isso também ocorre porque, geralmente, nos currículos escolares de Matemática, esse tipo de atividade só aparece no final dos planos de estudo ou em poucos exercícios. Além disso, é trabalhada, em muitos casos, de forma descontextualizada e com prioridade a outros conteúdos.

Hoje, percebo que parte dos meus alunos possuem celulares com aplicativos que permitem visualizar mapas, assim como *Google Maps*. Mas, mesmo de posse desse ou de outro aplicativo, muitos ainda não sabem locomover-se e usar

adequadamente tal recurso. O motivo é a dificuldade de leitura, localização e interpretação. Assim, acredito que vincular o ensino desses conceitos matemáticos à cartografia pode criar um fascínio nos alunos, pois se sentirão inseridos no espaço geográfico e conseguirão não somente visualizar, como também manipular situações que geram conceitos matemáticos.

É nesse cenário que a compreensão cartográfica e a leitura do espaço geográfico, onde os alunos se orientam e se localizam, podem se inserir, fazendo com que tais questões sejam um importante recurso para o ensino e a pesquisa tanto da Geografia, quanto da Matemática. As atividades que relacionam cartografia, Matemática e geografia despertam o interesse pela solução dos problemas e pela busca do conhecimento, visto que os alunos se veem inseridos em muitas das situações propostas.

A Matemática, por meio da cartografia, possibilita ao aluno entender como ele está inserido no espaço local, regional e/ou global, pois busca representar o espaço. Ademais, se fundamenta na leitura, levando em consideração relações matemáticas existentes entre as dimensões reais e a representação da realidade contida em seus instrumentos. O sistema de posicionamento global, os mapas e outras representações cartográficas são importantes para a localização e a compreensão do indivíduo e de seu posicionamento. E a Matemática pode fazer uso de tais sistemas, mapas e representações. O aluno, por meio dessa interação, será capaz de distinguir os diferentes espaços, o que lhe proporcionará uma visão crítica da realidade em que vive.

Em relação ao conteúdo Cartografia, Rocha (2004) comenta sobre sua contribuição para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Em sua dissertação de mestrado, propõe que a cartografia, mais especificamente o mapa, seja utilizado em sala de aula como instrumento que pode contribuir na formação da cidadania do estudante. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais em Geografia – PCNs (BRASIL, 1998a), os produtos cartográficos são todos os tipos de documentos: mapas, cartas e plantas em papel ou digital. Esses documentos representam graficamente a superfície da Terra (toda ou parte dela) e são relevantes por permitir o entendimento do homem em relação ao espaço geográfico. Entretanto, é

necessária alfabetização cartográfica, aprendizado que pode ser possibilitado aos alunos desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Em relação aos PCNs de Matemática (BRASIL, 1998b), um dos princípios norteadores para o processo de ensino e de aprendizagem é relacionar o mundo em que se vive com as representações, por meio de tabelas, gráficos e figuras. Nesse contexto, a cartografia pode ser útil no processo do ensino de Matemática, pois apresenta um caráter interdisciplinar. Além disso, de acordo com os PCNs de Geografia (BRASIL, 1998a), o ensino da cartografia desenvolve algumas noções básicas de visualização oblíqua e vertical, imagens bi e tridimensionais, além de desenvolver noções de legenda, escala, referências e orientação espacial. Tais conteúdos também podem ser explorados em aulas de Matemática.

Diante desse cenário, as diversidades metodológicas na prática docente, tanto em Geografia, quanto em Matemática, podem auxiliar nos múltiplos interesses e necessidades dos alunos, motivando-os e contribuindo para que se tornem autores de seu processo de aprendizagem. Assim, os alunos não serão levados apenas a solucionarem problemas e questões de uma forma mecânica e automática, mas sim, a pensarem de maneira crítica nas mais variadas estratégias para que o desafio a eles imposto seja devidamente compreendido e resolvido.

Na busca por esse pensar de maneira crítica, o professor pode utilizar diferentes tendências de ensino, tais como: Etnomatemática, Modelagem Matemática, resolução de problemas, Investigação Matemática, entre outras. Neste trabalho será dada ênfase à Investigação Matemática.

Entende-se por Investigação Matemática, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), atividades que levam tanto o professor como o aluno a descobrir e explorar novos saberes por meio de problemas abertos. Estes propiciam a formulação de questões, ou seja, o levantamento de conjecturas e estratégias possíveis de serem registradas matematicamente, testadas e reformuladas.

Diante do exposto, o tema desta pesquisa foi o uso da cartografia em atividades de Investigação Matemática com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. O problema contemplou a seguinte questão de pesquisa: como alunos

do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública da Educação Básica da região do Vale do Taquari, operam com atividades de Investigação Matemática envolvendo cartografia?

O objetivo geral, portanto, consistiu em investigar como os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental operam com atividades de Investigação Matemática envolvendo cartografia. Os objetivos específicos foram:

- 1) Explorar com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental atividades utilizando a metodologia de Investigação Matemática e o tema cartografia.
- 2) Identificar que regras matemáticas são utilizadas pelos alunos quando resolvem atividades investigativas envolvendo cartografia.
- 3) Estimular a cultura da escrita em aulas de Matemática.

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido em uma escola pública do município de Teutônia, que contava, no período da prática efetivada, com 400 alunos, distribuídos em 20 turmas, da Educação Infantil ao 9º ano do Ensino Fundamental. Para o desenvolvimento desta proposta, foi escolhida uma turma do 9º ano, que contava com 18 alunos e na qual eu era professor de Matemática.

Após esta breve introdução, no capítulo dois, desta dissertação, discuto o referencial teórico referente aos conceitos e à importância da Investigação Matemática, utilizando teóricos e estudiosos da área. Explano também sobre definições de Cartografia e sua importância no Ensino. Na última seção deste capítulo, descrevo alguns estudos efetivados sobre Investigação Matemática e cartografia que auxiliaram na sustentação teórica deste trabalho.

No capítulo três, descrevo os procedimentos metodológicos utilizados, que tiveram enfoque na pesquisa qualitativa. Ainda relato como se efetivou a intervenção pedagógica, descrevendo os métodos de coleta de dados e de como se realizou a análise dos dados emergentes da investigação.

No capítulo quatro, apresento os dados emergentes da intervenção pedagógica efetivada e os discuto à luz de referenciais teóricos. Finalmente, no capítulo cinco, explicito conclusões desta pesquisa, buscando responder o problema, bem como analisando se os objetivos gerais e específicos propostos foram atingidos. Por fim, apresento as referências bibliográficas, os apêndices e o produto educacional oriundo desta dissertação.

## **2. REFERENCIAL TEÓRICO**

Neste capítulo tenho por objetivo discutir os aportes teóricos que fundamentaram a minha investigação. Divido-o em três seções: a primeira aborda a Investigação Matemática, a segunda enfatiza a Cartografia e a terceira aborda os estudos já efetivados em relação a estes temas.

### **2.1 Investigação Matemática e Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática**

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, já em 1998, desempenharam um importante papel, desacomodando o professor e fazendo-o parar para refletir sobre sua prática pedagógica. Essa reflexão pode ser considerada um dos primeiros passos para mudanças na prática pedagógica do professor, pois apontam que o ensino de Matemática deve estar pautado pela sua importância em meio às relações sociais e sua inserção com o mercado de trabalho.

De acordo com esses parâmetros (BRASIL, 1998b), o ensino de Matemática é uma ferramenta que facilita a estruturação e o desenvolvimento do pensamento do aluno para a formação básica da cidadania. Esse ensino, da mesma forma, desempenha um papel decisivo na resolução de problemas do cotidiano do aluno, visto que está relacionado com aplicações no mundo do trabalho e é um instrumento para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. De acordo com esse documento, o ensino de Matemática pode não só interferir na estruturação do pensamento, mas também agilizar o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e a formação intelectual do aluno.

Um dos objetivos gerais dos PCNs (BRASIL, 1998b, p. 8) consiste na necessidade de que os alunos assumam um papel na mudança de seus contextos e da sociedade. Nessa visão, que sejam capazes de “questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação”. Ainda conforme os parâmetros:

Para atender às demandas do trabalho contemporâneo, é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula. Também o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades (BRASIL, 1998b, p. 34).

Nesse contexto, a Matemática é importante na formação de um indivíduo pensante e crítico. Tais parâmetros apontam expectativas de aprendizagem e evidenciam experiências educativas que devem ser relacionadas não a um contexto apenas, mas que possam ser generalizadas e transferidas a outros. Esse enfoque, para sua socialização e desenvolvimento, envolve necessariamente a participação dos alunos. Um dos critérios que o professor pode considerar sobre a aprendizagem dos alunos diz respeito aos procedimentos matemáticos utilizados para construir soluções num contexto de resolução de problemas, mais aplicados ao cotidiano dos alunos.

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de interpretar uma situação-problema, distinguir as informações necessárias das supérfluas, planificar a resolução, identificar informações que necessitam ser levantadas, estimar (ou prever) soluções possíveis, decidir sobre procedimentos de resolução a serem utilizados, investigar, justificar, argumentar e comprovar a validade de resultados e apresentá-los de forma organizada e clara (BRASIL, 1998b, p. 76).

De acordo com os referidos parâmetros curriculares, um exercício é uma atividade em que o aluno utiliza, de maneira quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Já em um problema, o aluno é instigado a interpretar o enunciado da questão que lhe é proposta e a estruturar a situação que lhe é apresentada. Tais documentos destacam que um problema para um aluno não

necessariamente será um problema para outro aluno. Isso pode ocorrer em virtude dos conhecimentos de que dispõem.

Para que um aluno possa resolver um problema, ele precisa elaborar um ou mais procedimentos de resolução, comparar seus resultados e, por fim, validar seus procedimentos. De acordo com Ponte (2003), as diversas disciplinas escolares apresentam tarefas características e, na Matemática, não é diferente. A tarefa mais conhecida é o exercício, existindo outros tipos, como problemas e investigações, conforme exemplos no Quadro 1.

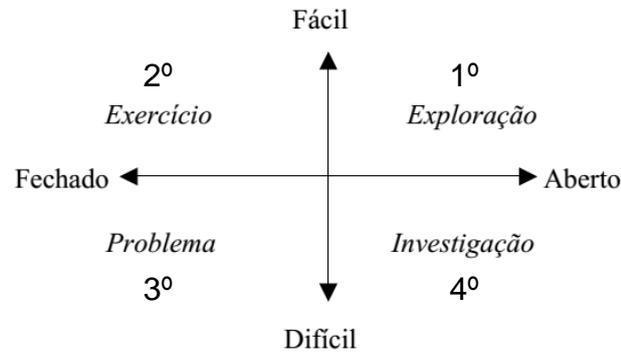
Quadro 1 – Exemplos de exercícios, problemas e tarefas investigativas

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica: a) $\frac{6}{12} =$ b) $\frac{3x(10-7)}{17-2} =$ c) $\frac{\frac{20}{18-9}}{(15-10)x2} =$	Qual o menor número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreva a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observe os algarismos das diversas colunas e encontra regularidades. 2. Encontra regularidades nas tabuadas de outros números.

Fonte: Adaptado de Ponte (2003, p. 28).

Conforme Ponte (2003), uma tarefa Matemática apresenta quatro dimensões básicas: o grau de dificuldade, sua estrutura, seu contexto e o tempo. O autor esquematiza essas dimensões, conforme visualizado na Figura 1:

Figura 1 – Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura



Fonte: Adaptado de Ponte (2003, p. 29).

De posse dos dados da Figura 1, o autor faz as seguintes distinções:

- Os exercícios são tarefas sem grande dificuldade e com estrutura fechada (2º quadrante);
- Os problemas são tarefas também fechadas, mas com elevada dificuldade (3º quadrante);
- As investigações têm um grau de dificuldade elevado, mas uma estrutura aberta (4º quadrante);
- Finalmente, as tarefas de exploração são fáceis e com estrutura aberta (1º quadrante) (PONTE, 2003, p. 5).

As atividades de Investigação Matemática, por conseguinte, podem ser utilizadas para que se atinjam os objetivos educativos e se desenvolvam capacidades para solucionar e formular conjecturas a respeito dos problemas apresentados. Percebe-se, assim, que existem habilidades e caminhos que podem ser usados para solucionar problemas matemáticos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 23) argumentam em relação à Investigação Matemática, que “trata-se de situações mais abertas - a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição”. Segundo esses autores, a definição de investigar aplica-se a diversos termos com significados semelhantes, como apurar, averiguar, inquirir e pesquisar. Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. O termo investigação é utilizado em variados contextos, mas, para os matemáticos, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades (PONTE, BROCARDI e OLIVEIRA, 2003).

No contexto do ensino e da aprendizagem, investigar não significa inventar novos conceitos, descobrir novos algoritmos ou resolver problemas difíceis. Significa, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), a formulação de questões de

interesse próprio, que, inicialmente, parecem confusas e sem respostas. Essas questões não só necessitam ser investigadas, por meio de processos que as procurem clarificar, como também estudadas, de modo que sejam válidas e aceitáveis. Em efeito:

[...] uma Investigação Matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigação (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003, p. 16).

Para esses autores, a ação de investigar em Matemática apresenta características próprias, que levam à formulação de conjecturas, as quais necessitam ser testadas e provadas. Uma Investigação Matemática envolve “conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo conjectura-teste-demonstração” (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003, p. 10). Nesse sentido, essa metodologia apresenta quatro momentos principais, como indicado no Quadro 2.

Quadro 2 – Momentos na realização de uma investigação.

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer uma situação problemática</li> <li>• Explorar a situação problemática</li> <li>• Formular questões</li> </ul>
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Organizar dados</li> <li>• Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)</li> </ul>
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realizar testes</li> <li>• Refinar uma conjectura</li> </ul>
Justificativa e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justificar uma conjectura</li> <li>• Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio</li> </ul>

Fonte: PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA (2003, p. 21).

De posse desses quatro momentos para realização de uma atividade de investigação, os autores supracitados sugerem questionamentos, a partir das perguntas: Como organizar o trabalho? Que etapas percorrer? O que se pode esperar do desempenho dos alunos? Qual pode ser o papel do professor? Essas são perguntas que podem ser feitas após se assumir que é possível realizar atividades de Investigação Matemática com os alunos. Cabe ainda destacar que

esses quatro momentos se entrecruzam e não são excludentes.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), uma Investigação Matemática em sala de aula apresenta três fases: introdução da tarefa à turma; realização da investigação; e discussão. Na última fase, os alunos relatam os resultados aos colegas. Todas essas fases são fundamentais para o desenvolvimento e aproveitamento de uma atividade investigativa.

Para os autores, o momento da introdução de uma atividade tem um papel de relevância, pois é no início da atividade que os alunos compreendem o significado de investigar. Após introduzir a tarefa, o professor tem um papel fundamental nas atividades de investigação. Cabe a ele proporcionar momentos em que os alunos explorem a situação, formulem questões, e testem suas conjecturas, justificando-as. Isso não somente proporciona aos alunos a autonomia necessária para assumirem a autoria da investigação, mas ainda garante que o trabalho deles flua e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática.

Skovsmose (2000) descreve que, em suas observações, as aulas de Matemática estão direcionadas para resolução de exercícios. Todavia, estas aulas podem ser contrapostas por uma abordagem de investigação, sendo o ambiente de suporte desse trabalho chamado de “cenário de investigação”. Conforme o autor, “um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações” (SKOVSMOSE, 2000, p. 6).

Nessa abordagem, o professor convida os alunos a questionar e a encarar os desafios, procurando soluções. Quando os alunos aceitam o convite, eles “assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo” (Ibidem, p. 6). O autor aponta ainda que a construção de um cenário para investigação depende do professor, dos alunos e da aceitação do convite, sendo uma propriedade relacional,

[...] o que pode servir perfeitamente como cenário para investigação a um grupo numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos. Se um cenário pode ou não dar suporte a uma

abordagem de investigação é uma questão empírica que tem que ser respondida por meio da prática dos professores e alunos envolvidos (SKOVSMOSE, 2008, p. 6).

Durante a investigação, o professor é colocado, conforme Skovsmose (2000), na “zona de risco”<sup>1</sup>, pois não consegue prever quais questões irão aparecer. Ainda segundo o mesmo pesquisador,

Qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para actuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que os alunos e o professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma actividade produtiva e não uma experiência ameaçadora (SKOVSMOSE, 2000, p. 18).

No momento final de uma atividade investigativa, a discussão sobre o trabalho realizado torna-se um momento importante para o compartilhamento das conjecturas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) salientam a importância do processo de provas e justificativas sucessivas numa investigação. Isso torna necessário o registro escrito das ideias, bem como sua justificação, para que estas sejam aceitas.

Para Cândido (2001, p.17), a importância da escrita nas aulas de Matemática é acentuada, pois “quer por sua característica de linguagem científica, quer pela natureza da ciência Matemática, seu recurso básico de comunicação é a escrita”. A produção de texto em Matemática é um aspecto importante que possibilita, ao professor, avaliar a aprendizagem do aluno. Segundo Smole (2001, p. 31), “o nível de compreensão de um conceito ou ideia está intimamente relacionado à capacidade de comunicá-lo, uma vez que quanto mais se compreende um conceito, melhor o aluno pode se expressar sobre ele”.

Diante desse contexto, resolvi utilizar a cartografia e a Investigação Matemática na exploração de alguns conteúdos matemáticos. Portanto, na próxima seção apresento referenciais sobre Cartografia. Destaco definições desse tema, sua importância, bem como relações entre a Cartografia e a Matemática no ensino.

---

<sup>1</sup> A ideia de “zona de risco”, onde imperam a imprevisibilidade e a incerteza na prática do professor, é introduzida por Penteadó (1999), segundo Skovsmose (2000, p.85).

## 2.2 Cartografia

A cartografia se desenvolveu a partir do momento em que o homem decidiu representar o ambiente onde vivia, desde os tempos mais remotos até os tempos atuais, acompanhando o progresso da civilização. Há muito tempo as diferentes sociedades humanas representam os seus espaços e desde o início da história essas representações tinham como finalidade facilitar as atividades cotidianas. Segundo Tostes (2006, p. 26), “antes mesmo de desenvolver um sistema de escrita, o homem pré-histórico já deixava suas marcas nas paredes das cavernas espalhadas pelo mundo, as conhecidas pinturas rupestres”.

Nem todos os mapas eram desenhados em paredes de cavernas ou em couro de animais. Para registrar o ambiente em que vivia, o homem utilizava os mais variados recursos, como barro, couro, madeira, entre outros. O mapa mais antigo de que se tem conhecimento (Figura 2) foi descoberto nas escavações das ruínas da cidade de Ga-Sur, cidade que ficava aproximadamente a 300 km da Babilônia, atual Iraque. Esse mapa data de 2500 a.C., e trata-se de uma placa de barro. Nela está representado o vale de um rio, apontado pelos estudiosos como o Eufrates, sendo assim, uma prova desta capacidade de abstração do ser humano (OLIVEIRA, 1993).

Figura 2 – Mapa de Ga Sur



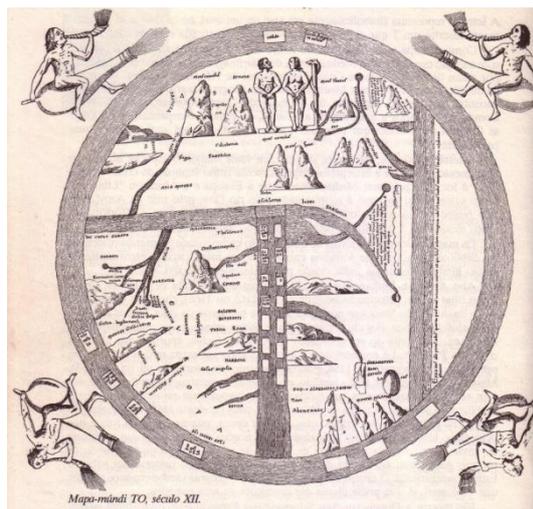
Fonte: [http://4.bp.blogspot.com/s1600/mapa-do-mundo\\_babilonia\\_700-500-ac.jpg](http://4.bp.blogspot.com/s1600/mapa-do-mundo_babilonia_700-500-ac.jpg)

Apesar de mapas primitivos serem encontrados em todo o globo, foi com os egípcios e, posteriormente, com os gregos, que a cartografia alcançou um grande desenvolvimento. A contribuição dos Egípcios ficou prejudicada devido à confecção

de seus mapas em “Papiro”, mais vulnerável em função das condições do tempo. A base do sistema cartográfico atual é atribuída, por todos, aos gregos. Estes desenvolveram o sistema de coordenadas geográficas, desenharam as primeiras projeções, admitiram a forma esférica da Terra, com seus polos, a Linha do Equador e os trópicos. Destaca-se a contribuição de Cláudio Ptolomeu de Alexandria (90 - 168 d.C.), sendo que o conhecimento geográfico e cartográfico da Grécia Antiga está idealizado na sua obra “Geografia” (ANDERSON e RIBEIRO, 1982).

Durante a Idade Média, a cartografia praticamente estagnou, principalmente devido à influência da Igreja, que pôs todos os avanços científicos de lado, em prol dos avanços religiosos. Devido ao domínio religioso, os mapas mais comuns na Idade Média foram os conhecidos *Orbis Terrarum*, ou mapas T no O (Figura 3). Nesses mapas, a Terra é representada como um disco (o “O”) e os três continentes conhecidos distribuem-se em torno da cidade santa de Jerusalém, referência claramente cristã.

Figura 3 – Mapa T no O



Fonte: [https://geografiamb2.files.wordpress.com/2009/03/mapa\\_mundi-t-o-seculo-xii.jpg](https://geografiamb2.files.wordpress.com/2009/03/mapa_mundi-t-o-seculo-xii.jpg)

De acordo com Anderson e Ribeiro (1982), somente no século XV a cartografia europeia voltou a se desenvolver, com o ressurgimento e a expansão da obra de Ptolomeu. Outros fatores importantes, de acordo com os autores, foram as grandes navegações, a invenção da imprensa e a fundação da Escola de Sagres. Ressalta-se que essa escola não se constituiu de uma instituição física, construída,

e sim, no encontro de pessoas para o estudo e desenvolvimento de novas ideias para navegação. No período das grandes navegações, se destacaram as escolas espanhola e portuguesa, que deram um grande impulso à navegação com o aperfeiçoamento das caravelas, dos astrolábios e das cartas marítimas.

Em meados do século XVI, de acordo com Oliveira (1993), começou a se destacar a cartografia holandesa, tendo como seu maior representante Gerhard Kramer, mais conhecido pelo seu nome latino Mercator. Segundo o autor, a grande contribuição de Mercator para a cartografia foi a criação da projeção que leva seu nome, e que tem como base um cilindro. Nessa época, outros instrumentos que ajudaram foram o teodolito, a bússola portátil e o hodômetro.

Ao longo do tempo, com o surgimento de novos instrumentos e da implementação das tecnologias, a cartografia vem sofrendo alterações, sendo os trabalhos desenvolvidos, atualmente, de alta precisão. De acordo com Francischett (2004), a cartografia vem sofrendo, nos últimos anos, um profundo impacto com as transformações tecnológicas resultantes do uso da informática. Em meados da década de 50, no século XX, começam a surgir os computadores. Entretanto, foi apenas na década de 1960 que os pesquisadores passaram a utilizar a informática na cartografia. Segundo o autor, empregaram-se duas espécies de sistemas automáticos: banco de dados de registros cartográficos e produção de mapas.

Nesse sentido, no final da década de 1980 é que o uso de tecnologias computadorizadas começou a afetar a construção e a elaboração de cartas e mapas. De acordo com Menezes e Ávila (2005, p. 4):

A partir deste período, os computadores começam também a afetar o tratamento cartográfico profissional, para a construção de mapas. Qualquer pessoa que possua um software de cartografia, bem como um hardware com capacidade de processamento gráfico, é capaz de gerar mapas, com pelo menos com uma aparência de qualidade. Desta forma o que se vê, até hoje, e com um crescimento cada vez maior, é uma popularização da ciência cartográfica. Mais e mais pessoas passam a trabalhar com cartografia, apoiadas nos sistemas computacionais, porém sem embasamento confiável de conhecimentos cartográficos.

Os autores ainda acrescentam:

É importante para a Cartografia essa popularização, pois muito foi desmitificado, permitindo o aparecimento de uma grande quantidade de mapas e outros documentos cartográficos, divulgando e disseminando a informação geográfica. Porém, muitas vezes a documentação gerada pode ter qualidade inferior, pela falta de conhecimentos cartográficos do pessoal envolvido nos trabalhos. Atualmente pode-se notar que existe uma tendência para uma busca do conhecimento cartográfico necessário, pois o nível de sofisticação dos softwares exige um mínimo deste conhecimento por parte de seus usuários (MENEZES e ÁVILA, 2005, p. 4).

Hoje, as Geotecnologias (sensoriamento remoto, sistema de informações geográficas, sistema de posicionamento global, entre outras) são conjuntos de técnicas coletadas, processadas, analisadas e colocadas à disposição com referência geográfica. As Geotecnologias, dessa forma, podem ser um instrumento poderoso utilizado para tomada de decisões em diversas áreas, como no mapeamento cadastral e topográfico, na cartografia temática, na gestão ambiental, municipal e, é claro, na educação.

Afinal, diante de todo esse aparato, o que é Cartografia? Nas bibliografias ligadas ao assunto, existem várias definições acerca do termo 'Cartografia', sendo interessante observar as evoluções no conceito provocadas pelos avanços tecnológicos. Na sequência, apresento algumas definições de cartografia.

Bakker (1965) apud Rocha (2004, p. 13) entende que

A Cartografia pode ser definida como a ciência e a arte de expressar graficamente, por meio de mapas e cartas, o conhecimento humano da superfície da Terra. É ciência porque essa expressão gráfica, para alcançar exatidão satisfatória, procura um apoio científico que se obtém pela coordenação de determinações astronômicas e matemáticas assim como topográficas e geodésicas. É arte quando se subordina às leis estéticas da simplicidade, clareza e harmonia, procurando atingir o ideal artístico.

Para Joly (1990), a cartografia é a arte de redigir, conceber e divulgar os mapas. O autor menciona que ela implica, por parte do cartógrafo, num conhecimento aprofundado não só do assunto a ser cartografado, mas também dos métodos de estudo. A cartografia é, pois, uma prática comprovada da expressão gráfica, com suas possibilidades e seus limites. Exige que se tenha familiaridade com os modernos procedimentos de criação e de divulgação dos mapas, desde o

sensoriamento remoto até a cartografia computadorizada, passando pelo desenho manual e pela impressão.

De acordo com Anderson e Ribeiro (1982, p. 11), se fosse necessário resumir a definição de cartografia somente em duas palavras, poder-se-ia dizer que Cartografia é “comunicação” e “análise”. Como “comunicação”, concentra-se mais sobre a carta, cobrindo aspectos da maneira como foi construída e como pode ser lida e interpretada. É, portanto, uma forma de comunicação especializada que dá ênfase em disponibilizar a informação de forma visual. Como “análise”, está ligada diretamente à cartografia geográfica que se concentra no estudo espacial dos fenômenos a serem mapeados. Assim, antecede o mapa, ou utiliza cartas para determinar o conteúdo de outras novas cartas.

Cabe ainda tecer alguns comentários relacionados aos termos mais genericamente usados para designar os produtos oriundos da cartografia: carta, globo, mapa e planta. Oliveira (1983) refere-se a esses termos da seguinte maneira:

Carta: Representação dos aspectos naturais e artificiais da Terra, destinada a fins práticos da atividade humana, permitindo a avaliação precisa de distâncias, direções e a localização geográfica de pontos, áreas e detalhes; representação plana geralmente em média ou grande escala, de uma superfície da Terra subdividida em folhas, de forma sistemática, obedecido um plano nacional ou internacional. Nome tradicionalmente empregado na designação do documento cartográfico de âmbito naval. É empregado no Brasil também como sinônimo de mapa, em muitos casos (p. 86).

Globo: Esfera cuja forma superficial, representada através de símbolos e linhas de referência, retrata a superfície da Terra, em que se encontram as suas posições relativas (p. 294).

Mapa: Representação gráfica, geralmente em uma superfície plana e em determinada escala das características naturais e artificiais terrestres ou subterrâneas, ou, ainda, de outro planeta. Os acidentes são representados dentro da mais rigorosa localização possível, relacionados, em geral, a um sistema de referência de coordenadas. Igualmente uma representação gráfica de uma parte ou total da esfera celeste (p. 387).

Planta: Representação cartográfica, geralmente em escala grande, destinada a fornecer informações muito detalhadas, visando, por exemplo, ao cadastro urbano, a certos fins econômico-sociais, militares, etc. (p. 510).

Pesquisas mostram que não existe uma diferença rígida entre os conceitos desses termos. É, portanto, difícil estabelecer uma separação definitiva entre os significados dessas designações. Duarte (2002, p. 123) pontua que existe

[...] entre nós uma tendência ao uso de mapa como designativo geral, reservando-se carta e planta para espécies de mapas. Parece-nos até ser o modo correto. Assim, podemos fazer inclusive um jogo de palavras, dizendo-se que cartas e plantas são mapas, mas nem todo mapa é carta ou planta. Mapa seria o gênero; carta e planta, as espécies.

O mesmo autor procura diferenciar esses três termos - carta, planta e mapas - levando em consideração a escala utilizada em cada um deles. A carta é confeccionada em “escalas médias ou grandes, permitindo maior segurança no que diz respeito à precisão das medidas, além de ser também parte de um conjunto de folhas sistematicamente organizadas” (DUARTE, 2002, p. 123.). A planta, uma espécie de mapa confeccionado em “grande escala [...], cujo documento destina-se a fornecer informações detalhadas de uma parte pouco extensa da superfície terrestre como, por exemplo, um terreno, uma rua ou um bairro” (ibidem, p. 124). Já o mapa é definido como qualquer representação “[...] em escala reduzida, mostrando seus componentes por meio de símbolos e, às vezes, cores também, concebidas arbitrariamente ou respeitando o estabelecido em planos técnicos” (ibidem, p. 124).

A cartografia tem na sua origem uma ligação muito próxima com a Geografia e a Matemática. Constitui-se de uma forma de representação da superfície do ambiente em que se vive, do Planeta Terra, dos objetos geográficos físicos e humanos, sendo assim um instrumento de importância e de comunicação. O conhecimento sobre a natureza, a quantidade e a distribuição geográfica dos seus recursos naturais e riquezas, encontrados no espaço geográfico, é importante para as atividades humanas. Desse conhecimento depende o planejamento para a elaboração de projetos destinados à melhoria das condições de existência das sociedades. Dentro desse contexto, a cartografia como ciência desempenha um papel de relevância, pois permite obter uma representação do espaço de maneira adequada e confiável.

Os PCNs de Geografia destacam a importância da cartografia como instrumento na aproximação dos lugares e do mundo, sendo

- que trabalhar com a cartografia fornece instrumentos de explicação e compreensão do espaço geográfico;
- que a cartografia como forma de linguagem visual o aproxima dos lugares. Perceber que por meio da cartografia pode-se ler as informações

sobre os lugares, mas que a leitura está condicionada à escala cartográfica (BRASIL, 1998a, p. 87).

Para Rocha (2004, p. 55):

A cartografia hoje é considerada essencial no ensino não só da Geografia, mas também na História, na Geologia e por que não dizer também na Matemática. Elementos Matemáticos utilizados na cartografia tornam-se importantes aliados do professor para trabalhar a interdisciplinaridade na escola. É importante este elo de ligação das disciplinas para que o aluno possa entender as necessidades que aparecerão no seu cotidiano.

A interpretação de mapas vai ao encontro dos princípios norteadores do processo de ensino e de aprendizagem dos PCNs de Matemática (BRASIL, 1998a), que buscam relacionar observações do mundo real com representações por meio de tabelas, figuras e gráficos. Segundo Rocha (2004), pode-se levar a cartografia como base, colocando a Matemática como pano de fundo. Assim, é possível extrair vários conceitos, adequando-os ao ensino de Matemática. Matemática e cartografia tornam-se, então, parceiras para um aprendizado mais efetivo e significativo.

O uso de mapas em aulas de Matemática é visto por Rocha (2004, p. 78) como “importante, por que não dizer, imprescindível. Contudo, esse procedimento requer do professor preparo para utilização dos mapas como modelos matemáticos. É preciso que o professor saiba utilizá-los, ou seja, saiba lê-los”. A autora ainda comenta:

O mapa representa um recurso de valor para as aulas de Geografia, de História, e de outras disciplinas que utilizam a ordenação do espaço geográfico como meio de demonstração de sua viabilidade de caminhos que se pode tomar ou seguir. A Matemática, como disciplina básica para a formação do homem, não pode ficar à parte dessa discussão. O que se propõe aqui é a utilização da cartografia, mais especificamente do mapa, que poderá contribuir para o aprendizado do aluno, sua formação como cidadão, inserido no contexto em que vive. Ao colocar o mapa como modelo matemático, tem-se como objetivo, modificar o processo metodológico da problematização dos conteúdos a serem ministrados em uma sala de aula e ultrapassar os limites da matemática pela matemática (ROCHA, 2004, p. 78).

Francischett (2004, p. 47) compreende a maquete geográfica como sendo uma

[...] representação cartográfica tridimensional do espaço, pois representa as categorias longitude, latitude e a altitude. A representação tridimensional do

espaço adquire importância fundamental quando se pensa em aplicações empregadas em projetos (inter)disciplinares voltados às questões ambientais ou em simulações.

Nessa mesma linha argumentativa, para Rocha (2004, p. 79), a utilização de maquete pode ser introduzida tanto em Matemática como em Cartografia, em qualquer etapa de ensino. Assim, a Cartografia desempenha um importante papel no estudo da Matemática e da Geografia.

Diante dessa constatação, resolvi explorar atividades investigativas nas aulas de Matemática, usando o tema Cartografia, com o intuito de identificar como os alunos do 9º. ano do Ensino Fundamental operam com tais situações. Entretanto, antes de discutir as atividades, na próxima seção, apresento alguns estudos já efetivados sobre Investigação Matemática e Cartografia, que foram importantes para a efetivação desta intervenção pedagógica.

### 2.3 Alguns estudos efetivados sobre Investigação Matemática e cartografia

Os trabalhos discutidos nesta seção auxiliaram na realização da presente dissertação de mestrado, que teve como temas a Investigação Matemática e a Cartografia. Assim, realizei buscas no portal da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) com o descritor “Investigação Matemática”, tendo encontrado 40 (quarenta) trabalhos. Destes trabalhos, selecionei 05 (cinco) vinculados ao Ensino Fundamental e 02 (dois) que foram efetivados com alunos de Licenciatura de Matemática. Saliento que escolhi apenas trabalhos de 2013 em diante, porque Schmitt (2015), em sua dissertação, já havia efetivado a busca pelos trabalhos de Investigação Matemática no Ensino Fundamental, no período anterior a 2013. No Quadro 3 apresento o título, o autor, o ano e a Instituição de cada trabalho selecionado.

Quadro 3 – Investigação Matemática em dissertações a partir de 2013

TÍTULO	AUTOR	ANO	INSTITUIÇÃO
A Geometria do compasso (1797) de Mascheroni (1750-1800) em atividades	OLIVEIRA, José Damião Souza de	2014	Universidade Federal do Rio Grande do Norte

com o Geogebra			
Atividades Investigativas no Ensino da Matemática Financeira: as estratégias empregadas com uso de planilhas eletrônicas	MARCHI, Vinicius Machacheski	2014	Universidade Estadual Paulista “Julho de Mesquita Filho”
Rigidez dos triângulos	NEVES, Evandro Marques das	2014	Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Abordando Geometria por meio da Investigação Matemática: Um comparativo entre o 5º e 9º Anos do Ensino Fundamental	SCHMITT, Fernanda Eloisa	2015	Centro Universitário UNIVATES
Formação de conceitos matemáticos: um estudo baseado na teoria do ensino desenvolvimental	BARROS, Kliver Moreira	2015	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Campus Jataí
Investigação Matemática: uma proposta de ensino de estatística para o 8º Ano do Ensino Fundamental	GUERRA, Sheila Heydt Réquia	2015	Centro Universitário Franciscano de Santa Maria
Investigação Matemática: contribuições para o ensino de seqüências e padrões para alunos do ensino fundamental	ROSA, Carine Pedroso da	2016	Centro Universitário Franciscano de Santa Maria

Fonte: Do autor (2017).

Oliveira (2014), em sua dissertação de mestrado intitulada “A geometria do compasso (1797) de Mascheroni (1750 – 1800) em atividades com o GeoGebra”, teve por objetivo responder às seguintes questões: “De que forma seria possível abordarmos esta relação entre História da Matemática e Tecnologia na sala de aula de Matemática? A obra de Mascheroni ajuda a melhor compreender a própria Geometria Euclidiana e alguns conceitos da própria Matemática?” (OLIVEIRA, 2013, p. 4).

A referida pesquisa foi qualitativa, caracterizada por uma exploração histórica, fazendo uma intervenção empírica com base no uso da História da Matemática aliado às Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) via Investigação Matemática. O trabalho foi desenvolvido em duas turmas da disciplina Didática da Matemática I (MAT0367) do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN, em 2014. Como resultados, o autor pontua que:

Com nosso estudo, identificamos que problemas que envolvam construções geométricas podem ser abordados com *softwares* de Geometria, por se tratar de um *software* com mais possibilidades de exploração das propriedades existentes nas construções. Em nosso estudo, utilizamos um *software* que apresenta um leque de ferramentas que nos leva a entender que problemas desta natureza, podem ser trabalhados no ambiente computacional com atividades que envolvam a investigação histórica e/ou Matemática (OLIVEIRA, 2013, p. 147).

Além disso, o autor salienta que os alunos tiveram a possibilidade de rever e/ou reconstruir conceitos relacionados à geometria, utilizando atividades produzidas a partir de problemas históricos da Matemática e investigativos, aliados aos recursos das TICs.

O trabalho intitulado “Abordando Geometria por meio da Investigação Matemática: Um comparativo entre o 5º e 9º Anos do Ensino Fundamental”, de Schmitt (2015) teve por objetivo investigar as conjecturas apresentadas pelos alunos de 5º e 9º anos em atividades investigativas no ensino de geometria. Ademais, buscou estimular nos alunos a escrita em Matemática, promovendo a socialização de aprendizagens. Utilizou como aporte teórico os estudos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), no que permeia a Investigação Matemática.

A pesquisa de Schmitt (2015), de cunho qualitativo, caracterizada como estudo de caso, foi composta por cinco atividades que abordavam diferentes tópicos de geometria. Para coleta de dados, utilizou diário de campo dos alunos e do professor, além de filmagens das aulas. A autora verificou que ambas as turmas apresentavam dificuldades no manuseio da régua e do transferidor, bem como em relação à escrita das conjecturas. Como ponto positivo, salientou que as atividades proporcionaram aos alunos participarem mais ativamente de sua própria aprendizagem, dando-lhes mais autonomia, colaborando uns com os outros nos momentos de dificuldades.

Neves (2014) realizou seu trabalho de mestrado com o título “Rigidez dos triângulos”, com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Em sua pesquisa buscou despertar o interesse dos alunos para a compreensão dos conteúdos relacionados ao triângulo, melhorar a aprendizagem e compreensão da necessidade para demonstração matemática. As atividades desenvolvidas por Neves (2014) foram de cunho investigativo. O autor concluiu que as atividades investigativas possibilitam que “a Matemática seja vista como uma disciplina cada vez mais interessante e intrigante, afastando todo o medo e toda a incompreensão destes, aguçando a sua curiosidade e atraindo seu interesse” (NEVES, 2014, p. 58).

Marchi (2014), em seu trabalho intitulado “Atividades Investigativas no Ensino da Matemática Financeira: as estratégias empregadas com uso de planilhas eletrônicas”, teve por objetivo analisar e identificar as estratégias utilizadas pelos alunos ao trabalharem com tarefas investigativas acerca de conceitos de Matemática Financeira. A proposta foi executada em duplas, em um curso de extensão universitária, com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP (campus de Rio Claro), sendo abordado o uso de planilha eletrônica para a realização das atividades investigativas. A pesquisa foi de cunho qualitativo, utilizando, para obtenção de dados, filmagens dos encontros. O autor evidenciou que os alunos utilizaram estratégias de organização de dados, o que possibilitou aprendizagem em relação aos conteúdos de acréscimos e descontos, juros simples e juros compostos. Ademais, houve interação com a Planilha Eletrônica Excel no processo de Investigação Matemática.

O trabalho intitulado “Investigação Matemática: Uma proposta de ensino de Estatística para o 8º ano do Ensino Fundamental”, de Guerra (2015), teve por objetivo analisar as contribuições que a Investigação Matemática proporciona para o ensino de conceitos básicos de Estatística, em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental. A investigação foi realizada em uma escola pública municipal da cidade de Santa Maria – RS, com 24 alunos. A pesquisadora utilizou a abordagem qualitativa de pesquisa, participando diretamente da pesquisa. Usou, como instrumentos de coleta de dados: a observação participante, o diário de campo, a análise dos documentos produzidos pelos alunos, bem como gravações em vídeo.

Guerra (2015) evidenciou que a maioria dos alunos assumiu papel ativo nas etapas da investigação, mesmo tendo tido pela primeira vez contato com essa metodologia no âmbito escolar. Ademais, inferiu que tais atividades favoreceram o desenvolvimento de competências que vão além do cálculo, como discussão, argumentação, tomada de decisões, trabalho em equipe e comunicação. Guerra (2015) salientou também que as tecnologias da informação e comunicação, juntamente com a Investigação Matemática, auxiliaram para a aprendizagem de conceitos de Estatística.

Rosa (2016), em sua dissertação intitulada “Investigação Matemática: contribuições para o ensino de sequências e padrões para alunos do ensino fundamental”, realizou a pesquisa em uma turma de quinze alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. O foco foi discutir e analisar quais “as contribuições da utilização de atividades investigativas para a aprendizagem dos conteúdos de sequência, padrões e regularidades” (ROSA, 2016, p. 111).

Os dados qualitativos da referida pesquisa foram obtidos por meio da observação do professor na sala de aula com os alunos, mediante registros no seu diário de campo, pré-teste, uma avaliação ao final das atividades, além da análise dos trabalhos e de suas apresentações à turma pelos alunos. Rosa (2016) assegurou que os alunos, no decorrer das atividades, obtiveram aumento do interesse e da motivação, pois as situações propostas permitiram a inserção do aluno no processo de construção dos conceitos. Para o autor, a utilização da Investigação Matemática propiciou um ambiente favorável à aprendizagem de Matemática.

O trabalho intitulado “Formação de conceitos matemáticos: um estudo baseado na teoria do ensino desenvolvimental”, de Barros (2015), foi realizado com uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental, em uma escola estadual, em Caiapônia-GO. O aporte teórico utilizado integrou Investigação Matemática, Teoria do Ensino Desenvolvimental, proposta por Davydov, e a utilização do *software* Geogebra. A pesquisa teve por objetivo analisar quais as contribuições que esta integração proporciona para a formação de conceitos matemáticos, sendo estes área e perímetro de figuras planas.

Barros (2015) utilizou filmagens e o diário de pesquisa dos alunos para coleta de dados. De acordo com o autor, a aplicação da proposta contribuiu para que os alunos participassem da construção do seu próprio conhecimento, de uma forma mais ativa. As principais dificuldades apresentadas estiveram relacionadas com a infraestrutura do local, que passava por reformas, e, com o fato de três alunas, que apresentaram dificuldades, apenas copiarem as respostas dos colegas.

Em relação aos descritores “ensino de Cartografia” e “Cartografia no Ensino Fundamental”, encontrei 11 trabalhos. Destes, selecionei apenas dois que tratam da Cartografia relacionada ao Ensino Fundamental. O trabalho de Nascimento (2013), intitulado “Educação cartográfica e itinerários do espaço: tecendo vias e práticas à concepção do jogo-simulador Kimera”; e o trabalho nomeado “Cartografia: linguagem da representação espacial e o seu ensino-aprendizagem: estudo nas escolas da rede de ensino público de Jataí em 2016”, de autoria de Pereira (2016).

O trabalho de Nascimento (2013) propõe repensar estratégias didáticas metodológicas por parte das escolas, no que versa sobre o processo de Educação Cartográfica, visando a uma mudança na interpretação, por parte dos alunos, dos cenários, tanto realistas como imaginários, sendo que estes estão em constante transformação. Teve como objetivo investigar como o desenvolvimento/criação do jogo-simulador Kimera, agregado a outras práticas para o entendimento do espaço, pode potencializar o processo de educação cartográfica com alunos do 4º e 5º ano da Rede Pública de Ensino do Município de Salvador/BA - Colégio da Polícia Militar/COM e Escola Álvaro Da Franca Rocha. O referido trabalho teve como aporte metodológico a pesquisa qualitativa, sendo alicerçada pela pesquisa participante e pelos processos colaborativos em que foram envolvidos. Apresentou como resultado o aperfeiçoamento do jogo Kimera, que permitiu a saída da sala de aula e a exploração de novos espaços, bem como a exploração da Educação Cartográfica por parte dos alunos e professores (NASCIMENTO, 2013).

O trabalho “Cartografia: linguagem da representação espacial e o seu ensino-aprendizagem: estudo nas escolas da rede de ensino público de Jataí em 2016”, de Pereira (2016), teve como objetivo avaliar o processo de alfabetização da linguagem cartográfica no decorrer do Ensino Fundamental. Os dados foram coletados diretamente em aula, por meio de questionários estruturados, solução de exercícios, entrevistas com alunos e professores, a fim de identificar os níveis de abstrações dos alunos com relação à pesquisa.

Pereira (2016), levando em consideração o ensino de Cartografia no Ensino Fundamental, a pesquisadora buscou responder à seguinte pergunta, ao longo de sua intervenção: “Em que medida a falta de domínio da linguagem cartográfica, de

uma alfabetização na cartografia, explicaria as dificuldades no seu processo ensino-aprendizagem?”. Os resultados apontaram falta de aptidão dos professores, principalmente dos Anos Iniciais, para ministrar aulas de Geografia. Destaca que tais docentes não têm formação específica para ministrar o ensino de Geografia, o que dificulta o uso da Cartografia nas aulas.

A autora também inferiu que o livro didático ainda está aquém da importância que ele representa para o aprendizado do aluno, e os professores nem sempre têm outro material para recorrer em suas aulas, principalmente, para aumentar o interesse dos alunos sobre a Geografia. Este estudo deixa evidente que obstáculos (falta de material adequado para trabalhar a linguagem cartográfica; e falta do ensino da linguagem cartográfica na graduação) estão presentes na prática cotidiana e que tanto os alunos como os professores ainda precisam aprender sobre a linguagem cartográfica (PEREIRA, 2016).

Analisando os trabalhos descritos, posso destacar que a Investigação Matemática propiciou melhoria nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, tanto para o professor/pesquisador, como para os alunos. Os resultados apresentados, por meio desses estudos, demonstram que o uso de atividades investigativas leva a um maior envolvimento dos alunos. Assim, essa prática torna-se mais reflexiva para o professor, potencializando a aprendizagem dos alunos. Os estudos analisados apontam, ainda, organização, exploração de estratégias para resolução das atividades, construção e reconstrução dos conceitos dentro do contexto da Matemática. Tais atividades também permitem, aos alunos, sentir segurança diante das tarefas e, em consequência, aprimorar a capacidade de argumentação.

Nesse sentido, as pesquisas realizadas buscaram fazer com que os alunos fossem autores de suas práticas, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais ativo e reflexivo para o aluno. Saliento que, no trabalho que realizei, também busquei desenvolver atividades que propiciassem aos alunos tal prática reflexiva, desafiando-os a se tornarem mais ativos no seu processo de aprendizagem.

Os trabalhos anteriormente citados abordaram conteúdos como geometria, sequências numéricas, funções, mas nenhum deles relacionou a Investigação Matemática com a Cartografia e a Matemática. Dessa forma, acredito que o trabalho que efetivei, usando atividades investigativas e o tema Cartografia para desenvolver alguns conceitos matemáticos, foi algo inovador. No próximo capítulo, descrevo os procedimentos metodológicos para efetivação desta pesquisa, destacando os instrumentos de coleta de dados, o lócus da pesquisa, a prática efetivada e a forma da análise dos dados oriundos das atividades propostas.

### 3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O trabalho foi desenvolvido com base metodológica na pesquisa qualitativa, envolvendo uma turma de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Teutônia, na qual atuo como professor. A referida turma, na ocasião da pesquisa, tinha 23 alunos, dos quais 10 do sexo feminino e 13 do sexo masculino. O objetivo consistiu em investigar como os alunos da referida turma operam com atividades de Investigação Matemática envolvendo cartografia.

Entendo por pesquisa qualitativa aquela preocupada com os fenômenos sociais, tendo o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. Segundo Moreira (2009, p. 6-7),

o interesse central dessa pesquisa está em uma interpretação dos significados atribuídos pelos sujeitos a suas ações em uma realidade socialmente construída, através de observação participativa, isto é, o pesquisador fica imerso no fenômeno de interesse.

Uma das abordagens da pesquisa qualitativa é o estudo de caso, o qual foi adotado nesta pesquisa. Segundo Ludke e André (1986), o estudo de caso enfatiza a interpretação em um contexto para compreender melhor não só a manifestação geral de um problema, mas também ações, percepções, comportamentos e interações do sujeito que devem ser relacionados à situação específica em que ocorre determinada problemática.

Para Yin (2007, p. 32), o estudo de caso “investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto real, especialmente quando os limites entre

o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos”. O autor esclarece que as evidências para um estudo de caso podem vir de seis fontes distintas, sendo uma delas a observação participativa. Em efeito:

a observação participante é uma modalidade especial de observação na qual você não é simplesmente um observador passivo. Em vez disso, você pode assumir vários papéis na situação de estudo de caso e participar realmente nos eventos sendo estudados (YIN, 2007, p. 121).

Estando de acordo com os autores citados, este estudo apresenta algumas características do estudo de caso, pois analisei os dados oriundos de uma turma específica, no caso, a turma em que já lecionava - 9º ano do Ensino Fundamental. Saliento ainda que me envolvi durante toda a prática efetivada, sendo professor, orientador, pesquisador, observando atentamente o que ocorria em sala de aula no decorrer das atividades exploradas. Tais observações foram anotadas no meu diário de campo.

Cabe destacar que, durante os encontros, além de anotar e observar fatos relevantes, procurei acompanhar os grupos na realização das atividades, inserindo-me diretamente na pesquisa de cada grupo. Busquei compreender e questionar o raciocínio adotado pelos alunos, questionando-os para que pudessem entender melhor o procedimento adotado. Estimulava, assim, discussões que propiciassem aos participantes um redirecionamento no procedimento adotado, afim de que se auto questionassem sobre os resultados.

Como instrumento de coleta de dados, também utilizei a filmagem das aulas, principalmente nos momentos de discussão das tarefas em pequenos grupos e nos momentos de socialização. Brum (2012) destaca a importância do uso de recursos tecnológicos, em particular de gravadores e filmadoras no momento da socialização. Dessa forma, segundo o autor, o professor terá mais subsídios para identificar os argumentos usados pelos alunos durante a exploração de atividades investigativas. Nas filmagens, também procurei observar reações, percepções, comportamentos e interações dos alunos durante a realização das atividades, procurando subsídios para responder ao problema proposto neste trabalho.

Cabe destacar que, antes de iniciar a atividade de pesquisa, explicitarei, aos alunos que dela participariam, o que seria abordado e que sua privacidade seria respeitada. Portanto, encaminhei, aos responsáveis, um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE A), solicitando a autorização de uso de imagem e de voz dos alunos. Este Termo foi preenchido e assinado pelo responsável do aluno.

Destaco, ainda, que, no processo de sistematização dos registros feitos pelos alunos, para facilitar o desenvolvimento do texto, utilizo expressões que os identificam em cada momento da pesquisa. E, para preservar o anonimato dos alunos, estes são identificados por Aluno 01, Aluno 02, e assim sucessivamente.

A intervenção pedagógica foi desenvolvida em quinze encontros de dois períodos, o que totalizou uma hora e quarenta e cinco minutos, por encontro. As tarefas de investigação foram realizadas em grupos de três a quatro alunos, visando proporcionar momentos de socialização, de aprendizagem e troca de saberes. Os alunos exploraram as atividades, seguindo as orientações dos enunciados. Formularam suas conjecturas e estratégias em cada atividade, relatando-as por escrito. Em seguida, essas hipóteses foram testadas e, em alguns casos, reformuladas. Por fim, os alunos escreveram suas hipóteses e socializaram suas descobertas com os demais colegas. No Quadro 4 apresento os objetivos e as atividades exploradas no decorrer da intervenção pedagógica. Saliento que estas atividades fazem parte do Produto Educacional.

Quadro 4 – Objetivos e atividades desenvolvidas, por encontros

Encontros	Objetivo	Atividade desenvolvida
1º e 2º	Descrever um trajeto a ser percorrido.	Descrição de um caminho que uma pessoa deve percorrer, seguindo da Escola até o Centro Administrativo de Teutônia.
3º e 4º	Elaborar estratégias para encontrar o menor caminho que passe por pontos de referência dados.	Descrição e traçado de um trajeto que passe, em ordem, pelos lugares apresentados, retornando ao ponto de partida.
5º, 6º e 7º	Elaborar estratégias para a obtenção do valor da área e do perímetro do município de Teutônia, RS.	Cálculo do valor da área e do perímetro do município de Teutônia, a partir do mapa apresentado.
8º, 9º e 10º	Analisar e interpretar mapas com legendas na forma de círculos.	Leitura e interpretação de mapas que apresentam legendas em forma de

		círculos.
11º e 12º	Identificar relações matemáticas presentes no mapa do Centro Administrativo da cidade.	Identificação de que o Centro Administrativo da cidade tem a representação de um plano cartesiano. Identificação de alguns espaços do referido Centro, por meio de coordenadas.
13º, 14º e 15º	Calcular o número de pessoas de diferentes países, por meio da legenda do mapa.	Cálculo do número da população de alguns países do mundo, por meio da legenda do mapa apresentado.

Fonte: do autor (2017).

No início da intervenção pedagógica, entreguei, para cada aluno, um caderno, que serviu como diário de campo. Neste, instiguei os alunos a escreverem sobre a sistemática da atividade realizada, resultados encontrados, estratégias usadas, conjecturas elaboradas, dúvidas e dificuldades. Também sobre os aspectos que entendessem ser relevantes e importantes para a atividade, com opiniões pessoais sobre as tarefas. Por meio dessa escrita, pretendia que os próprios alunos pudessem perceber os conhecimentos e as habilidades que a tarefa estava propiciando.

Ao término de cada aula, recolhia os diários dos alunos, pois buscava identificar suas dúvidas, auxiliando-os no andamento da investigação. No final da prática efetivada, eles serviram como um dos instrumentos de coleta de dados. Assim, analisei, nesses diários, as conjecturas e estratégias utilizadas pelos alunos, a maneira como desenvolveram as atividades, além dos conteúdos matemáticos utilizados por eles para testar e resolver as tarefas de investigação. Desta forma realizei uma análise descritiva dos dados coletados, uma vez que descrevi os fatos que aconteceram, neste caso as conjecturas e estratégias, sem a intenção de interferir sobre os resultados obtidos na investigação.

A pesquisa descritiva exige do investigador uma série de informações sobre o que deseja pesquisar. Esse tipo de estudo pretende descrever os fatos e fenômenos de determinada realidade (TRIVIÑOS, 1987). São exemplos de pesquisa descritiva: estudos de caso e a análise documental, sendo que a ora realizada versa especificamente sobre um estudo de caso. Saliento que a pesquisa descritiva busca

retratar a realidade do ocorrido com o início, avanços e conclusões obtidas, não sendo suscetível a interferências e opiniões pessoais do pesquisador, uma vez que visa repassar uma descrição exata dos fenômenos e dos fatos objetos da pesquisa.

Para Cervo, Bervian (1983, p. 5) as pesquisas descritivas servem para se ter uma “amostragem de dados precisos sobre um determinado assunto, servindo para retratar até mesmo como determinado questionamento é respondido e solucionado pelo público alvo do estudo”. Ademais, os autores comentam que os fenômenos são investigados sem “a interferência do pesquisador que apenas procura descobrir, com a precisão possível, a frequência com que um fenômeno ocorre, sua relação e conexão com outros, sua natureza e características”. (Ibidem, p. 55).

Neste contexto, descrevi os fatos que ocorreram interpretando-os a luz de referenciais teóricos. Aliado a isto, é importante, neste tipo de análise se ter em mente de que a finalidade da pesquisa é observar, registrar e analisar os fenômenos ou sistemas técnicos, sem, contudo, entrar no mérito dos conteúdos.

Tive o cuidado de analisar os dados oriundos do meu diário de campo, como pesquisador, dos diários de campo dos alunos, bem como das filmagens das aulas, procurando responder à questão de pesquisa: como alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública da educação básica da região do Vale do Taquari, operam com atividades de Investigação Matemática envolvendo cartografia? Assim, no capítulo 4, apresento, por atividade desenvolvida, a análise dos resultados emergentes. Esta análise vem imbricada com os referenciais teóricos discutidos e com o propósito de responder ao problema investigado.

## **4. RESULTADOS DECORRENTES DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA**

Neste capítulo, descrevo como abordei e orientei cada uma das atividades investigativas efetivadas, bem como discuto os dados emergentes, usando referenciais teóricos que embasaram este estudo.

No primeiro encontro, apresentei aos alunos a proposta do projeto de pesquisa e entreguei o Termo de Livre Consentimento (APÊNDICE A). Além disso, cada aluno recebeu um caderno que serviu como diário de pesquisa. Neste encontro orientei e esclareci questões pertinentes sobre a pesquisa, a forma como as aulas seriam abordadas e sobre a sistemática das atividades que seriam desenvolvidas. Em suma, foi uma prévia orientação para que os alunos tivessem uma ideia inicial sobre a dimensão das tarefas que iriam realizar, pois ainda não tinham tido contato com a metodologia da Investigação Matemática.

É importante destacar que, neste encontro, percebi nos alunos um misto de preocupação e ansiedade devido à proposta diferenciada. Eles deixariam de ser espectadores e estariam diretamente envolvidos nas tarefas e na construção dos resultados, sendo, assim, autores de sua aprendizagem. Isso serviu de estímulo aos alunos, despertando nestes, antes mesmo do início dos trabalhos, uma vontade de realizá-los da melhor forma possível, visto que se reconheciam inseridos nas tarefas.

Saliento que todas as atividades foram realizadas em grupos de três alunos. Algumas atividades exigiam, primeiramente, um posicionamento do indivíduo para

com a questão. Posteriormente, sua intervenção era debatida em seu grupo, para que depois, em consenso com o grupo, fosse levada para toda a turma. Procurei, durante os encontros, acompanhar os grupos na realização das atividades, anotando e observando fatos que considerava relevante como pesquisador. À medida que acompanhava os grupos, busquei compreender o raciocínio adotado pelos alunos, questionando-os para melhor elucidação do procedimento adotado. Outras vezes, procurava instigar a discussão entre os alunos, para que refletissem sobre o procedimento adotado.

### **1. Primeira atividade: descrição de um trajeto**

A primeira atividade envolveu escala, orientação e representação do espaço, para que os alunos descobrissem a importância de se orientarem e se localizarem em seu meio ambiente. Solicitei que os alunos desenhasssem o caminho mais curto que uma pessoa teria que percorrer, seguindo da Escola até o Centro Administrativo de Teutônia. A seguir, a atividade explorada.

Atividade 1 - Desenhar e descrever o caminho mais curto que uma pessoa terá que percorrer, seguindo da Escola até o Centro Administrativo de Teutônia.

Não foi repassada aos alunos nenhuma orientação matemática, cartográfica ou mesmo geográfica, para servir de base. Com essa atividade, quis identificar como os alunos iriam se orientar e também como iriam auxiliar na orientação de outras pessoas. Por exemplo, uma situação é orientar uma pessoa da seguinte forma: “Dobre à direita e ande que você chegará ao seu destino”. Outra, diferente, é fazer a orientação do seguinte modo: “Dobre à direita, ande por cerca de 30 metros, visualize à sua esquerda uma Igreja e ao lado desta o seu destino”. Na segunda orientação, alguns detalhes apresentados, como a indicação de locais e direção, a quantidade a ser caminhada, permitem uma melhor orientação e localização para quem os recebe.

A seguir, apresento como alguns alunos<sup>2</sup> procederam para conclusão desta tarefa. Saliento que ela foi realizada em grupos de três alunos (entretanto, cada aluno escreveu em seu caderno a resposta do grupo para a atividade), e depois foi socializada com toda a turma.

Eu saio da escola Alfredo Schneider, pego a direita, viro a esquerda até o trevo na Rua da Paquetá. Sigo reto até chegar ao trevo da prefeitura. Faço o trevo, pego a esquerda e depois a direita. Aí, chego na prefeitura (Aluno 12).

Da escola você desce a rua e na primeira esquina você vai encontrar uma esquadria e você vai ter que descer essa rua. Vire a esquerda e segue reto pela via láctea, você vai passar pelo trevo da BrFood e continua seguindo reto. Em seguida, outro trevo e continua seguindo reto até encontrar o terceiro trevo e nesse você entra. Passando pelo trevo entra no centro administrativo (Aluno 21).

A partir da EMEF Professor Alfredo Schneider o senhor (A) deverá se locomover em linha reta (já fora da escola) até a primeira esquina (Rua Hércio Pegas) onde continuará a se locomover em linha reta como anteriormente e após encontrará três caminhos a seguir. Pegue a direita até avistar um galpão denominado Certel. Ali encontrará outra saída da qual escolherá a esquerda e continuará a dirigir-se em linha reta (desconte as curvas). Logo adiante, avistará o primeiro trevo desde o ponto de partida. Continue seguindo adiante. Ao encontrar o segundo trevo, adentre-o, e já no início vire a direita para a primeira saída. Continue seguindo. Após avistará a Associação da Água e logo em seguida enxergará um restaurante denominado café Brasil e mais adiante começando na estrada de chão, chegará o destino indicado a direita (Aluno 20).

Saindo do colégio, você desce, passa por duas ruas laterais, na terceira rua você pega a direita aí você passa pela alhocas. Após o centro de distribuição da Certel, quando você cruzar com a via láctea (no seu lado direito terá uma metalúrgica). Ali você pega a esquerda, aí você passa pelo opahaus, pela ponte, e segue reto. No terceiro trevo, você faz o trevo e segue reto passando pelo hotel Bavier. Quando você chegar nos bombeiros, você pega a esquerda, passa pela praça e chegou no centro (Aluno 22).

Notei, nas respostas dos alunos, que nenhum deles mencionou o meio, ou seja, as formas de locomoção: se iriam de carro, ônibus, ou mesmo a pé. Também não se preocuparam com o sentido do tráfego das ruas, visto que apenas buscaram indicar o caminho até o centro administrativo. Segundo Rios e Mendes (2009, p. 8):

O uso da linguagem cartográfica é de fundamental importância para o desenvolvimento do cidadão em suas atividades diárias, desde uma simples indicação de um caminho entre a casa e o local de estudo até mesmo em situações mais complexas que necessitem de uma análise mais apurada do espaço a sua volta. As noções cartográficas devem estar presentes no intelecto das pessoas. Todavia, como já foi explanado, alfabetizar cartograficamente os alunos, desde as séries iniciais, corresponde numa

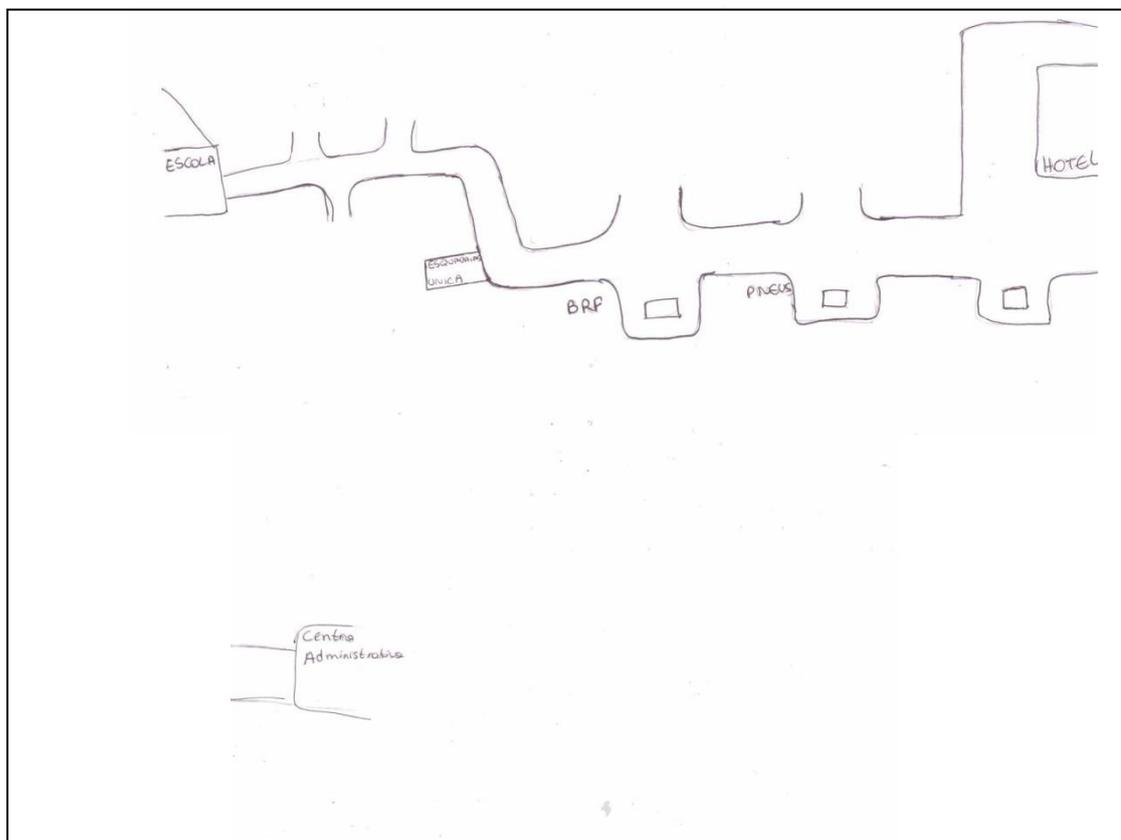
---

<sup>2</sup>As anotações dos alunos foram transcritas sem alterações para dissertação.

atividade pedagógica fundamental para o bom desenvolvimento da cognição visual do aluno, não só para o seu aprendizado dos conteúdos geográficos, mas também para a vida do aluno que passará a conhecer a representação do espaço em que vive.

Outra situação perceptível foi a dificuldade, na maioria dos casos, para a realização desta primeira atividade. A escrita não ficou clara, pois as orientações eram confusas. Além disso, não houve a correta indicação para quem fosse seguir o roteiro, com dificuldades de localização e mesmo de caminhos a serem seguidos para o destino. Essas dificuldades não foram verificadas quando da realização de um mapa com o caminho a ser seguido (Ver Figura 4), visto que, neste, é perfeitamente possível identificar um roteiro, um trajeto a ser realizado até o destino.

Figura 4 – Mapa do Aluno 20



Fonte: Mapa feito pelo Aluno 20

O mapa do aluno, visualizado na Figura 4, demonstra que ele buscou, com o desenho, dar uma orientação, facilitando a conclusão da atividade. Entretanto, nesse mapa não foi utilizada escala, nem mesmo noção de direção e sentido (sul, norte, leste, oeste). Mas, mesmo assim, este serviu como fonte de orientação para o aluno.

Destaco que o grupo do Aluno 20 percebeu que faltava a questão de escalas, pois, para desenhar um mapa, e tentar demonstrar o trajeto correto, tiveram a necessidade de usar duas folhas. Observaram a falta do uso de escala também na sua escrita. O aluno 20 comentou, após minha intervenção e questionamentos do como fazer, que “é possível então desenhar em apenas uma folha”. Quando questionado sobre como fazer para poder desenhar em uma única folha, o seu colega de grupo fez o seguinte comentário: “Diminuindo a escala”. Nesse ponto, precisei intervir para que os alunos refletissem sobre ampliação e redução de escala.

Após os alunos concluírem esta atividade, foi realizada uma discussão entre eles, para que pudessem defender suas conjecturas, argumentando sobre os mapas e os roteiros que haviam elaborado. Nesse momento, debateram se as orientações descritas realmente fariam com que outra pessoa conseguisse chegar ao destino. Muitos alunos constataram a necessidade de dados mais precisos, com maiores detalhes para que outra pessoa se localizasse. Tal fato é comentado por Rios e Mendes (2009, p. 6), referindo-se à importância da Cartografia, pois é um “meio de comunicação que deve ser utilizado para representar e interpretar informações, tendo como necessidade indicações de direção, distância, orientação e proporção para garantir a legitimidade da informação”.

Resultado semelhante foi observado por Giongo et al. (2013), no trabalho intitulado “Noções de localização nos anos iniciais do Ensino Fundamental”, em que foram realizadas atividades envolvendo localização em mapas, com professores dos Anos Iniciais. Os participantes tiveram as mesmas dificuldades apresentadas pelos alunos que realizaram esta prática. Evidente que a escrita e as indicações dos professores são diferentes daquelas apontadas pelos alunos, mas, guardadas essas proporções, nas questões do senso de localização, escalas e sentidos, as dificuldades foram semelhantes.

No final das discussões, solicitei aos alunos que escrevessem em seu caderno opiniões sobre a atividade e que aprendizagens ocorreram por meio dela. Seguem alguns depoimentos:

Eu achei esta primeira semana com muito aprendizado, que é bom, e nos foram designadas atividades diferentes do que nós fazemos diariamente (Aluno 17).

Em suma, foi instigante, ao menos, tentar construir uma rota, e chegar tão perto quanto (Aluno 02).

Gostei das duas atividades, a segunda nos fez ver que, devemos mostrar direito as coisas (Aluno 15).

É uma atividade legal, mas não gostei muito de desenhar o caminho, só gostei de escrever. E eu ainda desenhei o caminho sem escala e todo o caminho bem reto sem curvas, só quando dobrava as esquinas, tirando isso a atividade foi legal (Aluno 18).

A aula de hoje foi atrativa e estimulante (Aluno 20).

De acordo com os alunos, a atividade proposta foi instigante e diferente das que estavam acostumados a fazer. Aliado a isso, posso inferir que os alunos perceberam a importância das orientações serem precisas quando estamos nos referindo a rotas de caminhos. O depoimento do Aluno 18 demonstra a importância do uso da escala, quando coloca “e eu ainda desenhei o caminho sem escala”. O aluno ainda comentou que o trajeto não é sempre em linha reta, como estava acostumado a desenhar. Nesse sentido, expressa: “desenhei todo o caminho bem reto sem curvas”. Posso inferir que, no final das discussões das respostas, os alunos compreenderam a importância do uso da escala em mapas e também o quanto se deve cuidar para que o desenho seja uma representação o mais fiel possível da realidade.

Nesse contexto, acredito que esta atividade proporcionou interesse sobre o uso de noções matemáticas no campo da Cartografia. Serviu como um despertar para que os alunos percebessem a necessidade do uso de escalas, orientações, pontos de referências, distâncias, meios de locomoção diferentes, entre outros. Quando questionados sobre a orientação em locais que não fossem de comum circulação para eles, os grupos argumentaram que o meio de transporte interferia na locomoção. Citaram, como exemplo, os carros, que não poderiam andar na contramão. Também comentaram sobre a importância de ter pontos de referências para se localizarem. Segundo os alunos, estes permitem que o deslocamento ocorra

de uma maneira mais tranquila, pois, observando os pontos, conseguem saber se estão se deslocando no caminho certo.

Todas essas questões foram muito discutidas nos pequenos grupos, o que fez com que alguns alunos repensassem e reescrevessem a resposta da atividade. Assim, o trabalho em grupo foi importante, pois um auxiliava o outro a melhorar a descrição do caminho. Esses aspectos são vistos também por Ponte (2013, p. 33), quando expressa:

Na maioria dos estudos, a realização de investigações matemáticas pelos alunos ocorreu em contextos de trabalho que envolve colaboração em pequeno grupo, discussão com toda a turma, prestações escritas e orais. Nestas condições, estas actividades tendem a promover diversos objectivos curriculares transversais como a capacidade de comunicação e argumentação, a autonomia e o espírito crítico.

## **2. Segunda atividade: pontos de referência, estratégias para o trajeto.**

Nesta segunda atividade, os alunos tiveram de elaborar suas próprias estratégias para descrever o menor caminho para realizar a tarefa proposta. Cada grupo recebeu uma sequência de lugares diferentes, com pontos de referência que deveriam constar no trajeto por eles criado. Não bastava apenas buscar o menor caminho a ser percorrido, visto que também era necessário que o trajeto percorresse todos os pontos de referência solicitados. Assim, o aluno tinha que montar um quebra-cabeça, utilizando, para tanto, as noções matemáticas de espaço, localização e escalas. Os Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática de 5ª à 8ª série (6º ao 9º ano) revelam sobre a importância de noções matemáticas de escalas, dimensões e coordenadas geográficas:

Além disso, como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são essenciais para a interpretação deste, as possibilidades de integração com as outras áreas são bastante claras, como Ciências Naturais (utilização de bússolas, e noções de densidade, velocidade, temperatura, entre outras) e Geografia (utilização de escalas, coordenadas geográficas, mapas, etc.). As medidas também são necessárias para melhor compreensão de fenômenos sociais e políticos, como movimentos migratórios, questões ambientais, distribuição de renda, políticas públicas de saúde e educação, consumo, orçamento, ou seja, questões relacionadas aos temas transversais (BRASIL, 1998a, p. 128).

Esses mesmos parâmetros revelam as dificuldades do ensino dessas medidas em sala de aula. Expressam que, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, as medidas não têm merecido estudos, pois os “professores, apesar de reconhecerem sua importância, preferem que elas sejam estudadas de forma mais detalhada em Ciências Naturais” (BRASIL, 1998a, p. 129). Dessa forma, saliento a necessidade de explorar esses conteúdos, de forma a instigar os alunos com atividades desafiadoras, que despertem neles a busca pelo conhecimento matemático.

Diante disso, apresento, a segunda atividade:

Para que seja possível um visitante localizar-se em um ambiente diferente, usamos pontos de referências como ferramentas para explicar o caminho até o destino desejado. Um ponto de referência é definido conforme a importância que ele representa para o local. Neste caso, vocês serão os guias de um visitante que precisa passar por alguns pontos de referência da nossa Escola. Considerando que o visitante esteja no portão de acesso, na Rua Hércio Pêgas, descreva e trace no mapa um possível caminho que passe, em ordem, pelos lugares apresentados, retornando, a seguir, ao ponto de partida. Descreva a estratégia utilizada.

Nesta atividade, cada grupo recebeu uma foto panorâmica da escola e os pontos de referência (APÊNDICES B, C, D e E). Destaco que os mesmos pontos foram repassados a todos os grupos de alunos, entretanto, cada grupo recebeu uma ordem diferente dos pontos. Os locais utilizados foram: placas de inauguração do prédio; prédio da direção (sala dos professores, refeitório, biblioteca, informática); prédio do ginásio; e uma pintura na parede que apresenta o slogan da escola.

O mapa e os pontos de referência serviram como uma referência a ser seguida, tendo os grupos de alunos total liberdade de escolher a melhor forma de percorrer os caminhos. Após a realização do trabalho em grupo, houve a discussão dos resultados com toda a turma. Foram variadas as respostas dos grupos dos alunos para esta atividade, tais como:

Você, visitante, convidado, aluno, ao adentrar na escola E.M.E.F. prof. Alfredo Schneider, subirá a rampa crescente de paralelepípedos a sua frente e adentrará na segunda entrada localizada à esquerda, também constituída de paralelepípedos e com as salas do oitavo e nono ano à esquerda e o refeitório à direita. Percorra este corredor até a entrada do refeitório e vire à esquerda. No decorrer deste percurso avistará a primeira placa de mármore denominada A, localizada na parede de uma das salas, à esquerda. O ponto B você convidado, visitante, ou aluno, encontrará ao subir o pequeno declive situado as suas costas. Após passar as escadas, na parede situada logo a frente, encontrará o símbolo da escola com um ponto B. Siga adiante e avistará a sua direita a entrada do prédio dos menores (do pré ao 5º ano) verá a terceira placa denominada como C. A placa D, você, meu caro, seguirá o mesmo percurso dito anteriormente, e logo antes da porta do refeitório, o encontrará. Para encontrar a placa E volte para a escada comentada anteriormente e avistando o ginásio em seu campo periférico, ande até ele. Lá chegando, no chão de paralelepípedos, você encontrará, seguindo em frente e virando à direita e após à esquerda, a placa E. Na volta, siga o caminho de paralelepípedos, caminhe até a secretaria e siga em frente até o ponto de início (Aluno 20).

A tarefa de explicar o caminho de alguns pontos da nossa escola. Ponto A = do portão da escola - iremos seguir em linha reta pela rampa da escola e chegamos ao segundo prédio dos alunos do pré ao 5º ano, então veremos o ponto A. Ponto B = para chegar ao ponto B iremos sair do ponto A e iremos a esquerda; então, virá um canteiro no meio do prédio e em seguida uma escada; vire a esquerda e chegará ao ponto B. Ponto C = para chegarmos ao ponto C, sairemos do ponto B e pegamos a direita, viramos no ginásio. Então na frente dele vai virar a direita e depois a esquerda e então verá o ponto C. Ponto D = voltaremos pela rampa da escola e chegaremos ao terceiro prédio e então viramos à direita e em seguida viramos à direita novamente, e então chegaremos ao ponto D. Ponto E = do ponto D subiremos em direção ao 1º prédio e viramos a direita e chegaremos ao ponto E. Em seguida voltaremos até o início de nossa filmagem (Aluno12).

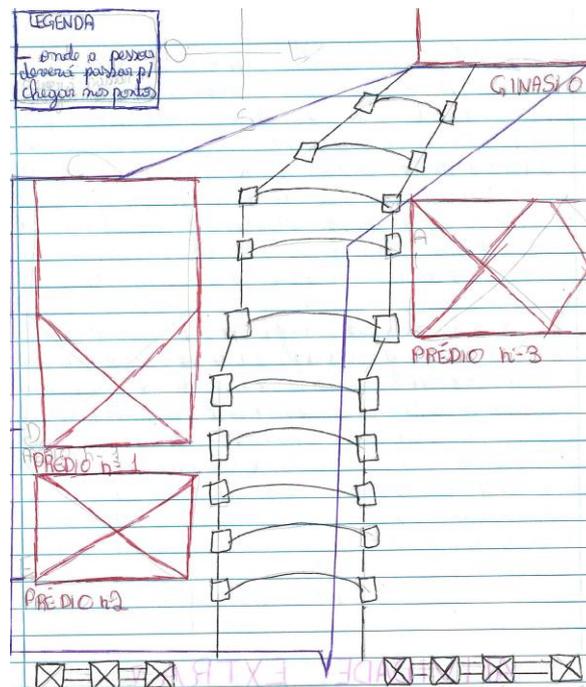
O visitante subirá a rampa de acesso, até chegar ao saguão principal. Deve pegar a esquerda, logo após pegar a direita e logo a esquerda. Olhando para direita, você encontra a imagem. Você voltará para o saguão principal, onde seguirá a reta até encontrar a parede e lá você pega a direita e encontrará a placa. Você voltará pela rampa de acesso e chegará até o vão do prédio nº 1 e nº 2 e irá até o final e virará a direita; a placa se localiza a esquerda da porta. Você deverá ir de novo até o saguão, vá até a rampa, ali você pega a esquerda e seguirá em frente e logo deve virar à direita. Continua indo reto e após pega a esquerda; e, chegará até a placa. Você voltará até a placa do refeitório (c) localizado no prédio 2 “olhando para a placa” reto e encontrará uma porta e ao lado você verá a placa V. Você voltará até a placa do refeitório (e) passa pelo vão dos prédios anda mais 2m e pegue a esquerda e segue reto até o portão. Você voltará até a placa do refeitório (c) passa pelo vão dos prédios anda mais 2m e pega a esquerda e segue reto até o portão (Aluno 21).

Passa o portão da escola, a esquerda, vejo a primeira placa. Sigo reto chegando no segundo prédio e avistarei a segunda placa. Daí desço de volta, entro na primeira entrada a direita, entro no refeitório e vejo a terceira placa. Me desloco para o ginásio, sigo até atrás do ginásio e vejo a quarta placa. Volto para a primeira placa, sigo um pouco adiante, vejo a quinta placa (Aluno 11).

Diante da sistemática apontada, é possível perceber significativas diferenças entre os grupos com um mesmo roteiro a ser seguido. Igualmente, percebi avanços maiores, se comparados com a primeira atividade, sendo possível constatar uma evolução na escrita dos alunos, com um maior detalhamento do trajeto a ser realizado. Inclusive, nesta atividade, os alunos já utilizaram medidas de distâncias a serem caminhadas para chegar aos locais desejados (conforme citado pelo Aluno 21). Na descrição do Aluno 12 também se pode observar que existe um detalhamento maior de locais e referências do que na atividade anterior. Este descreveu com mais elementos o roteiro a ser seguido, ligando aos diversos pontos de referência outras orientações e locais, tudo de modo a dar maior precisão aos seus relatos.

Já o Aluno 22 elaborou um esboço, na forma de desenho, de como se daria o trajeto na etapa, facilitando, assim, sua explicação para o grande grupo. Segue na Figura 5o desenho inicial da resposta da atividade do Aluno 22, para melhor elucidação.

Figura 5 – Mapa do Aluno 22



Fonte: Mapa feito pelo Aluno 22



Na Figura 6, o Aluno 22 colocou no mapa uma legenda com o caminho por onde a pessoa deveria passar para chegar nos pontos. Isso demonstra a preocupação com os detalhes na descrição do trajeto. Saliento que não tinha trabalhado com os alunos a questão de legenda, anteriormente. Assim, posso inferir que, no uso de atividades investigativas, podem emergir conteúdos que não estão no plano de ensino para a turma (PONTE, 2003). Nesse contexto, cabe ao professor utilizar tais momentos de modo que sejam produtivos para a inclusão de novos conteúdos.

Após a socialização e discussão das respostas, os alunos foram instigados a apontar dificuldades, semelhanças e diferenças, conforme o procedimento da atividade anterior. Destaco algumas situações comentadas em relação à atividade 2:

Achei um pouco difícil na hora de explicar o percurso das placas. Achei bem legal a parte de filmar um percurso. Só achei difícil também achar as placas na escola. O grupo conseguiu trabalhar em equipe e por isso conseguimos terminar o percurso (Aluno 12).

A maior dificuldade foi para explicar cada ponto da escola. Não consegui me expressar também na hora de escrever no meu diário de pesquisa, pois às vezes eu dava risada na hora da filmagem (Aluno 20).

Minha maior dificuldade foi saber me expressar. O meu problema é que eu penso muito e falo pouco. Eu até tenho facilidade em explicar verbalmente (claro às vezes sem querer eu gaguejo), mas na escrita até que vou bem. A parte de gravar o nosso trajeto foi o mais difícil e chato, sei lá porque não gostei. A atividade em si foi legal, pois podemos perceber que há vários trajetos diferentes para chegar no mesmo ponto. (...) Uma coisa bem legal que o professor fez nesta atividade foi que ele deu pontos diferentes para cada grupo, pois assim nós podemos comparar como o nosso colega fez e como nós teríamos feito (enquanto meus colegas falavam eu pensei como eu iria fazer). Com isso pude perceber que mesmo sendo só um símbolo, eu poderia fazer vários caminhos diferentes para chegar ao mesmo ponto (Aluno 22).

Para mim não houve muita dificuldade, mas achei que o meu grupo no começo estava meio perdido, pois não sabia o que fazer. Mas depois foi tudo ótimo, conseguimos pensar, analisar. Com esta atividade podemos ver qual seria o melhor percurso (Aluno 11).

A maior dificuldade foi para explicar cada ponto da escola, pois na hora de escrever no meu diário de pesquisa não conseguia me expressar. Essa atividade no meu ponto de vista teve momentos legais e outros mais complicados. As partes legais foram a gente sair da sala de aula para filmar os pontos que o professor nos entregou no início da aula. As partes mais chatas da aula foram as que tivemos que nos expressar para poder explicar (Aluno 21).

O Aluno 21 comentou que a atividade teve momentos mais complicados e outros “legais”, como a saída da sala de aula para a realização da tarefa. Igualmente destacou como a parte “chata”, ter de se expressar para dar a explicação. A partir desse comentário (que também foi feito por outros alunos), posso inferir que os discentes não tem hábito de escrever. O aluno 12 também informou que teve dificuldades em descrever a tarefa, sobretudo ao expressá-la para o restante de seu grupo. Portanto, destaco a importância de atividades investigativas que possibilitem a escrita do aluno, bem como a expressão de suas opiniões, pois os alunos têm dificuldades com esse tipo de metodologia.

A escrita tem um papel importante na Matemática. Smole e Diniz (2001, p. 31) argumentam que a escrita auxilia o aluno a organizar e construir um fazer pensar, como pode ser visto:

Escrever pode ajudar os alunos a aprimorarem percepções, conhecimentos e reflexões pessoais. Além disso, ao produzir textos em matemática, tal como ocorre em outras áreas do conhecimento, o aluno tem oportunidade de usar habilidades de ler, ouvir, observar, questionar, interpretar e avaliar seus próprios caminhos, as ações que realizou, no que poderia ser melhor. É como se pudesse refletir sobre o próprio pensamento e ter, nesse momento, uma consciência maior sobre aquilo que realizou e aprendeu.

Colocar as ideias no papel, em muitos aspectos, é difícil, mesmo quando essas ideias são coerentes com o pensar. Altrichter et al. (apud FREITAS, 2006, p. 44) comentam que:

Existem lacunas em nossos argumentos e achamos que alguns conceitos são muito vagos, quando novas conexões e implicações surgem na mente. Essas dificuldades aparecem pelo fato de que a escrita não é apenas sobre a comunicação de um resultado definitivo de uma análise, mas é propriamente uma forma de análise. Ela é a continuação de um processo de análise sobre uma restrição mais estreita, porque nossos pensamentos interiores têm que receber aparência e forma.

O Aluno 12 ainda comentou que as atividades de escrita ajudaram a pensar em estratégias para executar as tarefas com os componentes do grupo, bem como na forma de apresentação para os demais colegas. Diante desse contexto, percebi que o aluno demonstrou preocupações não apenas com a resolução da atividade, mas com a melhor maneira de explicar sua resposta para os demais colegas, com o intuito de que entendessem o raciocínio utilizado. Trata-se, pois, de uma busca do

aprendizado, em que o aluno procura não só responder a atividade, como também demonstrar aos colegas as razões que o levaram àquela resposta.

As respostas e opiniões apresentadas demonstraram que o uso da Cartografia no ensino da Matemática pode acontecer já no Ensino Fundamental, visando desenvolver nos alunos conceitos e conhecimentos matemáticos. Conforme Rocha (2004), no Ensino Fundamental, a Cartografia pode ser explorada nas aulas de Matemática para desenvolver noções básicas, tais como conceitos de razão, proporção, fração, transformação de unidades, escalas. O autor ainda comenta que também é possível explorar a geometria plana, espacial e analítica, quando se discutem conceitos de retas paralelas, cálculo de áreas, distâncias entre dois pontos e a utilização das figuras espaciais. Nesta atividade foram explorados os conceitos de noções de espaço, medidas, escalas, legendas.

Também foi explorada a noção de semelhança, que corresponde à ideia de mudança de escala, isto é, ampliação ou redução de uma figura alterando seu tamanho sem modificar suas proporções (LIMA, 1991, p. 31). Na Cartografia, de acordo com Moura Filho (1993, p. 94), a escala é utilizada, dentre outras situações, para reduzir o tamanho real dos objetos, visto que o mapa representa “uma miniatura de uma área da Superfície Terrestre, que pode atingir grandes proporções, ou até cobrir a superfície total do globo terrestre”.

### **3. Terceira atividade: mapa do município e figuras não regulares.**

Visto que já estavam familiarizados com as questões exploradas nas atividades anteriores, propus aos alunos, mediante a entrega de um mapa, a busca por noções de área e perímetro. Cabe destacar que os alunos permaneceram nos mesmos grupos da atividade anterior. Esta atividade consistiu no cálculo da área e do perímetro do município de Teutônia, RS.

Atividade 3 - Determine a área e o perímetro do município de Teutônia a partir do mapa apresentado a seguir. Crie estratégias diferentes para determinar a área e o perímetro, descrevendo-as.
--



De posse do mapa, os alunos deveriam criar estratégias para calcular a área e o perímetro do município, fazendo uso de fórmulas matemáticas, noções de medidas, conversão de unidades, aproximação de valores e outras técnicas que melhor lhe aprofundassem. Essa sistemática implicou nas mais variadas discussões e respostas dos alunos, visto que os deixava livres na busca da conclusão. De modo a exemplificar, seguem abaixo algumas das respostas dos alunos para esta situação:

Para fazer esta tarefa usaremos régua, barbante e fita. Para concluir esta tarefa usamos régua para alguns pontos e barbante para outros (Aluno 11).

Em nossa atividade usamos barbante e régua. O barbante foi usado para passar por cima da linha vermelha que indica a divisa do Município. Depois de fazermos isso medimos na régua quantos centímetros o mapa tinha. Pelo barbante descobrimos que o barbante ficou com 1m e 3cm, ou seja, a linha vermelha tem 1m e 3cm de distância (Aluno 12).

É perceptível, nas escritas dos alunos 11 e 12, que eles não refletiram sobre os procedimentos seguidos na atividade e tampouco discutiram quanto às melhores formas para resolver a questão. As escritas são vagas e o aluno 11, em especial, apresenta poucos detalhes sobre a estratégia utilizada, o que deixou sua ideia superficial.

Diferentemente dos alunos anteriores, os alunos 02 e 04 descreveram com maior detalhamento a resolução desta atividade, assim dispendo:

Delinear com barbante o limite intermunicipal de acordo como está no mapa para depois classificar a área e o perímetro.  $7,5 + 2,8 + 2,6 + 2,8 + 3,6 + 3 + 4,9 + 3 + 0,7 + 3,4 + 0,3 + 2,6 + 0,8 + 2,7 + 10,5 + 5 + 5$ . O perímetro dado com o comprimento do barbante foi transformado de acordo com as escalas do mapa.  $102 \times 500$ . Para encontrarmos a área buscamos métodos de áreas de diversas figuras encontradas no mapa, contudo acabamos não terminando. Por isso, então, abordamos outra estratégia (Aluno 02).

Primeiro com o uso de um barbante circulamos todo o perímetro, todos os lados da linha vermelha. Após arrancamos o barbante e medimos daí sabemos o perímetro que 97,4. Depois de sabermos o perímetro fizemos regra de 3.

$$\begin{array}{ccc} 2,5\text{cm} & & 400\text{m} \\ 9,74 & \triangleleft \quad \triangleright & x \end{array}$$

Depois que fizemos a regra de 3 sobemos o resultado que é 38960 dividimos esse valor por 2,25 e daí sabemos a área que  $1,76 \text{ Km}^2$  (Aluno 4).

Esses alunos e seus respectivos grupos conseguiram calcular o valor do perímetro de forma acertada. Porém, isso não ocorreu no cálculo para a área, ou

seja, a maioria não conseguiu calcular o valor da área do terreno. Notei que não tinham noção de como calcular essa área, uma vez que o mapa da cidade é uma figura de formato não regular e as fórmulas que conheciam não podiam ser usadas.

Quando o professor ensina para os alunos o conceito de área e perímetro pela fórmula, eles apreendem muito rápido e acham até que é muito fácil, mas aí está o engano, uma vez que não conseguem transferir conhecimentos para uma situação nova, não sabem fazer a mudança de quadros, confundem o perímetro com a área constantemente. Essa estratégia usada pelo professor poderá vir a causar ao aluno um obstáculo didático (CHIUMMO, 1998, p. 37).

Finalmente, os alunos 21 e 17 demonstraram maior conhecimento para a conclusão da atividade, descrevendo de forma completa as estratégias utilizadas, embora, igualmente, não tenham obtido o valor correto da área solicitada. Assim, seguem as respostas desses alunos:

Na tarde de hoje recebemos um mapa de Teutônia e nele tínhamos que traçar o perímetro e a área do município. O nosso grupo começou pelo perímetro. A linha de raciocínio foi pegarmos um pedaço de barbante onde contornarmos o limite do município de Teutônia, depois medimos o barbante que deu o resultado de 98,5 cm. Depois olhamos a legenda do mapa e vimos que a cada 2,8cm tínhamos que fazer vezes 500. Depois disso pegamos os 98,5 cm e dividimos por 2,8 cm que deu o resultado de 35,17, multiplicamos por 500 e deu o resultado de 17589,285714 que é o perímetro de Teutônia (Aluno 21).

Primeiro com o uso de uma régua, medimos as partes retas da linha vermelha, tirando as medidas dos lados retos, vimos que tinha muitas curvas, pensamos como podíamos medir as curvas e daí achamos melhor um barbante em vez da régua. O valor do barbante passamos em cm da linha vermelha que delimita Teutônia. Após isto medimos o comprimento dele (ele mede 97,4 cm) sabendo deste valor multiplicamos ele por 400 a que 2,5 na escala, o valor que deu esta multiplicação foi 38960 após dividimos este valor por 2,5 a que vale 400 na escala, depois desta conta sabemos que o perímetro que é 15584 Km. Para sabermos a área transformamos 38960 cm em Km<sup>2</sup>, após termos transformados 38960 cm em Km<sup>2</sup>. No fim dividimos esse valor que é 0,3896 por 2,25 no chute para saber a área que é 0,173155... (Aluno 17).

Na tentativa de realizar a atividade, o Aluno 21 utilizou a noção de redução à unidade e não o algoritmo formal da regra de três para a sua transformação. Já o Aluno 17 utilizou da regra de três para as suas conversões e busca da solução da atividade. Entretanto, na resposta deste último aluno houve confusão entre área e perímetro.

Pontos importantes da atividade foram as diferentes formas usadas pelos grupos de alunos para fazer as medidas com o uso do barbante e da régua e também a busca de fórmulas que facilitassem alcançar o resultado do trabalho. Alguns grupos contornaram toda a figura. Outros mediram com a régua todas as partes retas e, naquelas em que não era possível medirem com a régua, utilizaram o barbante. A conversão, usando a escala do mapa, foi realizada pela maioria dos grupos, pois sentiram, por conta própria (sem meu auxílio), que era necessário usá-la, para a correta solução da atividade.

De acordo com Lima (1991), é importante que os alunos tenham a noção de medida e escala na esfera da conversão, isto é, ampliação ou redução de uma figura alterando seu tamanho sem modificar suas proporções. Para os autores, tais conceitos auxiliam na leitura e interpretação de mapas e orientações. Sobre escala, Guerrero (2012, p. 97) assim retrata:

A escala é responsável por indicar a relação proporcional entre os tamanhos reais dos objetos e os de sua representação no papel. Quando falamos de escala cartográfica, devemos lembrar que estamos tratando de uma relação proporcional de redução de tamanhos.

Essa mesma autora ainda enfatiza sobre a importância da escala em um mapa, ao apontar que:

Escala gráfica é uma representação que permite realizar cálculos e medições nos mapas rapidamente. Nos mapas aparece como uma régua graduada que traz a unidade de medida usada, estabelecida em função do tamanho real da área representada, e pode vir em *metros (m)* ou em *quilômetros (km)* (GUERRERO, 2012, p. 98).

Portanto, penso que esta atividade foi importante para os alunos perceberem a necessidade do uso de escalas para representação de tamanhos reais em um papel, como no exemplo, do mapa da cidade. Aliado a isso, os grupos utilizaram regra de três ou redução à unidade para fazerem as conversões. Posso inferir, por esse motivo, a existência do pensamento da relação proporcional por parte de alguns alunos dessa turma. Eles, por conta própria, sentiram a necessidade de converter os valores do desenho para as medidas reais, usando proporcionalidade. Destaco que, durante a resolução da atividade de interpretação do mapa pelos

alunos, levando em conta a bagagem cognitiva destes, noções cartográficas e de espaço emergiram.

As experiências dos alunos, seu interesse pela comunicação cartográfica e seu domínio das habilidades cognitivas necessárias à decodificação das representações gráficas também influenciam na qualidade da interpretação dos mapas. Essa interpretação, que ocorre de diferentes maneiras, é diferenciada em função da relação que os leitores estabelecem com a realidade representada nos mapas. Por isso, noções de espaço são de suma importância no processo de análise dos mapas (GUERRERO, 2012, p.59).

Como nas atividades anteriores, após a conclusão das estratégias pelos grupos, passamos para a discussão da tarefa entre eles. Nesse momento, percebi as diferentes estratégias usadas, sendo que alguns apenas utilizaram régua; outros, régua juntamente com o barbante; ou ainda regra de três usando o algoritmo, redução a unidade. Quanto ao cálculo da área, os alunos tiveram muitas dificuldades, pois queriam usar fórmulas prontas e só sabiam as que calculavam áreas de quadrados, retângulos e triângulos. Após discussão e minha intervenção, buscaram transformar a figura do mapa da cidade em formas geométricas que já conheciam, afim de tentar chegar o mais próximo possível do valor da área. Entretanto, tiveram dificuldades e não terminaram o cálculo da área da cidade.

Após a socialização, solicitei que escrevessem no diário a opinião sobre a atividade, os conhecimentos adquiridos com ela e as dificuldades encontradas. Seguem algumas das opiniões:

Foi uma atividade difícil. O perímetro foi fácil de calcular, mas a área foi difícil e nunca chegávamos perto do resultado da área que estava na folha (Aluno 18).

Para mim, apesar de todas as dificuldades, essa atividade teve êxito. Até agora essa foi a atividade mais difícil. Para calcular o perímetro nós não tivemos tanta dificuldade, mas na hora de calcular a área do município aí sim tivemos muita dificuldade em descobrir a área do município (Aluno 22).

Essa atividade foi difícil de fazer. Nosso grupo não conseguiu acabar tudo. Nessa atividade nós quase quebramos a cabeça para fazer as contas. O colega estava ficando estressado por causa das contas. Nós praticamente ficamos três períodos e meio fazendo contas só para um mapa (Aluno 04).

Tivemos dificuldade na hora de calcular a área desse mapa (Aluno 21).

Pelos comentários dos alunos, a atividade do cálculo da área teve um grau elevado de dificuldade. Posso inferir que isso se deve, especialmente, pelo formato irregular da figura, não havendo, portanto, uma fórmula matemática predefinida para o cálculo da sua área. Saliento, entretanto, que isso foi proposital, nesta atividade, pois figuras irregulares são muito mais presentes no cotidiano do que figuras geométricas regulares. Pretendia, justamente, verificar qual a estratégia que os alunos iriam usar para solucionar essa situação, bem como identificar qual a linha de raciocínio e a lógica que seria usada. Essa identificação foi possível pela forma como a atividade foi explorada, valendo-se da metodologia da Investigação Matemática, uma vez que nesta o professor é apenas um orientador do processo, deixando o aluno buscar a melhor solução da tarefa.

O conceito de Investigação Matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE, 2003, p.23).

Assim, no caso da atividade em questão, os alunos tiveram que relacionar os conhecimentos e conceitos que já dispunham sobre medidas, escalas, divisão e multiplicação, dentre outros, para buscar desenvolver a conclusão da tarefa, sem qualquer determinação ou regramento a ser seguido. A atividade serviu para que os alunos pudessem investigar conceitos matemáticos, por tentativa e erro, criando e reformulando suas conjecturas. Também lhes permitiu socializar com os colegas do grupo para encontrara melhor solução para a atividade. Para Braumann (2002, p. 5) *aput* Ponte (2003),

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão 'detectivesca' indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andarem e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender, é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

Posso inferir que esta terceira atividade permitiu que os alunos compreendessem a necessidade do estudo do mapa, bem como conceitos fundamentais para sua resolução, tais como: área, perímetro, escalas, leitura e interpretação de legenda, conversão de unidades de medidas, proporcionalidade.

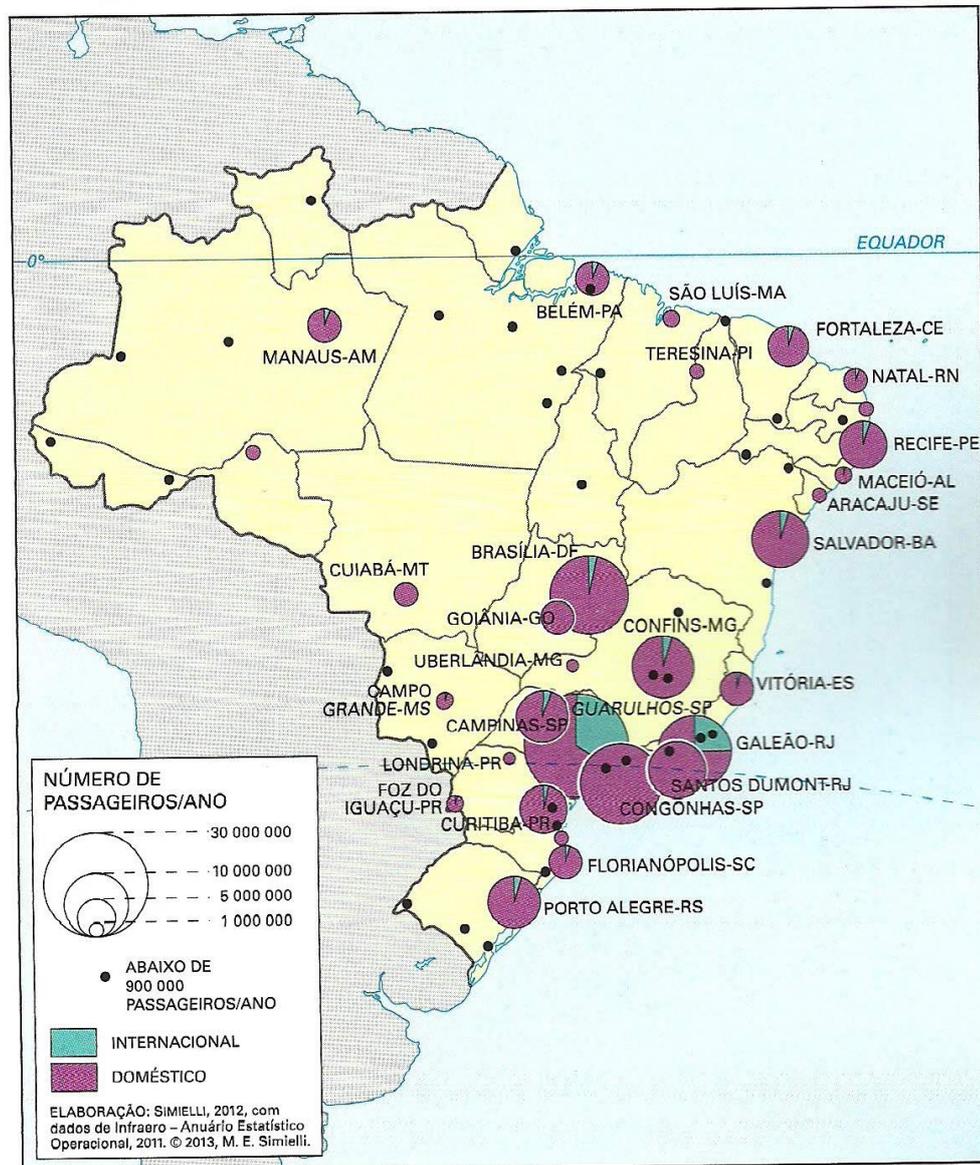
#### **4. Quarta atividade: Interpretando legendas e círculos**

Já tendo por base o estudo do mapa da terceira atividade, propus aos alunos que novamente interpretassem um mapa. Desta vez, a atividade trazia um mapa com uma legenda, em que as informações a serem analisadas estavam diretamente relacionadas à interpretação de circunferência e área do círculo.

Atividade 4 – No ano de 2014, o Brasil sediou a Copa do Mundo de Futebol, sendo que a grande campeã foi a seleção da Alemanha. Uma das preocupações antes do Mundial foi a falta de eficiência do transporte aéreo, o que não se confirmou. De posse do mapa a seguir, e com o auxílio de um pedaço de barbante e de uma régua, resolva as questões que seguem. Não se esqueça de descrever as estratégias utilizadas em cada questão.

Figura 8 – Mapa do Transporte Aéreo

## TRANSPORTE AÉREO – PASSAGEIROS



Fonte: Atlas geográfico escolar: ensino fundamental do 6º ao 9º ano/ IBGE (2010).

O mapa da Figura 7 prescindia de interpretação e compreensão da legenda nele disposta, sendo que a atividade fustigava nos alunos essa percepção. Sobre a importância da legenda em um mapa, Guerrero (2013, p. 94) comenta:

Todos os símbolos e cores usados na produção de um mapa devem ser representados de modo sistemático e organizados em uma legenda. A legenda do mapa tem a função de explicar para o leitor do documento cartográfico o significado de cada ponto, linha, textura ou cor usada no mapa. Por isso, recomendamos que a legenda seja elaborada antes do próprio mapa.

De posse do mapa, o aluno deveria responder aos seguintes questionamentos:

- a) Meça o comprimento da circunferência de 5, 10 e 30 milhões de passageiros, conforme a legenda, e determine o raio de cada círculo.
- b) De posse das medidas do comprimento das circunferências, determine a área de cada círculo.
- c) Com os valores do comprimento da circunferência e da área de cada círculo calculado, estabeleça qual relação pode ser feita com a legenda do gráfico.
- d) Determine o número de passageiros em Porto Alegre e Brasília.

Tendo em vista que a atividade envolveu muitas fórmulas utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas, segue a transcrição de algumas das suas respostas para a atividade:

No exercício 4, precisamos medir a circunferência de 5, 10, 30 milhões de passageiros. Com isso cada grupo ganhou um mapa de transporte aéreo de passageiros do Brasil para isso precisamos usar barbante, régua e compasso para descobrir o raio da figura do círculo. O Aluno 18 mediu a circunferência, com compasso e barbante e o resultado da circunferência deu 2,7 com o barbante e o raio deu 0,4 que foi o resultado de 5.000.000. Agora estamos medindo a circunferência de 10.000.000, com o compasso deu 4,082 e então medimos com o fio que deu 4,1 o valor do raio 0,65. Medimos o valor de 30.000.000 com compasso e o resultado da circunferência deu 6,594 e o fio deu 7,0, mas pegamos o valor mais próximo que é 6,8 e o raio é 1,5. Agora terminamos o exercício A e vamos para o B que é determinar a área de cada círculo, o resultado da área de 5.000.000 é 0,5024. Passamos para o exercício C que é achar uma relação estabelecida pelo gráfico. A legenda tem relação com a área e não com a circunferência. Terminamos o exercício C e vamos para o último que é o D que é determinar o número de passageiros em Porto Alegre e em Brasília. Não conseguimos concluir a atividade (Aluno 18).

Primeiro desfiamos o barbante e após fixamos o barbante em cima da circunferência de 5 milhões para saber o comprimento que é 25 cm e depois e depois fizemos a mesma coisa com 10 milhões que dá 40 cm seu comprimento, novamente fizemos a mesma coisa com o de 30 milhões que dá 6 cm seu comprimento. Após isto, fizemos a fórmula a fórmula de  $2 \pi r$  para sabermos o raio dele, junto com a sua metade de 5 milhões que seu raio que é 0,2512 e de 10 milhões que é 5,014 e de 30 milhões que é 6,28; e após para sabermos a área fizemos a seguinte fórmula  $A = \pi r^2$  para sabermos a de 5 milhões que é 0,198138, de 10 milhões que é 123,836576. A relação entre a legenda e o que fizemos foi a circunferência de 5 milhões é a metade de 10 milhões. Após isto olhamos na legenda a população pelas bolas de Porto Alegre que é 7 milhões de passageiros e de Brasília que é 35 milhões (Aluno 17).

A atividade que o professor passou para nós no dia 30/09/2015. O mapa do Brasil, iremos medir o número de passageiros/ano, com 1º um barbante e depois com uma régua.

$$\begin{aligned} \text{a) } 30.000.000 &= 6,5 \\ 10.000.000 &= 3,8 \\ 5.000.000 &= 2,2 \\ 1.000.000 &= \text{não será necessário} \end{aligned}$$

b) Depois de medirmos a  $C = 2\pi r$  multiplicamos por 3,14 (2.3,14) que é igual a 6,28. Medimos a "circunferência", e com ela achamos o raio e com o "raio" achamos a "área".

Porto Alegre = 7 mil  
Brasília = 16 mil

$$\begin{aligned} 7,02 &= 3,14 \cdot 2 \\ 7,02 &= 6,28 \cdot r \\ r &= \frac{7,02}{6,28} \\ r &= 1,11783 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 3,14 \cdot 1,11783^2 \\ A &= 3,14 \cdot 2,23566 \\ A &= 7,01997 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4,07 &= 2 \cdot 3,14 \cdot r \\ 4,07 &= 6,28 \cdot r \\ r &= \frac{4,07}{6,28} \\ r &= 1,1543 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 3,14 \cdot 1,1543^2 \\ A &= 3,14 \cdot 3,086 \\ A &= 9,69004 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2,05 &= 2 \cdot 3,14 \\ 2,05 &= 6,28 \cdot r \\ r &= \frac{2,05}{6,28} \\ r &= 3,0341 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 3,14 \cdot 3,06341^2 \\ A &= 3,14 \cdot 6,12682 \\ A &= 19,23821 \end{aligned}$$

c) 10 é o dobro de 5 e o 30 é o triplo de 10. (Aluno 12)

$$\begin{aligned} C &= 2 \pi r & d &= 1,2 \\ C &= 2 \pi 0,6 & &\rightarrow 10.000.000 \\ C &= 1,2 \pi \\ C &= 1,2 \cdot 3,14 & r &= 0,6 \text{ cm} \\ C &= 3,768 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 2 \pi r & d &= 0,7 \text{ cm} \\ C &= 2 \pi 0,35 & &\rightarrow 5.000.000 \\ C &= 0,7 \cdot 3,14 & r &= 0,35 \text{ cm} \\ C &= 2,198 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 2 \pi r & d &= 2 \text{ cm} & &\rightarrow 30.000.000 \\ C &= 2 \pi 1 & r &= 1 \text{ cm} \\ C &= 2 \cdot 3,14 \\ C &= 6,28 \end{aligned}$$

$$A = \pi r^2 \quad 10.000.000$$

$$A = 3,14 \cdot 0,6^2$$

$$A = 3,14 \cdot 0,36$$

$$A = 1,1304$$

$$A = \pi r^2 \quad 5.000.000$$

$$A = 3,14 \cdot 0,35^2$$

$$A = 3,14 \cdot 0,1225$$

$$A = 0,38465$$

$$A = \pi r^2 \quad 30.000.000$$

$$A = 3,14 \cdot 1^2$$

$$A = 3,14 \cdot 1$$

$$A = 3,14$$

A área do círculo da legenda do 5 para 10 será o dobro e do 5 para 30 será o sêxtuplo.

Analisando as respostas dos alunos, percebi que eles já estavam mais familiarizados com a metodologia da Investigação Matemática, fazendo conjecturas antes de iniciar a análise e solução dos problemas a eles propostos. Assim, após a leitura do texto da atividade, o aluno foi levado a investigar, discutir e resolver as situações-problema, vivenciando questões da Matemática Investigativa, conforme expressa Klesser (2006, p. 113):

Em uma metodologia centrada na resolução de problemas, o aluno tem a possibilidade de colocar em ação seus conhecimentos e desenvolver a capacidade para ler e gerenciar informações expressas de diferentes maneiras, ampliando sua visão acerca da Matemática.

No caso disposto, observei que os alunos mediram de forma satisfatória a circunferência, apresentando, entretanto, algumas dificuldades no cálculo da área, bem como no uso da unidade de medida correta. Isso, porém, não impediu os alunos de tecerem comentários sobre as possíveis soluções para a atividade, investigando-a do ponto de vista matemático. Para tanto, foi importante que o trabalho fosse realizado em grupo, com uma ampla interação entre os colegas, trocando ideias e compartilhando as soluções encontradas.

Quando o foco é a aprendizagem matemática, a interação é uma condição necessária no seu processo. Trocar ideias, compartilhar as soluções encontradas para um problema proposto, expor o raciocínio, são ações que constituem o “fazer” Matemático (BORBA et al., 2008, p. 27).

Dessa forma, mesmo com as dificuldades encontradas, os alunos tiveram êxito em investigar os problemas dispostos. Utilizaram adequadamente o material a eles fornecido, tecendo ideias para as possíveis soluções e investigando a esse respeito. Esse avanço ficou ainda mais claro nos comentários dos alunos quando da discussão sobre a atividade:

Neste dia eu não estava na aula eu estava no JITEU. No outro dia os colegas me explicaram, mas eu não consegui entender muito bem. Por isso eu achei a atividade muito difícil. Observando eles fazerem também percebi que eles também acharam a atividade bem complicada (Aluno 18).

A aula de hoje tivemos que concluir o mapa, mas meu grupo teve um pouco de dificuldade em encontrar os valores certos e por essa dificuldade não conseguimos concluir a atividade do mapa. Trabalhamos em grupo e isso nos ajuda muito. Na minha opinião, a aula foi boa, mas essa atividade é um pouco mais complicada, mas mesmo assim fizemos com esforço e dedicação (Aluna 21).

Foi com muito esforço árduo, físico (quase nada) e psicológico (principalmente psicológico) que conseguimos chegar aos resultados definitivos. Mesmo que tenhamos passado algum tempo a esmo empacados em certa questão, valeu o esforço (Aluno 02).

O comentário do Aluno 02 indica que, mesmo passando algum tempo “empacado” na atividade, o esforço teve a sua recompensa, valendo a pena toda a sua dedicação na atividade. Esse comentário demonstra a importância desse tipo de atividade, em que os alunos não recebem respostas prontas e se verifica no aluno um apreender, uma busca pelo conhecimento matemático. Também é importante destacar que, mesmo não resolvendo a atividade, muito alunos aprenderam com ela, com descobertas e troca de conhecimentos. Os alunos adquiriram mais confiança no seu fazer, pois comentaram que “não era necessário pedir sempre ajuda para o colega”; e que puderam “colocar suas opiniões” no grupo de trabalho e discutir com toda a turma. A esse respeito, Ponte (2003, p. 17) argumenta:

Quando trabalhamos um problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona.

Durante a realização dessa atividade, os alunos perceberam que as fórmulas anteriormente aprendidas nas aulas de matemática, apresentavam aplicabilidade para resolução do problema abordado. Buscaram relacionar raio, circunferência e área para fazerem uma interpretação da legenda oferecida no mapa. Abordar legendas que comumente os alunos não estão familiarizados permite que os alunos possam criar conjecturas sobre sua interpretação.

Portanto, a atividade, ainda que não tenha sido completada corretamente por todos os alunos, possibilitou o uso da Investigação Matemática como forma de solução de problemas. Permitiu ainda que os alunos se tornassem produtores de seu saber e que suas opiniões tivessem valor. Além disso, este tipo de metodologia permite a colaboração de todos os integrantes do grupo na elaboração da argumentação da atividade proposta, afim de resolvê-la.

### 5. Quinta atividade: Centro Administrativo e plano cartesiano

Tendo em vista os estudos dos mapas das atividades anteriores, os alunos, nesta atividade, deveriam interpretar um mapa, mas buscando relações com a estrutura do Centro Administrativo Municipal. Desta vez, a atividade estava diretamente relacionada ao ambiente em que seria realizada a atividade.

Atividade 5 – O município de Teutônia foi emancipado em 24 de maio de 1981 e a Prefeitura Municipal de Teutônia localiza-se no Centro Administrativo. Sua construção lembra um plano cartesiano. Observe os seguintes mapas:

MAPA 1



Fonte: Prefeitura Municipal de Teutônia 2014

MAPA 2



Fonte: Google earth, 2014.

Construa um diário de viagem, filmando e descrevendo todas as atividades desenvolvidas na realização das seguintes tarefas, bem como as estratégias utilizadas:

- Dirija-se para o quadrante onde há os maiores e menores números, e determine as coordenadas do relógio.
- Dirija-se para o quadrante nordeste e determine as coordenadas de um dos símbolos do nosso município: “sapato de pau”.
- Localize a sala, sabendo que a coordenada é (1,0).
- A rua da nossa escola homenageia um médico muito importante para Teutônia e no Centro Administrativo existe uma estátua em sua homenagem. Localize o seu quadrante e a respectiva coordenada.
- Localize duas salas, do mesmo quadrante, cuja soma dos números resulta em 33. Determine as coordenadas desta posição.
- O formato lembra o mapa do município na sua fundação em 1981 e lá se encontram também duas estátuas que lembram os primeiros colonizadores do município. Determine a posição.
- Analisando a posição das salas, é possível elaborar um padrão de posicionamento. Escreva o que o grupo constatou e justifique.
- Analisando as salas de um mesmo quadrante, o que podemos concluir com a soma de seus números? É possível estabelecer padrão entre os diferentes quadrantes? Escreva o que o grupo constatou. Justifique sua resposta

Esta atividade foi realizada no Centro Administrativo da cidade. Todos os alunos conheciam o local, pois todos são moradores da cidade de Teutônia, e por lá já haviam circulado. Os grupos foram deslocados até o local, com auxílio do transporte escolar municipal, e deixados em quadrantes diferentes. A distribuição em

quadrantes diferentes foi realizada para que cada grupo buscasse seguir o seu próprio caminho. Já na primeira atividade, isso pôde ser visto, conforme o diálogo<sup>3</sup>:

*Aluno 02: Nós fomos primeiro olhando. Agora vamos pegar o número da sala.*

*Professor: Mas para você saber (aluno fala no meio da explicação)*

*Aluno 04: Tipo, o maior aponta para sala de lá e o menor para a outra.*

*Professor: Mas se você pensasse como o plano?*

*Aluno 01: Como assim?*

*Professor: X e Y (uma aluna respira profundamente e continua escutando).*

*Professor: Quem é o eixo X e quem é o eixo Y?*

*Aluna 07: Agora ferrou?*

*Professor: Aqui é o relógio.*

*Professor: Onde no mapa tu acha que o eixo X e o eixo Y. [...]*

*Aluno 07: (Mostrando no mapa) Aqui é o X e aqui é o Y.*

*Professor: Então tu tem que pensar onde tu estás aqui (mostrando no mapa).*

*Aluna 04: Dá para ver o relógio daqui.*

*Professor: Então quem é o X e quem é o Y?*

Durante esta intervenção, observei a interação e a busca de argumentos entre os companheiros do próprio grupo, conforme o diálogo a seguir:

*Aluno1: Ah!!! Então esse é o X e esse é o Y.*

*Aluno2: Como assim?*

*Aluna1: Olha aqui.*

*Aluna1: Aqui estão as casinhas.*

*Aluno1: (Aluno vira o mapa e mostra) Aqui estão as outras casinhas.*

*Aluno2: Como assim?*

*Aluno1: Olha as casinhas lá?*

*Aluno1: Aquela é grande e a outra é pequena. E lá a outra é grande e aquela é a pequena.*

*Aluno1: Olha lá tem três casinhas e lá têm quatro.*

*Aluno2: Então essa deve ser o eixo x e aquela o eixo Y?*

Posteriormente, fui questionado por um dos grupos em relação aos eixos. Quando respondi que a interpretação deles estava correta, observei o semblante de satisfação do Aluno 2. O comentário do Aluno1, indica que, mesmo passando algum tempo analisando a atividade, o esforço teve a sua recompensa. Esse aluno conseguiu interpretar que a estrutura do local poderia representar o plano

---

<sup>3</sup>Os diálogos que seguem nessa atividade, são oriundos da transcrição das filmagens efetivadas durante a realização da atividade..

cartesiano, sendo possível formular ideias acerca das atividades propostas. Os comentários do referido aluno, demonstram a importância desse tipo de atividade, em que os alunos não recebem respostas prontas. Verifiquei com esta atividade, um apreender, uma busca pelo conhecimento matemático e, neste caso, a capacidade de fazer outra leitura do mapa e do prédio como um todo.

A interpretação da imagem e a leitura do problema foram executadas de maneira correta pelos alunos. É importante salientar, neste momento, que o Aluno 1, que conseguiu interpretar essa atividade, apresentava dificuldades na parte escrita. Porém, sua interpretação gráfica sobre o problema é que permitiu ao grupo continuar a realização das atividades solicitadas. A Aluna 2, nas demais atividades, sempre solicitava sua ajuda para localização, nas outras tarefas.

Outro aspecto importante a ser destacado nesta atividade foi a interação que houve entre os grupos, para finalizar e executar as tarefas após a compreensão do mapa. Todos os grupos buscaram interagir durante algum momento. Seus caminhos se entrelaçaram durante a execução da atividade, pois precisaram passar pelos quadrantes do plano cartesiano, buscando solucionar a atividade proposta.

## **6. Sexta atividade: figuras não regulares**

Na sexta atividade, de posse de um mapa, propus aos alunos que apontassem e calculassem a população do país mais populoso no mapa, bem como que duplicassem, triplicassem, quadruplicassem e também dividissem cada lado do quadrado para, assim, apontarem o que aconteceria em cada situação com a área e o número de habitantes. Assim, entreguei aos alunos o mapa da figura 8 e alguns questionamentos:



Contornamos a China e o valor resultante é 28,3 então dividimos este valor por quatro ( $28,3 : 4$ ) que resultou em 7 075, agora fizemos (l x l) para sabermos o valor da área  $7\ 075 \times 7\ 075 = 50.055625$  após fizemos a regra de três. (a área do quadrado é 0,09).

$$\begin{array}{r} 0,09 \\ 50.055625 \end{array} \begin{array}{l} \swarrow \nearrow \\ \nwarrow \searrow \end{array} \begin{array}{l} 2.000.000 \\ x \end{array}$$

$$0,09x = 100111250$$

$$x = 1112347222,2 \text{ população da China.}$$

Pra as três próximas atividades fizemos isto.

$$0,3 \times 2 = 0,6 \times 0,6 = 0,36 \text{ (área do quadrado duplicada)} \rightarrow 4 \times 0,09 = 0,36$$

$$0,3 \times 3 = 0,9 \times 0,9 = 0,81 \text{ (área do quadrado triplicada)} \rightarrow 9 \times 0,09 = 0,81$$

$$0,3 \times 4 = 1,2 \times 1,2 = 1,44 \text{ (área do quadrado quadruplicada)} \rightarrow 16 \times 0,09 = 1,44$$

Agora dividimos a população por 2,3,4 porque se a área for duplicada, triplicada, quadruplicada a população vai se espalhar 2,3 ou 4 vezes mais então dividimos a população por 4,9 e 16.

$$1112347222 : 4 = 27.808.562 \rightarrow 2$$

$$1112347222 : 9 = 12.359.361 \rightarrow 3$$

$$1112347222 : 16 = 69.522.140 \rightarrow 4$$

Mesmo que a área aumente a população continua a mesma e ela só se espalha mais.

Agora dividimos o lado do quadrado pela metade que resultou em 0,5 depois fizemos (l x l)  $0,15 \times 0,15 = 0,0225$ . Dividimos também a área da China que resultou em 14,15. Então fizemos a regra de três.

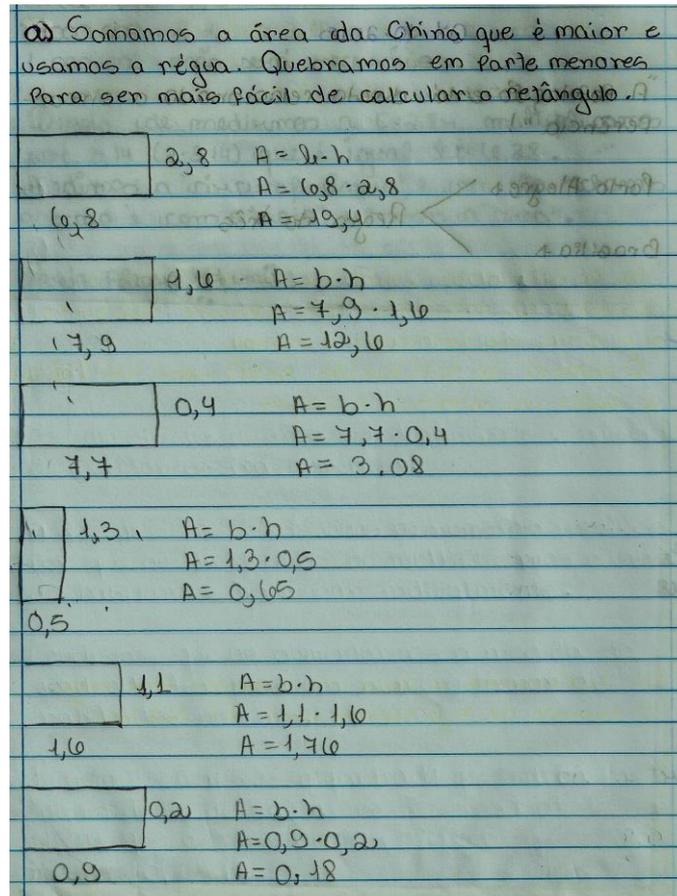
$$\begin{array}{r} 0,15 \\ 14,15 \end{array} \begin{array}{l} \swarrow \nearrow \\ \nwarrow \searrow \end{array} \begin{array}{l} 2000000 \\ x \end{array}$$

$$0,15x = 28.300.000$$

$$X = 188.666.666,67 \text{ (Aluno 18).}$$

O Aluno 18 contornou uma figura retangular com o barbante, obtendo o perímetro. Após, com a medida do perímetro, dividiu em quatro partes iguais, construindo um quadrado. Então, calculou sua área, pois a figura que representava a China poderia ser dividida em retângulos ou quadrados, como visto pelo Aluno 12 e representada na figura 9.

Figura 9 – Resolução do aluno 12



Fonte: Caderno do Aluno 12

Este aluno decompôs a área da China em quadrados e retângulos o que, no seu ponto de vista, facilitou a tarefa de descobrir a área solicitada, fazendo analogia com a população do país. Em contrapartida, o aluno 20 entendeu que a Índia seria a resposta correta, assim respondendo a atividade:

a) Índia  $P = 28,25 +$  somando todos os lados da figura. Após, dividindo-o por 4 para a formação de um quadrado. Para a área fizemos l.l (7,0625), obtendo 49,8789062.

0,09  $\swarrow \searrow$  49,8789062 – regra de três  
200000  $\swarrow \searrow$  x

$$0,09x = 99757812,4$$

$$x = 99757812,4 : 0,09$$

$$x = 1.108.420.138$$

b) Medida do lado do quadrado duplicada = 14.125.  $A = 199.515625$  (dividir por 49,87) A área do quadrado irá aumentar 4x e sua população irá diminuir 4x.

c) Medida do lado do quadrado triplicada = 21.1875.  $A = 448.910156$  (dividir por 49,87) A área do quadrado irá aumentar 9x e o número de habitantes irá diminuir 9x.

d) Medida do lado do quadrado quadruplicada = 28,25 perímetro.

$A = 798.0625$  (dividir por 49,87) A área do quadrado irá aumentar 16 x e seus habitantes diminuir 16x (Aluno 20).

O Aluno 20, quando argumentou no grande grupo, percebeu que o seu valor era inferior ao da China, o que não invalida as suas conclusões e as técnicas matemáticas desenvolvidas. Há de se consignar que os alunos, além de utilizarem fórmulas matemáticas na busca das respostas, procuraram desenvolver a questão com a soma das medidas, os comparativos, conceituando e divagando sobre a melhor forma de elucidarem a atividade. Assim, ainda que nem todos tenham acertado as questões, a divergência de ideias e caminhos para resolver a atividade comprova uma busca por parte dos alunos sobre as melhores estratégias a serem usadas.

O avanço no pensar matemático foi perceptível nos alunos. As atividades anteriores tiveram um papel importante nesse sentido, fustigando a busca por melhores estratégias para a solução das questões, seja por aproximações, cálculos com fórmulas anteriormente conhecidas, bem como por comparações com as estratégias adotadas em outras atividades.

De posse das respostas, e conversando com os demais colegas, os alunos elaboraram as seguintes opiniões a respeito desta atividade:

Calcular este tipo de mapa é extremamente frustrante, pois nos primeiros momentos que realizei alguma das questões, consegui, ou achei que consegui, distinguir, obter, visualizar resultados pequenos que fossem, para concretizar a atividade proposta. Porém, quebrar a cabeça acaba se tornando importantíssimo para se manusear e finalizar esta e qualquer outra proposta que seja, importa que ao meu ver, acaba sendo um desafio, mesmo que ele seja difícil. A questão do caderno, ela não está muito completa, sobretudo a respeito desta última atividade, mas pretendo ainda preenche-lo com mais conjecturas. Obs: refiz alguns de meus cálculos, que ao meu ver, estavam errados e incompletos (questão A). Consegui, pois chegar a um resultado melhor do que o anteriormente (Aluno 20).

Achei muito interessante porque conseguimos achar os resultados certos e fizemos o possível para acertar, achei muito legal. Nesta aula achei que todos os alunos conseguiram fazer as atividades que o Prof. passou para nós ontem que era difícil primeiro, mas foi facilitando cada vez que fomos entendendo (Aluno 12).

Eu achei a atividade fácil. O grupo se ajuda bastante e isso torna a atividade mais fácil. Não é tão difícil calcular a área e o perímetro, a população também foi tranquilo de calcular. A atividade em grupo é mais fácil, pois os integrantes podem se ajudar e ensinar uns aos outros quando alguém não sabe. Sozinho é mais difícil, porque a pessoa tem que pensar sozinha (Aluno 18).

Esta atividade foi bem pensadora: por que devíamos fazer vários cálculos. Erramos em várias coisas como: saber qual é o país com maior população (escolhemos a Índia), erramos na hora de dizer que área aumentava 4 vezes, pois achamos só duas vezes. A área aumentava 9 vezes e achamos 3 vezes; a área aumentava 16 vezes e achamos 4 vezes. Eu fui muito comprometido com o um grupo e ajudei o meu grupo no que eu conseguia fazer para auxiliá-los. Fui muito sério nesta atividade (Aluno 17).

A resposta do Aluno 20 demonstra um avanço não apenas na realização da atividade, mas no conhecimento matemático. O aluno se sentiu desafiado a fazer e refazer a questão, investigando a busca pela solução correta. Reconheceu que “quebrar a cabeça” foi de fundamental importância para a resolução da questão, como seria para qualquer outra atividade. Este pensar do Aluno 20, ao se tornar público no grupo, revelou-se um consenso entre os demais. Todos concordaram que a busca por ideias, pensando e repensando as formas de resolver a atividade, é o que faz possível a sua correta conclusão.

A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação (PONTE, 2003, p. 41).

Ainda que alguns alunos não tenham obtido sucesso na realização da tarefa, a busca para descobrir como fazê-la e como descrevê-la, revela um avanço. O Aluno 17 é um exemplo, uma vez que, mesmo tendo se equivocado nas respostas, demonstrou um comprometimento com o grupo na busca pela elucidação da atividade, inclusive no que tange à forma como esta foi por ele descrita na sua conclusão. A Matemática não se faz apenas de acertos; pode ser feita também de tentativas até que o êxito seja obtido. Aliado a isso, discutir as teses, fórmulas e conjecturas utilizadas e que não deram certo também é uma forma de aprender Matemática. Conforme Ponte (2003 p. 116),

Os alunos estão habituados a escrever respostas sintéticas em Matemática, quando muito apresentando os cálculos usados para obtê-las e, por isso, faz-lhes muitas vezes confusão o pedido de descrever os processos usados, em especial no que respeita às estratégias tentadas e abandonadas e às conjecturas testadas e rejeitadas. Para os alunos, fazer esse tipo de relatório é, também, uma aprendizagem.

Dito isso, a atividade revelou-se importante, pois proporcionou que os alunos percebessem a relevância de estudar as questões a eles dispostas. Fizeram e refizeram cálculos, usando e mesmo abandonando estratégias para, assim, achar a melhor solução da tarefa.

O Aluno 18 destacou o trabalho em grupo, como sendo fundamental para sua confiança na realização das atividades. Para o referido aluno, no grupo ele podia dialogar de maneira mais tranquila, escutando e sendo escutado pelos demais companheiros de grupo. Começou a se sentir confiante, ao ponto de não necessitar pedir sempre ajuda para sua colega.

Ao terminar a descrição e a análise dos dados decorrentes das atividades propostas, posso inferir que as atividades investigativas, relacionadas com o tema Cartografia, possibilitaram a exploração dos seguintes conceitos matemáticos: unidades de medida, perímetro, área, escala, proporção, regra de três, grandezas diretamente e inversamente proporcionais, localização, figuras planas, interpretação gráfica, interpretação de figuras e imagens, orientação. Também, ocorreu o desenvolvimento da escrita e da fala, pois os alunos tiveram que expressar seus pensamentos, por escrito e também oralmente, para os demais participantes desta pesquisa.

No próximo capítulo, apresento algumas considerações acerca desta intervenção pedagógica, com as quais busco responder à questão de pesquisa. Saliento que são percepções pessoais sobre o que ocorreu e que outro pesquisador, talvez, pudesse ter outras opiniões sobre a investigação efetivada.

## 5. CONSIDERAÇÕES SOBRE A PESQUISA

A Matemática e a Cartografia apresentam ligações possíveis e, no presente estudo, foi perceptível a utilização de conceitos e mesmo de fórmulas matemáticas na área da Cartografia. Observei, por meio da pesquisa, que há ligação entre essas áreas de conhecimento e que a Investigação Matemática contribui para a solução dos mais variados problemas relacionados à Cartografia. Ainda, ficou evidente que a Cartografia desperta um fascínio nos alunos, ainda mais se considerarmos a sua importância do ponto de vista histórico e mesmo no que diz respeito à localização do homem no seu meio.

Aproveitando esse fascínio, com o presente trabalho, busquei: em primeiro lugar, explorar com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental atividades utilizando a metodologia de Investigação Matemática e o tema Cartografia; depois, identificar quais regras matemáticas são utilizadas pelos alunos quando resolvem atividades investigativas envolvendo Cartografia; e, por fim, estimular a cultura da escrita nas aulas de Matemática.

Quanto ao primeiro objetivo, disponibilizei, ao longo de toda a intervenção pedagógica, seis atividades que foram realizadas em 15 encontros, usando, em média, dois encontros por atividade. Saliento que, nas atividades, houve a utilização de mapas, anamorfozes, plantas e conceitos relacionados ao ensino de Cartografia, estando estes presentes em todas as atividades.

É importante destacar que o desenvolvimento de atividades como as deste estudo, no momento atual, é cada vez mais necessário, pois a utilização de celulares com aplicativos que permitem a localização do indivíduo em ambientes antes desconhecidos para ele, lhe possibilita um deslocamento com maior facilidade e rapidez. Assim, o estudo da Cartografia voltado para a necessidade de localização dos alunos na escola, no município, no país, dentre outras atividades, objeto do presente trabalho, fez com que estes fossem despertados para o querer saber.

No primeiro momento de cada atividade, os alunos, em pequenos grupos, discutiam as estratégias de execução das questões e elaboravam suas conclusões sobre elas. Num segundo momento, ocorria a socialização das estratégias e conjecturas no grande grupo, para que os demais alunos tivessem contato com maneiras diferentes de elucidar as atividades solicitadas pelo professor.

Busquei, durante a elaboração das tarefas, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), propor atividades que propiciassem e potencializassem desafios para os alunos. Ademais, que não fossem meras aplicações de fórmulas, levando-os, assim, a pensar a respeito, elaborando suas próprias conjecturas, discutindo-as em grupo e reformulando-as, quando necessário.

Em relação ao segundo objetivo, identifiquei que os alunos, no decorrer das atividades, exploraram os seguintes conceitos matemáticos: unidades de medida, perímetro, área, figuras planas, regra de três, grandezas diretamente e inversamente proporcionais, interpretação gráfica, localização, orientação, interpretação de figuras e imagens, e escalas. Para o desenvolvimento desses conteúdos, foram usadas diferentes estratégias, tais como: a) uso de estimativa; b) para cálculos de área e perímetro: utilização do barbante para medidas não lineares, sendo que ora utilizavam para toda a figura, ora apenas para as partes não lineares; c) regra de três por redução a unidade e algoritmo de resolução; d) transformação de figuras não regulares em quadrados e retângulos; e) representação de trajeto a ser efetuado com escala e orientações diferentes; f) cálculos e fórmulas; g) redução e ampliação de áreas de figuras por meio de proporcionalidade (cálculo de escala); h) interpretação gráfica por meio de análise e leitura.

Diante do exposto, posso inferir que a Cartografia serviu como um instrumento para o ensino de alguns conteúdos matemáticos, servindo como um despertar para que os alunos verificassem a necessidade da Investigação Matemática na busca pela solução dos problemas. Percebi que é mais importante desenvolver nos alunos a motivação para descobrir como chegar nas respostas e soluções, fazendo com que pensem cada vez mais sobre a questão, que investiguem, questionem, do que apenas e tão somente transmitir conceitos e fórmulas prontas. Muitas vezes, mesmo não acertando as respostas, era visível nos

alunos que estes estavam apreendendo Matemática, fazendo conjecturas, buscando soluções, pensando sobre diferentes técnicas e fórmulas para a solução dos problemas.

Para alcançar terceiro objetivo (estimular a cultura da escrita matemática), desafiei os alunos a escreverem, em um diário, todas as estratégias de resolução pensadas e discutidas no grupo. Ao final de cada atividade deveriam expor, por escrito, sua opinião sobre a atividade, as dificuldades e facilidades encontradas, assim como, sua interação com os demais membros do grupo.

Nas primeiras tarefas, verifiquei que os alunos apresentavam dificuldades na escrita, visto que não estavam familiarizados com o tema. Essa dificuldade, porém, diminuía à medida que iam avançando nas tarefas e discussões em grupo. Os alunos, com o transcorrer das atividades, foram se acostumando a deliberar e escrever sobre as conjecturas.

As dificuldades iniciais foram facilmente superadas pelos alunos, o que se verifica na evolução da sua escrita e na sua argumentação sobre as questões. No momento de socialização das atividades, surgiam vários argumentos, tanto escritos como orais, o que acabou proporcionando, a todos, identificar estratégias variadas. Entretanto, ressalvo que a cultura da escrita ainda precisa ser desenvolvida nas aulas de Matemática, pois os alunos apresentam lacunas quanto a conceitos e linguagem matemática.

Em relação ao problema da pesquisa que foi “como alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública da Educação Básica da região do Vale do Taquari, operam com atividades de Investigação Matemática envolvendo cartografia?”; posso inferir que: os alunos por meio dessa atividade tiveram a possibilidade de estarem mais próximos da cultura da escrita, pois em todas as atividades, os alunos foram convidados a escreverem sobre elas; o fazer coletivo nas aulas, por meio do trabalho em grupo, possibilitou uma maior interação entre os integrantes do grupo, contribuindo também para a autonomia de cada um deles; as conjecturas realizadas pelos alunos, permitiu para os mesmos reverem a Matemática aprendida, bem como, apreenderem com as atividades propostas. O

uso de estimativas, regra de três, interpretação gráfica, transformação de figuras foram as estratégias mais utilizadas no transcórre das atividades invrestigativas.

Destaco que é gratificante para o professor quando os discentes demonstram interesse pelo conteúdo a ser trabalhado. Percebi que o estudo da Matemática utilizando a Cartografia proporcionou a busca pelos conhecimentos. Mais do que isto, proporcionou com que os alunos percebessem a necessidade de aprender Matemática e de investigar a este respeito.

Assim, posso inferir que um aluno que busca o conhecimento não tem limites, podendo facilmente fazer novas interjeições, suposições e até mesmo, porque não, novas descobertas, antes sequer pensadas. Assim, o ensino da Matemática deveria ser algo dinâmico, visto que pode e deve servir de inspiração para novas descobertas. Além disso, a Cartografia, aliada à Matemática, pode auxiliar nesse contexto, permitindo que se elaborem outras possibilidades de estudos e metodologias para o ensino desta disciplina.

Durante toda a prática efetivada também ocorreu o trabalho em grupo. Os alunos, ao realizarem as atividades em pequenos grupos, tinham a possibilidade de expor suas ideias, que eram escutadas e debatidas pelos demais integrantes. Nesses momentos, também tinham a possibilidade de ouvirem as ideias dos demais colegas, havendo assim uma troca de experiência nos pequenos grupos. Essa liberdade de exporem suas opiniões permitiu que alguns alunos se tornassem produtores do seu saber. Isso pode ser confirmado pela fala do Aluno 18:

Eu achei a atividade fácil. O grupo se ajuda bastante e isso torna a atividade mais fácil. Não é tão difícil calcular a área e o perímetro, a população também foi tranquilo de calcular. A atividade em grupo é mais fácil, pois os integrantes podem se ajudar e ensinar uns aos outros quando alguém não sabe. Sozinho é mais difícil, porque a pessoa tem que pensar sozinha (Aluno 18).

Dentre as dificuldades que enfrentei na execução desta pesquisa, posso citar os poucos trabalhos, na literatura, envolvendo atividades investigativas e Cartografia, o que fez com que tivesse de elaborar atividades sem dispor de exemplos. Saliento que verifiquei a ausência de tarefas usando a Cartografia em

aulas de Matemática. Outra dificuldade que encontrei foi que os alunos acabaram demorando muito no decorrer das resoluções, o que fez com que a prática fosse ampliada no número de aulas inicialmente previstas.

Percebi que, quando são desenvolvidas atividades investigativas, não se pode ficar controlando o tempo da atividade, porque o fazer Matemática dos alunos depende das interações antes vivenciadas em sua trajetória discente. Os alunos estão acostumados a exporem suas ideias, apenas por fórmulas e cálculos prontos. Têm dificuldade de expor suas ideias de resolução por escrito e oralmente, no grande grupo.

Ao terminar esta dissertação, gostaria de comentar que elas se tornou um marco em minha trajetória como estudante, professor e pesquisador, pois passei a compreender a importância da escrita e da leitura. A partir destes estudos, buscarei proporcionar aos meus alunos diferentes tendências e metodologias, para melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem. Também continuarei pesquisando e desenvolvendo novas práticas que estimulem a cultura da escrita em Matemática.

Por fim, espero que o presente trabalho possa servir de inspiração para que novas práticas sejam pensadas, formuladas e desenvolvidas em sala de aula em diferentes contextos e realidades. Tais práticas, sendo diferenciadas, podem proporcionar que o aluno se torne ator da sua própria história na busca pelo conhecimento matemático.

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, Paul S. RIBEIRO, Antônio Jorge. MONMONIER, Mark S. A Natureza da Cartografia. In: ANDERSON, Paul S. et al. **Princípios da Cartografia Básica**. 1982. Disponível em: <<http://www.fcav.unesp.br/Home/departamentos/engenhariarural/TERESACRISTINATARLEPISSARRA/Cartografia-Basica.pdf>> Acesso em: 08 jul. 2014.

BARROS, Kliver Moreira. **Formação de conceitos matemáticos: um estudo baseado na teoria do ensino desenvolvimental**. Dissertação de Mestrado. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Campus Jataí. 2015. Disponível em: <[https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=3008773](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3008773)>. Acesso em: 17 mar. 2017.

BORBA, M.C.; MALHEIROS, A. P. S; ZULATTO, R. B. A. **Educação a Distância online**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Geografia**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998a. 156 p.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998b. 148 p.

BRUM, M. G. N. **Atividades investigativas para o ensino de matemática para alunos de 5ª série do Ensino Fundamental**. 2012. 127f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física e de Matemática Instituição de Ensino: Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, 2012. Disponível em: <<http://sites.unifra.br/Portals/13/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2012/dissertacao%20-%20maria%20gorete.pdf>> Acesso em: 08 jul. 2014.

CÂNDIDO, Patrícia T. **Comunicação em Matemática**. In: Diniz & Smole (Org.). Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 15-28.

CERVO, Amado L. e BERVIAN, Pedro A. **Metodologia Científica : para uso dos estudantes universitários**. 3.ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

CHIUMMO, Ana. **O Conceito de Áreas de Figuras Planas: capacitação para professores do ensino fundamental**. (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, SP, 1998. Disponível em: <[http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/ana\\_chiummo.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/ana_chiummo.pdf)> Acesso em: 08 jul. 2014.

DUARTE, Paulo A. **Fundamentos de cartografia**. 2.ed. Florianópolis: Ed. Da UFSC, 2002. 208p.

FRANCISCHETT, Mafalda N. **A cartografia no ensino de geografia: a aprendizagem mediada**. Cascavel: EDUNIOESTE, 2004. 198p.

FREITAS, M. T. M. **A escrita no processo de formação contínua do professor de matemática**(Tese de doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2006.

GIONGO, Ieda Maria et. All. **Noções de Localização nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Produto Educacional. Centro Universitário UNIVATES. 2013. Disponível em: <[https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/2013/nocoos\\_de\\_localizacao\\_nos\\_anos\\_iniciais\\_do\\_ensino\\_fundamental.pdf](https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/2013/nocoos_de_localizacao_nos_anos_iniciais_do_ensino_fundamental.pdf)> Acesso em: 08 jul. 2014.

GUERRA, Sheila Heydt Réquia. **Investigação Matemática: uma proposta de ensino de estatística para o 8º Ano do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado. Centro Universitário Franciscano de Santa Maria. 2015. Disponível em: <[https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=2376223](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2376223)>. Acesso em: 17 mar. 2017.

GUERRERO, Ana Lúcia de Araújo. **Alfabetização e letramento cartográficos na geografia escolar**. São Paulo, Edições SM, 2012.

IBGE. **Atlas geográfico escolar: ensino fundamental do 6º ao 9º ano/ IBGE**. – Rio de Janeiro: IBGE, 2010.

JOLY, Fernand. **A Cartografia**. Trad. Tânia Pellegrini. Campinas, SP. Papyrus, 1990.

KLESSER, M. C.. **Educação de Jovens e Adultos: (dê)sconstruindo saberes nos espaços do aprender e ensinar matemática**. Zetetiké: Campinas, v.14, n. 26, p.103 - 121, jul/dez, 2006.

LIMA, E. L. et. All. **Medidas e Formas em Geometria**. Coleção do Professor de Matemática Sociedade Brasileira de Matemática, SBM. Rio de Janeiro. Reimpressão, março, 1991.

LUDKE, Menga, ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MARCHI, Vinicius Machacheski. **Atividades Investigativas no Ensino da Matemática Financeira: as estratégias empregadas com uso de planilhas eletrônicas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista “Julho de Mesquita Filho”. 2014. Disponível em: <[https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=1385132](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1385132)> Acesso em 17 mar.2017.

MENEZES, Paulo Márcio Leal de; ÁVILA, Adriany de Souza. **Novas Tecnologias Cartográficas em Apoio ao Ensino e Pesquisa em Geografia**. Anais do X

Encontro de Geógrafos da América Latina . São Paulo: USP, 2005. Disponível em:<<http://observatoriogeograficoamericalatina.org.mx/egal10/Nuevatecnologias/Cartografiatematica/13.pdf>>. Acesso em: 17 mar. 2014.

MOREIRA, Marco A. **Pesquisa em Ensino: Métodos Qualitativos e Quantitativos**. Porto Alegre: Instituto de Física, UFRGS, 2009. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios11.pdf>>. Acesso em: 07 set. 2014.

MOURA FILHO, J. **Elementos de cartografia: técnica e histórica**. Volume 1. Belém. Falangola, 1993.

NEVES, Evandro Marques das. **Rigidez dos triângulos**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. 2014. Disponível em: <[https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=1918483](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1918483) > Acesso em: 17 mar.2017.

OLIVEIRA, Cêurio de. **Dicionário cartográfico**. 2. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 1983. 781p., il.

OLIVEIRA, Cêurio de. **Curso de Cartografia Moderna**. 2ª ed. Rio de Janeiro: IBGE, 1993.

OLIVEIRA, José Damião Souza de. **A Geometria do compasso (1797) de Mascheroni (1750-1800) em atividades com o Geogebra**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2014. Disponível em: <[https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=2957646](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2957646) > Acesso em 17 mar. 2017.

PENTEADO, Miriam Godoy; Novos Atores, **Novos Cenários**: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 297-313.

PONTE, João P. da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, João P. **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do ProfMat 2003 (CDROM, pp. 25-39). Lisboa: APM, 2003.

RIOS, Ricardo Bahia. MENDES, Julyend Silva. **Alfabetização Cartográfica: práticas pedagógicas nas séries iniciais**. 10º Encontro Nacional de Prática de Ensino em Geografia Disponível em: <<http://www.agb.org.br/XENPEG/artigos/GT/GT6/tc6%20%288%29.pdf> > Acesso em: 17 mar. 2017.

ROCHA, Maria L. P. C. **Matemática e Cartografia: Como a Cartografia pode Contribuir no Processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática?** 2004. 128f. Dissertação (Mestrado) - Núcleo de Apoio ao Desenvolvimento Científico,

Universidade Federal do Pará, Belém. 2004. Disponível em: <<http://www.ufpa.br/npadc/gemm/documentos/docs/dml.pdf>>. Acesso em: 17 mar. 2014.

ROSA, Carine Pedroso da. **Investigação Matemática: contribuições para o ensino de sequências e padrões para alunos do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado. Centro Universitário Franciscano de Santa Maria. 2016. Disponível em: <[https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=3589067](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3589067)>. Acesso em: 17 mar. 2017.

SCHMITT, Fernanda Eloisa. **Abordando Geometria por meio da Investigação Matemática: Um comparativo entre o 5º e 9º Anos do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado. Centro Universitário UNIVATES. 2015. Disponível em: <[https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=2365965](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2365965)>. Acesso em: 17 mar. 2017.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação.2**. Bolema, nº 14, p. 66 a 91, 2000.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**, tradução: Arlando de Andrade Figueredo, Jornei Cequeira Barbosa. Campinas, SP:Papirus, 2008.

SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria I. (Orgs.) **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

TOSTES, Viviane de Oliveira. **A Comunicação Cartográfica Aplicada à Representação de Agravos Endêmicos na Cidade do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2006. Disponível em: <[http://www.cartografia.ime.eb.br/trabalhos/MESTRADO/2006\\_VIVIANE\\_DE\\_OLIVEIRA\\_TOSTES/Dissertacao.pdf](http://www.cartografia.ime.eb.br/trabalhos/MESTRADO/2006_VIVIANE_DE_OLIVEIRA_TOSTES/Dissertacao.pdf)>. Acesso em: 17 mar. 2014.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Trad. Daniel Grassi. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

## Apêndice A: Termo de Consentimento

### **Modelo de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido**

O mestrando Mateus Mariani, integrante do corpo discente do Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, do Centro Universitário UNIVATES, realizará encontros com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental com a finalidade de desenvolver seu projeto de pesquisa denominado “Cartografia e Investigação Matemática: possibilidades para uma intervenção pedagógica com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental”. O objetivo geral desta pesquisa é investigar como os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental operam com atividades de Investigação Matemática envolvendo cartografia e conteúdos matemáticos. Para tanto, cada encontro será gravado em vídeo, visando obter informações a respeito dessa temática na perspectiva dos integrantes. Cada aluno receberá um caderno para ser utilizado como diário de campo, em que as atividades serão realizadas e as dúvidas explicitadas.

O conteúdo dos diários de campo, as fotos e as gravações serão utilizados somente pelo mestrando e ficarão sob sua guarda, dando-se garantia de manutenção do caráter confidencial e anônimo das informações que, juntamente com os resultados, estarão sempre sob sigilo ético. Não serão mencionados os nomes dos participantes em nenhuma apresentação oral ou trabalho escrito que venha a ser publicado. Além disso, a participação não representará nenhum custo para os sujeitos envolvidos.

A concordância em participar das atividades, das gravações ou de qualquer outro meio de investigação dá garantia de receber, a qualquer momento, resposta a toda pergunta ou esclarecimento de qualquer dúvida acerca da pesquisa e de seus procedimentos; liberdade de retirar o consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo, sem que isso traga qualquer prejuízo ao participante.

Pelo presente Termo de Consentimento, o responsável pelo participante declara que foi esclarecido, de forma detalhada, livre de qualquer forma de

constrangimento ou coerção, dos objetivos e dos procedimentos a que o aluno será submetido e autoriza a participação por meio deste questionário.

O pesquisador responsável é o mestrando Mateus Mariani, do Centro Universitário UNIVATES de Lajeado, RS, orientado pela professora Dra. Marli Teresinha Quartieri, que poderá ser contatada pelo e-mail [mtquartieri@univates.br](mailto:mtquartieri@univates.br) ou pelo telefone (51) 3714-7000 ramal 5517.

Sob essas condições, solicita-se o seu consentimento.

Nome do responsável:

Assinatura:

Data:

Apêndice B – Pontos de referência

GRUPO 1

A)



D)



B)



E)



C)



## Apêndice C – Pontos de referência

## GRUPO 2

A)



D)



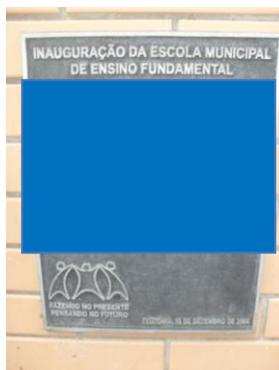
B)



E)



C)



Apêndice D – Pontos de referência

GRUPO 3

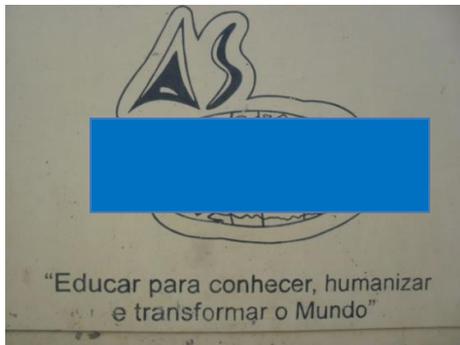
A)



D)



B)



E)



C)



## Apêndice E – Pontos de referência

## GRUPO 4

A)



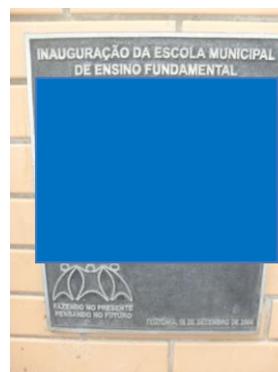
D)



B)



E)



C)

